



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño de situaciones que permitan el desarrollo del Pensamiento Espacial a través de la actividad cognitiva de Construcción para los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson

Marian Hoyos Muñoz

Director

Jorge Enrique Galeano Cano

Santiago de Cali, 2015



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño de situaciones que permitan el desarrollo del Pensamiento Espacial a través de la actividad cognitiva de Construcción para los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson

Marian Hoyos Muñoz
Código: 0625950.

Trabajo de grado para optar el título de LICENCIADA EN EDUCACIÓN BÁSICA
CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS.

Director

Jorge Enrique Galeano Cano



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y concen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

**AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN
DIGITAL DE OBRAS**

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/col/> y que admite conocer.

Si autorizo No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Diseño de situaciones que permitan el desarrollo del Pensamiento Espacial a través de la actividad cognitiva de la construcción para los estudiantes de grado sexto del colegio Jefferson.

Autores:

Nombre: Manon Hoyos Muñoz

Firma: Manon Hoyos M.
C.C. 1130 613865

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha: 13 abril 2016.

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto



ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	DISEÑO DE SITUACIONES QUE PERMITAN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL A TRAVÉS DE LA ACTIVIDAD COGNITIVA DE CONSTRUCCIÓN PARA LOS ESTUDIANTES DEL GRADO SEXTO DEL COLEGIO JEFFERSON					
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	<input checked="" type="checkbox"/>		
Director:	JORGE ENRIQUE GALEANO CANO					
1er Evaluador:	MYRIAM B. VEGA R.					
2do Evaluador:	MÓNICA APONTE					
Fecha y Hora	Año:	2015	Mes:	Octubre	Día:	22 Hora: 4:00 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
MARIAN HOYOS MUÑOZ	0625950	3469

EVALUACIÓN

Aprobado	<input type="checkbox"/>	Meritorio	<input checked="" type="checkbox"/>	Laureado	<input type="checkbox"/>
Aprobado con recomendaciones	<input type="checkbox"/>	No Aprobado	<input type="checkbox"/>	Incompleto	<input type="checkbox"/>

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo	1er Evaluador	2do Evaluador
----------------------	---------------	---------------

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:	Mes:	Día:	Hora:
------	------	------	-------

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por permitirme vivir y dar este paso, a mi familia y a mi novio por su confianza, apoyo, colaboración y compañía.

Al director del trabajo Jorge E. Galeano Cano por su amistad, por su infinita paciencia, por su apoyo, porque siempre los encuentros con él fueron buenas experiencias llenas de enseñanzas y al grupo de investigación.

Contenido

RESUMEN	12
INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO I.....	15
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PRECEDENTES.....	15
1.1.1 Contexto del problema	15
1.1.2 OBJETIVOS	25
1.2.1 Objetivo general.....	25
1.2.2 Objetivos específicos.....	25
CAPÍTULO II	26
ELEMENTOS TEÓRICOS	26
2.1 ANTECEDENTES	26
2.1.1 La Visualización y la Construcción.....	30
2.1.2 Deconstrucción dimensional de las formas en geometría.....	33
2.1.3 Características de las actividades para los cambios de mirada necesarios sobre las figuras.....	35
2.1.3.1 Instrumentos de construcción	36
2.1.3.2 Figuras a considerar en las actividades.....	39
CAPÍTULO III	42
3.1 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA	42
3.1.1 Métodos por los cuales se lleva a cabo el experimento de enseñanza.	42
3.1.1.1 Experimentos de enseñanza	44
3.1.1.2 Planeación y Descripción del Experimento de enseñanza	45
3.1.2 Diseño de las Situaciones y actividades propuestas	46
3.1.2.1 SITUACIÓN 1.....	48
3.1.2.2 SITUACIÓN 2.....	57
3.1.3 Ejecución y puesta a prueba del experimento de enseñanza.....	63
3.1.3.1 Ejecución y aplicación de la Situación 1.	65
3.1.3.1.1 Situación 1 Actividad 1	66
3.1.3.1.2 Situación 1 Actividad 2	71
3.1.3.1.3 Situación 1 Actividad 3	78

3.1.3.1.4 Situación 1 Actividad 4	83
3.1.3.1.5 Situación 1 Actividad 5	89
3.1.3.2 Ejecución y aplicación de la Situación 2	97
3.1.3.2.1 Situación 2 Actividad 1	98
3.1.3.2.2 Situación 2 Actividad 2	102
3.1.3.2.3 Situación 2 Actividad 5	111
CONCLUSIONES	119
BIBLIOGRAFÍA	124
ANEXOS	126

TABLA DE IMÁGENES

IMAGEN 1 ENSAMBLAJE POR YUXTAPOSICIÓN. FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 110).....	39
IMAGEN 2 ENSAMBLAJE POR SUPERPOSICIÓN. FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 111).	40
IMAGEN 3 ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO.....	49
IMAGEN 4 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 2. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA.....	52
IMAGEN 5 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y DOS REGLAS NO GRADUADAS.	54
IMAGEN 6 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 4. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y UNA REGLA NO GRADUADA.	55
IMAGEN 7 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 5. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA REGLA NO GRADUADA Y SUPERFICIE CUALQUIERA.....	57
IMAGEN 8 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO ESTÁNDAR.	59
IMAGEN 9 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO GRADUADA.	60
IMAGEN 10 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO GRADUADA.	63
IMAGEN 11. USO DEL MOLDE IGNORANDO EL ÁNGULO QUE DESCRIBE, Y UTILIZANDO LA INFORMACIÓN DE LA LONGITUD DE LOS LADOS QUE ESTÁ INMERSA EN ÉL.	67
IMAGEN 12. CUADRADO REPRODUCIDO EN EL QUE NO SE EVIDENCIAN CAMBIOS EN LA FIGURA PERO SE CONSERVAN LADOS Y ÁNGULOS EN LA FIGURA REPRODUCIDA.	67
IMAGEN 13. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO.	68
IMAGEN 14. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO NO CONSIDERANDO ÁNGULO INSCRITO EN ÉL.	70
IMAGEN 15. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO NO CONSIDERANDO ÁNGULO INSCRITO EN ÉL NI INFORMACIÓN DE LOS LADOS.....	71
IMAGEN 16. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. USO DE LA PLANTILLA SIN MAYOR DIFICULTAD, USO DEL MOLDE ROTO SUPONE UN RETO.	72
IMAGEN 17 SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA.....	73
IMAGEN 18. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA DE FORMA NO CONSIDERADA.	74
IMAGEN 19. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA DE FORMA NO CONSIDERADA.	75
IMAGEN 20. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON DIFICULTADES EN EL USO DEL MOLDE ROTO.	77
IMAGEN 21. SITUACIÓN 1 - ACTIVIDAD 3. USO DEL MOLDE ROTO Y DOS REGLAS NO GRADUADAS.....	79
IMAGEN 22. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. USO DEL MOLDE ROTO Y REGLAS NO GRADUADAS DE LA FORMA QUE SE CONSIDERÓ.....	80
IMAGEN 23. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO MEDIANTE EL USO DE UNA SOLA REGLA TRASLADANDO SUS VÉRTICES.	81
IMAGEN 24. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO HERRAMIENTAS DADAS TRASLADANDO SUS VÉRTICES.	82
IMAGEN 25. TIPO 1. REPRODUCCIÓN DE TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS DE LA FORMA ESPERADA.	83

IMAGEN 26. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO TRASLADANDO SUS VÉRTICES COMO PRIMER PASO. ..	84
IMAGEN 27. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA USANDO AMBAS HERRAMIENTAS PROLOGANDO LOS LADOS DEL TRIÁNGULO.....	85
IMAGEN 28. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO ÚNICAMENTE EL MOLDE ROTO Y TRANSPORTANDO LONGITUDES.	86
IMAGEN 29. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO EL MOLDE ROTO Y LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES.	87
IMAGEN 30. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO EL MOLDE ROTO Y LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES.	88
IMAGEN 31. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES CON EL DISTRACTOR.	89
IMAGEN 32. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO UN LADO DE LA SUPERFICIE CUALQUIERA COMO REGLA.....	90
IMAGEN 33. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA SUPERFICIE CUALQUIERA DE LA FORMA QUE FUE CONSIDERADA.	91
IMAGEN 34. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES.	92
IMAGEN 35. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES Y LA SUPERFICIE COMO UNA REGLA.	93
IMAGEN 36. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES.	94
IMAGEN 37. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS DE REPRODUCCIÓN.	95
IMAGEN 38. VERIFICACIÓN DEL ÁNGULO CON EL MOLE ROTO EN LA ACTIVIDAD 5.	96
IMAGEN 39. DECONSTRUCCIÓN DE LA FIGURA DADA: DOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES.	99
IMAGEN 40. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS Y HACIENDO UNA DESCOMPOSICIÓN DEL MISMO.	100
IMAGEN 41. TRAZO DE UN ÁNGULO RECTO PARA COPIAR LA ALTURA DEL TRIÁNGULO DADO.	101
IMAGEN 42. DIFICULTADES EN LA ACTIVIDAD 1 DE LA SITUACIÓN 2.....	102
IMAGEN 43. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO SUS DIAGONALES, IGUALDAD DE LADOS Y DE ÁNGULOS.	104
IMAGEN 44. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO SUS DIAGONALES, IGUALDAD DE LADOS Y DE ÁNGULOS.	105
IMAGEN 45. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS ÚNICAMENTE.	106
IMAGEN 46. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO LA ESCUADRA COMO UN MOLDE.	107
IMAGEN 47. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO TRASLADANDO LOS VÉRTICES CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS.....	108
IMAGEN 48. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS. DECONSTRUCCIÓN DE LAS FIGURAS.	109
IMAGEN 49. COMPLEMENTO IMAGEN 48.....	111
IMAGEN 50. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA TRATANDO DE TRASLADAR LOS VÉRTICES.	113
IMAGEN 51. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA COPIANDO LA LONGITUD DE SUS LADOS.	114
IMAGEN 52. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA CONSIDERANDO EL TRIÁNGULO INSCRITO EN LA FIGURA DADA.	115

IMAGEN 53. REPRODUCCIÓN CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS Y EL CENTRO DE LA FIGURA DADA.....	116
IMAGEN 54. REPRODUCCIÓN CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS Y EL CENTRO DE LA FIGURA DADA.....	117
IMAGEN 55. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA	118

TABLA DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1 FUENTE: COLEGIO JEFFERSON	23
ILUSTRACIÓN 2. CLASIFICACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE CONSTRUCCIÓN O DE PRODUCCIÓN DE FORMAS. FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 114).	36
ILUSTRACIÓN 3 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1.....	50
ILUSTRACIÓN 4 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 2.....	51
ILUSTRACIÓN 5 SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 3.....	53
ILUSTRACIÓN 6 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 4.....	55
ILUSTRACIÓN 7 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 5.....	56
ILUSTRACIÓN 8SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1.....	58
ILUSTRACIÓN 9 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2.....	60
ILUSTRACIÓN 10SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 3.....	61
ILUSTRACIÓN 11SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 4.....	62
ILUSTRACIÓN 12SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 5.....	63
ILUSTRACIÓN 13 ORDEN DE LAS IMÁGENES DE LOS VIDEOS USADOS EN EL ANÁLISIS.....	66
ILUSTRACIÓN 14 ORDEN DE LAS IMÁGENES DE LOS VIDEOS USADOS EN EL ANÁLISIS.....	97
ILUSTRACIÓN 15. DECONSTRUCCIÓN.....	110

RESUMEN

Este trabajo es producto de un esfuerzo conjunto por generar una propuesta en la enseñanza de la geometría, apoyada en la teoría semiótica cognitiva de Duval y que es puesta en escena en el contexto de un experimento de enseñanza.

La propuesta hace énfasis en la actividad cognitiva de la construcción, se espera que ayude a los estudiantes a superar los problemas de visualización de figuras en geometría, y con ello se puedan reflejar mejoras en su desempeño.

En este trabajo también se resumen los logros alcanzados mediante un análisis de los resultados obtenidos, esperados o no, que son importantes por la información que arrojan en el estudio de las relaciones entre construcción y visualización en geometría. Contiene tres capítulos en los que se da cuenta de todo el proceso de construcción de la propuesta, sus referentes teóricos, el contexto en el que es puesta en marcha, la descripción de la misma, los resultados obtenidos, el análisis y selección de los mismos que permiten hacer las conclusiones del trabajo.

PALABRAS CLAVES: Construcción, visualización, experimento de enseñanza, geometría, Educación matemática, teoría semiótica cognitiva.

INTRODUCCIÓN

Dada la importancia de la geometría con el mundo que rodea al ser humano y las grandes dificultades que estos tienen en su aprendizaje, se reúnen esfuerzos por realizar el presente trabajo, que tiene como propósito dar origen a una propuesta que se preocupa por el mejoramiento continuo en la enseñanza de las matemáticas en especial la geometría, se identifican criterios para la construcción de nuevos saberes en relación con las actividades cognitivas derivadas de la práctica geométrica.

Dicha propuesta está orientada particularmente al grado sexto del colegio Jefferson y se enfoca en la actividad cognitiva de la construcción, está enmarcada en el contexto de un experimento de enseñanza y se desarrolla al interior del grupo de investigación de la línea de Lenguaje, razonamiento y comunicación de saberes matemáticos del Instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle, adscrito al trabajo de maestría “Propuesta para el diseño de situaciones de aprendizaje que favorezcan la formación del pensamiento espacial mediante las actividades de construcción, visualización y razonamiento al inicio de la educación básica secundaria del colegio Jefferson” de la misma línea.

En el capítulo 1 se presenta la problemática que hay alrededor del aprendizaje de la geometría desplegando el contexto teórico que enmarca el trabajo, el marco de la Educación matemática en Colombia, la teoría cognitiva de Duval, la Educación matemática en particular la de la geometría (dificultades), y concluye con el planteamiento de una problemática particular en la enseñanza de la geometría y unos objetivos orientados a potenciar el pensamiento espacial a través de la actividad cognitiva de Construcción para los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson, como posibilidad de mejorar su aprendizaje.

En el capítulo 2 se presenta la teoría cognitiva de Duval, las características de las actividades que se necesitan para cambiar la forma de ver en geometría las

figuras, y el papel de los instrumentos de construcción. Todo esto con el fin de identificar los elementos que fundamenten la propuesta que se espera refuerce el aprendizaje de los estudiantes mediante la actividad cognitiva de la visualización.

En el capítulo tres se presenta el experimento de enseñanza, su planeación, se describen las fases del mismo, se presentan las situaciones y se hace la descripción de cada una de las actividades que las componen, exponiendo algunos resultados que se esperaban obtener al aplicarlo.

Finalmente, se presentan los resultados obtenidos y el análisis de los mismo basando dicho análisis en la teoría semiótico cognitiva de Duval respecto a la actividad de construcción.

CAPÍTULO I

En este capítulo se despliega el contexto teórico que enmarca el presente trabajo, el marco de la educación matemática en Colombia, la teoría cognitiva de Duval, la educación matemática en particular la de la geometría (dificultades), que concluye con el planteamiento de una problemática particular en la enseñanza de la geometría y unos objetivos orientados a potenciar el Pensamiento Espacial a través de la actividad cognitiva de Construcción para los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PRECEDENTES

1.1.1 Contexto del problema

Desde un panorama general¹, en las dos últimas décadas de historia como nación, la educación básica secundaria y en particular la Educación matemática en Colombia, ha enfrentado distintos problemas de orden académico y curricular en torno a la enseñanza y el aprendizaje, esto impulso en cierta medida la necesidad de reformar y construir una propuesta curricular que fuese capaz de soportar un cambio de ruta para lo que en ese entonces era la educación en Colombia. Estos esfuerzos hoy se resumen en la ley 115 de 1994, una ley que reúne desde distintos puntos de vista una mirada plural, diversa y multicultural sobre la educación en Colombia.

Esta reforma busca dar una directriz clara sobre lo que se espera lograr en el ejercicio de formación, señalando aspectos curriculares como las temáticas, las metodologías, los esquemas evaluativos, entre otros más, integrando la propuesta de un currículo que favorece a la inclusión de elementos que puedan construir

¹ El presente trabajo está sujeto a un trabajo de maestría en educación (énfasis en educación matemática), en el que se aborda de manera mucho más amplia una propuesta para la enseñanza de la geometría desde la teoría cognitiva de Duval en el contexto de un experimento de enseñanza. (Propuesta Para El Diseño De Situaciones De Aprendizaje Que Favorezcan La Formación Del Pensamiento Espacial Mediante Las Actividades De Construcción, Visualización Y Razonamiento Al Inicio De La Educación Básica Secundaria Del Colegio Jefferson). Este trabajo es realizado por el director del presente trabajo y miembro del grupo de investigación.

ambientes de aprendizaje que incluyan nuevas maneras de interactuar con el saber.

La ley 115 de 1994 incorpora dentro del perfil del estudiante (Art. 5, 91 y 92) la capacidad para tomar decisiones que le permitan responder a las demandas y a los cambios que las sociedades modernas imponen, preparándolos para los retos laborales, políticos y sociales que como ciudadanos van a enfrentar en la inevitable búsqueda de mejorar sus condiciones de vida. Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), producto de esta ley, brindan una orientación a docentes, directivos e instituciones en diferentes procesos enmarcados en la construcción de su Proyecto Educativo Institucional (PEI); pieza clave y constitutiva del proceso de formación y rendimiento de los estudiantes.

El Ministerio Nacional de Educación (MEN), procura unas metas y logros en los que surge la figura de *Estándares curriculares* (MEN, 2006), que se espera se logren mediante un diseño curricular el cual se construye con cierta libertad; esta libertad de diseño, es uno de los elementos sobresaliente de esta orientación ministerial, la flexibilidad con la que plantea los mecanismos de búsqueda para la obtención de logros. Se desliga entonces cualquier postura estática en asuntos puntuales como la presentación de contenidos, metodologías o estrategias que se implementen para lograr las metas descritas en la ley (MEN, 1998).

En el caso puntual de la Educación matemática, la estructura curricular fija unas metas básicas y formula estrategias para lograr un acercamiento a ellas. Una mirada al LOGRO de estas metas se puede lograr a partir de los resultados obtenidos mediante la aplicación de pruebas de dos tipos, las primeras -las nacionales- miden el desempeño de los contenidos que conforman el currículo, resaltando componentes específicos que acompañan el perfil del estudiante; situación que se podría traducir en qué tan próximo está el estudiante a las metas propuestas por el currículo en comparación con el desempeño promedio a nivel nacional; las segundas son de orden internacional, las cuales miden el logro y el desempeño de la propuesta curricular del país. Ambas pruebas constituyen una fuente de información sobre la pertinencia del *currículo planteado* por el MEN y la

incidencia del *currículo aprendido* por los estudiantes en el transcurso de su formación.²

Para efecto de este trabajo se consideran las pruebas Nacionales SABER³ 2012 y del grupo de las pruebas internacionales las del *Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes* en adelante (PISA)⁴ del año 2012.

El Ministerio de Educación Nacional a través del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) creó, las pruebas SABER. Estas pruebas tienen como principal objetivo contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación matemática por medio de la realización de evaluaciones que se aplican periódicamente para monitorear el desarrollo de las competencias básicas en los estudiantes de educación básica. Los resultados de estas evaluaciones y el análisis de los factores asociados que inciden en los desempeños de los estudiantes, permiten que los establecimientos educativos, las secretarías de educación, el Ministerio de Educación Nacional y la sociedad en general identifiquen las destrezas, habilidades y valores que los estudiantes colombianos desarrollan durante la trayectoria escolar, independientemente de su procedencia, condiciones sociales, económicas y culturales, con lo cual, se puedan definir planes de mejoramiento en sus respectivos ámbitos de actuación, también asignan un valor cuantitativo al desempeño y a las competencias del estudiante, brindando un escalafón en el que se abre la oportunidad de hablar sobre la calidad

² Lineamientos curriculares (MEN, 1998)

³ Las Pruebas de Estado SABER, son un instrumento estandarizado para la evaluación externa de la calidad de la educación. Forma parte, con otros procesos y acciones, de un conjunto de instrumentos que el Gobierno nacional dispone para evaluar la calidad del servicio público educativo y ejercer su inspección y vigilancia. El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, entidad encargada de ofrecer el servicio de evaluación en todos los niveles de escolaridad, también adelanta investigaciones sobre los factores que inciden en la calidad educativa, para ofrecer información pertinente y oportuna para contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación (ICFES, 2014).

⁴ Las pruebas PISA son un proyecto que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) desarrolla desde finales de la década de los años 1990, con el objetivo de evaluar qué tan bien preparados están los estudiantes de 15 años de edad para enfrentar los retos de la vida adulta. En razón de la cantidad de países que forman parte de este proyecto y de la información detallada que se recoge sobre los sistemas educativos y su funcionamiento, los resultados les sirven a las naciones como una guía para la toma de decisiones y la definición e implementación de políticas públicas. (ICFES, 2012)

de la educación, al mismo tiempo que indica, en qué estado se encuentra el *currículo enseñado* (Espínola, 1990).

Por su parte cada estudio PISA cubre las tres áreas principales de competencia de lectura, matemáticas y ciencias naturales, aunque en cada ocasión revisa una de éstas con mayor profundidad que las otras dos, para esta última aplicación realizada en el año 2012, el énfasis fue en Matemáticas. A diferencia de otros estudios, esta evaluación se concentra en las competencias y no en los contenidos aprendidos en la escuela, situación que llama la atención en consideración de que las competencias son la base de nuestro currículo académico y una pieza transversal en la calidad de vida de las personas.

Hoy en día, PISA es un punto de referencia obligatorio para la investigación y el diseño de políticas educativas, siendo entonces pertinente ver los resultados de ésta, y compararlos con los 65 países que la presentaron.

Los resultados de las pruebas PISA que fueron presentados por el Instituto Colombiano para la evaluación de la educación (ICFES) y son desalentadores, los desempeños de los estudiantes son bajos. En comparación con otros países de América Latina y el resto del mundo, Colombia se ubica como uno de los países con mayor tasa de debilidad en lo que corresponde a competencias básicas de lectura y matemáticas dentro de lo que evalúa PISA.

El puntaje que Colombia alcanzó fue de (376) puntos, siendo inferior a los obtenidos por 61 países y no es estadísticamente diferente de los observados en los países que obtuvieron los tres puntajes más bajos: Catar, Indonesia y Perú, siendo este resultado inferior a los resultados obtenidos en las anteriores pruebas.

En matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 Nivel básico y el 18%, en el nivel 2. Esto quiere decir que solo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. En contraste, apenas 3 de cada mil alcanzaron los niveles 5 y 6. Quienes

están en estos niveles tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados: lo que quiere decir que pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información; aplican conocimientos en contextos poco estandarizados; reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.⁵

Por su parte las pruebas saber arrojan información importante para la elección del grado escolar para el cual se dirige la propuesta, que es el grado sexto del Colegio Jefferson, dado que los resultados obtenidos por los estudiantes del grado quinto son mejores que los obtenidos por el grado noveno, situación que permite plantearse la hipótesis de que algo pasa en el camino que conduce de quinto a noveno grado.

Las evaluaciones nacionales e internacionales brindan criterios que no pueden ser ignorados ni por los investigadores en educación, ni por la comunidad educativa interesada en mejorar continuamente la calidad, ya que las pruebas brindan una posibilidad de análisis en la continua búsqueda de mejoras del currículo.

Dado entonces, el lugar que ocupan y la importancia que tienen las evaluaciones nacionales e internacionales en la construcción del consenso académico para la formulación de los currículos institucionales, es pertinente considerar los resultados obtenidos como un llamado a pensar nuevas formas de enseñar matemáticas, específicamente geometría. Estos bajos desempeños académicos de los estudiantes en las últimas pruebas PISA año 2012, definen un referente para hablar sobre la oportunidad que se abre en la educación y en la investigación, especialmente en las matemáticas, para incorporar nuevos elementos pedagógicos, didácticos, cognitivos, experimentales, socio-culturales, etc., que permitan lograr que la educación Colombiana inicie una época de cambio.

⁵ (ICFES, 2012)

Tal época de cambio da lugar a la propuesta que se presenta en este trabajo y que se fundamenta en la teoría semiótica cognitiva de Raymond Duval (Duval, 2004) quien considera que en la enseñanza de la geometría hay que tener en cuenta aspectos importantes como: que la actividad cognitiva que exige la matemática es más compleja que la de otras áreas del conocimiento (la biología, las ciencias sociales, la química, la educación física, entre otras), las matemáticas y en especial la geometría, contiene particularidades cognitivas que la convierten en un campo de estudio muy exigente a causa de la necesidad de representar ideas, conceptos, principios, etc., que además le sirven al individuo para tener una mejor comprensión del espacio que percibe.

También que la enseñanza de la geometría se hace inevitablemente mediante el uso de figuras y del discurso, relación en la cual se podría caer en el error de pensar que si los estudiantes tienen previamente las propiedades matemáticas de las figuras (definiciones, teoremas, axiomas, etc.) podrán trabajar sobre las figuras, entenderlas y construir ideas sobre ellas, esta infortunada decisión, marca un camino de dificultades para el estudiante, quien es el que por primera vez se relaciona con las ideas matemáticas, a diferencia del maestro quien ya tiene una experiencia y una relación distinta con estas ideas matemáticas.

También se considera en la propuesta que para enseñar geometría es necesario tener en cuenta las actividades cognitivas que de acuerdo con Duval (Duval, 2011) son inherentes a la actividad geométrica, estas son las actividades cognitivas de visualización, construcción y razonamiento (VCR).

Estas tres actividades de orden cognitivo están inmersas en la práctica geométrica de los estudiantes, además están vinculadas como mediadoras en los requerimientos de análisis propuestos en las tareas de geometría.

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que estudia las relaciones del ser humano con el mundo que lo rodea, tomando como primordial el espacio. Estas relaciones se fundamentan en la percepción a través de los sentidos y mediadas por complejos procesos cognitivos que permiten idealizar el mundo en el que viven, al mismo tiempo que se modelan y codifican estas relaciones, lo cual

permite configurar un lenguaje y una red de ideas que fundamentan un escenario posible entre la geometría y las personas, situación que origina conceptos e ideas más complejas que componen los fundamentos de la relación.

Por ejemplo en la arquitectura, la pintura, la astronomía el hombre usa conceptos e ideas del espacio tales como medida, orientación, posición y los aplica a diversos objetos del entorno lo cual les permite entender desde una idea matemática, una relación viva entre las personas y los objetos del espacio.

Estas ideas están fundamentadas en convenciones universales que a lo largo del desarrollo histórico de la humanidad, se han documentado y discutido desde distintas perspectivas y cosmovisiones, convergiendo a un mismo origen, el de “la relación del Hombre con la Naturaleza”.

Es así como el arduo trabajo de la humanidad para darle forma y orden a los conocimientos geométricos, ha ayudado a solucionar problemas de distinto orden, al menos en la escuela secundaria, estos saberes facilitan la comprensión de la demostración y las pruebas, desde la elaboración de conjeturas y la formulación de argumentos, hasta pasar al hecho trascendental dentro de las matemáticas como estructura formal, demostrar.

Esta cuestión abre los argumentos planteados por (Duval, 2001) como un camino lleno de elementos enriquecedores para el trabajo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en la Educación básica secundaria, en dicho camino también se tienen en cuenta las consideraciones de (Salin, 2004) sobre el conocimiento espacial y el conocimiento geométrico, en las que se plantea que los problemas espaciales y los problemas geométricos son diferentes por su naturaleza.

De acuerdo con (Salin, 2004) los problemas espaciales se caracterizan por que su finalidad concierne al espacio sensible y pueden tratar sobre la realización de acciones (fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc...) o comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones. El lenguaje y las representaciones espaciales permiten comunicar informaciones que sustituyen a la percepción además el éxito o el fracaso está determinado para el individuo por la comparación

entre el resultado esperado y el resultado obtenido, mientras que los problemas geométricos son actividades que tienen que ver con el carácter necesario de ciertas propiedades de los objetos de la geometría, en estos se pone en interacción un aspecto matemático con un medio que no es ya el espacio físico y sus objetos, sino un espacio conceptualizado, el de las figuras trazados por un individuo que lo representa. La función de los dibujos es provocar la puesta en relación de proposiciones que se sabe asociar a tal trazado o porción del dibujo, pero la constatación de estas propiedades sobre la figura de un dibujo no permite validar la posición sometida a estudio.

Para llevar a cabo esta propuesta se ha fijado el trabajo con los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson, quienes están ubicados en el municipio de Yumbo-Valle del Cauca, al inicio se mencionó que las pruebas SABER apoyan la elección de este grado escolar, de acuerdo con los resultados de las pruebas SABER 2012 que valoran los niveles de aprendizajes de los estudiantes, identifican el primer grado de la Básica secundaria como un punto crítico en el aprendizaje de las matemáticas en especial de la geometría enseñada durante el bachillerato.

En el caso particular del colegio Jefferson al contrastar los resultados de los grados tercero y quinto, pertenecientes al ciclo de la primaria y los resultados de noveno, pertenecientes a la secundaria (Gráfica 1). Estos resultados del desempeño de los estudiantes en los distintos grados aportan evidencias sobre la hipótesis de que al inicio de la secundaria se necesita dar bases firmes para un cambio en la forma en la que aprenden matemáticas los estudiantes, lo cual posibilita el diseño de una propuesta para la enseñanza de geometría en la escuela.

Gráfica 1. Desempeño de los estudiantes del colegio Jefferson en las pruebas de estado, año 2012

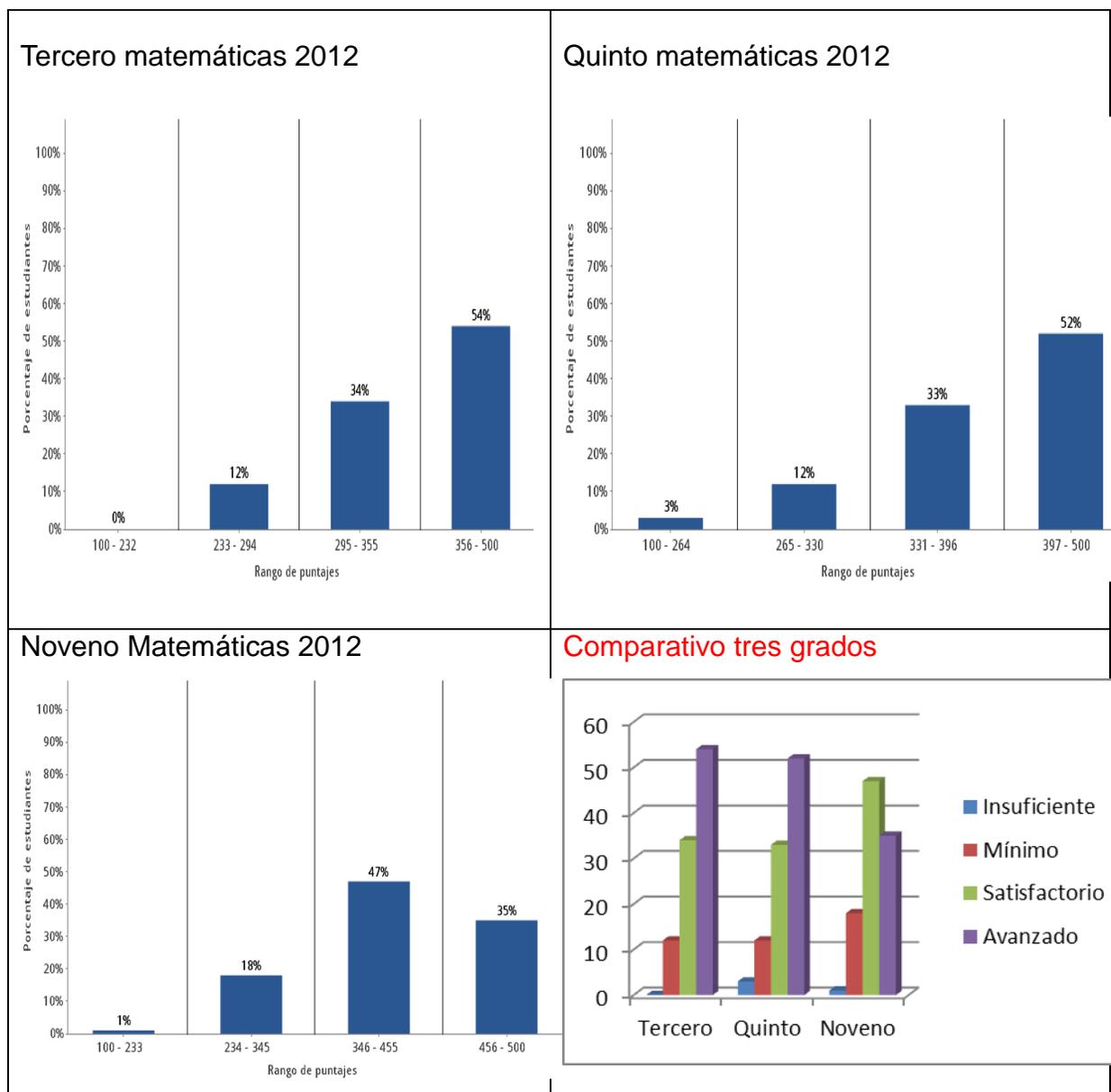


ILUSTRACIÓN 1 FUENTE: COLEGIO JEFFERSON

El caso del colegio Jefferson, aporta una posibilidad de análisis al interior de una comunidad y una institución con características particulares, que se muestran desde su Proyecto Educativo Institucional (PEI) y su desempeño en las evaluaciones estatales, creando así un interés para esta indagación.

El aprendizaje de las matemáticas y a la vez el aprendizaje de la geometría constituyen un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la visualización, la construcción y el razonamiento. La particularidad del aprendizaje en geometría hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes, cuestión que centra nuestro interés en la distinción del objeto matemático y su representación para darle cuerpo a su comprensión (Duval, 2004).

La articulación entre visualización, razonamiento y construcción está en la base de toda actividad geométrica estas actividades cognitivas son diferentes pero están ligadas unas a otras, ya que son necesarias y exigidas en problemas geométricos habitualmente propuestos en contextos de clase; Para efectos de este trabajo se considera la actividad Cognitiva de la Construcción, dado que mediante ella se posibilitan razonamientos y construcciones que en geometría son esenciales para un aprendizaje significativo. Que les permite aprender lo verdaderamente importante en geometría.

En general la propuesta a presentar considerar espera responder a la pregunta:

¿De qué manera la actividad de construcción puede aplicarse en la formulación de una propuesta para el trabajo con figuras bidimensionales en el grado sexto del colegio Jefferson?

1.1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Diseñar situaciones de aula que favorezcan la actividad cognitiva de Construcción en el trabajo con figuras geométricas al inicio de la Educación básica secundaria del colegio Jefferson.

1.2.2 Objetivos específicos

- Caracterizar la actividad cognitiva de construcción en el trabajo con figuras geométricas.
 - Identificar las propiedades de las figuras geométricas y de los instrumentos necesarios para la formulación de una situación de aula que favorezca la actividad cognitiva de construcción.
 - Reconocer los aportes de esta situación propuesta para el trabajo en clase mediante la implementación de un Experimento de Enseñanza en el grado sexto del colegio Jefferson.

En este capítulo se desarrollaron las ideas fundamentales sobre la problemática que hay en un sector en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en particular en la geometría, y se deja por sentado que se hará una propuesta para enseñar geometría haciendo énfasis en las actividades cognitivas que para (Duval, 2000) son inherentes a la geometría: La visualización, la construcción y el razonamiento, pero que para efectos de este trabajo la atención estará concentrada en la construcción.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo se presenta de forma más profunda la teoría cognitiva de Duval, las características de las actividades que se necesitan para cambiar la forma de ver en geometría: las figuras, instrumentos de construcción.

2.1 ANTECEDENTES

En la actualidad, la investigación dirigida al estudio de la semiótica y de los procesos cognitivos asociados al pensamiento humano, han volcado su mirada sobre diversos campos del conocimiento, entre los que sobresalen las matemáticas.

En particular, la geometría se presenta como un espacio de alta exigencia cognitiva y un reto para la Educación matemática, en donde la construcción de conceptos geométricos, tanto de objetos como de relaciones, son el fundamento para el desarrollo del conocimiento geométrico, sobre el que descansa el sentido espacial, y el dominio de un corpus teórico... la actividad de conceptualizar se ha restringido, en ocasiones, al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del concepto o la relación. (Camargo, Samper, & Ileguizamón, 2003)

Duval también considera que la enseñanza de la geometría se hace articulando las figuras con el lenguaje natural pero dicha articulación para nada es natural, en geometría las “figuras” representan “ideas matemáticas” o “propiedades matemáticas” que se presentan en lenguaje natural, pero la percepción de dichas figuras va en contravía de la definición que se hace de las mismas en lenguaje natural ((Duval, 2000).

Es decir, en el registro figural predomina la aprensión perceptiva de unidades en 2D, mientras que en el registro del lenguaje natural usado para definir los objetos representados por las figuras predominan las unidades figurales de 1D o 0D. Por ejemplo al mirar un cuadrilátero hay predominancia de las unidades figurales 2D

por lo que percibimos dicho objeto como un todo (límite cerrado de su contorno) y al definir Cuadrilátero tenemos que *“Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros pueden tener distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales, y la suma de sus ángulos internos siempre da como resultado 360°”* pero el dar una definición y algunos dibujos de cuadriláteros no permite de acuerdo con (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003) un conocimiento genuino ya que por ejemplo si la imagen conceptual que tiene un estudiante de triángulo está restringida solo a triángulos isósceles es probable que tenga la idea de que la altura de cualquier triángulo son segmentos que están siempre al interior del triángulo y que dividen la base en dos segmentos congruentes, y de persistir esta idea el análisis de casos en donde la altura es exterior al triángulo se sale de sus posibilidades de comprensión, por lo tanto al usar una figura para ilustrar una definición resulta ambiguo (Duval, 2000) ya que de acuerdo con (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003) esta forma de presentación ignora que la conceptualización descansa sobre experiencias de construcción, visualización, exploración de propiedades, elaboración de explicaciones y clasificaciones.

Consideraciones que apoyan a Duval quien también considera que es necesario acercar a los estudiantes a las actividades cognitivas de visualización, construcción y razonamiento, considerando lo dicho por (Camargo, Samper, & leguizamón, 2003) cada persona tiene uno o más prototipos de un concepto, los cuales son los primeros que vienen a la mente al momento de enfrentarse a alguna tarea que lo involucre y entre más y mejores experiencias tengan, la imagen conceptual se acerca más al concepto. Además la conceptualización combina procesos cognitivos de visualización con la construcción de una definición asociada a una imagen visual.

Duval (2004) propone una organización para las actividades que se desarrollan en clase, agrupándolas en cuatro categorías de acuerdo al papel que jueguen las figuras y a la manera en la que implícitamente es llevado el estudiante a generar un proceso cognitivo (Duval, 2004); se genera así un panorama que puede ser

considerado como las maneras clásicas de hacer que los estudiantes entren a los contenidos matemáticos.

La clasificación de estas actividades geométricas se hace con base a cuatro criterios, los tres primeros tienen que ver directamente con las figuras; en estos es necesario separar dos procesos cognitivos que habitualmente operan unidos, estos son: la identificación perceptiva de las formas visuales de una “figura” y la identificación interpretativa de los objetos y de las situaciones representadas. El cuarto criterio se relaciona con la manera en la que se necesita o no, la utilización de figuras y la toma en cuenta de las propiedades geométricas representadas o implícitamente manipuladas.

Es entonces de esta manera que al dar una clara caracterización sobre las formas de visualización y las formas en que se trabaja cognitivamente en geometría, Duval presenta la primera entrada clásica al estudio de la geometría en la escuela, la denomina “El Botánico”, la cual consiste principalmente en reconocer perceptivamente las formas elementales usadas en la geometría plana elemental, llevando a que las propiedades geométricas sean características visuales.

Se trata de encontrar diferencias entre formas que representan similitudes (un cuadrado y un rectángulo) (Duval, 2004). Duval aclara que este tipo o clase de reconocimiento perceptivo puede dar lugar a tareas de superposición, de reproducción de un modelo, o de clasificación elemental.

Estas actividades privilegian la modalidad operatoria de la manipulación material, la producción gráfica de una representación o la designación verbal de un objeto o de sus propiedades.

La segunda entrada ha sido llamada por Duval como “El agrimensor geómetra”, en esta entrada se trata de aprender a medir las longitudes sobre un terreno en el suelo, o la distancia entre dos puntos marcados y de trasportarlas sobre un dibujo (Duval, 2004). En los ejercicios propuestos en esta entrada los estudiantes son llevados a trabajar en dos escalas de magnitud, situación que induce a la búsqueda de la correspondencia, que finalmente lleva a los estudiantes a ir constantemente de una escala a otra.

La tercera entrada es denominada “El constructor”, esta tiene por característica la incursión de los instrumentos o herramientas en el trabajo de exploración de los estudiantes. Es decir que vincula a la actividad de exploración con un instrumento o herramienta, que guía el trazo del estudiante. Esta noción le da al estudiante la oportunidad de construir una figura que represente propiedades geométricas.

Cabe entonces enunciar la tesis de Duval (2004), que dice: “... es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas...” (p. 165)

La cuarta entrada es la llamada “El inventor manitas”, aquí se proponen actividades que exigen la capacidad del estudiante para la reconstrucción visual de las formas elementales de una figura, situación que permite obtener la reconfiguración o la figura demandada (Duval, 2000). Estas actividades geométricas pueden ser presentadas en el marco de manipulaciones materiales como en el de las representaciones gráficas.

Esta entrada busca estimular la capacidad del estudiante para la utilización heurística de las figuras, es decir, estimula su capacidad de realizar hallazgos sobre la figura que le permitan deducir un procedimiento de resolución (Duval, 2004), en particular podría decirse que añadir trozos suplementarios a una figura de partida o extender rectas, permiten para algunas construcciones y para algunos problemas con figuras geométricas, identificar propiedades a través de la percepción. Respecto a esta entrada se puede decir que las actividades incluidas en ella proponen una exigencia mayor de análisis a través de la percepción (Duval, 2004).

Estas cuatro entradas clásicas a los procesos cognitivos de las representaciones geométricas definen una perspectiva particular de ver a las figuras, al mismo tiempo, hacen una taxonomía a las maneras de aproximarnos al entendimiento de las propiedades geométricas a través de diversas tareas.

Estos cuatro tipos de actividades son de acuerdo con (Duval, 2004) demasiado heterogéneos para que pueda haber transferencia de uno a otro. Y aun así la organización de la enseñanza se hace casi siempre como si estos tipos de

actividades no fueran tan distintas, y como si pudieran ser organizadas en una progresión por la adquisición de conocimiento. Lo cual interviene en la utilización que se hace de las figuras, en la conciencia de las propiedades geométricas que permiten o no tomar, así como en el tipo de control y de validación que ponen a disposición de los alumnos.

2.1.1 La Visualización y la Construcción

Si se examina de acuerdo con (Duval, 2004) la visualización requerida por los procesos geométricos, entonces hay que centra la atención en la quinta entrada que él propone, en donde la deconstrucción de las formas es protagonista y se espera los estudiantes dejen evidencia de ello mediante la construcción en la actividades propuestas.

La actividad cognitiva de construcción al igual que la Visualización y el razonamiento están estrechamente vinculadas pero pueden ser desarrolladas de forma separada como se mencionó antes, la construcción se relaciona con la visualización porque guía este proceso aun cuando no dependa de la construcción, la construcción estimula a los estudiantes a razonar sobre las propiedades del objeto matemático que está representado mediante la figura geométrica.

La visualización de acuerdo con (Duval, 2004) es la manera de ver las figuras o las representaciones del espacio. Existen dos tipos de visualización en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente, es decir en lo que se Ve se reconocen distintas elementos y objetos estos son:

- La visualización icónica: En esta se percibe sola la forma de la figura, el reconocimiento de las formas está centrado de una figura, todo lo que no esté asociado con las partes del contorno de la figura queda por fuera, se ve la figura como un el dibujo de algo. Esto quiere decir que todas las propiedades que no están directamente ligadas con el contorno característico de una forma quedan fuera. Además las formas aparecen

como estables, es decir no son vistas de una manera que permita transformarlas en otras formas parecidas o diferentes.

- La visualización no icónica: se reconocen las formas en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposibles ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, se ve la figura como algo más que un dibujo, esta forma de ver permite que se piensen las propiedades y los elementos constitutivos de una figura. Esta forma de ver es pertinente para los procesos geométricos.

Por su parte la actividad cognitiva de construcción es vital en la enseñanza de la geometría, se habla de la actividad de construir una figura mediante el uso de herramientas, de acuerdo con (Duval, 2000) la construcción de una figura requiere por lo general la utilización de instrumentos (regla, compás, etc.), también se puede dibujar la figura a mano pero se debe estar en capacidad de construir la misma figura con la ayuda de instrumentos.

La construcción de figuras puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.

La construcción de figuras geométricas permite la construcción significativa de conceptos teniendo en cuenta que para su elaboración se deben aplicar una serie de conocimientos previos inherentes a las características internas, además son un apoyo fundamental en el proceso deductivo que conduce la formalización. (Mesa, 2006).

Respecto a las figuras Duval afirma que *“Es común admitir que las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría. Dejan ver mucho más de lo que los anuncios dicen, permiten explorar, anticipar. Permiten en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración”*.

Las figuras geométricas construidas mediante un proceso lógicamente ordenado y coherente en el que subyacen sus componentes permiten realizar conjeturas, formular hipótesis, la exploración, la reflexión, y sobre la construcción intuitiva de conceptos. (Mesa, 2006)

Por otro lado las figuras geométricas se diferencian de un simple dibujo las figuras geométricas tienen un proceso de construcción mediante la utilización apropiada de los instrumentos apoyada en conceptos y postulados adecuándose a ciertas propiedades que permiten el paso desde la visualización a la justificación. La construcción geométrica tiene por objeto entonces “asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductividad del dibujo, tomando únicamente en cuenta las propiedades fundamentales del mismo por medio de los instrumentos técnicos”⁶ (Mesa, 2006).

El proceso de construcción depende únicamente de las conexiones de las propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas, de ahí la importancia de considerar en cada actividad de construcción las herramientas usadas y las figuras a considerar (ya que las figuras constituyen *el umbral crítico en los primeros aprendizajes de la geometría* Duval (2004)). Referente a esto un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento.

La utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar las propiedades geométricas como limitaciones de construcción. Todo cambio de instrumento entraña un cambio en las propiedades geométricas que deben ser movilizadas de manera explícita. Es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas (Duval, 2005).

En general las figuras geométricas, la actividad de la construcción en donde los instrumentos herramientas juegan un papel vital y los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson son protagonistas de esta propuesta, con lo cual este experimento permite contribuir de algún modo en la enseñanza de la geometría que como ya se dijo supone retos en la Educación matemática.

⁶ Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales MEN 2004 pp 16 17

Este análisis además ayuda a pensar en el papel que juega la figura geométrica en el desarrollo de un proceso de enseñanza, en particular es necesario pensar en la actividad geométrica de construir en torno a la reconfiguración que da la posibilidad de desarrollar habilidades espaciales en el estudiante.

La reconfiguración exige al estudiante identificar una red dimensional en la figura, que permita ir o venir de una dimensión a otra, encontrando relaciones entre dimensiones iniciales como los puntos o las rectas, hasta los planos o contornos cerrados.

2.1.2 Deconstrucción dimensional de las formas en geometría

Duval propone una “quinta entrada” en donde la descomposición de figuras hace que se toque una característica fundamental del funcionamiento cognitivo que es requerido para cualquier proceso geométrico: la articulación entre figuras y discurso (descripción, explicación, definición, deducción...) depende de una *deconstrucción dimensional* de la manera normal de ver las figuras.

La descomposición de figuras se puede hacer de dos maneras de acuerdo con (Duval, 2004):

Primera, la descomposición por división mereológica, que consiste en la partición de una figura en piezas que permiten bien sea una reconstitución o una reconfiguración del tipo puzzle, dichas piezas son unidades figurales del mismo número de dimensión, por ejemplo un triángulo puede ser descompuesto en otros triángulos. Dentro de este tipo de deconstrucción están las que son:

- Estrictamente homogéneas: La descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura que se descompone.
- Las homogéneas: La descomposición se hace en unidades figurales de la misma forma pero diferentes de la forma de la figura que se descompone.
- Las heterogéneas: La descomposición se hace en unidades figurales de formas diferentes.

Segunda, la descomposición por deconstrucción dimensional de las formas, consiste en descomponer una figura en unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de la figura.

Pero la descomposición de una figura no es algo evidente, aun cuando “por el uso del instrumento y del vocabulario empleado para describir o definir las propiedades de las figuras euclidianas de base, la enseñanza de la geometría se organiza como si la deconstrucción dimensional de las figuras fuera, si no natural al menos fácilmente accesible a todos los alumnos.

Y es aquí donde comienzan todos los malentendidos que impiden que se establezca para los alumnos una articulación real entre las figuras y el discurso geométrico (comprensión de las definiciones, utilización de las propiedades), es decir, una comunicación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento” (Duval, 2004) Y es que la descomposición dimensional de las formas es un proceso que va contra todos los procesos de organización y de reconocimiento perceptivo de las formas.

Es decir cuando se percibe una figura predominan las unidades figurales 2D sobre las unidades 1D o 0D, cuando se ve un cuadrado la figura se ve como una todo, no se ven en un primer momento los cuatro lados que lo conforman, y la gran dificultad radica en que esta imagen que se ve en primer momento permanece, y es difícil desprenderse de esta primera significación visual dado que todo lo que se identifica como una unidad normal 2D/2D toma la fuerza de imagen que sirve de referencia para identificar otras figuras.

Por ejemplo “Los lados de un polígono continúan siendo bordes no separables de la superficie que delimitan y considerar las unidades de dimensión inferior que constituyen la figura requiere de un trabajo largo en el que los estudiantes deben ser capaces de operar visualmente la deconstrucción dimensional de las formas, lo cual implica el reconocimiento de las formas 1D o 0D en figuras 2D.

Pero ¿cómo hacer esto posible?

La actividad cognitiva de la construcción mediante las actividades con las herramientas de construcción adecuadas y las figuras geométricas indicadas se

puede hacer que los estudiantes cambien la forma de ver y descomponer las figuras en unidades figurales constitutivas, lo cual posibilita que el estudiante descomponga formas 2D en unidades de rectas.

En la enseñanza de la geometría las construcciones juegan un papel protagónico en la representación y aprensión de las propiedades geométricas, además que incorporan nuevos elementos mediadores, como lo son los instrumentos que apoyan este proceso de construcción y de validación, los instrumentos como se ha mencionado anteriormente, constituyen un potencial para determinar la “validez” o “correspondencia de una figura” en relación con otra o en relación a unas propiedades o condiciones enunciadas.

Esta incorporación abre entonces el espectro sobre las relaciones entre el estudiante y la geometría, considerando el uso de diferentes instrumentos y todo tipo de material manipulativo en los procesos de exploración, que transfiera la idea matemática en distintas actividades geométricas.

2.1.3 Características de las actividades para los cambios de mirada necesarios sobre las figuras

De acuerdo con Duval (2005) el hacer que los estudiantes cambien la forma en la que ven las figuras es un trabajo de varios años, en el cual hay que considerar tipos de actividades que permitan tal cambio.

Habitualmente las actividades de construcción que se presentan en el aula correspondientes a la reproducción o a la construcción se refiere a figuras 1D, y en este tipo de actividades no se le presta suficiente atención a las restricciones de análisis visual que impone cada tipo de instrumento, la reproducción no es un solo tipo de tarea, hay tantos tipos de tareas de reproducción como instrumentos de construcción. *“La variación de los instrumentos es una variable didáctica esencial, que los estudios consagrados al análisis de las figuras no toman en cuenta”* (Bouleau, 2001).

2.1.3.1 Instrumentos de construcción

Así pues una de los componentes importantes que se deberían considerar en las actividades es el instrumento de construcción a usar.

De acuerdo con Duval (2010) en una actividad de reproducción puede ser radicalmente diferente (tanto desde un punto de vista cognitivo como desde un punto de vista geométrico) según el tipo de instrumentos que se den para reproducir una figura.

Se pueden distinguir por lo menos tres tipos: Los de software de construcción (no considerados), los que permiten manipulaciones materiales, los que permiten un trazado gráfico.

Los instrumentos de construcción que permiten manipulaciones materiales, permiten voltear, ajustar, ensamblar piezas de acuerdo a la organización del espacio en función de los gestos y orientación del cuerpo, operaciones que no son posibles con los instrumentos que permiten un trazado gráfico que está en función de los gestos únicamente técnicos, es decir que son determinados por las posibilidades productivas de un instrumento. (Duval, 2005)

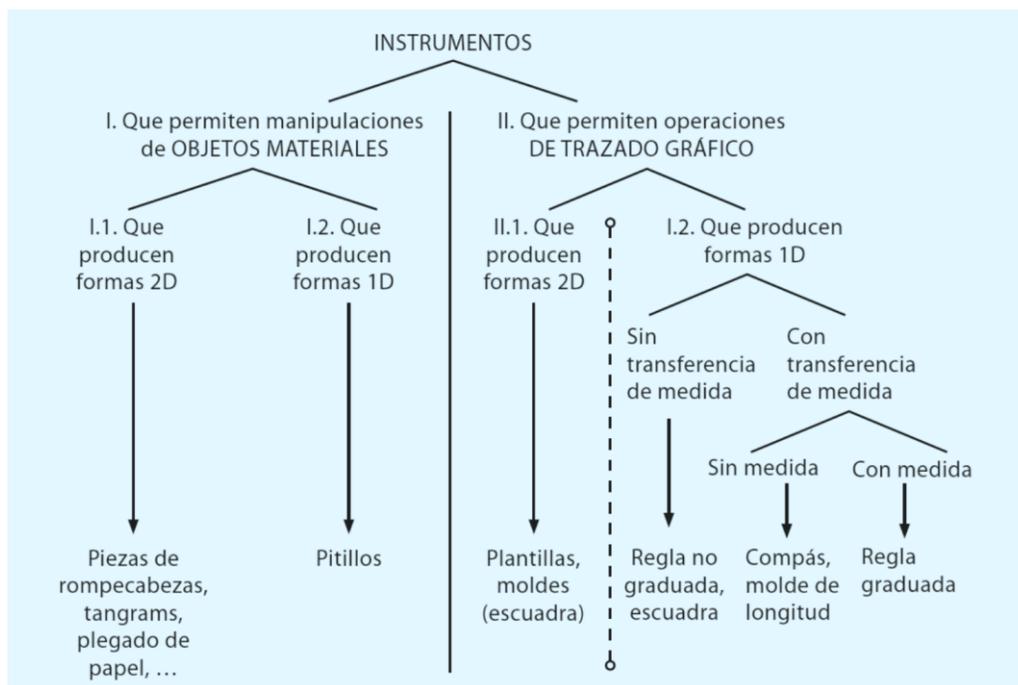


ILUSTRACIÓN 2. CLASIFICACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE CONSTRUCCIÓN O DE PRODUCCIÓN DE FORMAS.
FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 114).

Hay considerar también que la deconstrucción dimensional de las formas no puede ser evidentemente efectuada en el marco de las actividades manuales. Pues las manipulaciones implican la conservación del número dimensional del material, lo que imposibilita la deconstrucción de una figura en unidades figurales constitutivas, por tanto han de considerarse los instrumentos que permitan un trazado gráfico dado que permite al estudiante ver como la deconstrucción de una figura lo acerca a la definición de la misma, además el trazado gráfico permite identificar las unidades constitutivas de la figura.

Duval (2004) propone el trabajo de reproducción de figuras con instrumentos no estándar, este ejercicio es propuesto en el marco de la reproducción de figuras 2D (cuadrado y triángulo) con el fin de que los estudiantes en el ejercicio de construcción vean una composición entre dimensiones de una figura, es decir, poder ver que en la construcción de una figura 2D se va de 1D a 2D, en el caso de las figuras propuestas por Duval (2004) “cuadrado y rectángulo” muestran un escenario en el que buscan reproducir e ir comprendiendo la compleja “red de rectas” que componen el cuadrado o la “red de puntos” que contiene el triángulo.

Así mismo esta experiencia está condicionada por instrumentos y propiedades geométricas que imponen un proceso y dan lugar a la reproducción y la construcción, un momento indispensable en el estudio de las propiedades geométricas.

De esta manera, es que desde la perspectiva del instrumento, es posible un análisis dimensional, generando una relación de dominancia entre la percepción y el análisis geométrico.

De forma general y haciendo referencia a los instrumentos que permiten operaciones de trazado gráfico (Ilustración 2) y que son usados en las Situaciones propuestas se hace una caracterización general de ellos.

Tanto el molde roto, la plantilla y la escuadra, conservan la prioridad perceptiva 2D y permite el trazo de unidades figurales 2D. En algún momento de una de las actividades el estudiante al usar algunos de estos instrumentos debe interrumpir la continuidad del trazo, con lo cual el estudiante estará obligado a completar la

figura considerando cómo continuar tal trazo. Por su parte, la regla no graduadas y la escuadra, producen formas 1D y no tienen marca alguna sobre ellas, es decir no tienen unidades numéricas en ellas y es de esperarse que en algún momento los estudiantes las hagan informativas, es decir que sobre ellas hagan marcas que le permitan copiar una magnitud. Como se puede observar la escuadra permite el trazo tanto de formas 2D como 1D y dependerá del contexto de la actividad como el estudiante decida usarla.

En las actividades de Construcción Duval propone las tareas de reproducción de dibujos con instrumentos no estándar por su influencia no convencional, sin medida informativa, de tal forma el diseño de los instrumentos participa protagónicamente para posibilitar el trabajo dimensional, pues Duval (2005) encuentra en los moldes rotos⁷, segmentos rectos o superficies irregulares, el soporte para una nueva forma de ver las figuras y el instrumento de construcción en relación a estudiarlas figuras desde sus principios constitutivos, además cada instrumento impone unas restricciones específicas para el análisis visual (Duval, 2005), generalizando que existen tantas actividades como instrumentos estándar o no estándar para usar.

Es entonces necesario decir que, para contribuir a una propuesta que lleve a potenciar en los estudiantes los procesos cognitivos relacionados con la construcción, es pertinente la propuesta de Duval sobre las tareas de reproducción con instrumentos no convencionales, pues gracias a la utilización de moldes rotos, reglas no informativas y superficies cualesquiera, el estudiante pasa de una visión perceptiva 2D a una visión 1D, que se necesita para la identificación de propiedades geométricas, orientando a concluir que en la rigurosidad de la selección del instrumento, combinado con la selección de la figura, se crea la

⁷⁷⁷ Duval (2005) propone un molde roto para la reproducción de un cuadrado, este molde roto contiene dos propiedades del cuadrado, dos de sus ángulos rectos y uno de sus cuatro lados, y es a través de estas dos propiedades que Duval permite ver la red dimensional anteriormente comentada.

situación que llevará a los estudiantes a esta deconstrucción dimensional más fácilmente.

2.1.3.2 Figuras a considerar en las actividades

Las figuras propuestas deben ser ensamblajes de formas y no solamente una figura usual, estos ensamblajes de formas pueden hacerse por yuxtaposición o por superposición, los ensamblajes deben respetar alineamientos, ya que el respeto de los alineamientos es importante para favorecer la actividad de prolongación de los trazados que es esencial para aprender a pasar de las superficies a las líneas en el análisis de las figuras. Pero para efectos de este trabajo no se considera este tipo de figuras, se usan figuras que representan objetos geométricos simples: cuadrado, triángulo, cometa, etc. Esto porque el grupo de estudiantes con los que se realizó el experimento de enseñanza tienen entre 10 y 12 años y se están iniciando en actividades de este tipo.

Este primer encuentro con este tipo de actividades este enfocado en el uso de instrumentos de construcción no convencionales en una secuencia de actividades de reproducción, organizada en función de la variación de instrumentos dado que esto podría conducirlos a cambiar progresivamente su mirada sobre las figuras que producen (Duval, 2005).

A saber hay dos tipos de ensamblaje figurales de formas 2D: Ensamblaje por yuxtaposición: Tantas formas como contornos cerrados hay:

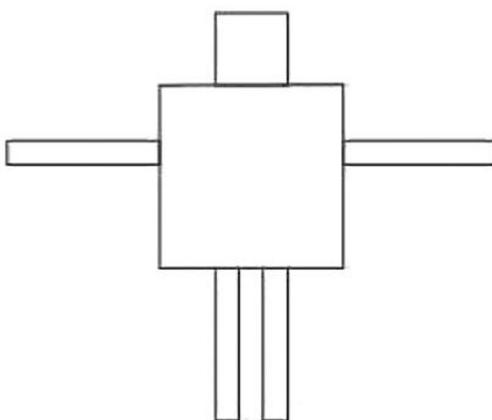


IMAGEN 1 ENSAMBLAJE POR YUXTAPOSICIÓN. FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 110).

Ensamblaje por superposición: Menos formas que contornos cerrados hay. En un ensamblaje por superposición hay una reducción importante de las formas efectivamente reconocidas. Este tipo de ensamblaje privilegia visualmente la prolongación de los trazados reconocidos como pertenecientes a una forma y no a otra. Esta actividad de prolongación de los trazos juega un papel esencial en el paso de 2D a 1D.

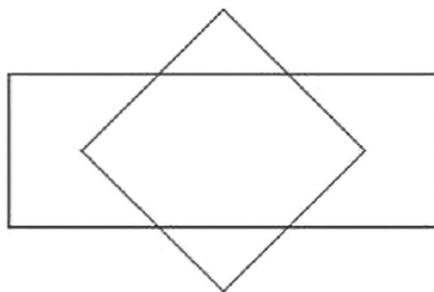


IMAGEN 2 ENSAMBLAJE POR SUPERPOSICIÓN. FUENTE: (DUVAL, 2005, PÁGINA 111).

Pero las figuras se pueden ver de ambas formas como ensamblajes por yuxtaposición o superposición, el pasar de una a otra forma de verlo también supone un reto para el estudiante.

Es entonces como desde la perspectiva propuesta por Duval, es posible estructurar una propuesta en la que estén contenidas estas variantes de diseño y de implementación.

Teniendo en cuenta que el aprendizaje en geometría se privilegia como un campo de estudio para las actividades cognitivas y estas a su vez requieran de la utilización de sistemas de expresión y representación distintos al del lenguaje natural, se hace necesario poner en correspondencia un sistema de representación semiótico como el estudio de las producciones constituidas por el empleo de signos. Estos sistemas semióticos permiten el cumplimiento de tres actividades inseparables en toda representación, estas actividades tendrán la función de dar nombre a las cosas, el de poder transformar las representaciones y el convertir representaciones en otro sistema de representación.

Cabe decir que la función del lenguaje no consistirá en poner palabras y registrar lo que se piensa y experimenta al respecto de una situación en particular, para

nuestro caso los experimentos de enseñanza, si no de poner en proposiciones permitiendo construir el pensamiento sobre los objetos geométricos.

En el espacio del análisis del discurso no se articulará nada alrededor de las palabras si no en el sentido de las proposiciones ya que estas son las que enmarcarán la correspondencia con la figura.

El razonamiento entonces, representará la organización de proposiciones que se orienta hacia un enunciado-objetivo con el fin de modificar valores epistémicos realizados por medio de actividades cognitivas necesarias para la argumentación y la demostración en matemáticas.

CAPÍTULO III

3.1 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En este capítulo se presenta el experimento de enseñanza, su planeación, se describen las fases del mismo, se presentan las situaciones que componen el experimento de enseñanza y se hace la descripción de cada una de las actividades que las componen, exponiendo algunos resultados que se esperaban obtener al aplicarlo. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos y el análisis de los mismo basando dicho análisis en la teoría semiótico cognitiva de Duval respecto a la actividad de construcción.

3.1.1 Métodos por los cuales se lleva a cabo el experimento de enseñanza.

El presente trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de formación en Lenguaje, razonamiento y comunicación del área de Educación matemática y se asocia a dos trabajos más del pregrado en las licenciaturas en matemáticas⁸, al mismo tiempo que se relaciona con un trabajo de maestría, todos interesados en un problema común: las actividades cognitivas en geometría; este problema ha llevado a distintas posibilidades de abordar un reconocimiento a las representaciones y a las actividades cognitivas señaladas por Duval (VCR). Este proyecto espera aportar en la búsqueda constante de mejorar en la enseñanza de las matemáticas en especial de la geometría.

Esta investigación tiene como fin una descripción de situaciones en función de la actividad cognitiva de la Construcción, con el propósito de que los estudiantes de grado sexto del colegio Jefferson, a partir de situaciones dirigidas y previamente diseñadas por el equipo de investigación de la línea de la línea de formación logren apropiar saberes matemáticos de geometría. A través del análisis cualitativo se buscar ampliar la mirada a las situaciones de clase, extrayendo

⁸ Los Procesos De Construcción, Visualización Y Razonamiento En El Desarrollo Del Pensamiento Geométrico: Un Experimento De Enseñanza, Bonelo y Bahamón (2015). Y Los Procesos De Construcción, Visualización Y Razonamiento En El Desarrollo Del Pensamiento Geométrico: Análisis De Un Texto Escolar, Bustamante y Giraldo (2015).

información con base a la observación, lo cual implica un análisis cognitivo y social de las relaciones entre los estudiantes y sus procesos cognitivos; estas relaciones se tejen en el contexto de un experimento de enseñanza, lo cual permite emplear diferentes constructos teóricos que servirán de insumo para analizar un conjunto de datos, será pues a través de la observación, la comprensión a partir de los errores y limitaciones de los estudiantes que se tendrán en cuenta los datos a analizar.

La investigación cualitativa facilita el acompañamiento de una sistematización de las situaciones planeadas, puesto que en el experimento de enseñanza el análisis es todo el tiempo, la información que día a día se vaya recopilando permitirá orientar de forma más fina y concreta el análisis.

El aula de clases como escenario en este proceso continuo demarca tareas puntuales en las fases de la experimentación. Para ello y frente a lo que la investigación cualitativa demanda y a la ejecución de un experimento de enseñanza, se establecen en el equipo de investigación intereses particulares que darán directriz y el establecimiento de un marco interpretativo emergente, el cual dará pautas en las decisiones de vital importancia que se ciñen a la actividad social en el desarrollo de las situaciones.

Enfocar las situaciones diseñadas en el contexto de un experimento de enseñanza que pueda favorecer a priori nuestro interés de saber cómo crear actividades, tareas, ejemplos significativas en el aprendizaje de la geometría, y que a su vez puedan darnos cuenta de cómo convertir elementos teóricos en situaciones de clase, dará el espacio para poder tener una perspectiva social y de cómo se expresan en lo individual y así a partir de lo experimentado integrar el propósito de no definir solamente a donde se quiere llegar sino por donde se debe ir.

Para la caracterización de la actividad cognitiva de la construcción, el grupo condujo el experimento de enseñanza en un mismo periodo académico, con el propósito de afianzar los conocimientos matemáticos de los estudiantes en un dominio específico como es el de la geometría. Este experimento de enseñanza desarrolla una situación dirigida, en primera instancia, por elementos que

componen la actividad geométrica, es decir, las relaciones espaciales que están presentes y serán experimentadas por el estudiante a través de la situación. Una segunda instancia que delimita la situación, es todo lo que subyace a la actividad cognitiva de la construcción que inevitablemente está asociada con la actividad cognitiva de la visualización del estudiante.

3.1.1.1 Experimentos de enseñanza

La presente propuesta, como experimento de enseñanza, se compone de tres niveles dentro del ciclo de diseño. El primer nivel se denomina “fase de indagación y diseño”, llamado también “micro nivel”, en este nivel se plantean múltiples ideas y propuestas de ejercicios, tareas o problemas que darán forma a una situación dirigida y acotada por un dominio teórico específico, esta planeación tiene como fin crear una situación que reúna elementos que le permitan al estudiante una aproximación a un saber en particular.

El segundo nivel es llamado “fase de desarrollo”, en esta fase, la situación dirigida diseñada por el grupo de investigadores es llevada al colegio Jefferson y aplicada al grado sexto de básica secundaria; el grupo de investigación ha seleccionado este curso en particular, porque el profesor de geometría del grado sexto del colegio Jefferson es miembro del grupo de investigadores, cuestión que facilita el ingreso de los investigadores a la institución, el ingreso de cámaras a las aulas de clase y el manejo con el grupo durante la realización de las fases de este experimento, además es el autor del proyecto de maestría asociado a este proyecto; es fundamental para los diseños de experimentos de enseñanza, contar con la cooperación del profesor encargado del proceso de formación de dicho curso, pues él es la persona más cercana a los estudiantes en sus fortalezas y debilidades cognitivas, además de conocer otras aptitudes y actitudes en el contexto de la clase de geometría.

Es importante entonces mencionar que dentro del Experimento de Enseñanza, la fase 1 y 2, componen un esquema circular, lo cual da lugar a un espacio para ajustes y para la retroalimentación del Experimento de Enseñanza, cada uno de estos ajustes, vendrá de la mano de nueva información sobre el grupo. El

experimento de enseñanza, tiene como tercera y última fase, la fase que consta del análisis retrospectivo en el cual se estudia la información acumulada en cada una de las retroalimentaciones elaboradas durante la aplicación del experimento. Esta fase, será abordada en el proyecto de maestría al cual se articula este trabajo.

3.1.1.2 Planeación y Descripción del Experimento de enseñanza

Los elementos teóricos que orientan el diseño de las situaciones, son los propuestos por Duval (2000, 2004, 2005) quien ha identificado rasgos generales de la semiosis y del pensamiento humano, lo cual permite considerar la educación matemática desde otra perspectiva, en particular en la enseñanza de la geometría.

De igual manera, se tomaron todas las discusiones de Duval alrededor de la actividad cognitiva de la construcción, para posteriormente seleccionar una serie de situaciones que conduzcan al estudiante a un manejo de conceptos y procedimientos dentro de su quehacer geométrico, logrando así proponer una actividad en el primer ciclo de la Educación básica secundaria.

Una vez se logró caracterizar la actividad cognitiva de la construcción y se tuvieron filtrados los elementos claves de la teoría de Duval, se realizó la aplicación de las situaciones con los estudiantes de primer ciclo de Educación básica secundaria del colegio Jefferson, situación que se vinculó al trabajo de investigación de la línea de lenguaje y razonamiento.

En esta fase del experimento de enseñanza, se realizó una visita periódica al grado sexto del colegio Jefferson, se hicieron reuniones para explicar a los estudiantes en que consta el experimento de diseño, se les entregaron las fichas que contienen las “tareas”, se tomó registro fílmico y se realizaron algunas entrevistas seleccionadas por el grupo de investigación que orientaron el experimento.

Esta segunda parte finaliza al tomar la mayor cantidad de información de cada una de las visitas planificadas y da paso a la discusión del grupo de investigación para que estudie lo ocurrido en la visita, en aspectos críticos y puntuales, momento en el que se toman nuevas decisiones en la reformulación de la “tarea” presentada.

De esta manera se reinicia la primera fase del experimento, pero con un elemento nuevo, el cual es, la retroalimentación de la primera visita realizada.

De este modo es que a través de la metodología cualitativa, se espera contribuir con información que ayude avanzar a la investigación del aprendizaje de las matemáticas, a enfrentar sus problemas y a generar opciones para mejorar cada vez más.

Finalmente, los aportes que esta investigación puede llegar a ofrecer a la Educación matemática se centran en un aporte para mejorar el desempeño en geometría de los estudiantes, tanto en su vida cotidiana como en los contextos académicos en los que comparte y se interrelaciona.

Primer momento: Planeación del experimento de enseñanza

Se identifican los criterios que se tienen en cuenta para el diseño de las situaciones y se diseñan, seguidamente se proponen a los estudiantes del seminario de comunicación de saberes matemáticos II – 405112-M y con los resultados obtenidos se hacen correcciones en las actividades que se proponen a los estudiantes del grado sexto del colegio Jefferson, dentro de las correcciones están las de forma, se mejora las líneas de los lados de las figuras porque son muy anchas y generan ruido en las situaciones, se quitan algunos distractores que están en las actividades, esta experiencia también permite conjeturar los resultados que son posibles obtener y las dificultades que se pueden presentar.

Segundo momento: Ejecución y puesta a prueba del Experimento

Se proponen las situaciones diseñadas a los estudiantes del curso de geometría del grado sexto del colegio Jefferson, se recolectó la información necesaria por medio de videos, y con esta información se realizó el análisis que se espera contribuya a mejorar el trabajo en clase de geometría.

3.1.2 Diseño de las Situaciones y actividades propuestas

Para el diseño de las situaciones de aula se consideran las figuras geométricas elementales (triángulo, cuadrado) se toma esta decisión porque este tipo de actividades se presenta por primera vez a los estudiantes del grado sexto del

colegio Jefferson, y se considera como vital que los estudiantes en un primer momento experimenten la reproducción de figuras con diversos instrumentos de construcción diferentes a los convencionales, con el fin de que se aproximen a la descomposición de figuras y por tanto logren cambiar la forma de ver las figuras en geometría.

Las actividades se constituyen por los instrumentos utilizados que son o no independientes de la figura que se pide reproducir, determinan la forma en la que se reproduce tal figura y gobiernan la manera de mirar; las actividades varían de acuerdo a el número de instrumentos entregados puesto que el uso de un instrumento 2D con un solo borde rectilíneo puede contener información (trazos rectilíneos que se hacen sobre el instrumento para hacer transferencia de longitud, ángulo o dirección).

Las actividades propuestas son diez en total, las primeras cinco constituyen la Situación 1 y las demás la Situación 2.

En las actividades de la situación 1 se propone la reproducción de un triángulo escaleno, y los instrumentos que se entregan varían en cada actividad; dicha variación se hace de forma progresiva, es decir se espera que con el paso de cada actividad el estudiante cada vez esté más familiarizado con los instrumentos de reproducción no estandarizados y más próximos a un cambio en la forma de ver la figura en geometría. En estas actividades los instrumentos de reproducción tienen relación directa con el contorno de la figura, se espera que de forma paulatina el estudiante empiece a dejar de ver la figura únicamente en relación al contorno.

En las actividades de la Situación 1 se propone el uso de los mismos instrumentos en ellas, a saber: la escuadra y una regla no graduada y varían las figuras geométricas de actividad en actividad, cada vez la figura representa un desafío mayor para los estudiantes; en este tipo de actividades los instrumentos no tienen relación directa con el contorno de la figura, es decir no describen parte de él, con lo que se espera los estudiantes estén obligados a encontrar criterios en su reproducción que aseguren la igualdad de su figura con la propuesta.

3.1.2.1 SITUACIÓN 1

La situación 1 consta de cinco actividades de reproducción de una figura geométrica. En la primera actividad la figura a reproducir es un cuadrado, de la segunda a la quinta se usa la misma figura geométrica: un triángulo escaleno. Cuando se hace referencia a la tarea de reproducir una figura simple se entiende por ello lo dicho por Duval (2004): trazar el contorno cerrado de la forma simple, el instrumento sirve para guiar el lápiz.

Los instrumentos de construcción varían en cada actividad en la forma que se denominó anteriormente progresiva, unos producen formas 1D otros formas 2D razón por la cual las actividades son diferentes, en esta situación se espera que con las primeras dos actividades los estudiantes hagan la reproducción usando instrumentos que producen formas 2D y que seguidamente complementen el uso de dichos instrumentos con los que producen formas 1D, para que las formas 1D no permanezcan ciegas frente al estudiante, es decir para que puedan ver elementos en la figura aún cuando estos no pertenezcan a su contorno.

En este grupo de actividades se espera poner en evidencia una variable que es el uso de diferentes instrumentos; Los tipos de instrumentos usados son moldes, plantillas, reglas no graduadas y una superficie. Todas estas herramientas permiten operaciones de trazado gráfico; las plantillas y los moldes producen formas 2D es decir conservan la prioridad perceptiva 2D, son usados por superposición y por lo tanto por aproximación perceptiva; las reglas no graduadas producen formas 1D y no permiten la transferencia de medidas, los estudiantes al usarlas pueden hacerlas informativas.

Si los alumnos no han tomado conciencia del cambio de mirada implicada por el paso de las formas 2D a las formas 1D, buscarán utilizar los instrumentos de construcción como si se tratara de moldes que son usados por superposición y por lo tanto por aproximación perceptiva, cuestión que se espera los estudiantes superen.

En la Actividad 1 la figura que se propone reproducir es un cuadrado y el instrumento a usar es un molde roto. El molde roto es un instrumento de

construcción pensado para la reproducción del cuadrado, este molde describe los ángulos rectos del cuadrado además permite el trazo de los lados del cuadrado dado; existe una relación de 2:1 entre los lados del cuadrado dado con el lado más largo del molde roto, tiene un distractor en uno de sus lados con el fin de incitar a los estudiantes a usar el ángulo inscrito en él.

Este molde conserva la prioridad perceptiva 2D y permite el trazo del contorno cerrado del cuadrado, el estudiante en la construcción mediante el uso del molde considera los ángulos y los cuatro lados que lo constituyen; el molde roto obliga a interrumpir la continuidad del trazo que describe el contorno de la figura, pero aun así no interrumpe su construcción ya que los estudiantes pueden hacer marcas en la hoja para guiar el trazo, se espera los estudiantes puedan identificar los elementos constitutivos de la figura dada (ángulos, lados).

En esta actividad se espera que los estudiantes usen el molde en la construcción del cuadrado, trazando el contorno de tal forma que consideren el ángulo recto inscrito en el molde roto y que tengan en cuenta que la longitud de un lado del molde es dos veces el lado del cuadrado dado.

En esta actividad la figura geométrica y el instrumento de construcción no supera la barrera de la visualización icónica, dado que para trazar el contorno de esta figura no es necesario que el estudiante prolongue líneas o a la construcción de nuevas líneas.

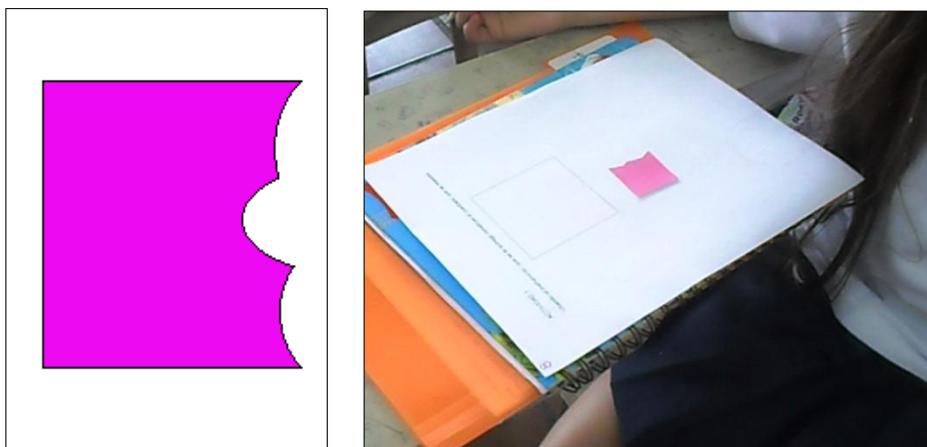


IMAGEN 3 ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO.

ACTIVIDAD 1

Usando el instrumento que se te entregó construye el cuadrado que se muestra:

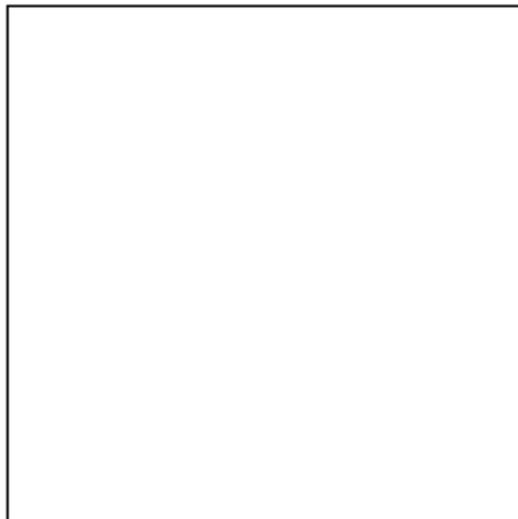


ILUSTRACIÓN 3 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1

En la Actividad 2 la figura geométrica a reproducir es un triángulo escaleno, se le dan dos instrumentos de construcción: el molde roto y una plantilla rota, se espera que los estudiantes usen ambos instrumentos en la construcción.

El molde roto del triángulo es un instrumento de construcción que permite el trazo de la parte superior del triángulo (ángulos izquierdos del triángulo y parte de sus lados); por su parte, la plantilla rota le permite al estudiante trazar el ángulo derecho del triángulo y la parte que completa los lados del mismo.

Ambos instrumentos de construcción se inscriben en la concepción del contorno cerrado de una figura 2D, pero ninguno de los dos posee la información completa para lograr la reproducción exitosa del triángulo dado, por lo que el molde roto obliga a interrumpir la continuidad del trazo del contorno cerrado de la figura, para completarlo debe usar la plantilla rota; esto funciona del mismo modo si el estudiante decide usar primero la plantilla rota.

En resumen, obligar al estudiante a usar dos instrumentos para la construcción del contorno cerrado del triángulo, y el paso del uso de uno a otro instrumento, interrumpe el trazo continuo, con lo que se espera pueda entender que el triángulo

se conforma por tres ángulos y tres lados; es decir, que pueda identificar los elementos constitutivos del triángulo, o puedan conjeturar de forma elaborada las propiedades del triángulo, ya que todo esto permite que se haga una deconstrucción dimensional del mismo al tener que alinear los lados que describen los instrumentos para poder completar el triángulo, lo cual es algo previo para el reconocimiento de las formas.

La actividad fracciona el triángulo, lo que obliga al estudiante a usar ambos instrumentos, por lo cual se posibilita el reconocimiento de los elementos constitutivos del triángulo. Se espera que los estudiantes puedan reproducir el triángulo dado con los instrumentos que se le entregaron, que reconozcan que el molde y la plantilla describen de forma idéntica los ángulos y lados del triángulo que se les pide reconstruir.

En esta actividad los estudiantes están, en relación con la actividad 1, frente a un reto mayor, ya que el uso de los instrumentos de forma conjunta es lo que les permitirá realizar la construcción del triángulo dado; aun así la barrera de la visualización icónica permanece, por las mismas razones de la actividad 1.

ACTIVIDAD 2

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

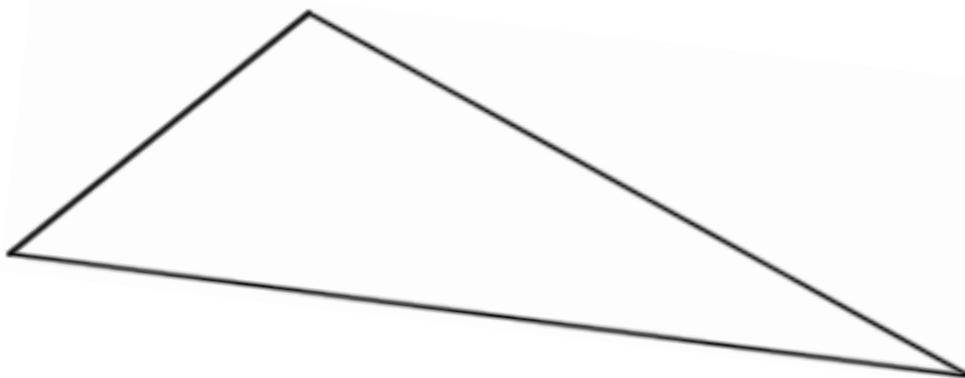


ILUSTRACIÓN 4 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 2

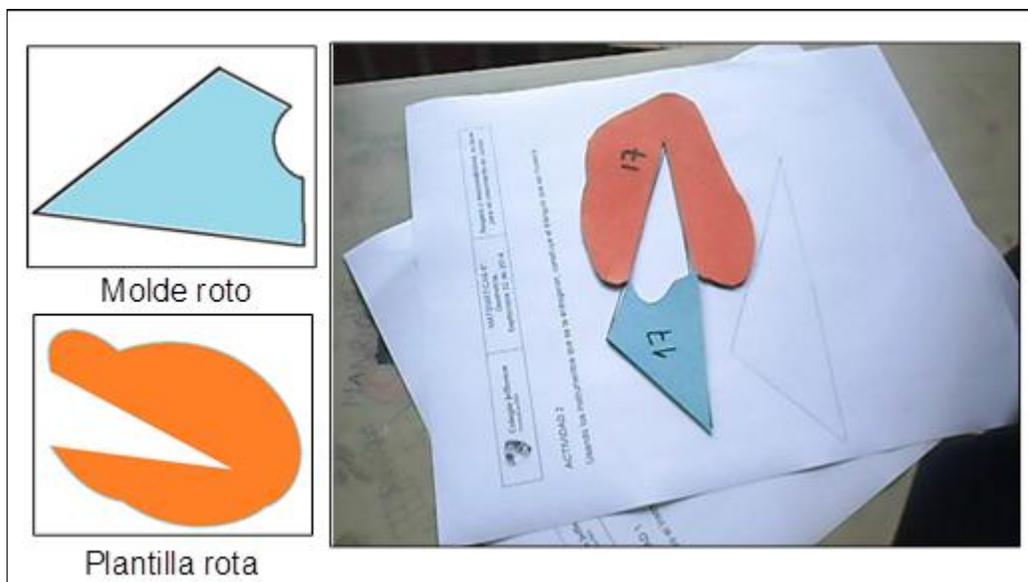


IMAGEN 4 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 2. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA.

En la Actividad 3 la figura geométrica a reproducir es un triángulo, se les da tres instrumentos de construcción: el molde roto que permite el trazo de la parte superior del triángulo (ángulos izquierdos del triángulo y parte de sus lados) y dos reglas no graduadas (sin números que permiten trazos rectos) no informativas que permiten completar el triángulo.

El uso del molde roto lleva a un trazo incompleto del contorno de la figura (igual que en la actividad anterior), pero para completarlo hay que utilizar las dos reglas no informativas en lugar de la plantilla (la plantilla, de prioridad perceptiva dominante 2D, es sustituida por reglas no graduadas de percepción 1D, con lo cual los estudiantes podrían identificar mejor los elementos constitutivos del triángulo). Se hace necesaria la superposición de las reglas para construir el triángulo, tarea que de acuerdo con Duval (2004) prepara la capacidad de prolongar una línea (tarea que será necesaria en las siguientes actividades).

Se espera que los estudiantes logren usar la totalidad de los instrumentos otorgados para realizar la construcción y que de forma consciente hagan los trazos usando la información completa del molde roto y completar lo que falta del triángulo con las dos reglas. El uso de estos instrumentos permite una deconstrucción dimensional al mostrar como una parte constitutiva del triángulo

escaleno en esta actividad puede ser construida mediante el uso de un par de rectas 1D (esto en relación con el ángulo que antes se construía con la plantilla rota), es decir, se superponen las reglas no graduadas de tal forma que reconstruyen la plantilla.

En esta tarea se intenta que el estudiante adquiera como estrategia la deconstrucción dimensional, una estrategia cognitivamente compleja (Duval, 2005). Es un primer paso de la visualización icónica a la visualización no icónica, porque aunque en esta actividad no se les saca a los estudiantes de la construcción del contorno de la figura, se introduce la operación de prolongación de un trazado y así se rompe la unidad de contorno y la unidad visual del borde.

ACTIVIDAD 3

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

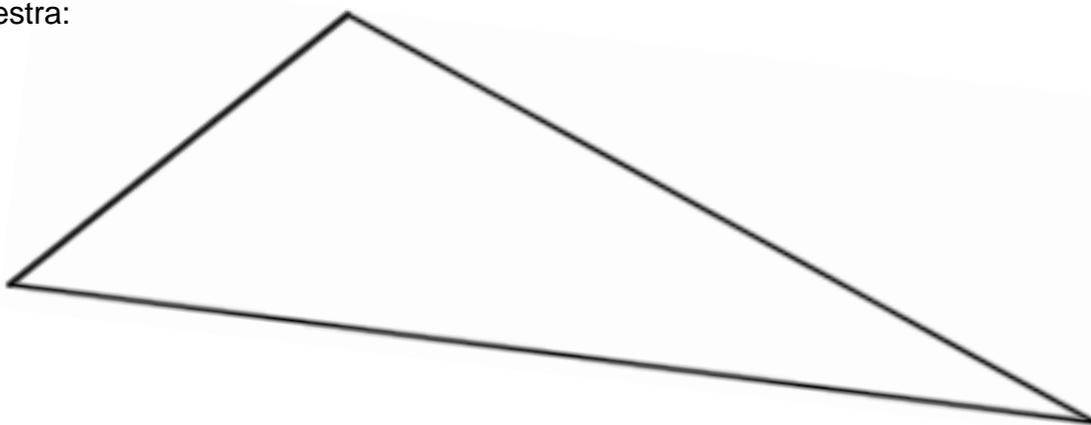


ILUSTRACIÓN 5 SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 3

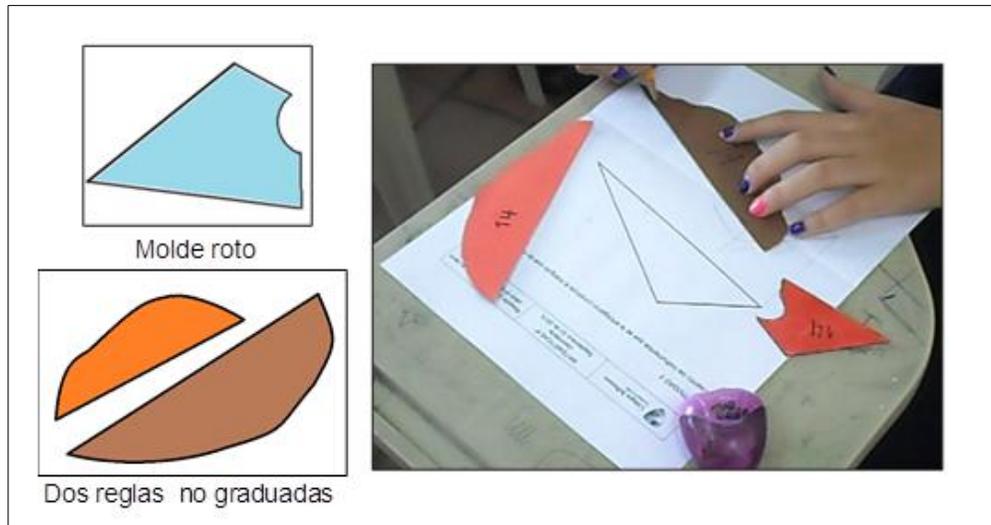


IMAGEN 5 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y DOS REGLAS NO GRADUADAS.

En la Actividad 4 la figura geométrica a reproducir es un triángulo, se le dan dos instrumentos de construcción: el molde roto y una regla no graduada no informativa; se espera que los estudiantes usen ambos instrumentos en la construcción. El molde permite el trazo de la parte superior del triángulo (ángulos izquierdos del triángulo y parte de sus lados), en esta actividad hay una dificultad de grado mayor ya que se debe completar el triángulo usando una sola regla.

El tener una sola regla hace que se abandone la estrategia de reconstrucción de la plantilla y abandonar el grafismo del contorno externo del triángulo, para trazar sucesivamente los lados que faltan. El tener una sola regla obliga a los estudiantes a trazar no solo un lado sino a trazar también su prolongación, con lo que se espera aparezca el primer elemento 1D (Duval, 2004) que es un segmento que no pertenece al contorno de la figura dada.

En las actividades anteriores todos los trazos son elementos del contorno cerrado (2D) del triángulo, en esta actividad desde un punto de vista gráfico, el contorno del triángulo explota en partes de ese contorno, lo cual posibilita la primera etapa en el paso de 2D a 1D.

Se espera que los estudiantes puedan reproducir el triángulo dado con los instrumentos que se le entregaron, que reconozcan que el molde describe la parte superior del triángulo y que el uso de una sola regla permite la aparición del primer

elemento 1D un segmento que no pertenece al contorno de la figura dada. De este modo se espera los estudiantes vayan dejando de ver icónicamente la figura geométrica dada.

ACTIVIDAD 4

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

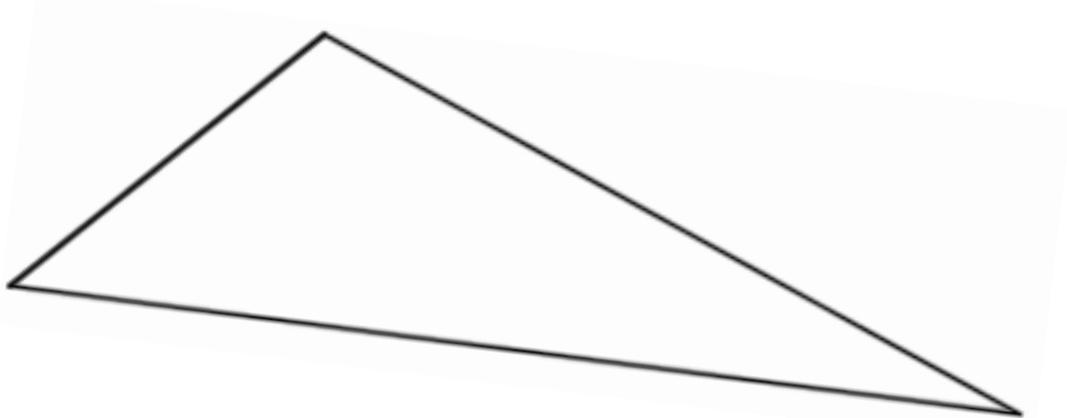


ILUSTRACIÓN 6 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 4

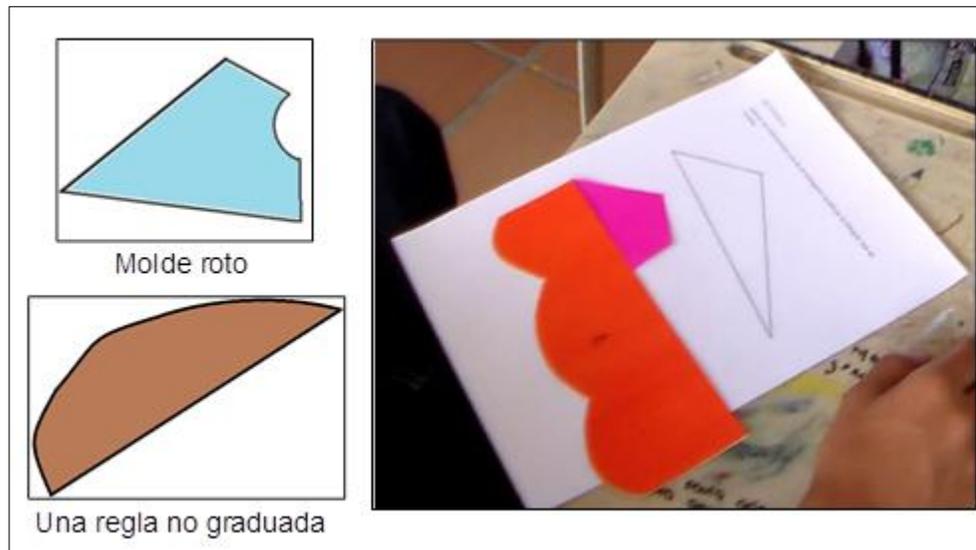


IMAGEN 6 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 4. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: MOLDE ROTO Y UNA REGLA NO GRADUADA.

En la Actividad 5 se conserva la figura geométrica a reproducir: un triángulo, se le dan dos instrumentos de construcción, una regla no graduada y una superficie

cualquiera, se espera que los estudiantes usen ambos instrumentos en la construcción.

La superficie cualquiera tiene algunas restricciones, su tamaño debe permitir el desarrollo de la construcción, es decir el tamaño de la superficie no puede ser menor al de la figura geométrica dada, es decir, que quede completamente contenida en la figura a reproducir; tampoco puede ser tan grande que cubra completamente a dicha figura.

Ninguno de los instrumentos dados tiene relación con el contorno del triángulo, razón por la cual la exigencia cognitiva es mayor y está impuesta por los instrumentos, se hace necesario que los estudiantes usen la superficie para trasportar información de posición y longitud, lo cual sustituye las acciones de construcción en las actividades anteriores; la capacidad de superponer la superficie cualquiera sobre la figura a reproducir, de tal forma que sobre ella pueda copiar información de la figura propuesta y usar tal información en la suya, es decir que al dotar de información la superficie (instrumento) pueda realizar la reproducción de la figura propuesta, mediante el trazo de la información que copio, tal forma de reproducción es indicador de una visualización geométrica avanzada.

ACTIVIDAD 5

Usando los instrumentos que se te entregaron construye el triángulo que se muestra:

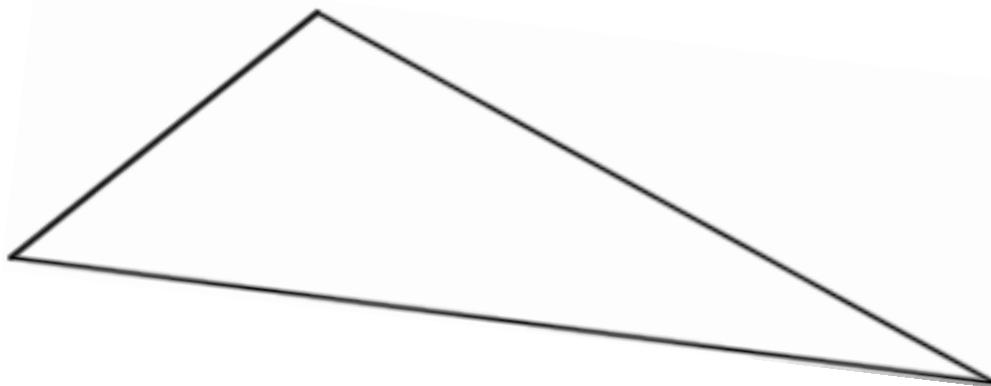


ILUSTRACIÓN 7 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 5

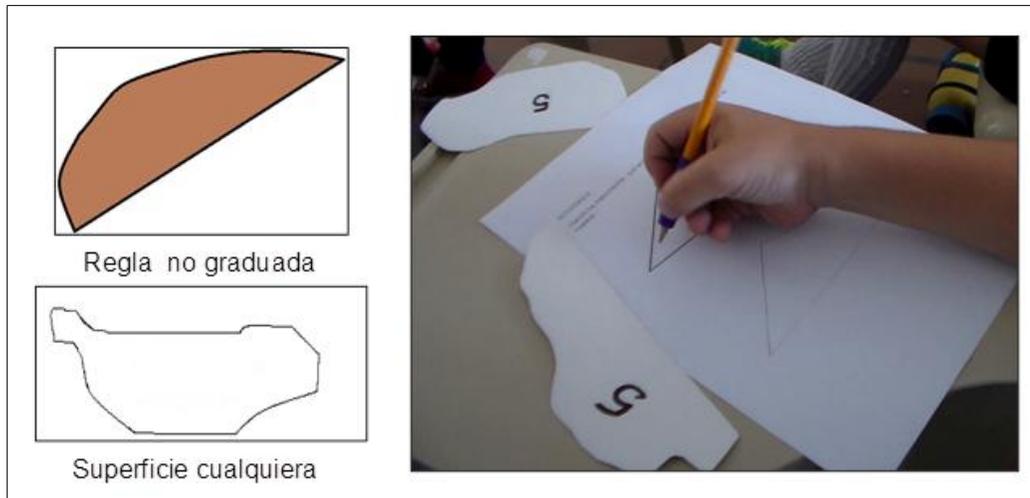


IMAGEN 7 SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 5. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA REGLA NO GRADUADA Y SUPERFICIE CUALQUIERA.

Con este grupo de actividades se completa la Situación 1. Los diferentes instrumentos fueron contruidos por el equipo de investigación, usando cartón paja; se hicieron suficientes para que cada estudiante del grupo tuviese un set de instrumentos para trabajar. Se hicieron versiones de dichos instrumentos a tamaño grande para ser usados en las explicaciones en el tablero.

3.1.2.2 SITUACIÓN 2

La situación 2 consta de cinco actividades de reconstrucción, en todas las actividades se le dan a los estudiantes dos herramientas de construcción: una escuadra y una regla no graduada, y las figuras que se le piden a los estudiantes reconstruir en cada actividad cambian, ahora las figuras son cuadriláteros. En las actividades 1,2 y 5 hay mayor dificultad, ya que el desarrollo de la tarea de reproducción se espera que la figuras simples propuestas cambien, es decir se espera que los estudiantes hagan una descomposición de la figura propuesta, de tal forma que pueda ser vista como una yuxtaposición.

En todas las actividades de la situación 2 las reconstrucciones obligan a los estudiantes a prolongar o construir nuevas líneas para lograr la reconstrucción de la figura geométrica dada; las figuras centran la actividad en las prolongaciones de líneas, construcción de nuevas líneas y en las relaciones de magnitud. La escuadra es una herramienta convencional y permite el trazo de elementos 1D, es

un molde de triángulo rectángulo, pero no se utiliza para desplazar una forma 2D; se espera que se tengan en cuenta solo los dos lados rectilíneos y no se use como una regla informativa, ya que no se hacen marcas que informen sobre la figura dada en la escuadra. No obstante puede utilizarse como una parte de un molde de un cuadrado o de un rectángulo que garantiza el ángulo recto. Es decir la figura determina el uso que los estudiantes le puedan dar a esta herramienta ya que puedan con ella trazar formas 1D y también podrán trazar formas 2D.

Con la regla no informativa se espera que la usen de tal forma que se haga informativa de la forma en que se describe en la situación 1.

Se espera que con ella se tracen líneas, es decir elementos 1D, porque la figura no tiene “esquinas” que formen ángulos rectos, ni dos segmentos perpendiculares que permitan que la herramienta sea usada como molde en donde se trazan elementos 2D, lo cual permite a los estudiantes abordar el paso de 2D a 1D. Además, la actividad de reproducción aquí es más compleja, porque hay que transformar la figura simple que se da en una figura ensamblada, el triángulo dado debe verse como una yuxtaposición (ver Imagen 1) de dos triángulos rectángulos, triángulos que son formalmente desplazables y reproducibles gracias al uso de la escuadra.

Con la regla no informativa se espera la usen de tal forma que se haga informativa, transfiriendo medidas.

ACTIVIDAD 1: Usando el instrumento que se te entregó construye la figura que se muestra:

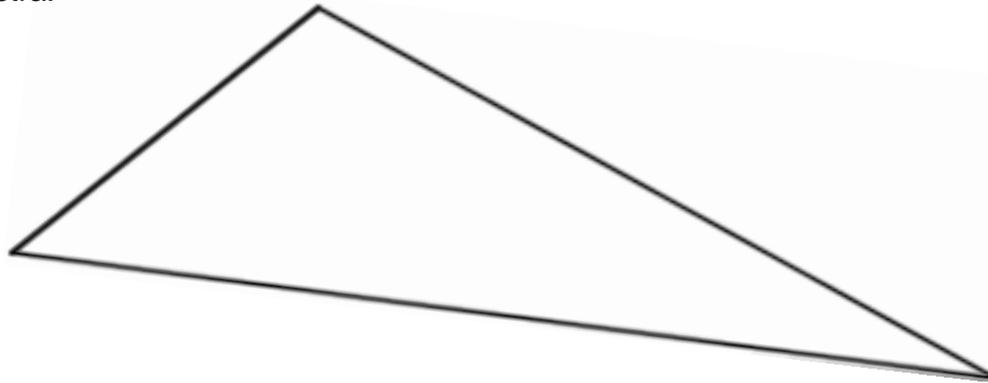


ILUSTRACIÓN 8SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1.

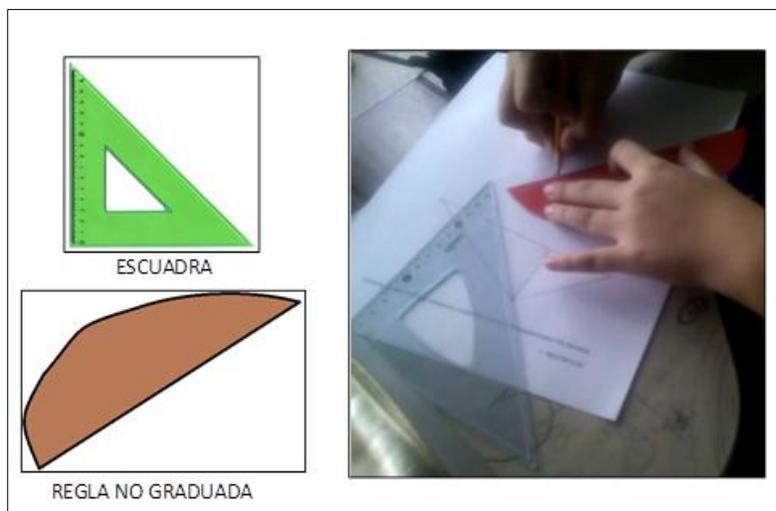


IMAGEN 8 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO ESTÁNDAR.

En la actividad 2 la figura que se pide reproducir es un rombo, lo cual también condicional el uso de la escuadra de la misma forma que en la actividad 1; porque el uso de la escuadra debe permitir al estudiante trazar formas 1D, pero por la forma que se percibe en un primer momento puede suceder que los estudiantes usen la escuadra como un molde y por tanto tracen formas 2D con ella. La dificultad es mayor, ya que para realizar la reconstrucción de esta figura los estudiantes están obligados a construir nuevas líneas, líneas que no pertenecen al contorno de la figura pero que les servirán el proceso de construcción. Se espera que usen la regla no informativa de tal forma que esta se haga informativa, pero si los estudiantes usan la escuadra como un molde puede que no crean que la regla no sea necesaria y por lo tanto la dejen de lado.

SITUACIÓN 2

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

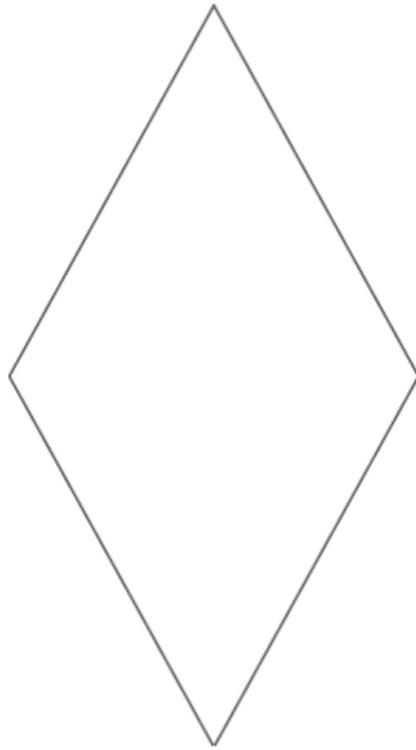


ILUSTRACIÓN 9 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2

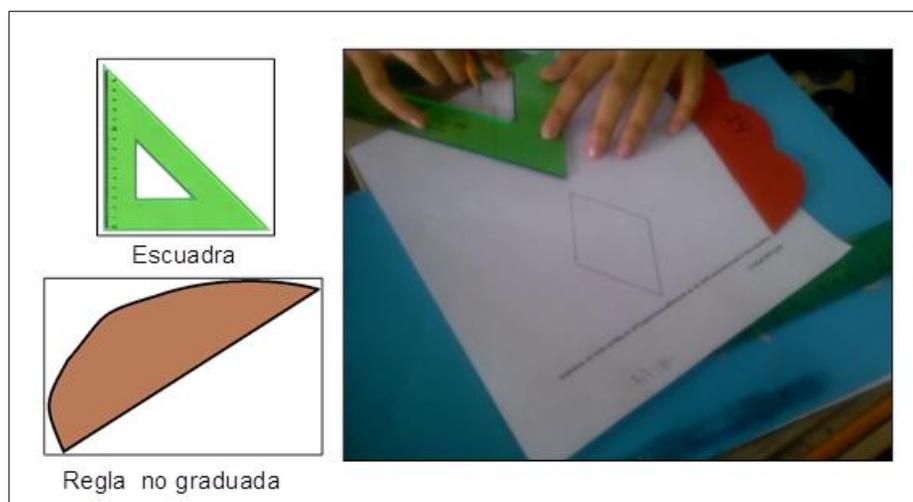


IMAGEN 9 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO GRADUADA.

En la actividad tres y en la actividad cuatro la escuadra puede ser usada como molde, porque la figura que se pide reproducir lo permite dado que la figura contiene una “esquina” recta y los estudiantes pueden copiar el ángulo recto de la escuadra para trazar la “esquina” de la figura.

Por lo tanto, en esta actividad la figura dada imposibilita que los estudiantes usando la escuadra aborden el paso de la percepción de 2D a 1D, porque la escuadra tiene un ángulo recto que describe parte del contorno de la figura propuesta, con lo cual podrían usar la escuadra como un molde, y así permanecería la percepción 2D predominando. No obstante se tomó la decisión de usar estas figuras en las actividades 3 y 4 después de que los estudiantes estuvieran restringidos en la construcción por las figuras de estas actividades, esperando que pudieran superar la barrera de la percepción visual 2D.

SITUACIÓN 3

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

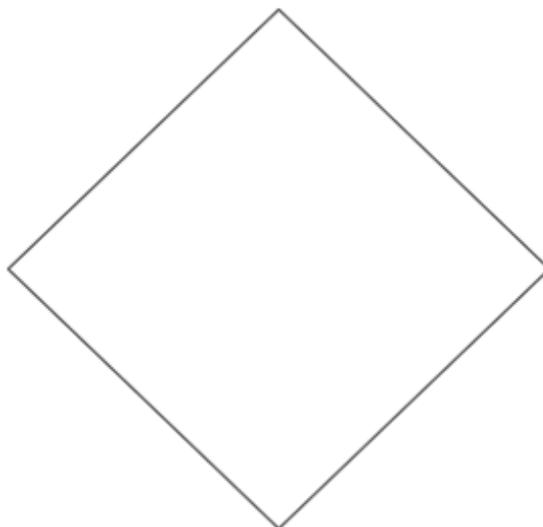


ILUSTRACIÓN 10 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 3

SITUACIÓN 4

Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

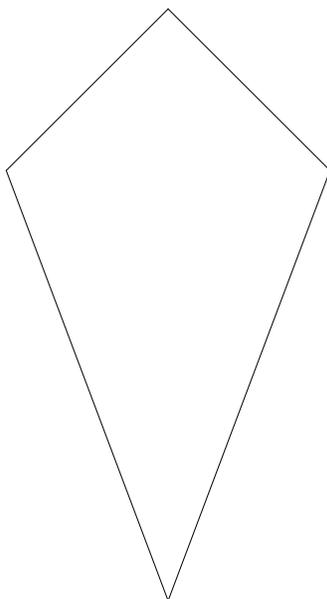


ILUSTRACIÓN 11 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 4

En la Actividad 5 la figura elegida para ser reconstruida supone un gran reto, esta figura es diferente a todas las demás, es convexa y para reconstruirla el estudiante tendrá que recurrir a hacer trazos complementarios que no pertenecen al contorno de la misma, estará obligado a usar los dos instrumentos de construcción y en este caso no podrá usar la escuadra como un molde, dado que la figura no tiene dos extremos perpendiculares, la regla no informativa debe usarla para transportar información de longitudes entre la figura dada y su producción. Al verse obligado a descomponer la figura dada deberá aplicar una descomposición dimensional.

SITUACIÓN 5 Usando los instrumentos que se te entregaron construye la figura que se muestra:

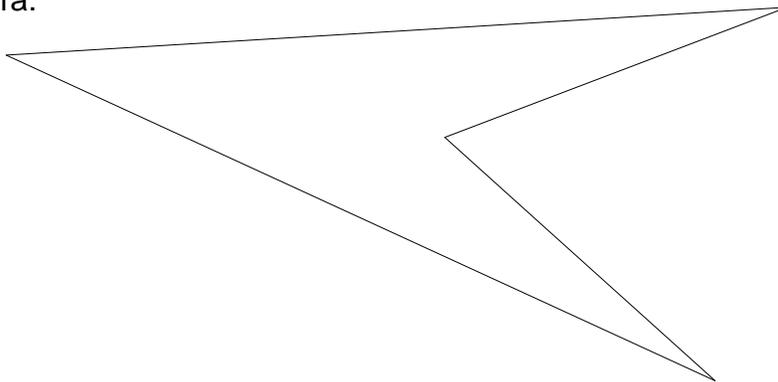


ILUSTRACIÓN 12 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 5.

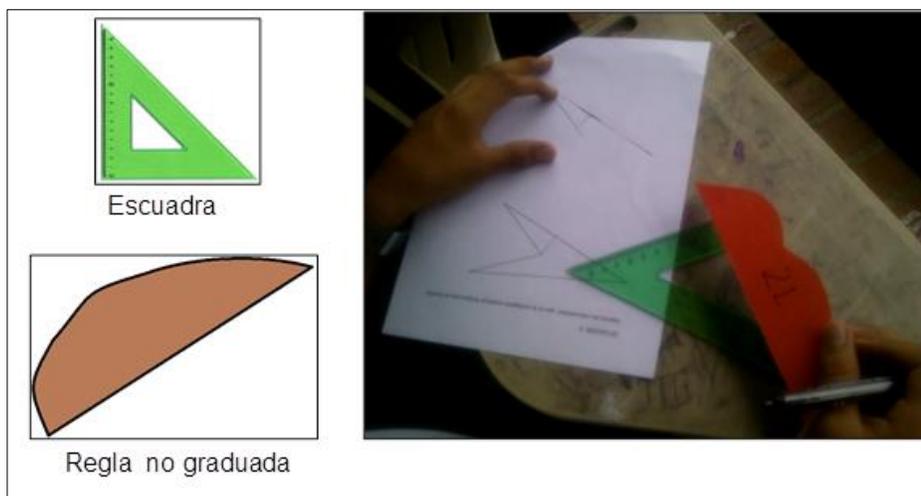


IMAGEN 10 SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1. INSTRUMENTO DE CONSTRUCCIÓN: UNA ESCUADRA Y UNA REGLA NO GRADUADA.

3.1.3 Ejecución y puesta a prueba del experimento de enseñanza.

Las situaciones diseñadas se presentan a los estudiantes de geometría del grado sexto del colegio Jefferson bajo la supervisión y dirección del profesor encargado de dicha clase y miembro del grupo de investigación, bajo la observación y toma de información de videos y fotografías para el desarrollo de este trabajo en el contexto de un experimento de enseñanza.

La aplicación de las situaciones tienen una duración de tres sesiones de clase de geometría, de la primera situación se aplican todas las actividades, tarea que toma dos sesiones completas, y de la situación dos se llevan a cabo las actividades 1,2 y 5, ya que de la en la aplicación de las dos primeras actividades se consideró necesario pasar a la cinco, porque los estudiantes mostraron un gran progreso en el desarrollo de las mismas y entonces se propone la actividad que les supone un reto mayor.

Antes de hacer la aplicación de las situaciones el profesor hace una presentación del grupo y posteriormente de la actividad que se les presenta, se explica a los estudiantes lo que deben hacer; en seguida se entrega el material a cada estudiante, el cual está numerado de acuerdo con el número que le corresponde en la lista de asistencia a cada estudiante, esto se hace para tener mayor organización de la información que se recolecta, también porque ayuda a la hora del análisis de las construcciones que hacen los estudiantes en cada actividad.

En la toma de los videos y fotografías se hace un esfuerzo grupal por grabar solo las manos y las construcciones que hacen, protegiendo la identidad de cada uno de los estudiantes.

De los videos obtenidos en cada actividad se hace una selección de aquellos que arrojan la información necesaria para el análisis local de la aplicación de la actividad, tal filtro se hace de acuerdo a una rejilla (anexo tal al final del documento) en la que se seleccionaron criterios relacionados al uso de la herramienta de construcción; también con aspectos relacionados con el instrumento, aquí se considera si el estudiante toma en cuenta la información respecto a los componentes de la figura que están inmersos en cada herramienta, y se describe si logra o no la construcción.

El último componente obedece a la forma de ver de los estudiantes las figuras, en este componente se considera si el estudiante hace cambios en las figuras durante el proceso de construcción, es decir si hace prolongaciones de líneas o si construye nuevas, diferentes al contorno de la figura, como puente en la

construcción; en esta última categoría se da cuenta del tipo de visualización que el estudiante tiene en cada actividad: icónica o no icónica.

Se espera que con estas actividades el estudiante esté más cerca de aprender significativamente el trabajo en geometría, mediante el uso de las figuras geométricas a través de la actividad cognitiva de la construcción, en donde la selección de los instrumentos y las figuras en las actividades determinan restricciones en la construcción y exigencias cognitivas diferentes.

3.1.3.1 Ejecución y aplicación de la Situación 1.

Al momento de hacer la aplicación de la situación 1 el profesor encargado de la clase de geometría en el colegio Jefferson hace la presentación del grupo de investigación y del proyecto en general.

Como ya se dijo con anterioridad la puesta en escena de esta situación se lleva a cabo en dos clases de geometría; al momento de entregar las actividades el profesor explica a los estudiantes lo que deben hacer y se les entrega el material a los estudiantes, el material está numerado con el número de la lista de asistencia que le corresponda a cada estudiante, esto se hace para tener mayor organización de la información que se recolecta, también porque la numeración ayuda en el análisis de las tareas de reproducción que hacen los estudiantes en cada actividad.

De los videos obtenidos en la aplicación de cada actividad se hace una selección de los que arrojan información necesaria para el análisis de la aplicación de la actividad, tal filtro se hace de acuerdo con una rejilla en la que se seleccionaron criterios relacionados al uso de la herramienta de construcción, tal filtro también determina el número de estudiantes a los cuales se hace referencia.

Se usan momentos de los videos que se seleccionaron para el análisis de la puesta en el aula de clase de la situación y se seleccionan imágenes que permiten observar el proceso de reproducción, dichas imágenes forman una imagen general de dicho proceso de construcción y están en el orden que muestra la siguiente ilustración.

1	2	o	1	2	3
4	5		4	5	6

ILUSTRACIÓN 13 ORDEN DE LAS IMÁGENES DE LOS VIDEOS USADOS EN EL ANÁLISIS.

Y se mantiene esta secuencia para los momentos que se capturen sin importar la cantidad de los mismos.

3.1.3.1.1 Situación 1 Actividad 1

En la primera actividad ocho de los ocho estudiantes usan la herramienta que se les entrega: EL *MOLDE ROTO* en la tarea de reconstrucción del cuadrado.

El uso del molde roto no fue el esperado, ya que en la gran mayoría de los casos los estudiantes no consideraron toda la información que este tiene inmersa y que garantiza la congruencia de su reproducción con el cuadrado dado, solo tres de los estudiantes utilizan el molde como se conjeturó.

La gran mayoría de estudiantes no tienen dificultad de identificar la relación del molde con los lados del cuadrado y para tal efecto usarlo, ellos si tienen dificultades cuando se trata de garantizar los ángulos del cuadrado, los estudiantes no reconocen la importancia de considerar el ángulo que tienen inscrito el molde y que garantiza la igualdad con los ángulos del cuadrado dado.

Respecto a la relación de la figura con el uso del instrumento siete de los ocho estudiantes entienden la relación de los lados del cuadrado dado con el instrumento, pero siete de ellos tienen dificultades para comprender que el molde también determina los ángulos rectos del cuadrado dado. Como se puede observar en la *Imagen 11* (tomada del video *S1A1V1* en el minuto 6:32) el estudiante usa el molde roto en la tarea de reproducción y considera la longitud de los lados que garantiza dicha herramienta, pero no tiene en cuenta que los ángulos del triángulo también están determinados por el molde roto.

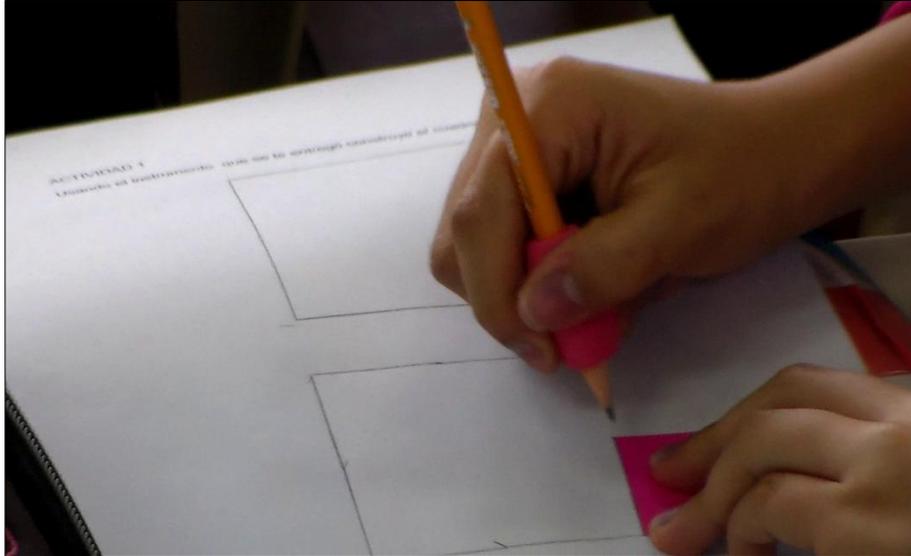


IMAGEN 11. USO DEL MOLDE IGNORANDO EL ÁNGULO QUE DESCRIBE, Y UTILIZANDO LA INFORMACIÓN DE LA LONGITUD DE LOS LADOS QUE ESTÁ INMERSA EN ÉL.

En cuanto a la forma de ver las figuras por ser la primera actividad de este tipo no se esperaba que hicieran cambios en la figura dada en la construcción, es decir que los estudiantes no trazan líneas que no pertenecen al contorno de la figura dada para lograr su objetivo, pero si se esperaba que comprendieran lo inmediatamente dicho antes: que los lados y los ángulos deben ser iguales (Imagen 12).

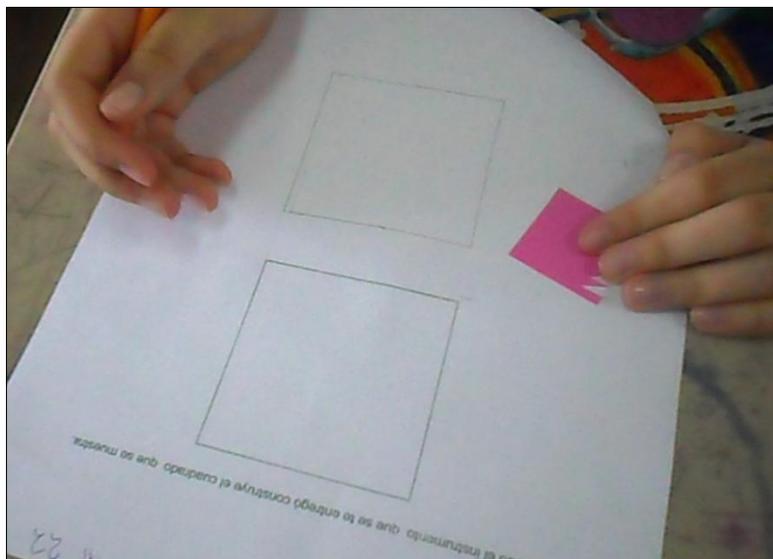


IMAGEN 12. CUADRADO REPRODUCIDO EN EL QUE NO SE EVIDENCIAN CAMBIOS EN LA FIGURA PERO SE CONSERVAN LADOS Y ÁNGULOS EN LA FIGURA REPRODUCIDA.

De acuerdo con lo anterior se generalizan tipos de construcciones, en cada uno de estos grupos el uso de la herramienta cambia la forma en la reproducción de la figura y la forma de ver en geometría, estos tipos de reproducciones son:

1. Uso del instrumento de reproducción del cuadrado considerando la relación de ángulos y lados que tiene el molde con el cuadrado dado. En este grupo se ubican muy pocos estudiantes, en ambos casos los estudiantes logran la reconstrucción de en sus reproducciones se aseguren de garantizar la igualdad de los ángulos en su construcción en relación al cuadrado dado.

La *imagen 13* es obtenida en el primer día de la aplicación en el *video S1A1V6* (en el cual S1 hace referencia a Situación 1, A1 a Actividad 1 y V6 a Video número 6) muestra al estudiante número 11 (el único estudiante que considera la información de lados y ángulos que determina el molde) construyendo el cuadrado usando el molde roto; se puede evidenciar que usa el molde de la forma que fue considerada, ya que usa en la reproducción toda la información que el molde tiene del cuadrado dado, tanto la relación de ángulos como la relación con los lados, logra hacer la reconstrucción del cuadrado dado sin dificultad.

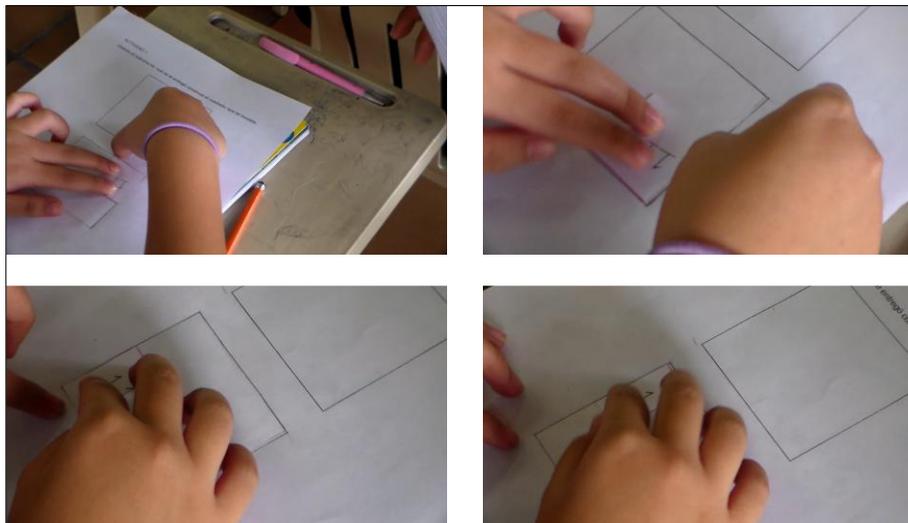


IMAGEN 13. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO.

El profesor le pregunta ¿Cómo lo hizo? Y el estudiante le indica con las manos que traza los ángulos derechos del cuadrado, como se puede observar en el momento 1 y 2 de la *Imagen 13*, y dice que así para todos los lados (momento 3 y 4).

2. Uso del instrumento de construcción del cuadrado sin considerar la relación de ángulos y lados que tiene el molde con el cuadrado dado; como se mencionó siete de los ocho estudiantes no consideran el ángulo que garantiza el molde; para ellos no fue difícil reconocer la relación del molde con la información de los lados del cuadrado, pero si supuso un gran reto el considerar el ángulo, estos estudiantes usaron el molde como se puede observar en la *imagen 11*, lo que hace inferir que aún ven las figuras de forma icónica, se esfuerzan por hacer el contorno del cuadrado, sin considerar que para que su construcción sea idéntica a la figura dada hay condiciones que se deben satisfacer.

La *Imagen 14* es obtenida en el primer día de la aplicación (en el *video S1A1V7*) muestra al estudiante número 8 haciendo la reproducción del cuadrado dado; se puede observar que en tal proceso de reproducción no usa toda la información del molde, ya que no usa el molde en la construcción de los ángulos del cuadrado. El estudiante 8 no termina la construcción porque se da cuenta que le han quedado torcidos los lados de su cuadrado, esto porque no tiene en cuenta el ángulo recto inscrito en el molde, razón por la cual decide borrar lo que hizo.

En el primer momento toma el molde roto y traza uno de los ángulos del cuadrado; en el momento dos, prolonga el trazo superior que hizo anteriormente usando el molde como una regla, hasta donde considera que es la longitud de este lado; en el momento tres, traza otro lado del cuadrado, usando nuevamente el molde como regla y sin considerar los ángulos inscritos en él, detiene su trabajo y concluye “eso me quedó chiviado”, enseguida borra para intentar hacerlo de nuevo; podemos concluir que no pudo hacer la reproducción porque no consideró el ángulo inscrito en el molde roto en el desarrollo de la actividad.

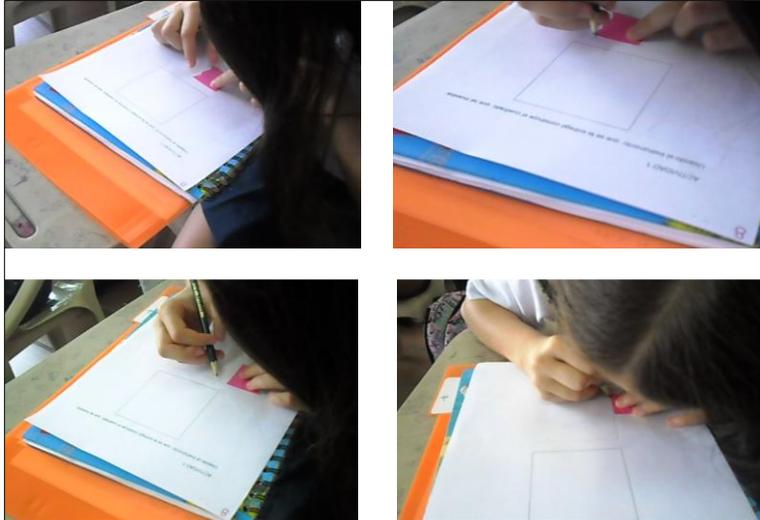


IMAGEN 14. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO NO CONSIDERANDO ÁNGULO INSCRITO EN ÉL.

3. Uso del instrumento de construcción del cuadrado, no se considera la relación de ángulos y lados que tiene el molde con el cuadrado dado y se usa uno de los lados del cuadrado dado en la reproducción. En este grupo se ubica un solo, que usa el lado inferior del cuadrado dado como lado superior de su cuadrado, pero al trazar el lado inferior en su construcción no usa el ángulo que está inscrito en el molde, razón por la cual este lado queda un poco torcido. Llama la atención la forma en que realiza la construcción, porque no estaba considerada anteriormente por el grupo de investigación, tiene grandes limitaciones dado que no usa toda la información que el molde tiene del cuadrado dado, ni la relación que existe con los lados, ni la de los ángulos; él se preocupa por usar el molde como una regla y de forma arbitraria trazar los ángulos, esto se puede observar en la imagen 15, esta da cuenta del proceso de reproducción que usó y cómo usó el molde roto.

En la *Imagen 15* se ilustra parte del *video S1A1V1* (06:45 a 09:15 minutos), en ella se puede observar como el estudiante número 13 intenta hacer la reproducción del cuadrado usando el molde roto, el estudiante no tiene en cuenta

los ángulos que garantiza el molde, ni la información que este arroja sobre los lados del cuadrado dado.

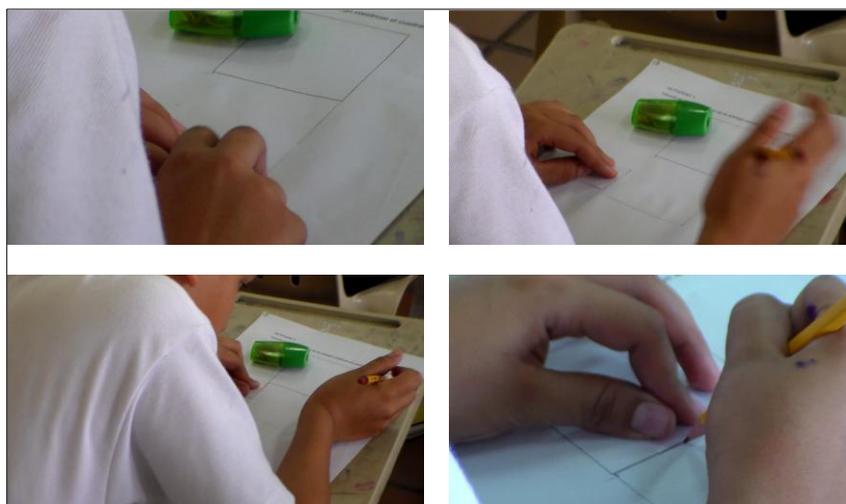


IMAGEN 15. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1. CONSTRUCCIÓN DEL CUADRADO CON MOLDE ROTO NO CONSIDERANDO ÁNGULO INSCRITO EN ÉL NI INFORMACIÓN DE LOS LADOS.

Usa el molde roto como regla, termina este trazo cuando considera que está completo el lado del cuadrado, en seguida y usando el molde roto traza el lado interior de su cuadrado.

En esta situación se puede observar que en general los estudiantes no tuvieron dificultades al establecer la relación del molde roto con la longitud de los lados de la figura dada; las dificultades en la actividad están relacionadas con el trazo de los ángulos, ya que los estudiantes no usan el molde roto para garantizar los ángulos en sus reproducciones.

Por otro lado, no se observa en ninguna de las reproducciones trazos auxiliares o que deconstruyan el cuadrado dado; se observa además que algunos estudiantes aun ven la figura de forma icónica porque se esfuerzan por hacer el contorno del cuadrado, olvidando que deben garantizar la igualdad de lados y ángulos en su reproducción para así lograr que su cuadrado sea idéntico al dado.

3.1.3.1.2 Situación 1 Actividad 2

En la segunda actividad las herramientas que se entregan a los estudiantes para la reconstrucción del triángulo fueron: un molde roto y una plantilla rota.

El uso del molde roto supone dificultades mayores que la plantilla para algunos de los estudiantes; ya que el uso de la plantilla resulta evidente para todos los estudiantes en la reproducción (7 de 7 estudiantes), aun cuando en la elaboración de esta última herramienta hubo algunos errores de fabricación⁹. Todos los estudiantes usan ambas herramientas de construcción, aunque los procesos de reproducción de la figura dada varían.

Por otro lado, la mayoría de los estudiantes no tienen problema en reconocer el ángulo que describe la plantilla, mientras que con el molde si se les presenta dificultades a cinco de los siete estudiantes para describir el ángulo que este describe; intentan superponer el molde sobre la figura dada y no logran ubicarlo en la posición que les permitirá ver la relación que existe entre este y el triángulo, como se puede observar en la *Imagen 16*.

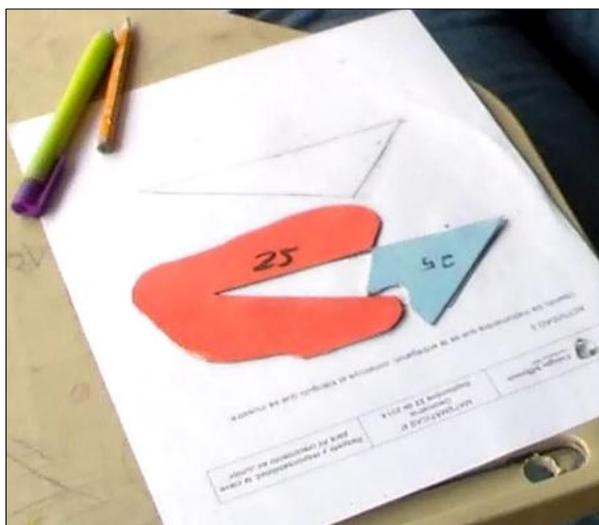


IMAGEN 16. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. USO DE LA PLANTILLA SIN MAYOR DIFICULTAD, USO DEL MOLDE ROTO SUPONE UN RETO.

Al igual que en la actividad 1 en cuanto a la forma de ver las figuras no se esperaba que hicieran cambios en la figura dada para su reproducción, pero si se

⁹ Porque en la actividad la unión de estas herramientas debía permitir el trazo del contorno del triángulo sin problema y de forma exacta, pero a la plantilla le faltaba una pequeña longitud para encajar con el molde, de cualquier forma los estudiantes superaron este error uniéndolos mediante el trazo de la línea que faltaba.

esperaba que comprendieran que las herramientas dadas permiten la reconstrucción de la figura, y que determinan los ángulos y los lados de tal forma que con su uso pueden reproducir un triángulo congruente al dado.

Se organizan los resultados obtenidos en las reproducciones de los estudiantes en categorías de acuerdo al tratamiento que hacen de las herramientas y los procesos de reconstrucción que realizan, en la siguiente forma:

1. Uso del instrumento de construcción del triángulo con la ayuda de ambas herramientas de construcción en donde se considera la relación de ángulos y lados que tienen estas herramientas con el triángulo dado. En este grupo se ubican tres de los siete estudiantes y para ellos las herramientas suponen un reto mayor que en la actividad pasada, pero aun así logran hacer la reconstrucción del triángulo sin mayor dificultad.

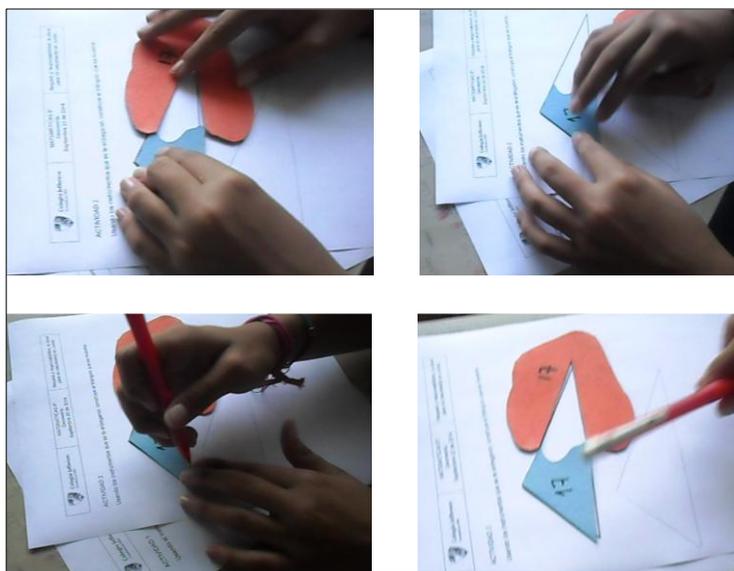


IMAGEN 17 SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON MOLDE ROTO Y PLANTILLA ROTA.

La *Imagen 17* ilustra momentos en la reproducción que hace el estudiante número 17 (tomada del *video S1A2V1*), los momentos que conforman esta imagen se tomaron cuando se indaga al estudiante sobre como hizo la construcción, en el momento número 1 ella superpone ambas herramientas sobre el triángulo dado, luego procede a acomodar el molde roto y traza con este el contorno del triángulo hasta donde se lo permite, luego ubica la plantilla rota y termina el triángulo como se puede observar en el cuarto momento de la imagen.

2. Uso del instrumento de construcción del triángulo con la ayuda de ambas herramientas de construcción y se considera la relación de ángulos y lados que tienen estas herramientas con el triángulo dado, pero tal forma de construcción no considerada con anticipación por parte del grupo de investigación del todo. En este grupo se ubica solo una estudiante que logra hacer la reproducción del triángulo sin mayor dificultad usando marcas (puntos) en el tablero para guiar su trabajo.



Imagen 18. Situación 1 – Actividad 2. Construcción del triángulo con molde roto y plantilla rota de forma no considerada.

La *Imagen 18* ilustra momentos en la reproducción del estudiante del *video S1A2E2ENTABLERO* mientras está realizando la actividad en el tablero; en los cuatro primeros momentos lo que ella hace es trasladar los tres puntos de los vértices del triángulo dado con una misma medida a saber uno de los lados del molde roto, seguidamente toma la plantilla rota y la ubica en el punto que corresponde al vértice derecho del triángulo y hace el trazo correspondiente...

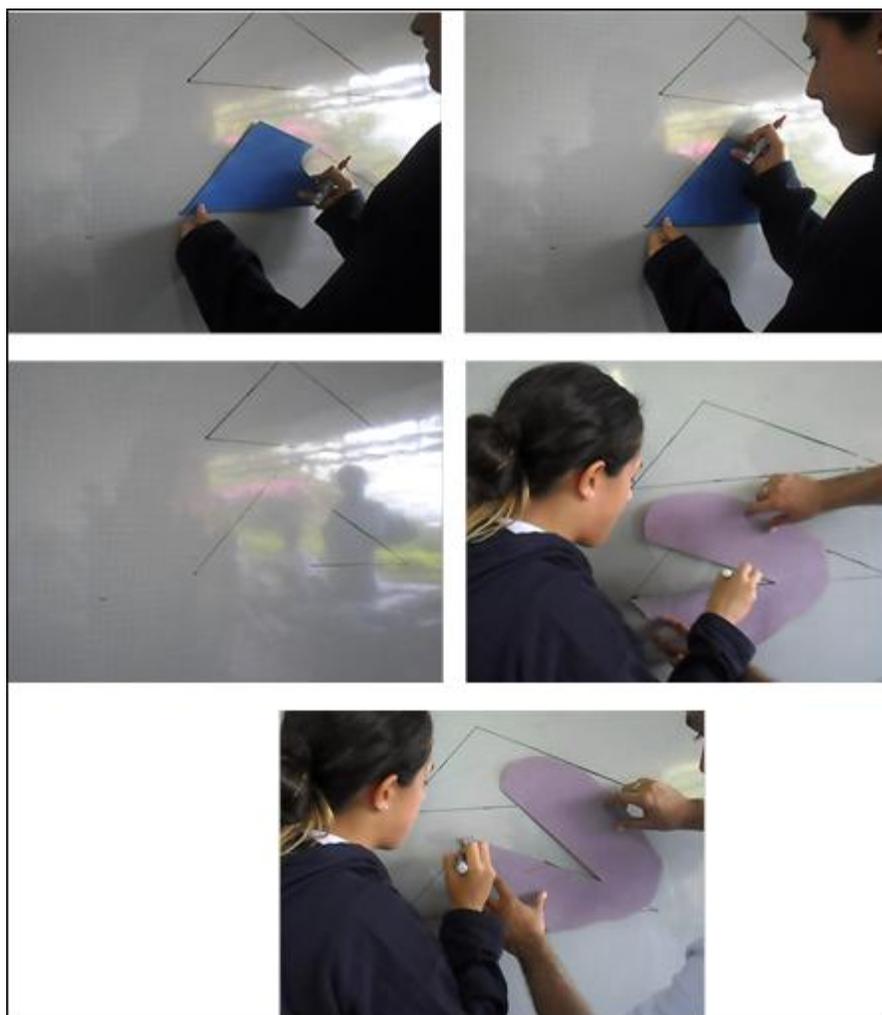


Imagen 19. Situación 1 – Actividad 2. Construcción del triángulo con molde roto y plantilla rota de forma no considerada.

luego toma el molde roto y traza uno de los lados del triángulo y obtiene lo que se puede observar en el momento once, y con un lado de la plantilla traza las partes

de los lados que le faltan para completar el triángulo, esta forma de reproducir no se había considerado del todo porque ella traslada los puntos de los vértices como primer paso en su reproducción, pero lo siguiente que hace respecto al uso de las herramientas entregadas fue un procedimiento que si se consideró y que se esperaba que los estudiantes hicieran.

3. Un estudiante tuvo grandes dificultades para realizar la reproducción del triángulo que se le dio en la actividad en especial con el uso del molde roto, ya que no logro establecer la relación de éste con el triángulo dado e intento varias veces trazar el ángulo que este describe sin poder lograrlo. Con la plantilla rota no presenta ningún tipo de dificultad en el desarrollo de la actividad.

Tal situación se graba en varios videos distintos ya que usaron varias cámaras en la toma de esta reproducción, los videos son S1A2V5, S1A2V6.1, S1A2V6.2, S1A2V8 y los momentos más significativos que dan cuenta de las dificultades que tiene el estudiante para llevar a cabo la actividad se encuentran compilados en la *Imagen 19*.

En el primer momento se puede observar que el estudiante 25 superpone ambas herramientas sobre el triángulo dado pero el molde roto de tal forma no describe el triángulo dado, con la plantilla no tiene dificultad y luego de superponerlo traza la información que este describe del triángulo, en los momentos del 4 al 7 pone el molde sobre el triángulo y copia la longitud que le falta para trazar por completo el contorno de la figura en cada lado usando el molde como una regla informativa.

En los siguientes dos momentos termina el triángulo y borra la parte que habría podido hacer con el molde roto, para intentar hacerlo de nuevo, pero en su segundo intento hace lo mismo: traza las longitudes que le falta en cada lado tomando la medida a ojo, seguidamente en el momento 13 se observa que ha trazado varias veces un lado del triángulo que claramente no ha logrado hacer porque no ha usado el ángulo que describe el molde roto; por último el profesor le hace caer en cuenta de esto.

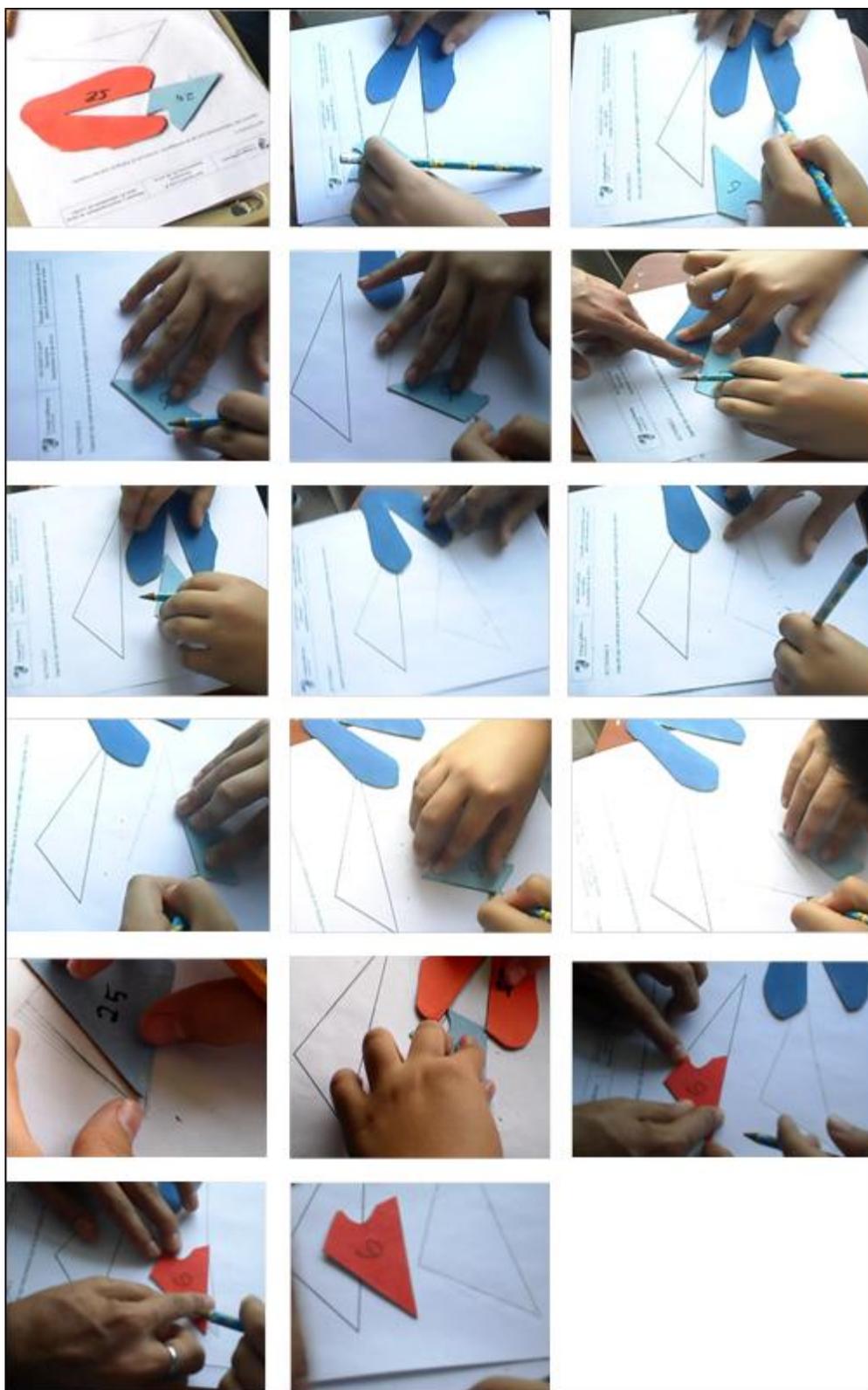


IMAGEN 20. SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2. CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO CON DIFICULTADES EN EL USO DEL MOLDE ROTO.

En la actividad 2 se puede observar que ninguno de los estudiantes tiene dificultades al usar la plantilla en la tarea de reproducción, ya que trazan el ángulo y parte de los lados que ésta describe además al ponerla sobre el triángulo dado identifican de forma inmediata la relación que tiene con la figura dada; las dificultades que tienen algunos estudiantes están orientadas al uso del molde roto, no reconocen de qué forma esta herramienta describe parte del triángulo dado y es entonces cuando deciden usarlo como una regla no graduada que terminan haciéndola informativa, porque la usan para transportar longitudes de los lados del triángulo, y esto indica que la forma en la que ven la figura tales estudiantes es icónica porque intentan reproducir un ángulo mediante el trazo longitudes. En esta actividad se empiezan a ver procesos de reproducción más variados que en la primera actividad.

3.1.3.1.3 Situación 1 Actividad 3

En la tercera actividad se entregan a los estudiantes como herramientas el molde roto y dos reglas no graduadas.

En esta actividad solo se tienen cuatro videos en la recolección de información, en el video S1A3V2 se logran grabar varias situaciones y cada una de ellas al ser presentadas será evocada con el mismo nombre del video pero se hará énfasis en el tiempo en el que ocurre cada evento distinto.

El uso del molde roto en esta actividad a diferencia de la anterior no supone mayores dificultades para los estudiantes, ni tampoco las reglas no graduadas, la mayoría de los estudiantes usan las tres herramientas de la forma que se esperaba, unos pocos usan solo una regla no graduada y en el proceso de reproducción del triángulo la vuelven informativa.

En general la mayoría de los estudiantes no tiene problemas en reconocer el cómo las herramientas dadas describen el contorno del triángulo propuesto en la actividad, al parecer para ellos resulta casi evidente como han de usarlas.

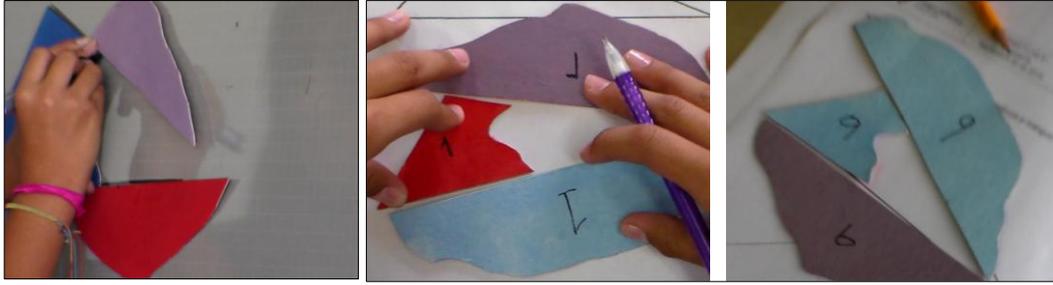


IMAGEN 21. SITUACIÓN 1 - ACTIVIDAD 3. USO DEL MOLDE ROTO Y DOS REGLAS NO GRADUADAS.

En esta tercera actividad dos de los cinco estudiantes para realizar la reproducción usan líneas de apoyo aun cuando la única unidad figural que se esperaba en el proceso de reproducción era producto de la intercepción de los lados del triángulo, otros bajo el mismo concepto dejan rastro de esto en su trabajo por medio de puntos. De tal forma que aunque no se esperaba que hicieran cambios en la figura dada para reproducción lo hacen y a eso sumándole comprenden que las herramientas dadas permiten la reconstrucción de la figura, que determinan los ángulos y los lados de tal forma que con su uso pueden construir un triángulo congruente al dado.

Se organizan los resultados obtenidos de las reproducciones de los estudiantes en categorías de acuerdo al tratamiento que hacen de las herramientas y los procesos de reproducción que realizan, en la siguiente forma:

1. Tres de cinco de los estudiantes observados usan las herramientas que se les entregan para llevar a cabo la actividad. Dan uso del instrumento de construcción del cuadrado considerando la relación de ángulos y lados que tiene el molde con el cuadrado dado. En este grupo se ubican tres de los cinco estudiantes, en ambos casos los estudiantes logran la reconstrucción de la figura dada, aunque es un primer acercamiento es interesante que en sus construcciones se aseguren de garantizar la igualdad de los ángulos en su construcción en relación al triángulo dado.

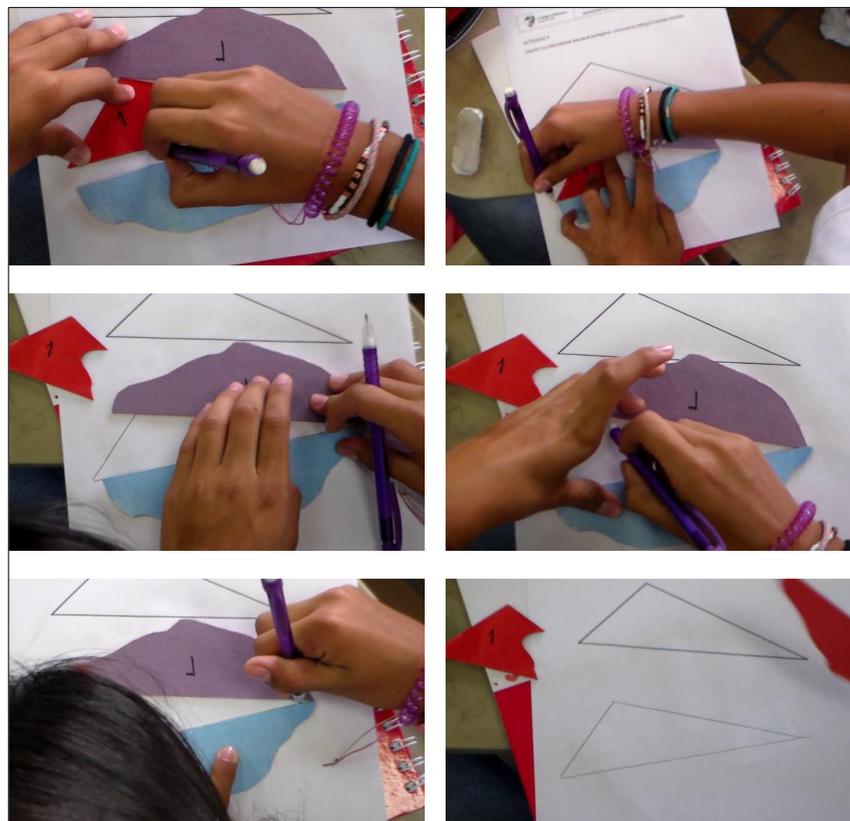


IMAGEN 22. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. USO DEL MOLDE ROTO Y REGLAS NO GRADUADAS DE LA FORMA QUE SE CONSIDERÓ.

La *imagen 22* (tomada del *video S1A3V2* en el tiempo 0:40 a 01:12), en él se puede observar que la estudiante sobrepone el molde roto y las reglas no graduadas sobre el triángulo que se le dio en la actividad y observa que de tal forma éstas determinan el contorno de la figura, y así traza el ángulo y parte de los lados que describe el molde roto y seguidamente completa los lados de dicho triángulo como se puede observar en los momentos 5 y 6 de la *imagen 21*.

2. En este segundo grupo se ubica un estudiante cuyo proceso de reproducción tiene como intención la de trasladar los vértices como primer paso en la tarea de reproducción. En la *Imagen 23* del *video S1A3V1* se observa al estudiante 5 explicando cómo lleva a cabo la actividad usando únicamente una regla no graduada para ilustrar su explicación se dará cuenta de su dialogo.
 - E5: “Esta línea tiene que quedar igual a esta”, se refiere a lo que se puede ver en el primer momento de la *Imagen 23* al lado inferior del triángulo.

- E5: “Entonces vos trazas la misma medida de la línea de abajo”, y toma la regla no graduada y mide la longitud de este lado para trazar el lado inferior de su reproducción.
- E5: “Entonces vos buscas la forma de calcular que esta parte le quede en la punta y entonces haces lo mismo” (se refiere a copiar el punto del vértice superior como se puede observar en el momento dos de la imagen 23), “lo pones y como ya tenes esta línea (lado inferior del triángulo) lo pones acá (sobre el lado inferior del triángulo) a ver dónde te queda la punta (punto del vértice superior) y como ya sabes que es la misma que tenes acá (en el triángulo dado) entonces lo pones (marca el punto del vértice superior como se puede observar en el momento tres de la Imagen 23).

Y de esta forma es como hace la reproducción del triángulo dado usando una sola regla no graduada, su actividad terminada se puede observar en el momento cuatro de la Imagen 23.

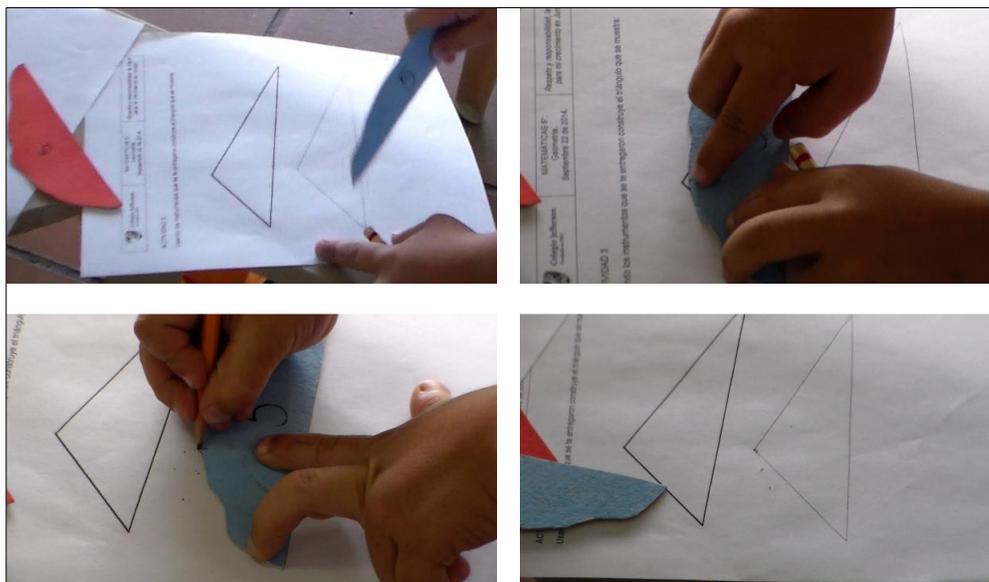


IMAGEN 23. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO MEDIANTE EL USO DE UNA SOLA REGLA TRASLADANDO SUS VÉRTICES.

1. En este tercer grupo se encuentra una estudiante, en el proceso de reproducción traza líneas auxiliares, tales líneas como se puede observar en la Imagen 24 determinan el lugar de los vértices del

triángulo y ya teniéndolos entonces los une mediante el uso de una regla no graduada y de tal forma realiza la actividad. La *Imagen 24* (tomada del video S1A3V3). Este grupo y el anterior son parecidos, su diferencia radica en la forma en como trasladan los vértices del triángulo, pero la intención de trasladar los vértices como primer paso en la tarea de reproducción es igual.

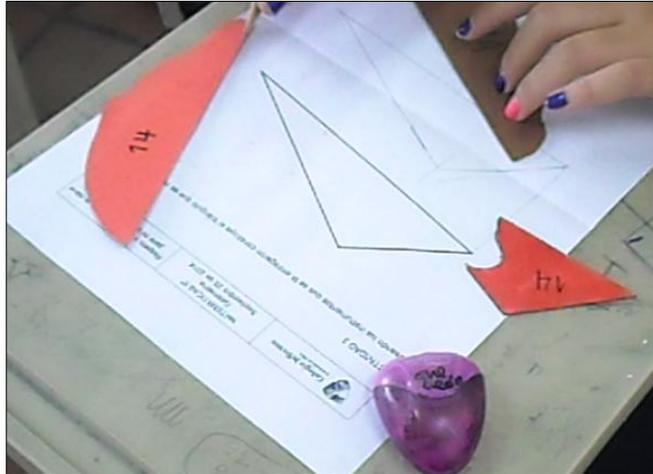


IMAGEN 24. SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 3. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO HERRAMIENTAS DADAS TRASLADANDO SUS VÉRTICES.

En la actividad tres los estudiantes no tienen mayores dificultades en la reproducción del triángulo propuesto, las formas de llevar a cabo la actividad se hacen variadas, se superan las dificultades que se presentaron en actividades anteriores respecto al uso del molde roto, los estudiantes comprenden que este describe el ángulo izquierdo del triángulo y parte de sus lados, seguidamente con una o con las dos reglas completan la figura de tal forma el uso de las reglas tampoco supone dificultades para ellos en esta actividad; se puede observar además que los estudiantes están más dispuestos y menos retraídos en su forma de hacer la actividad. Algunos estudiantes empiezan a hacer traslaciones de los puntos de los vértices del triángulo como primer paso en su tarea de reproducción, bien sea mediante puntos o mediante el trazo de segmentos de igual longitud.

3.1.3.1.4 Situación 1 Actividad 4

En esta cuarta actividad de igual forma se entrega a los estudiantes el principio de la actividad la hoja en donde deben realizar la tarea de reproducción del triángulo, y las herramientas que son: el molde roto y una regla no graduada.

En esta actividad no se evidencian dificultades en las tareas de reproducción respecto al uso de las herramientas; refiriéndose al molde roto nueve de los nueve estudiantes identifican la información y la relación que éste tiene con el triángulo dado sin dificultades, cuando completan el triángulo se observa variedad en el proceso, pero todos son una variación del primer tipo de reproducción, es decir ellos entienden que al usar la regla prolongando los lados del triángulo podrán completar la actividad. Se puede evidenciar que la variedad al hacer la tarea de reproducción va aumentando con el paso de las actividades, como se puede observar en la *Imagen 25* (tomada del video *S1A4V1* en el minuto 02:18).

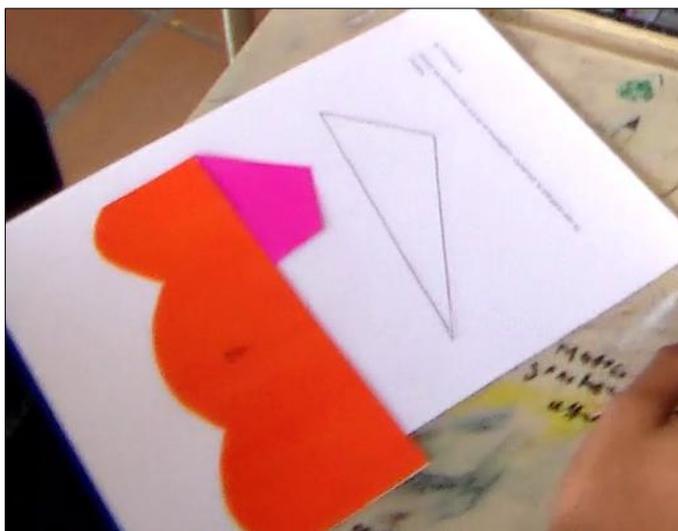


IMAGEN 25. TIPO 1. REPRODUCCIÓN DE TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS DE LA FORMA ESPERADA.

En algunas de las variaciones del primer tipo de reproducción dos estudiantes trazan líneas auxiliares para hacer la actividad, pero el concepto usado es el mismo de la actividad anterior, como se puede observar en la actividad 3 los estudiantes trazan líneas que contienen los vértices del triángulo como primer paso en su reproducción, así pues las líneas que trazan se salen del contorno de la figura lo cual permite decir que hay un cambio pequeño pero significativo en el

cómo ven la figura. Así como se puede ver en la Imagen 26 (tomada del video S1A4V1 en el minuto 02:4).

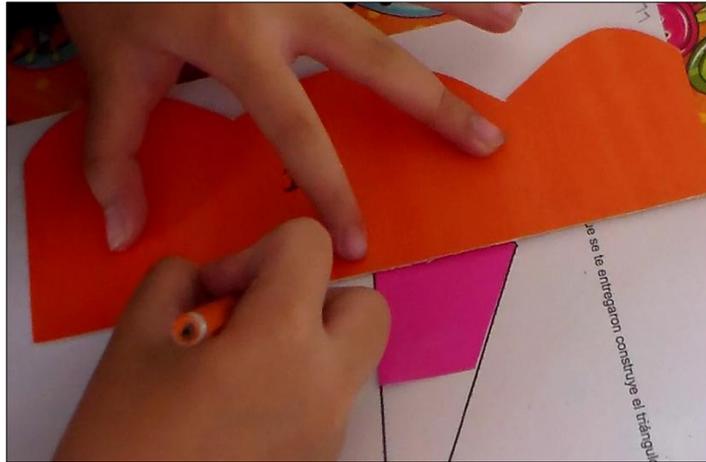


IMAGEN 26. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO TRASLADANDO SUS VÉRTICES COMO PRIMER PASO.

A continuación se presentan los tipos de reproducciones encontrados en esta actividad:

1. En este primer grupo se encuentran tres de nueve estudiantes, los estudiantes usan el molde roto y consideran toda la información que hay en él sobre la figura dada, luego para completar la actividad prolongan los lados del triángulo hasta que se cortan en un punto; este proceso de reproducción fue el que se consideró antes de llevar a cabo la actividad, y de este se derivan las otras formas en las que los estudiantes completaron el triángulo de su reproducción.

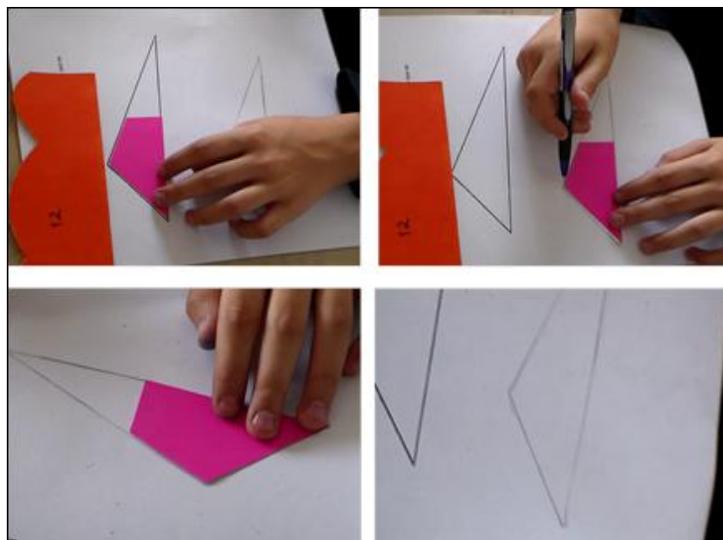


IMAGEN 27. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA USANDO AMBAS HERRAMIENTAS PROLOGANDO LOS LADOS DEL TRIÁNGULO.

La *Imagen 27* (tomada del video S1A4V5) y da cuenta de la explicación del proceso de reproducción que hace estudiante 12, y como se puede observar en el momento uno, el estudiante pone el molde roto sobre el triángulo dado y seguidamente explica que así empieza a desarrollar la actividad, que traza el contorno del triángulo usando el molde roto y teniendo esto prolonga los lados hasta cierto punto y de tal forma completa la actividad. A continuación se expone su explicación literalmente:

- E12: “Este da aquí perfecto”, hace referencia al molde roto, que él encaja perfectamente en el triángulo dado, como se observa en el momento 1.
- E12: “Y tiene que seguir hasta cierto punto”, se está refiriendo a los lados del triángulo, que deben prolongarse hasta cortarse en su vértice derecho.

Seguidamente uno de los observadores (OB) le pregunta:

- OB: “Ese cierto punto como lo calculaste”. Le cuestiona sobre la igualdad de la longitud faltante de los lados del triángulo. A lo que el estudiante responde:
- E12: “No sé, solo pensé que si esta da aquí perfecto también tendría que dar acá (en el triángulo que reprodujo), e indica que con la mano que entonces los lados para el así son iguales.

2. Como se dijo anteriormente la forma en como trazan la parte del triángulo con el molde roto es la misma, la diferencia está en cómo se completa la figura. A este grupo pertenecen tres de nueve estudiantes que completan el triángulo midiendo la longitud que le falta a cada lado del mismo, usando la regla como informativa o la parte más larga del molde roto como regla informativa, ya que de esta forma copian dicha longitud.

En la *Imagen 28* (tomada del video S1A4V3) se observa como el estudiante hace la reproducción del triángulo, en el primer momento él explica que tomo el molde roto y de tal forma traza la parte del triángulo que esta describe, seguidamente y usando únicamente el molde roto traza la parte que le falta a cada lado del triángulo, usa parte del molde roto como una regla no graduada que a la vez la hace informativa, como se puede observar en el momento dos y tres de la imagen.

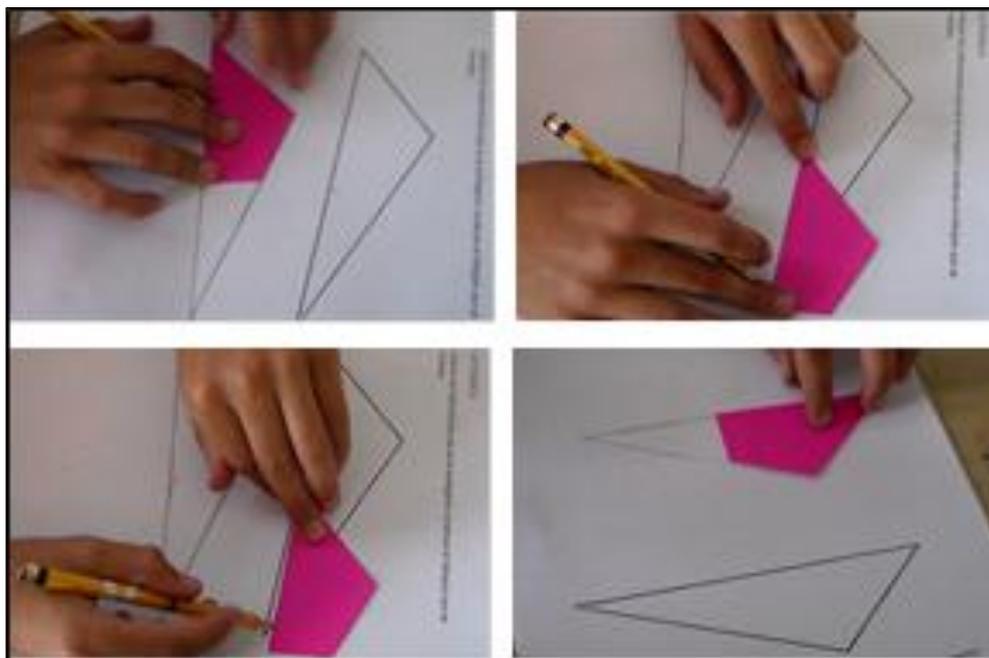


IMAGEN 28. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO ÚNICAMENTE EL MOLDE ROTO Y TRANSPORTANDO LONGITUDES.

En la *Imagen 29* (tomada del video S1A4V9) se puede observar que la reproducción del triángulo es muy similar al de la Imagen 28, la diferencia radica en el instrumento que cada uno de los estudiantes uso para copiar la longitud que le faltaba a cada lado al completar el triángulo. El estudiante de la Imagen 28 como se mencionó usa como regla informativa uno de los lados del molde roto y con este mismo traza tales longitudes, por su parte el estudiante de la Imagen 29 usa la regla no graduada que se entregó para copiar la misma longitud faltante de los lados del triángulo, y con esta misma las traza.

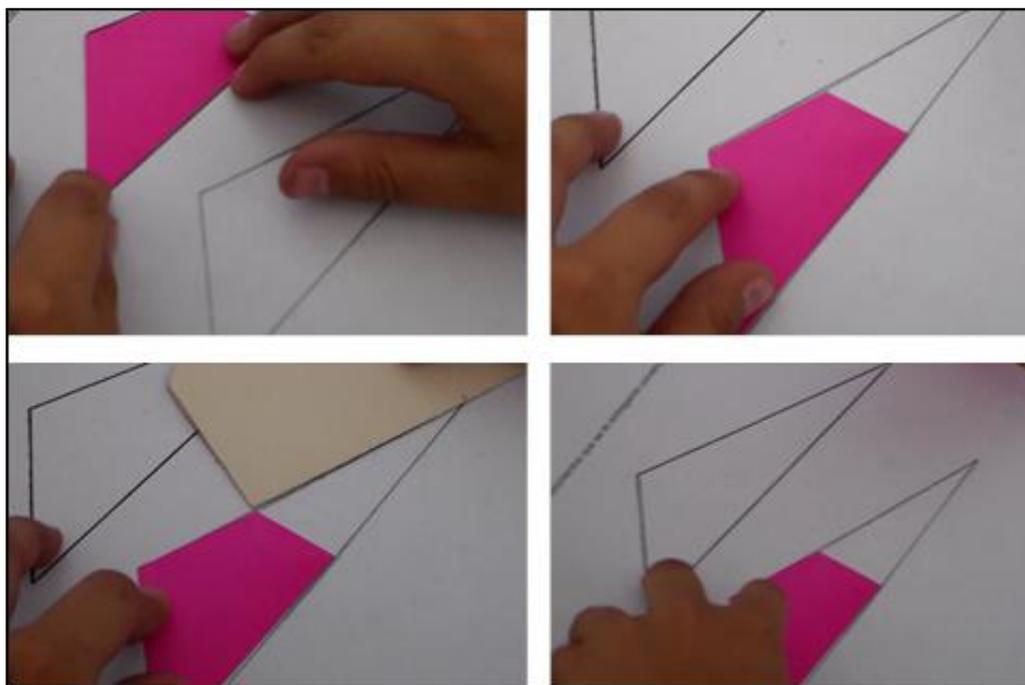


IMAGEN 29. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO EL MOLDE ROTO Y LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES.

3. Reproducción de la figura dada trasladando como primer paso los vértices del triángulo dado. En este grupo se encuentran tres estudiantes, esta forma es diferente de las demás porque ellos trasladan los vértices del triángulo a una misma longitud que marcaron en la regla no graduada.

Como se puede observar en la *Imagen 30* (tomada del video S1A4V1), después del minuto 2:33, la estudiantes en los momentos del uno al tres traslada los puntos de los vértices del triángulo dado usando una misma medida que ha marcado con

anterioridad en la regla no graduada, seguidamente como se puede observar en el momento cuatro toma el molde y lo ubica en los puntos correspondientes de los vértices que hizo anteriormente y seguidamente traza la información que esta herramienta tiene sobre la figura dada, finalmente como se puede observar en los momentos cinco y seis completa el triángulo trazando con la regla no graduada la longitud que resta para completar la actividad.



IMAGEN 30. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO EL MOLDE ROTO Y LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES.

En la *Imagen 31* (tomada del *video S1A4V10*), se observa que el estudiante hace el mismo proceso de reproducción descrito con anterioridad, pero llama la atención la forma como usa la regla no graduada para hacer la traslación de los

puntos del vértice, como se puede ver no usa el lado recto de esta el usa la parte del distractor y de igual forma logra culminar sin dificultad la actividad, y solo mediante el uso de la regla no graduada es como realiza la tarea de reproducción.

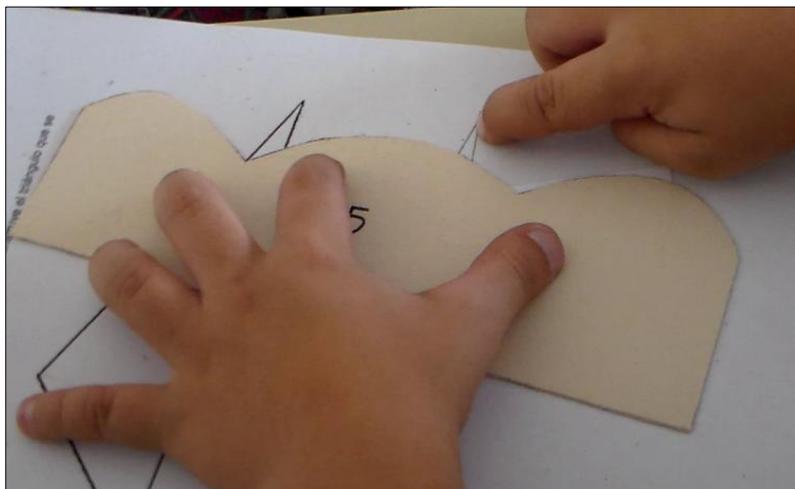


IMAGEN 31. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA TRANSPORTANDO LONGITUDES CON EL DISTRACTOR.

En esta actividad se tiene que los estudiantes no tienen dificultades con el uso de las herramientas, todos logran hacer la reproducción del triángulo dado; el uso del molde roto se generaliza, los estudiantes identifican la relación que guarda este con la figura dada y de inmediato trazan la parte del contorno que describe, para completar el triángulo los estudiantes en general usan la regla no graduada, ya sea que con ella prolonguen los lados del triángulo para completarlo o midan la longitud que falta para completar tal figura.

La variedad de las estrategias usadas por los estudiantes para completar la actividad va en aumento, y se puede percibir que cada vez es menos difícil para ellos completar la actividad y en menor tiempo en relación con las actividades uno y dos de la situación 1.

3.1.3.1.5 Situación 1 Actividad 5

La actividad cinco es la última de la Situación 1, y es la que más impone retos al estudiante ya que no se le da al estudiante el molde roto que garantiza la reproducción del triángulo en gran parte, además porque no hay una

correspondencia visual evidente con la superficie cualquiera como con el molde roto; las herramientas que se entregan son: una superficie cualquier y una regla no graduada y la figura dada es el mismo triángulo que se usó en las actividades anteriores.

Ocho de los nueve estudiantes usan solo la regla no graduada en la tarea de reproducción del triángulo dado, de estos cuatro usan un lado de la superficie cualquiera como una regla ignorando que esta parte de tal herramienta no es recta como puede verse en la Imagen; en general ellos no sabe cómo usar la superficie para garantizar la igualdad del triángulo dado con el que tratan de hacer, entonces se arriesgan a copiar la longitud de los lados del triángulo olvidando que garantizar la igualdad de los ángulos en el proceso de reproducción, y es justamente lo que no hacen.

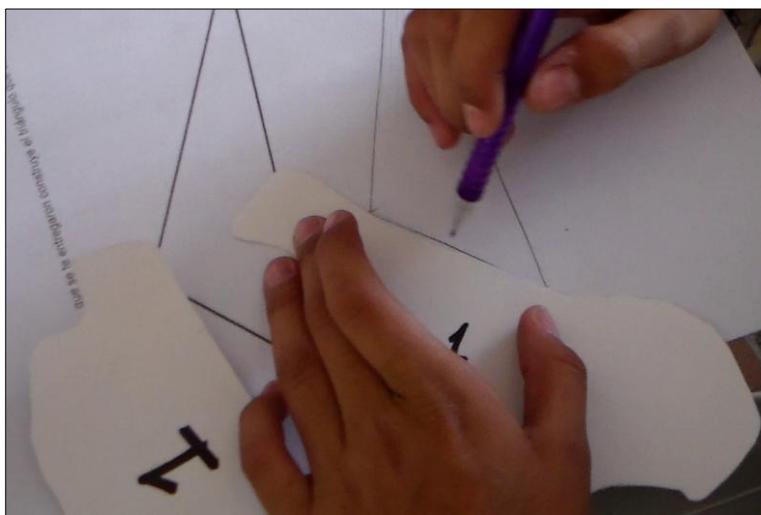


IMAGEN 32. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO UN LADO DE LA SUPERFICIE CUALQUIERA COMO REGLA.

De este grupo solo hay dos estudiantes que usan la superficie como regla para copiar la altura del triángulo, aun así están repitiendo procesos de reproducción de las anteriores actividades, unos optan por copiar la longitud de los lados del triángulo y se esfuerzan por hacer su contorno sin garantizar de algún modo los ángulos del mismo, otros usan la regla no graduada para trasladar los vértices del triángulo dado y de tal forma lograr realizar la actividad.

Solo uno de los estudiantes logra usar la superficie cualquiera y la regla no graduada conjuntamente al hacer la reproducción de la figura dada, él usa la superficie como se contempló con anterioridad y tal descripción es el tipo 3 de reproducción de la figura dada, como se puede observar en la Imagen 33.

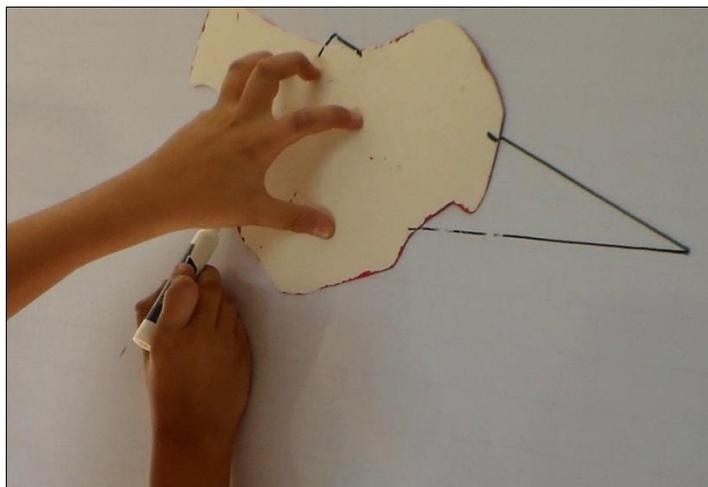


IMAGEN 33. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA SUPERFICIE CUALQUIERA DE LA FORMA QUE FUE CONSIDERADA.

Así pues la gran mayoría de los estudiantes tienen dificultad para llevar a cabo la actividad, solo cuatro de ellos logran hacer la reproducción exacta del triángulo dado porque fueron los únicos que encontraron la forma de garantizar la igualdad de los ángulos entre las dos figuras, al no encontrar la forma de hacerlo lo obvian sabiendo a estas alturas la importancia que tiene el conservar los ángulos.

De acuerdo a lo anterior se generalizan tipos de reproducciones, en cada uno de estos grupos el uso de la herramienta cambia la forma en la reproducción de la figura y la forma de ver en geometría, estos tipos de reproducciones son:

1. Esfuerzo por reproducir el triángulo dado trasladando los vértices, con la regla no informativa y de usarse la superficie también se usa como regla. En este grupo se ubican la mayoría de los estudiantes, ellos tratan de hacer la reproducción trasladando los vértices del triángulo dado para luego unir las marcas que realizan mediante el trazo de líneas y de tal forma llevar a cabo la actividad, pero en el camino no saben cómo usar la superficie

cualquiera y optan por usar únicamente la regla no graduada y en caso de usar la superficie la usan por uno de sus lados como una regla para copiar longitudes de los lados del triángulo, lo cual constituye un error porque esta parte de la superficie no es recta.

Los estudiantes de este grupo parecen haber olvidado que para que su figura y la dada sean iguales deben garantizar además de los lados los ángulos, y esta forma de hacer la actividad no garantiza la igualdad de los ángulos. En este grupo se consideran las tareas de reproducción de los videos S1A5V1, S1A5V2, S1A5V12.

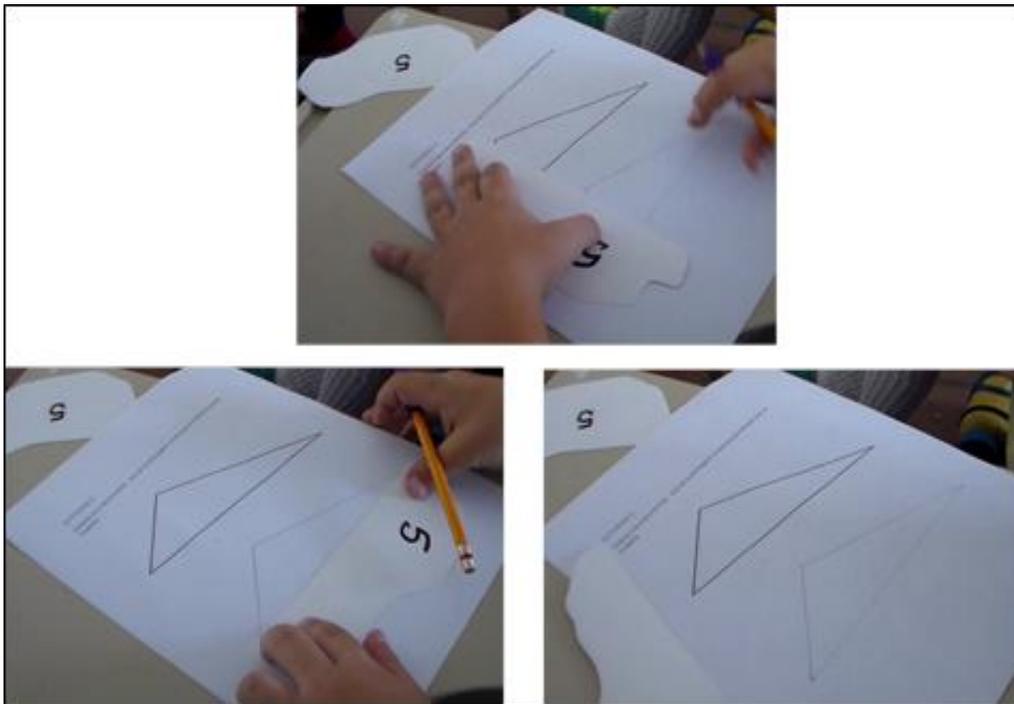


IMAGEN 34. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES.

En la Imagen 34 (tomada del video S1A5V1), se puede observar que el estudiante explica que copio los vértices del triángulo al parecer (no hace evidente esto) haciendo la traslación de esos mediante el uso de la regla no graduada, con la misma regla copia la longitud del lado inferior del triángulo, seguidamente explica que lo único que le quedo por hacer fue unir los puntos que marco, el no hace explicita en su explicación que considero que debía mantener la igualdad de los ángulos.

En este mismo grupo, la Imagen 35 (tomada del video S1A5V2), se observa que el estudiante explica que copio los vértices del triángulo haciendo la traslación de esos mediante el uso de la regla no graduada considerando una misma distancia desde los vértices del triángulo dado hasta el lugar donde hará su reproducción, ella usa un lado de la superficie que considera recto para unir dos de esos puntos y seguidamente termina el triángulo uniendo los demás puntos con la regla no graduada.

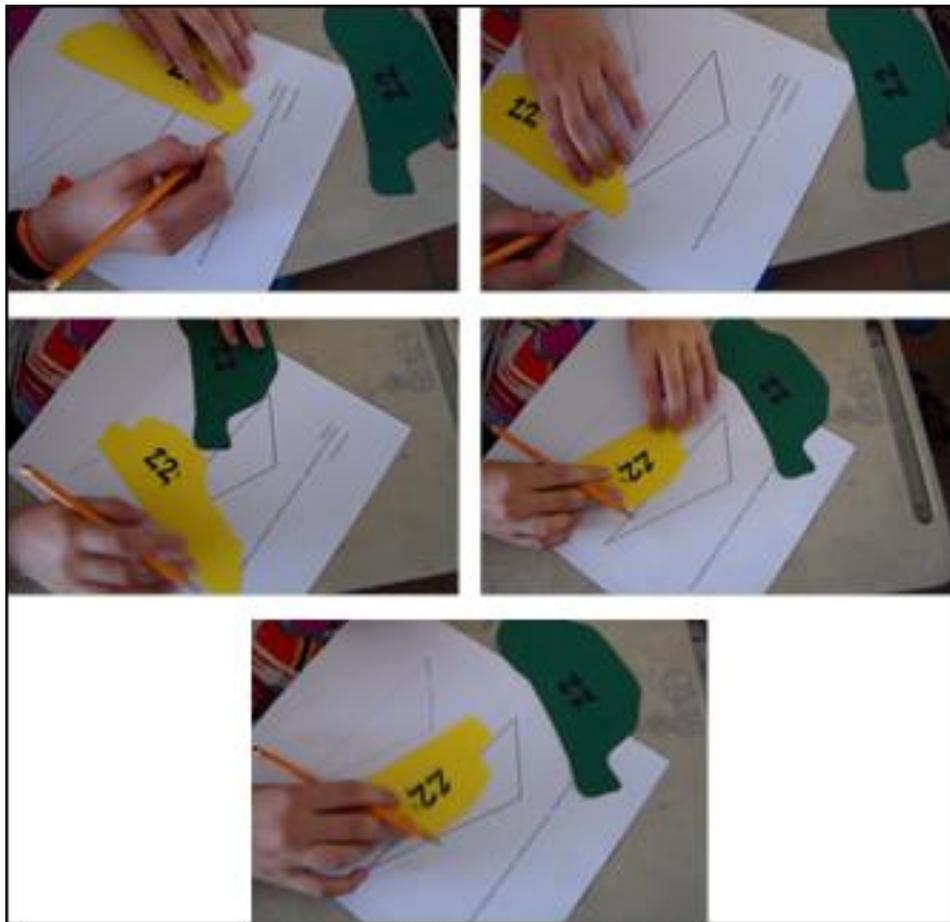


IMAGEN 35. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES Y LA SUPERFICIE COMO UNA REGLA.

2. Reproducción del triángulo usando la regla no graduada para copiar la longitud de los lados del triángulo. No es clara la forma de cómo se garantiza la igualdad de los ángulos.

En este grupo se encuentra también gran parte de los estudiantes, y se resumen los esfuerzos de ellos por realizar la actividad copiando los lados del triángulo dado, claramente la información que usan es insuficiente para garantizar la igualdad, ya que de este modo no se garantizan los ángulos en el desarrollo de la tarea de reproducción y esto es determinante para desarrollar la actividad, por lo tanto el triángulo que reproducen no es igual al dado. Ellos usan la superficie cualquiera pero como regla por la parte que consideran recta. A este grupo pertenecen los procesos de reproducción de los videos S1A5V3, S1A5V4, S1A5V5, S1A5V9 siendo en el video nueve en donde el profesor le explica al estudiante que la superficie usada como regla no es posible porque ese lado no es recto.

Este grupo se representa por la *Imagen 36* (tomada del video S1A5V3), en él se observa que el estudiante en todos los momentos que ilustra la imagen copia mediante el uso de la regla no graduada la longitud de cada uno de los lados del triángulo, sin garantizar de este modo la igualdad de los ángulos que debía tener su reproducción.

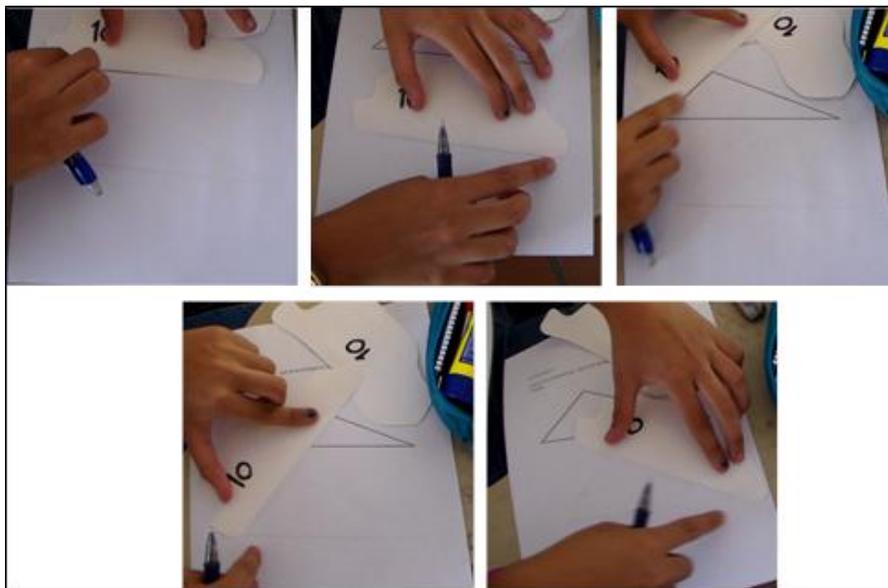


IMAGEN 36. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO LA REGLA NO GRADUADA COPIANDO LONGITUDES.

3. Reproducción del triángulo usando ambas herramientas, y copiando la longitud de los lados y los vértices con la superficie cualquiera. En este grupo se encuentra la reproducción de un estudiante; la *Imagen 37* da cuenta de tal proceso (tomada del video *S1A5E1ENTABLERO*).

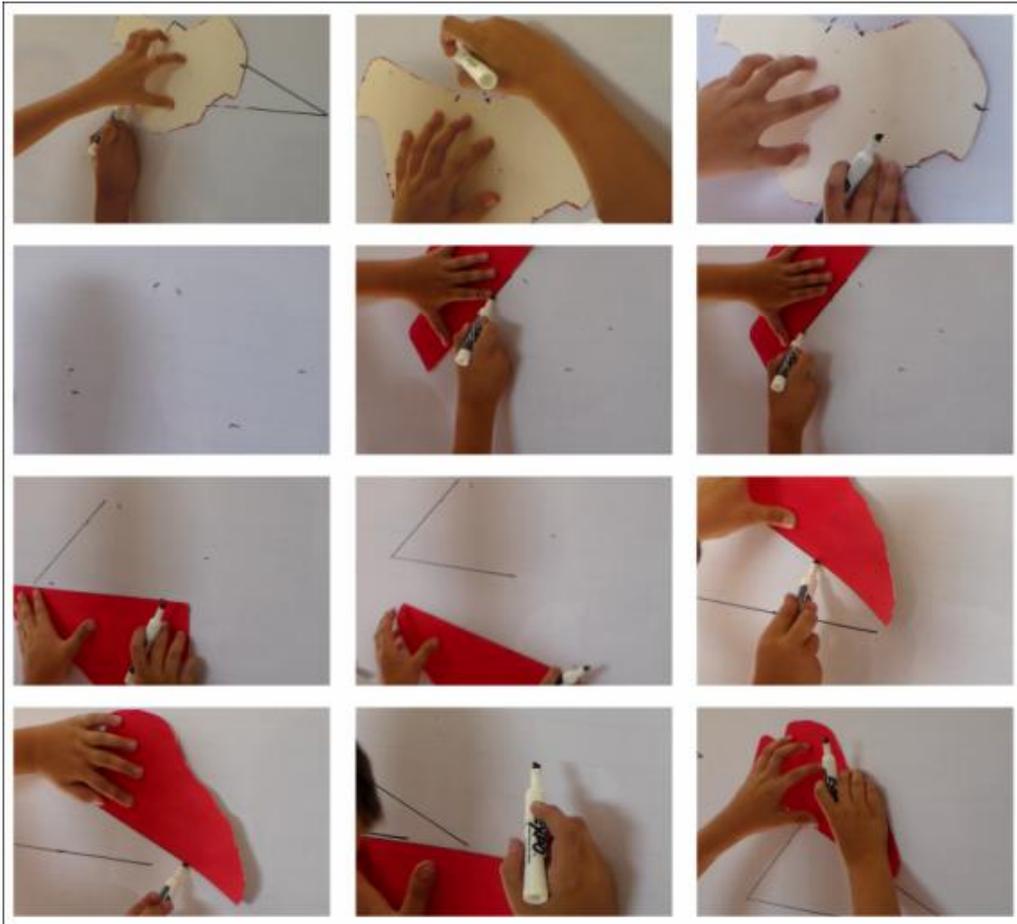


IMAGEN 37. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS DE REPRODUCCIÓN.

Como se puede observar en el momento uno, el estudiante pone sobre el triángulo dado la superficie cualquiera y sobre ella hace marcas que le indicaran por dónde van los lados del triángulo, seguidamente usa esta información como se observa en los momentos tres, cuatro y cinco para determinar dicha información en su triángulo, finalmente traza los lados del triángulo con el uso de la regla no graduada usando como guía las marcas que realizó inicialmente.

En conclusión los estudiantes tuvieron grandes dificultades grandes al realizar la actividad, la relación de la figura con el uso de las herramientas de reproducción no fue para nada evidente a tal punto que la mayoría no lograron realizar un triángulo igual al dado.

Todos menos uno de los estudiantes uso ambas herramientas considerándolas distintas, se hace esta aclaración porque otros estudiantes usaron ambas herramientas pero la superficie la usaron como una regla no graduada y trataron de hacerla informativa para copiar la longitud de algunos de los lados, se esperaba que los estudiantes comprendieran que los lados y los ángulos deben ser iguales y que los instrumentos dados posibilitan el desarrollo de tal actividad, pero tal objetivo no se logro es como si hubiesen dado un paso atrás porque no lograron superar la barrera visual que la superficie les impuso.

Como cierre de la Situación 1 al finalizar la actividad 5, se le entrega a los estudiantes el molde roto para que verifiquen su reproducción, en la *Imagen 38* del video *S1A5PRUEBADELANGULO 3* el estudiante se da cuenta que su triángulo tal ángulo es diferente, el profesor le indica que debe realizarlo de nuevo.

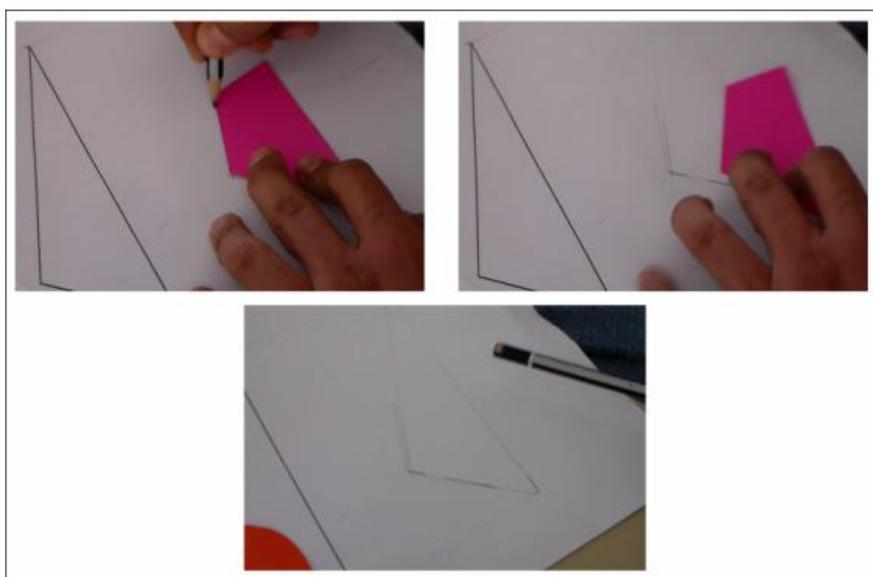


IMAGEN 38. VERIFICACIÓN DEL ÁNGULO CON EL MOLE ROTO EN LA ACTIVIDAD 5.

3.1.3.2 Ejecución y aplicación de la Situación 2.

Se considera para la situación dos la aplicación de tres de las cinco actividades, se llevan a cabo las Actividades 1, 2 y 5. Esta situación se diferencia de la situación uno en que las figuras propuestas en cada actividad cambian y se mantienen constantes las herramientas de reproducción: la escuadra y una regla no graduada.

El profesor inicialmente explica a los estudiantes en que consiste cada una de las actividades que se les presenta en esta situación; al igual que en la situación anterior el material se numera con el número de la lista de asistencia que le corresponde a cada estudiante, se continua haciendo esto con los mismos propósitos: que la información esté organizada lo más posible y que tal orden permita hacer el análisis local.

La selección de los videos usados en el análisis sigue teniendo los mismos criterios: el filtro se hace de acuerdo a una rejilla de información en la que se seleccionaron criterios relacionados al uso de la herramienta de construcción.

Se usan momentos de los videos que se seleccionaron para el análisis de la puesta en el aula de clase de la situación y se seleccionan imágenes que permiten observar el proceso de reproducción, dichas imágenes forman una imagen general de dicho proceso de construcción y están en el orden que muestra la siguiente ilustración.

1	2		1	2	3
4	5	0	4	5	6

ILUSTRACIÓN 14 ORDEN DE LAS IMÁGENES DE LOS VIDEOS USADOS EN EL ANÁLISIS.

Y se mantiene esta secuencia para los momentos que se capturen sin importar la cantidad de los mismos.

3.1.3.2.1 Situación 2 Actividad 1

En la primera actividad se les entrega a los estudiantes la escuadra y una regla no graduada como herramientas de reproducción; la figura a reproducir es el mismo triángulo de la Situación 1, porque es necesario que las Situaciones estén y los estudiantes empiecen la segunda Situación con una actividad que se relacione con la última actividad de la Situación 1.

En esta actividad se observa que hay un tipo de reproducción específico en los estudiantes de los que se tienen registros videográficos, tal tipo tiene algunas variaciones que se harán explícitas más adelante. Cuatro de cinco de los estudiantes usan ambas herramientas en el desarrollo de la actividad; haciendo referencia a la escuadra, la usan para trazar ángulos rectos y la regla no graduada se usa específicamente para medir longitudes y copiarlas, es decir hace de la regla no graduada una regla informativa.

En esta actividad se supera la dificultad que tenían los estudiantes, que olvidaban garantizar los ángulos del mismo en algunas de las Actividades de la Situación 1 al reproducir el triángulo, ya que en sus estrategias para llevar a cabo la actividad están pendientes de ello.

Por otro lado, un hallazgo importante es que todos los estudiantes en el desarrollo de la actividad hacen deconstrucción dimensional del triángulo dado, ellos trazan una línea nueva que no pertenece al contorno de la figura dada, como primer paso para lograr la reproducción: la altura del triángulo. Lo que constituye el enriquecimiento de esta figura ya que descomponen el triángulo en dos partes: dos triángulos semejantes como se puede observar en la Imagen 39, y luego copian la longitud de los lados del triángulo sobre un segmento mediante el uso de la regla no graduada.

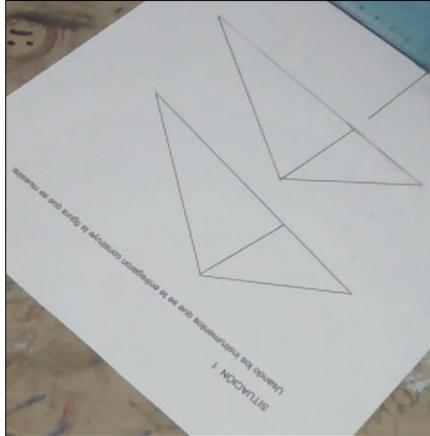


Imagen 39. DECONSTRUCCIÓN DE LA FIGURA DADA: DOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

A continuación se presenta el tipo de proceso de reproducción que hicieron los estudiantes en el desarrollo de la actividad y sus variantes.

1. Reproducción del triángulo usando ambas herramientas y haciendo una descomposición de la figura dada; este tipo de reproducción en la actividad se observa en la *Imagen 40* (tomada del video S2A1V3), cuatro de cinco de los estudiantes hacen del mismo modo la actividad, en algunos casos se presentan algunas dificultades que se superan de forma inmediata, de estas dificultades se da cuenta más adelante.

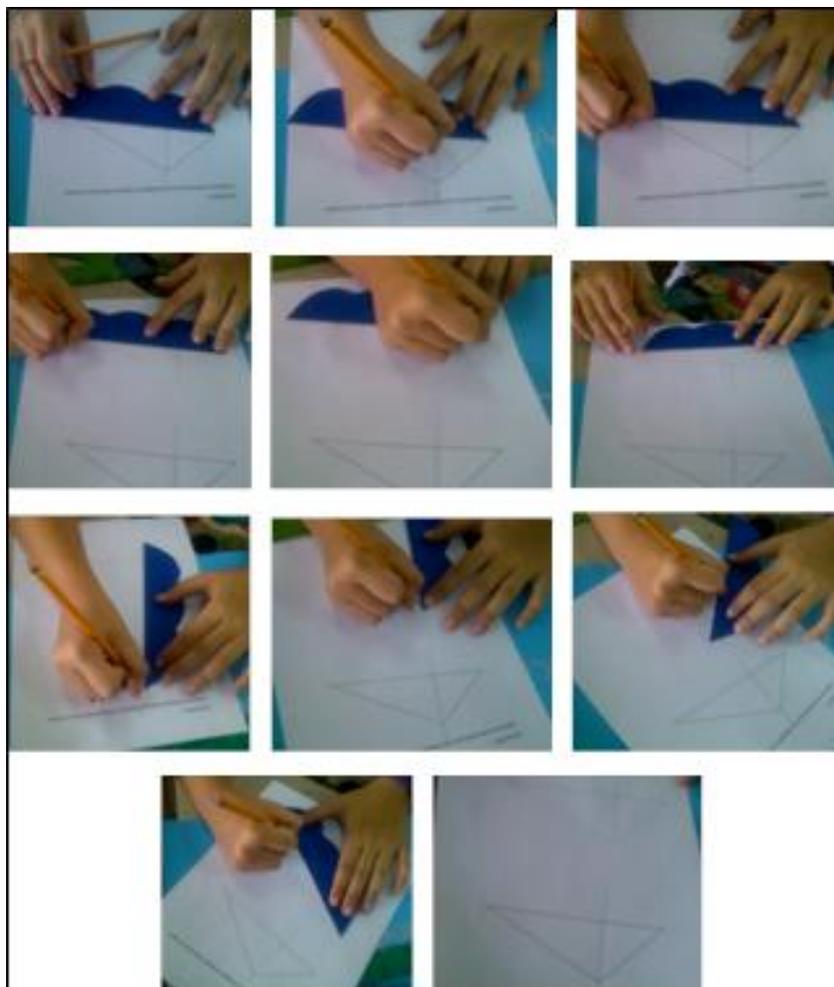


IMAGEN 40. REPRODUCCIÓN DEL TRIÁNGULO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS Y HACIENDO UNA DESCOMPOSICIÓN DEL MISMO.

En esta imagen se puede observar que, como primer paso, el estudiante traza la altura del triángulo y la copia en donde estará su reproducción; en seguida y con la ayuda de la regla no graduada como se puede observar en los momentos dos y tres, copia la longitud del lado inferior del triángulo y el lugar donde va la altura del mismo. En los momentos cuatro y cinco copia esta información en su reproducción y de tal forma obtiene lo que se puede observar en el momento 6; en el momento siete mide la altura del triángulo dado y en el momento ocho la copia en su reproducción, finalmente en los momentos nueve y diez traza los lados del triángulo restantes y logra hacer la actividad como se puede evidenciar en el momento 11.

En esta reproducción específicamente no se evidencia el momento exacto en el que el estudiante traza un ángulo recto, usando la escuadra para copiar la altura que trazó en el triángulo, pero si en su explicación, para ser más precisos tal paso se muestra en la *Imagen 41* (tomada del video S2A1V2):

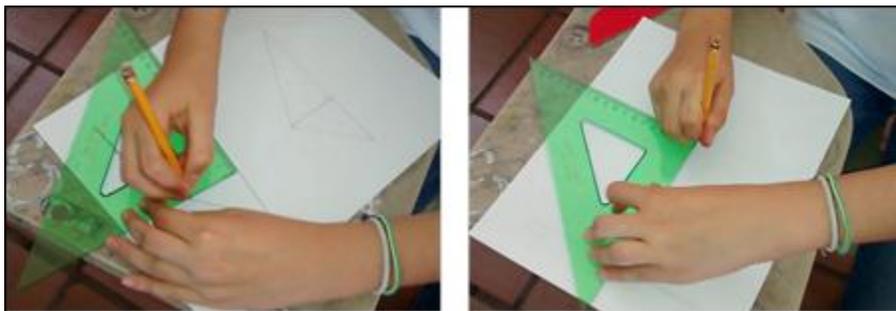


IMAGEN 41. TRAZO DE UN ÁNGULO RECTO PARA COPIAR LA ALTURA DEL TRIÁNGULO DADO.

Las dificultades que se mencionaron se muestran en la *Imagen 42*, dichas dificultades se encuentra en diferentes videos, razón por la cual se extrae de cada uno el momento que permite observar lo sucedido y se agrupan en una única imagen.

Los tres primeros momentos pertenecen al video S2A1V1 y en estos se puede observar que el estudiante intenta copiar la altura del triángulo trazando un ángulo recto, pero la forma en como construye el ángulo recto no es la más indicada porque pareciera que está trazando tal ángulo a ojo, se le aconseja hacer dicho ángulo de una forma más confiable y procede a hacerlo como muestra el tercer momento. Los momentos cuatro a seis pertenecen al video S2A1V2 y dan cuenta de la dificultad que un estudiante tuvo al tratar de copiar el ángulo recto, ya que la escuadra no pasaba en este momento por el vértice del triángulo y es justo lo que necesitaba, al pedirle que explique lo corrige inmediatamente, como se puede observar en el momento cinco, y logra trazar el ángulo recto respecto al vértice (la altura) como se observa en el momento seis.



IMAGEN 42. DIFICULTADES EN LA ACTIVIDAD 1 DE LA SITUACIÓN 2.

De esta actividad se puede concluir que el proceso por el cual deciden realizar la actividad es el mismo para todos, que en tal proceso los estudiantes hacen una descomposición del triángulo dado (dos triángulos semejantes), como primer paso en la reproducción de tal figura y que esto nos indica que hay un avance en la forma en la que los estudiantes ven la figura, ya que la percepción dominante 2D no es lo único que ven, ellos ven dos triángulos semejantes que no están determinados por el contorno de la figura propuesta, además usan la escuadra como apoyo en todo el proceso de reproducción, con ella garantiza ángulos rectos que son el fundamento de su reproducción.

3.1.3.2.2 Situación 2 Actividad 2

En esta actividad se entrega a los estudiantes las mismas herramientas que en la actividad anterior: una escuadra y una regla no graduada; la figura a reproducir es el un rombo.

En esta actividad se observa que hay variedad en las reproducciones de los estudiantes, de tal forma que no fue posible categorizarlos en tres grupos como se ha hecho con las demás actividades. Sin embargo, se especifican las dificultades que tienen algunos estudiantes al hacer la reproducción de la figura dada y tales dificultades se harán explícitas.

Para efectos del análisis se presentan los procesos que consideramos arrojan información más precisa y clara, aun así se puede observar que todos los estudiantes trazan líneas de apoyo en su proceso de reproducción o hacen una descomposición de la figura, en ambos casos se puede deducir que la forma estática en como veían la figura dada en las primeras actividades ha cambiado. En la actividad anterior y en esta se puede observar que los estudiantes hacen deconstrucción dimensional de la figura dada.

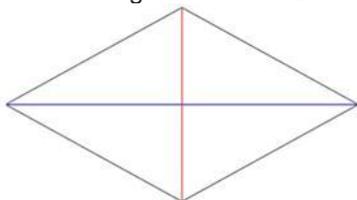
En esta actividad siete de ocho de los estudiantes usan ambas herramientas en la reproducción de la figura dada, se puede observar que no presentan mayor dificultad el uso de los mismos. Si se considera que la dificultad es mayor que en las actividades de la Situación 1, porque ninguno de los instrumentos describe el contorno de la figura dada, entonces se podría decir que los estudiantes están en un nivel superior en este tipo de actividades que en aquel entonces, ya que logran realizar la reproducción de la figura dada usando varias formas de hacerlo.

A continuación se presentan los tipos de reproducciones dados en esta actividad¹⁰:

1. Reproducción del rombo considerando la longitud de los lados. En este grupo se encuentran cuatro de las reproducciones que se grabaron, en ellas se observa que los estudiantes usan ambas herramientas y que uno tiene dificultades para realizar la reproducción, porque se limita a garantizar la igualdad de los lados y olvida que también deben garantizar la igualdad de los ángulos; otro considera que los lados y los ángulos deben ser

¹⁰ Observación: Con la intención de hacer de forma clara el análisis local de esta actividad, se da una breve explicación de cómo se nombran los objetos que los estudiantes hicieron durante el desarrollo de la actividad, por ejemplo que el rombo está formado por cuatro triángulos iguales.

- Diagonal mayor: En la ilustración 15 es la diagonal azul
- Diagonal Menor: En la ilustración 15 es la diagonal roja



iguales, otros realizan la actividad trazando las diagonales del rombo. A continuación se presentan las reproducciones de este tipo con sus respectivas variables:

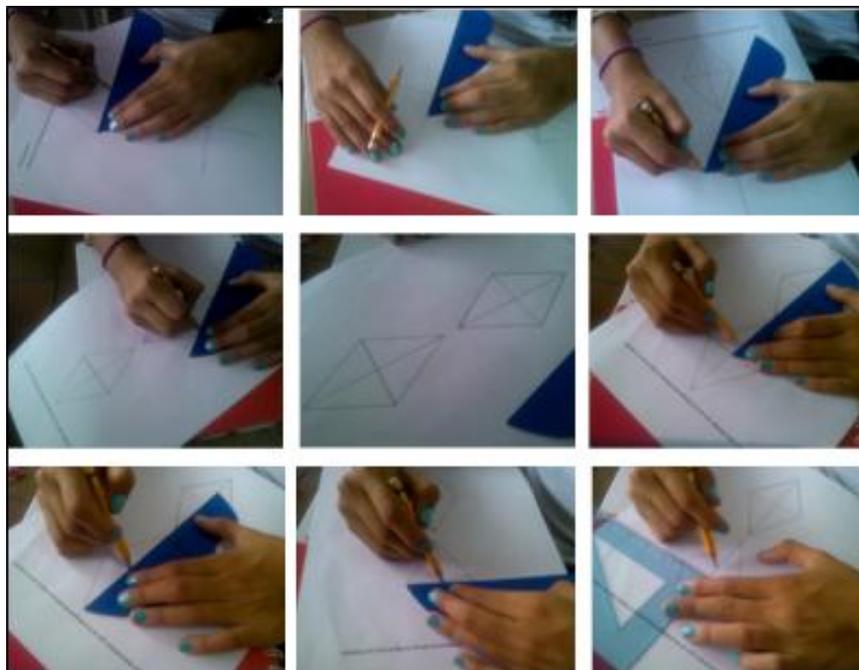


IMAGEN 43. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO SUS DIAGONALES, IGUALDAD DE LADOS Y DE ÁNGULOS.

La *Imagen 43* (tomada del video *S2A2V1.1*) muestra el proceso de reproducción de una de las estudiantes que pertenece a este grupo, se puede observar en el momento uno y dos que la estudiante ha trazado las diagonales del rombo y en seguida copia la longitud de dichas diagonales, pero no de forma arbitraria, ella marca con un punto en la regla no graduada el centro de las diagonales y la longitud que copia es la que va de cada extremo hacia el punto medio (momento seis, siete y ocho), explica (cómo se puede observar en el momento nueve) que lo primero que consideró fue que todos los ángulos (de los triángulos que determinaron las diagonales) son rectos; luego, usando la regla no graduada, une los puntos que ha marcado con anterioridad logrando culminar la actividad, como se puede observar en el momento cinco.

El video *S2A2V1* ilustra mejor lo que se acaba de decir, ya que este da cuenta del proceso de reproducción que hizo la estudiante (razón por la cual la imagen tiene el mismo nombre) porque se le pidió hacerlo de nuevo, en el momento uno se

observa que ella traza una línea vertical y que sobre ella copia ángulos rectos con la escuadra, como se puede apreciar en los momentos dos, tres y cuatro, luego continua con el proceso descrito anteriormente. Se puede observar que ella usa la escuadra para garantizar que las diagonales del rombo forman ángulos rectos.



IMAGEN 44. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO SUS DIAGONALES, IGUALDAD DE LADOS Y DE ÁNGULOS.

En este grupo se encuentra la reproducción del rombo que el estudiante no logra hacer, porque considera únicamente la longitud de los lados y no se asegura de que los ángulos sean iguales, estableciendo de alguno modo un criterio que le garantice esto.

En la *Imagen 45* (tomada del *video S2A2V5* Y *video S2A2V6*) se puede observar que lo primero que hace el estudiante es usar la regla no graduada para copiar con ella la longitud de cada uno de los lados (como se puede observar en los primeros cuatro momentos), el quinto momento el estudiante se detiene porque sospecha que no le va a quedar igual, de cualquier forma lo termina (como se puede observar en el momento seis); de esto se logra concluir que no logra hacer

la reproducción del rombo, porque no consideró la importancia de garantizar la igualdad de los ángulos de la figura dada.

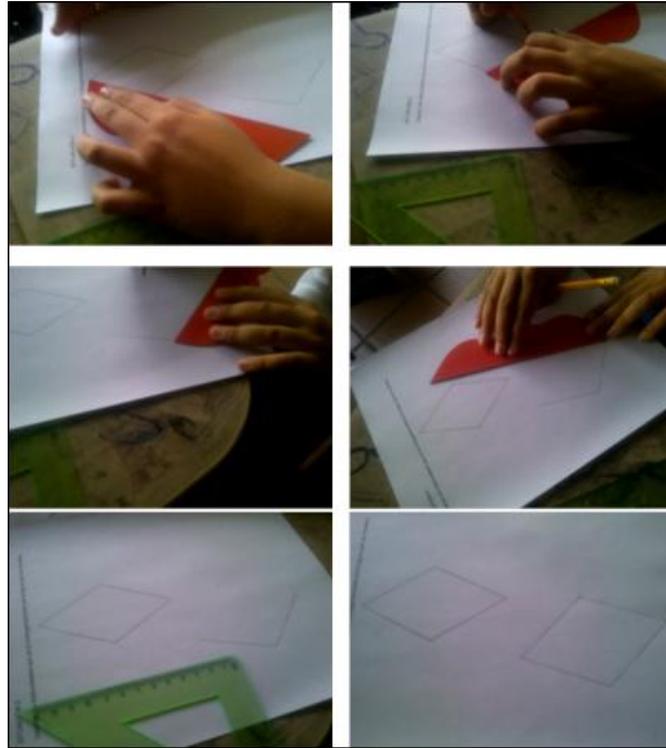


IMAGEN 45. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS ÚNICAMENTE.

Estos son las únicas reproducciones que se agrupan, las demás son diferentes y se hace el análisis local de cada una de ellas.

2. En este segundo tipo de reproducción el estudiante decide usar la escuadra como un molde, este estudiante se esfuerza por realizar el contorno del triángulo considerando la longitud de los lados; explica que sabe que los ángulos son iguales porque la escuadra así se los describe. Realmente no se esperó que los estudiantes realizaran esta actividad de esta forma y por eso no se hizo algo que evitara tal situación, porque el que la estudiante use la escuadra como un molde indica que su forma de ver las figuras no está muy alejada de una visualización icónica.

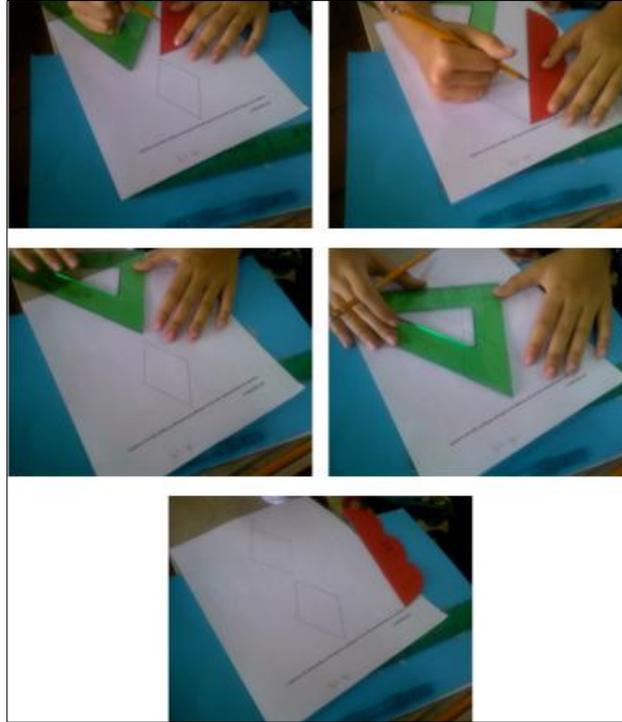


IMAGEN 46. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO LA ESCUADRA COMO UN MOLDE.

La *Imagen 46* (tomada del *video S2A2V3*) muestra en los momentos uno y dos que consideró la longitud de cada lado para luego cuando trazara los ángulos que describe la escuadra (momentos tres y cuatro) pudiese trazar los lados del rombo, explica que de igual forma para la parte inferior de la figura, es de aclarar que por la calidad del video en el momento 5 no es tan evidente que su figura no es igual que la dada porque es algo más ancha, es decir sus ángulos son más grandes.

3. Este tipo de reproducción se hace mediante el trazo de los vértices del rombo, pero considerando únicamente la longitud de sus lados, razón por la cual el estudiante no logra que su reproducción sea igual a la figura dada.

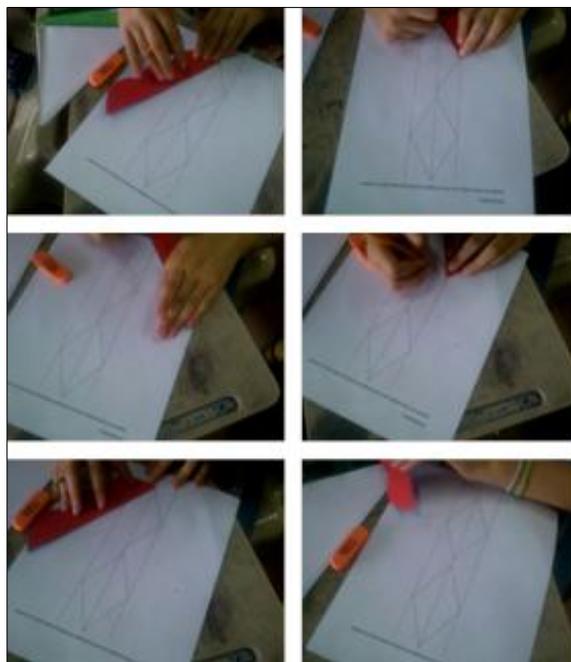


IMAGEN 47. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO TRASLADANDO LOS VÉRTICES CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS.

La Imagen 47 (tomada del video S2A2V7) muestra como el estudiante trata de realizar la reproducción del rombo copiando con la regla no graduada la longitud de los lados (momentos uno y dos), en el momento tres se puede observar que borra el lado que ha copiado porque no sabe por dónde trazar tal lado, y lo intenta varias veces hasta que lo traza por donde considera debe hacerlo y así termina de hacer el rombo (como se puede observar en el momento seis), pero su reproducción no es igual a la figura que se le dio en la actividad, esto porque su criterio no garantiza la igualdad de los ángulos de las figuras.

4. Esta última reproducción es de todas la que más llama la atención, porque lo que el estudiante hace muestra que él ha cambiado su forma de ver en matemáticas, ya que deconstruye la figura dada y considera que para que se haga la actividad debe garantizar la igualdad de los lados y de los ángulos de las figuras.

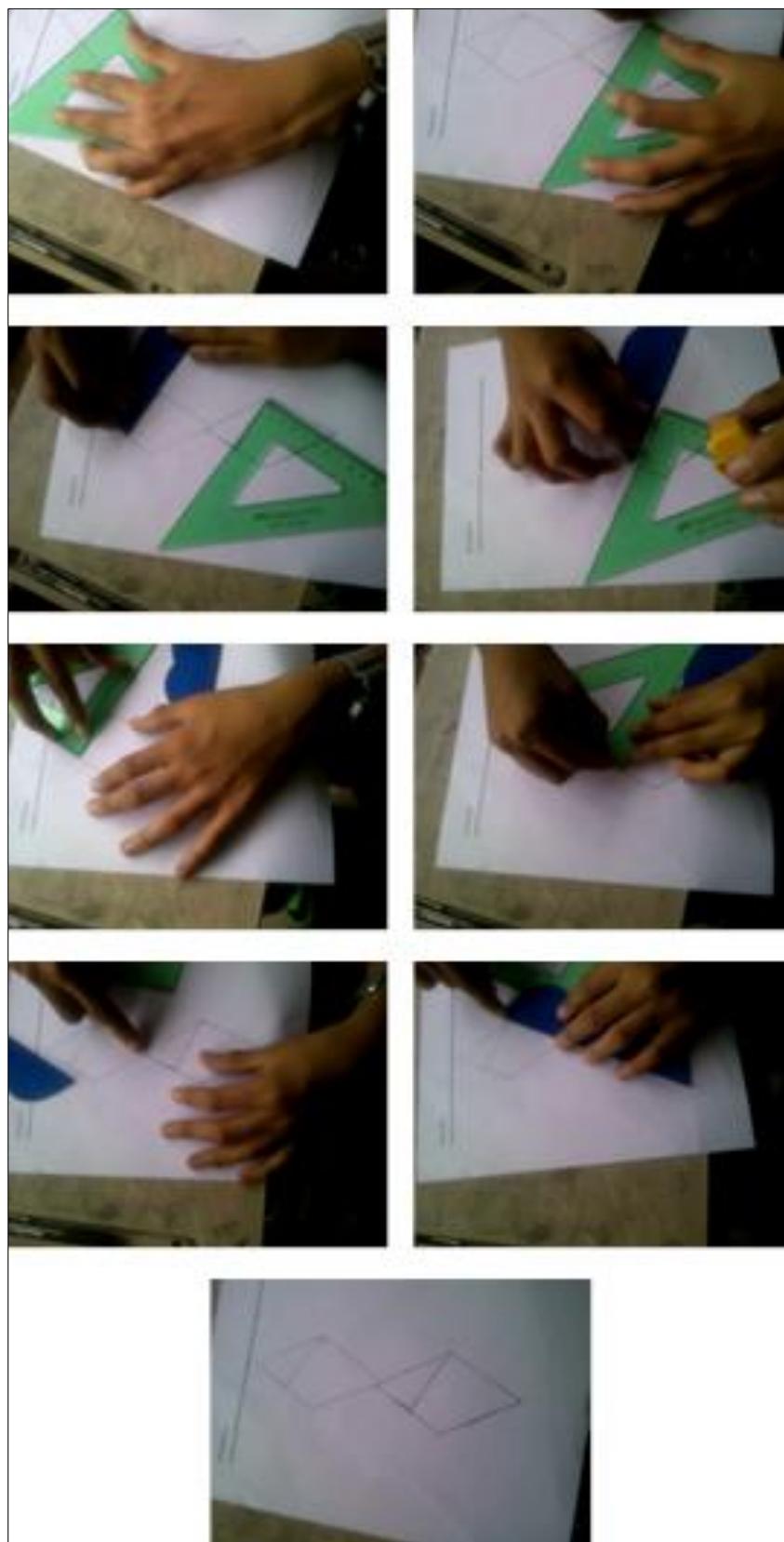


IMAGEN 48. REPRODUCCIÓN DEL ROMBO USANDO AMBAS HERRAMIENTAS. DECONSTRUCCIÓN DE LAS FIGURAS.

En esta *Imagen 48* (tomada del video S2A2V8) muestra el proceso de reproducción que el estudiante explica, lo que hace el estudiante (primer momento) es hacer una deconstrucción de la figura dada de la forma como lo indica la Ilustración 16, puede ser que el estudiante logre ver en el rombo un paralelogramo y por tal razón es que construye en alguno recto de tal forma.

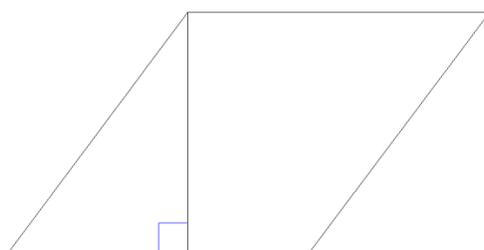


ILUSTRACIÓN 15. DECONSTRUCCIÓN

A continuación se expone la explicación textual del estudiante:

- E21: Copiar este ángulo el de acá (Explica que lo primero que hizo fue copiar el ángulo que muestra en el momento uno de la Imagen 48) para luego trazarlo acá (momento dos de la Imagen 48)...
- E21: Después con esta regla (la regla no graduada) tome la medida de este (la altura del triángulo que ha trazado, como se puede observar en el momento cuatro) de lo que media esto y lo copie acá (en su reproducción)...
- E21: Después hice una línea, bueno tome lo que me dio el ángulo de acá (ángulo descrito en el momento cinco) y lo copie acá (momento seis), hice una línea (momento siete) después tome la medida que era desde esta línea hasta la esquina (él se refiere a la distancia que indica en la Imagen 49) y la copie acá (en su reproducción)...
- E21: Después tome la medida de lo que media desde esta línea hasta acá (longitud de los lados del rombo) y la trace (en su reproducción)...
- Y después tome la medida de lo que me da este de acá (el lado que indica el momento ocho de la Imagen, y lo traza)...
- E21: Y después uní todas estas líneas (los lados que le faltaban del rombo).

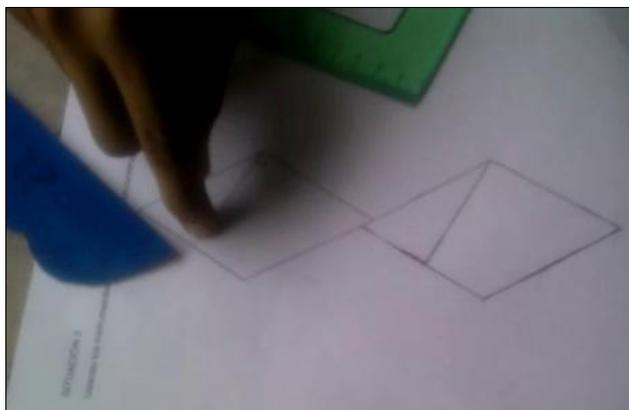


Imagen 49. Complemento Imagen 48.

En general se puede concluir en esta actividad que la gran mayoría de los estudiantes han cambiado la forma de ver las figuras en geometría de forma parcial, porque en sus procesos de reproducción, en algunos casos ellos prolongan líneas, o construyen nuevas líneas para lograr la reproducción que no pertenecen al contorno de la figura dada, además descomponen la figura dada en otras, como en el tipo de reproducción uno de esta actividad en donde algunos estudiantes descomponen el rombo en cuatro triángulos iguales.

Se observa que pocos de los estudiantes aún tienen dificultades para garantizar en su proceso de reproducción la igualdad de las figuras, esto porque en tal proceso los ángulos no son iguales y que estos mismos estudiantes son los que usaron solamente la regla no graduada, lo cual reafirma que su preocupación está centrada en trazar los lados en su reproducción iguales a los de la figura dada.

Se observa la resistencia de una estudiante por dejar de usar una de las herramientas como un molde o como una plantilla, ya que para ella resultó más fácil usar la escuadra como un molde porque de tal forma la herramienta guía el lápiz.

3.1.3.2.3 Situación 2 Actividad 5

En esta actividad se entrega a los estudiantes las mismas herramientas que en la actividad anterior: una escuadra y una regla no graduada; la figura a reproducir es una cometa cóncava.

En esta actividad se observan hay variedad en las reproducciones de los estudiantes de tal forma que no fue posible categorizarlos grupos como se ha hecho con las demás actividades, en el análisis local de la situación. Por tal razón se hace el análisis en base a todas las reproducciones que hicieron los estudiantes. Algunas reproducciones grabadas por los estudiantes no se incluyen porque no se grabaron completos.

Cinco de siete de los estudiantes al igual que en la anterior actividad trazan líneas que no pertenecen al contorno de la figura, como apoyo en el proceso de reproducción y en tal proceso la figura dada se descompone como se puede ver en la *Imagen 55* del *video S2A5V7* en dos triángulos iguales o como en la *Imagen 52* del *video S2A5V8* en donde se puede ver un triángulo isósceles en la parte inferior de la cometa.

Dos de siete de los estudiantes no lograron superar la dificultad de que solo con garantizar la igualdad en la longitud de los lados de la figura dada no es suficiente criterio para que su reproducción sea igual a la dada, de tal forma intentan hacer la actividad pero no reproducen la cometa.

A continuación se presentan los tipos de reproducciones dados en esta actividad:

1. Reproducción de la figura dada tratando de trasladar los vértices. Este estudiante trata de hacer la reproducción de la cometa trasladando los vértices mediante el trazo de las rectas que obtienen dichos vértices (como se puede observar en el momento uno y dos de la *Imagen 50*), también considera la longitud de los lados de la cometa esperando que de tal forma pueda realizar la actividad.

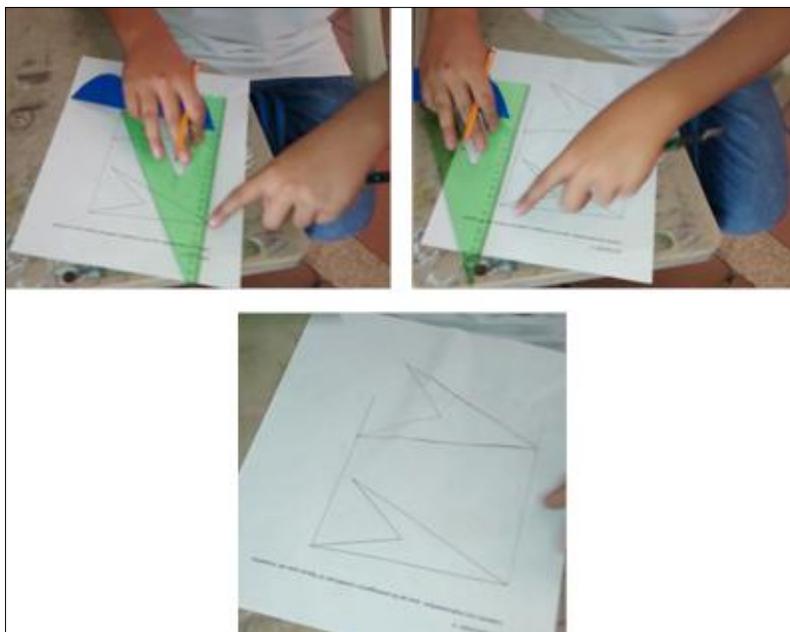


IMAGEN 50. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA TRATANDO DE TRASLADAR LOS VÉRTICES.

La Imagen 50 (tomada del video S2A5V4) muestra la explicación que da el estudiante cuando responde ¿Cómo lo hiciste?, como se puede observar en los momentos uno y dos él está diciendo que primero traza las líneas por las que pasa un lado de la cometa y que luego copia la longitud de tal lado y la traza en su reproducción, luego con la escuadra empieza a trazar la longitud de los demás lados, hasta que termina; la cometa que él hace no es igual a la dada, su cometa tiene ángulos más amplios y la hace diferente. Este estudiante no supero la dificultad que desde las primeras actividades se presenta en algunas: que garantizar la igualdad de los lados no es un criterio que garantice la igualdad de las figuras, que es necesario considerar una forma en la que los ángulos sean iguales. El uso de la escuadra se limita al trazo de líneas y a la toma de longitudes que luego se copian.

2. Reproducción de la figura dada copiando la longitud de sus lados. Este estudiante trata de hacer la actividad considerando únicamente la longitud de los lados y el lugar que ocupan en la cometa que se le entrego para reproducir, él al igual que el compañero de la reproducción anterior usan la escuadra únicamente para trazar líneas y copiar la longitud de los lados.

Se puede observar que no logra hacer la reproducción, porque en su reproducción no se garantiza de ningún modo la igualdad de los ángulos en su figura con los ángulos de la figura dada, lo cual nos dice que el estudiante no cambió la forma en la que ve las figuras, no logro salir de la visualización icónica.

El uso de los instrumentos de construcción que hizo no fue progresivo, él se esfuerza afanosamente por hacer el contorno de la figura olvidando que hay criterios que debe preservar: la igualdad de los lados y de los ángulos que constituyen la figura dada.

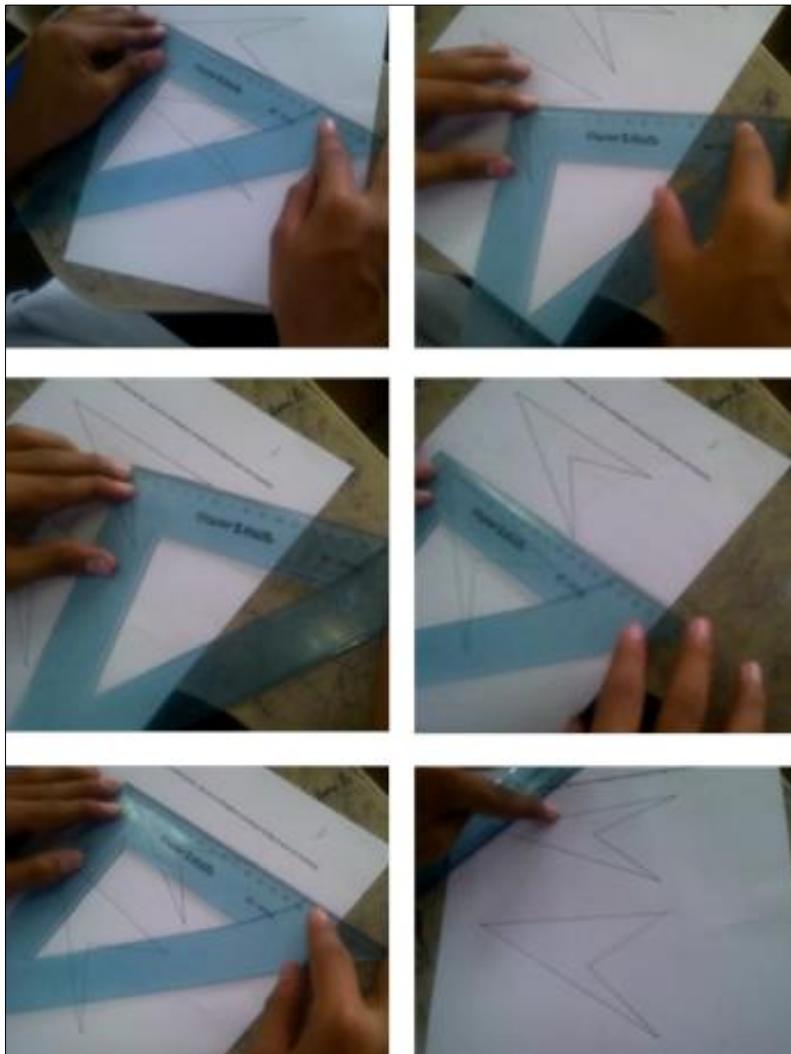


IMAGEN 51. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA COPIANDO LA LONGITUD DE SUS LADOS.

La imagen 51 (tomada del video S2A5V6) muestra como el estudiante no reproduce la figura porque solo considera sola la longitud de los lados de la cometa y olvida que debe garantizar la igualdad de los ángulos también. En los momentos uno, tres y cinco el estudiante indica que primero copia con ayuda de la escuadra la longitud de los lados y que seguidamente (momentos dos, cuatro) los traza en su reproducción; se puede observar en el último momento que su reproducción es diferente a la figura dada.

3. Reproducción considerando un triángulo inscrito en la figura dada. La estudiante explica que hay un triángulo, entonces ella procede a tomar las medidas de este, y partiendo de esta información ella fue formando la figura, mediante el uso de la regla no graduada. Podría pensarse por su explicación que su esfuerzo está centrado en copiar la longitud de los lados de la figura únicamente, pero tal caracterización está pensada después de que ella reproduce el triángulo isósceles que está en la base de la cometa, y tal acción asegura la igualdad de su reproducción con de la cometa dada ya que esto determina los ángulos y lados de la misma.

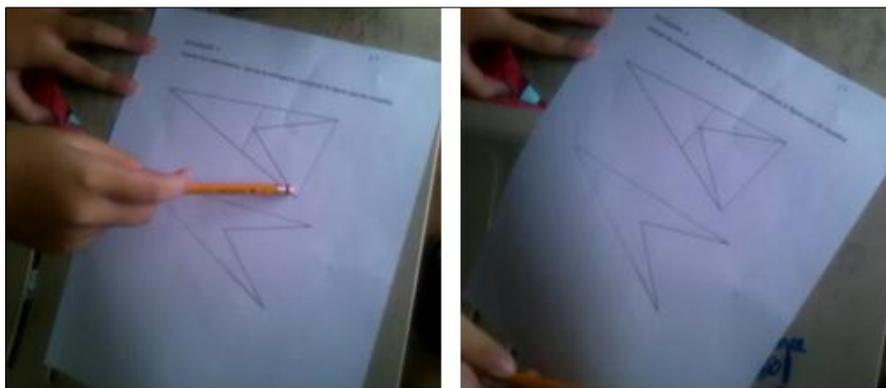


IMAGEN 52. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA CONSIDERANDO EL TRIÁNGULO INSCRITO EN LA FIGURA DADA.

La imagen 52 (tomada del video S2A5V8), muestra el proceso de producción de la estudiante que considera en primera instancia el triángulo isósceles, que está en la base de la cometa dada, ella se asegura de reproducir uno igual a este y desde ahí continua la actividad hasta realizar la reproducción.

4. En este grupo hay dos reproducciones en las que parece el estudiante no considera la información necesario porque da la impresión de que está pensando únicamente en garantizar la longitud de los lados de la cometa, pero no es así, ellos garantizan la igualdad también de los ángulos y logran reproducirla.

4.1. Reproducción considerando la longitud de los lados y el centro de la figura dada. Este estudiante hace la reproducción de la figura dada usando únicamente la regla no graduada, con esta traza la longitud de uno de los lados y también el centro de la figura lo que le permite hacer la reproducción de la cometa.

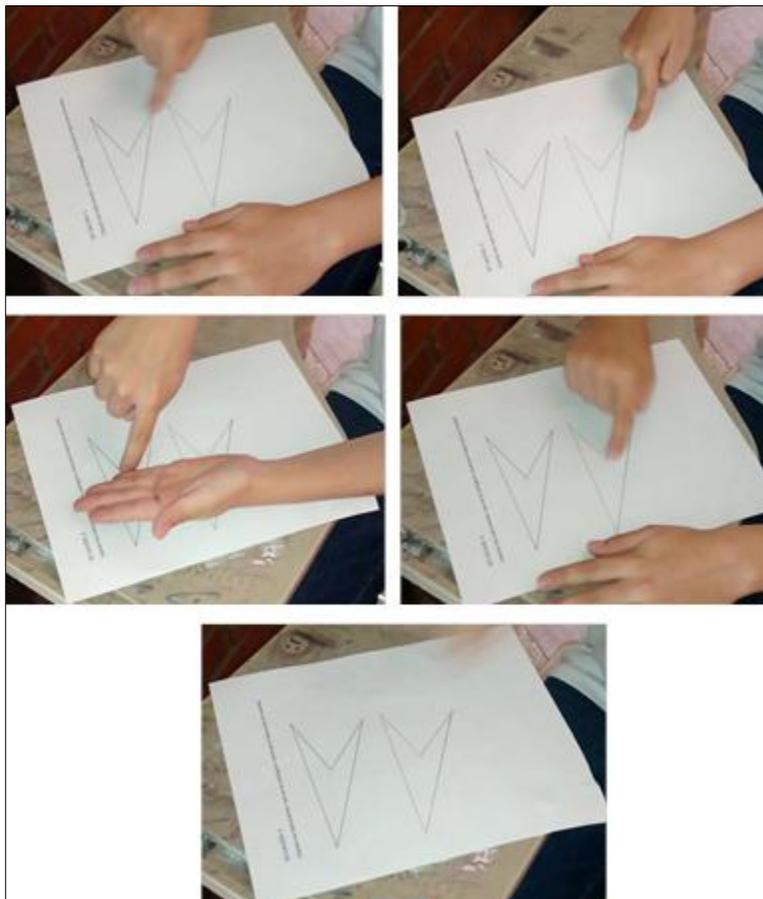


IMAGEN 53. REPRODUCCIÓN CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS Y EL CENTRO DE LA FIGURA DADA.

La imagen 53 (tomada del video S2A5V5) muestra que, el estudiante traza una línea igual al lado superior de la cometa, y con la regla que ubica en el centro de la misma copia el vértice del triángulo isósceles que está inscrito en la cometa (como se puede observar en el momento uno) y luego estima el centro de su reproducción (momento dos), luego traza una línea por la que traslada el vértice derecho de la cometa, y luego copia con la regla no graduada la base de la cometa y la traza en su reproducción, y luego procede a unir los lados que restan.

Observación: la imagen no da cuenta completamente de la descripción que se da sobre el proceso de reproducción hecho por el estudiante porque en el video solo aparece la explicación cuando él ya ha realizado la actividad.

- 4.2. Reproducción considerando la longitud de los lados y el centro de la figura dada. La reproducción que realiza este estudiante es similar a la anterior, pero en esta si se puede ver la reproducción completa de la figura propuesta porque hay registro fílmico de ello.

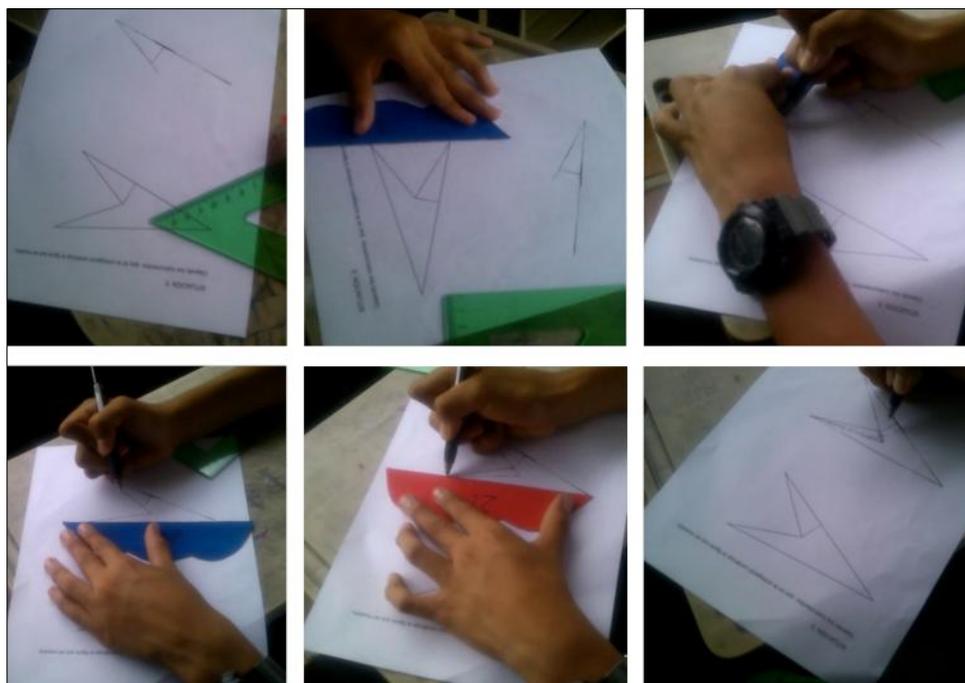


Imagen 54. REPRODUCCIÓN CONSIDERANDO LA LONGITUD DE LOS LADOS Y EL CENTRO DE LA FIGURA DADA.

La imagen 54 (tomada del video S2A5V9), muestra como el estudiante traza hacer un ángulo recto dentro de la cometa dada, con el propósito de marcar el centro por

el cual se encuentra el punto medio de la figura, seguidamente copia con la regla no graduada (momento dos) la longitud de la base de la cometa y la traza en su reproducción (momento tres), luego traza con esta información los lados que faltan, en un instante el estudiante hace un trazo equivocado (se puede observar tal trazo en el momento seis) pero inmediatamente lo corrige y termina la actividad.

5. Reproducción descomponiendo la figura dada en dos triángulos. La estudiante lo primero que hace es descomponer la figura dada mediante el trazo de una línea, al hacer esto se obtiene un triángulo que a su vez ella descompone en dos triángulos iguales, para realizar esta tarea ella usa ambas herramientas; la escuadra para dividir el triángulo obtenido en dos triángulos rectos, y la regla para hacer un solo trazo de la base de dicho triángulo. Se puede observar que para esta estudiante el uso de las herramientas en las actividades si fue progresivo porque logra hacer descomposición figural para de tal forma hacer la actividad, además la forma en la que ve la figura no se limita a la visión de un contorno cerrado, ella identifica más elementos constitutivos de la figura dada que no pertenecen a dicho contorno.

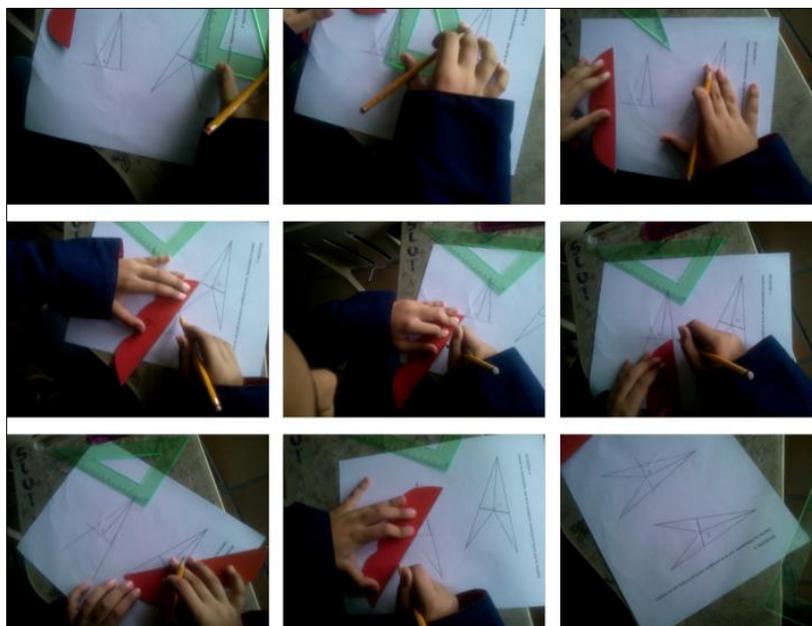


Imagen 55. REPRODUCCIÓN DE LA FIGURA DADA

La imagen 55 (tomada del video S2A5V7), la estudiante explica que primero traza una línea en la que descompone la figura, mediante tal línea determina un triángulo (el que ha reproducido en el momento uno) y luego lo divide en dos triángulos iguales; seguidamente explica que en tal triángulo hay dos ángulos rectos que ella traza en su reproducción usando la escuadra (momento uno y dos), y sobre esto traza la longitud de los lados usando la regla no graduada como informativa (hace marcas en ella); seguidamente copia la longitud de las partes que le falta de la cometa en su figura (momentos del cuatro al ocho) y logra hacer la reproducción (como se observa en el noveno momento).

De esta actividad se pueden decir que para muchos estudiantes fue un reto el usar los instrumentos dados para reproducir la figura propuesta y entonces decidieron hacer la reproducción considerando únicamente la longitud de los lados de la figura, con lo cual no lograron tal reproducción.

Otros estudiantes consideran la longitud de los lados de la figura en su reproducción pero no como único criterio a considerar, ellos encuentran la forma de garantizar la igualdad de los ángulos de su figura con la dada y entonces realizan la actividad; otros estudiantes hacen descomposición de la figura dada como primer paso en su tarea de reproducción y seguidamente establecen criterios de igualdad y realizan la actividad.

La mayoría de los estudiantes logran ver las figuras de un modo más dinámico en comparación a la situación 1, pero otro tanto no superar la barrera visual de la percepción de las figuras en 2D y tratan de hacer el contorno de la figura dada aun cuando en su forma de reproducir la figura no se garantiza la igualdad.

CONCLUSIONES

En el esfuerzo por encontrar situaciones en el contexto de un experimento de enseñanza, que promovieran un cambio de mirada sobre las figuras en geometría a través de la actividad cognitiva de la construcción se toma la decisión de hacer

tareas de reproducción, ya que en estas se puede observar que tan lejos o cerca estuvimos de los objetivos planteados en el presente trabajo, porque los procesos de construcción dependen en gran parte de las restricciones de las herramientas usadas.

Considerando que la actividad cognitiva de Construcción y la Visualización están estrechamente vinculadas, ya que la construcción guía el proceso de la visualización aun cuando no dependa de ella, de acuerdo con esto podemos concluir que:

- La actividad de construcción apoya a la visualización en gran parte en la Situación 2; se observa en las actividades realizadas que la mayoría de los estudiantes tienen progreso en la forma de ver las figuras, ya que ellos consideran la existencia de elementos de la figura que no están derivados o determinados por el contorno de la figura, es decir pasan la barrera de la percepción 2D que predomina la forma de ver, están considerando elementos que no son contemplados cuando se ve de forma icónica las figuras.
- En ambas situaciones y en algunas actividades, la minoría de los estudiantes no logran cambiar la forma en la que ven las figuras, en su afán por hacer la reproducción de la figura, se esfuerzan por lograr el trazo del contorno de ella, y en tal afán olvidan que hay criterios diferentes a la igualdad de la longitud de los lados que deben tener en cuenta, para hacer que su figura y la propuesta sean iguales; su interés principal está centrado en trazar lados iguales, y cuando se trata garantizar la igualdad de ángulos en sus reproducciones no hay garantía, por lo que la figura que reproducen es diferente a la dada.

Y que el proceso de construcción depende en gran parte de la utilización de un instrumento, que da la posibilidad de experimentar las propiedades geométricas como limitaciones de construcción, además todo cambio de instrumento entraña un cambio en las propiedades geométricas que deben ser movilizadas de manera explícita y es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos

pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas; considerando esto se puede concluir que:

- Los moldes usados apoyaron la reproducción del cuadrado y del triángulo dado de la situación 1 para la gran mayoría de estudiantes, podría ser porque determinan parte del trazo de la figura dada, algunos estudiantes aun cuando el instrumento tiene relación directa con el contorno de la figura no lograron establecer tal relación y no lograron usarla mediante la reproducción de la misma; en ocasiones se usa una parte del molde como regla no graduada para copiar longitudes.
- En ambas situaciones las reglas no graduadas apoyan la reproducción de las figuras propuestas y se hacen informativas, los estudiantes las dotan de información haciendo marcas sobre ellas para copiar la longitud de los lados o la posición de cierto trazo. En otros casos los estudiantes generalizan este procedimiento y cuando ninguna de las herramientas determina parte del contorno de la figura, tratan de forzar la reproducción de la figura propuesta copiando la longitud de los lados de ella, y de tal forma su figura reproducida es diferente a la propuesta. Dos reglas no graduadas en algún momento apoyaron la reproducción de un triángulo, al describir de forma complementaria parte de él.
- En la Situación 2 la escuadra apoya en gran parte la reproducción de todas las figuras en especial la del triángulo en la Actividad 1, ya que en esta actividad los estudiantes usan la escuadra para construir un ángulo recto que es fundamental en el desarrollo de la misma, esta forma de construir un ángulo recto es usada por varios estudiantes en el desarrollo de las demás actividades, a saber:
 - La escuadra apoya la reproducción del triángulo; los estudiantes trazan la altura de este y luego copian los ángulos rectos que de dichos triángulos, esto cuando ninguno de los instrumentos describe

parte del contorno de la figura y están casi que obligados a pensar otra forma de hacerlo que no mediante el uso de un molde.

- La escuadra apoya la producción del rombo, uno de los estudiantes construye en primera instancia dos ángulos rectos con la escuadra, para luego completar la actividad.
- Podría pensarse que los estudiantes usarían esta forma de reproducción de un ángulo recto como parte fundamental de ella, en la Actividad 3 y 4, ya que el tanto cuadrado como el trapecio.

- En el diseño de las herramientas para una próxima aplicación, se debe tener cuidado con la fabricación de los instrumentos, ya que en la actividad en la que los instrumentos de reproducción fueron: el molde roto y la plantilla, no eran perfectas, porque no describen de forma completa al juntarlas el contorno de la figura, el cual era su propósito, aun así los estudiantes superan tal error de fabricación y lo omiten y concluyen la actividad.

- En el diseño de las actividades cuando se seleccionan las figuras propuestas para reproducir, se debe tener cuidado porque esta determina el uso del instrumento dado; se plantea una actividad en la que se espera que los estudiantes hagan la reproducción en la que las herramientas no determinen el contorno de la figura y por tal razón no se esperaba que usaran alguna de las herramientas como un molde, y una de las estudiantes lo hace porque la escuadra si funciona como molde en tal figura.

A nivel profesional y personal se puede concluir además, que el presente trabajo enriquece la forma de ver la enseñanza de la geometría, dado que mediante la vivencia de todo este proceso se pudo evidenciar como los estudiantes mediante actividades no cotidianas se acercaron a conceptos geométricos superando algunas barreras que en principio tenían al ver y reconocer lo esencial de las figuras.

Además permite que se considere el diseño de nuevas situaciones de aprendizaje en el aula de clase en la que los estudiantes tienen un rol protagónico, cuyos

resultados son alentadores considerando el tiempo del calendario académico dispuesto para su desarrollo.

BIBLIOGRAFÍA

- Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). LA DEMOSTRACIÓN EN LA CLASE DE GEOMETRIA: ¿PUEDE TENER UN PAPEL PROTAGÓNICO? *santillana*, 53-76.
- Camargo, L., Samper, C., & leguizamón, C. (2003). tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. En ASOCOLME, *cuadernos de matemática educativa*. Bogotá: Gaia.
- Cobb, P. (2000). conducting teaching Experiments in Collaboration With Teachers. In a. Kelly, & r. Ilesh, *Handbook of Research Desigh in mathematics and science education* (pp. 307-333). Vanderbilt.
- Duval, R. (1992). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? *petit X*, 37-61.
- Duval, R. (2000). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. *Boletín de la red en educación matemática* (págs. 1-7). cali: síntesis.
- Duval, R. (2001). Voir En Mathématiques. *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación Actual*, 41-76.
- Duval, R. (2004). Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M. d. ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 159 - 188). Madrid: secretaría general técnica.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2005). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. *Grand*, 7 - 27.
- Espínola, V. (1990). Principios y prácticas de la Adecuación Curricular. *Temps dEducació*.
- Grows, D., & Cebulla, K. (2000). Utilización de objetos. *Mejoramiento del desempeño en matemáticas*, 31-32.
- ICFES. (2012). *Colombia en PISA 2012 Informe nacional de resultados*. Bogotá, D.C.
- ICFES. (02 de Mayo de 2014). *icfes*. Recuperado el 03 de Mayo de 2014, de <http://www.icfes.gov.co/examenes/saber-pro/informacion-general/objetivos>
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C.: Ministerio de Educación Nacional.
- Mesa, J. M. (2006). *Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos*. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. d. Ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 37-81). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del Espacio y la Geometría en la enseñanza Elemental. En M. d. Ciencia, *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 37 - 80). Madrid: Secretaría General Técnica.

Salin, M. H. (s.f.). La enseñanza del Espacio y la Geometría en la enseñanza Elemental.

Searle, J. R. (1977). En J. R. Searle, *¿Qué es un acto de habla?* (pág. 17). Valencia: Publicaciones Universidad de Valencia.

Torregroza, G., & Quesada, H. (2007). COORDINACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 276 - 300.

ANEXOS

DESCRIPCION DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	E#	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 1 MOLDE ROTO	S1A1V1	E22	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V1	E19	X	N	X	X1	N	N	N	N	N	N
	S1A1V1	E	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V1	E13	X	N	N	X1	N	X	X	N	N	N
	S1A1V2	E22	X	X	N	N	X	X	X	X	X	X
	S1A1V3		X	N	N	N	N	X	N	N	N	N
	S1A1V4	E6	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V5	E13	X	N	X	X3	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6	E11	X	X	X	N	N	N	X	N	N	N
	S1A1V6	E3	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6	E18	X	N	X	N	N	X	X	N	N	N
	S1A1V6 ESTUDIANTE LO HACE EN EL TABLERO	N/A	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A1V6 PRO GALEANO LO EXPLICA TABLERO	PRO	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
S1A1V7	E8	X	N	X	N	N	N	X	N	N	N	

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	E#	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 2	SIA2V3	E7	X	N	XM	N	N	N	N	N	N	N
	SIA2V4	E23	X	X	N	N	X	X	N	N	N	N
	SIA2V5	E25	X	N	N	N	N	N	?	N	N	N
	SIA2V6	E6	X	X	N	N	N	X	X	N	N	N
	SIA2V7	E23	X	N	X	X	X	X	N	N	N	N
	SIA2V8 el mismo del 5 y 6	E18	X	XM	N	X	N	X	X?	N	N	N
	SIA2V9	E23	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA2V9	E9	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA2V11	E16	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA2E1EN TABLERO	N/A	X	XM	N	N	X	X	XM	N	N	N
	SIA2E2ENTABLERO	N/A	X	X	N	N	N	N	X	N	N	N
	SIA2E3ENTABLERO	N/A	X	N	X	X	X	X	X	X	X	N

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	E*	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCION	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 3	SIA3V1	E5	N	N	XB	XB	X	X	X	N	N	N
	SIA3V2	E1	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA3V2	E7	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA3V2	E6	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	SIA3V3	E14	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	SIA2E1CONSTRUYE ENTABLERO	N/A	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	E*	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCION	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 4	S1A4V1	E20	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V1	E11	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V3	E26	X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V4	E12	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V5	E12	X	X	N	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V6 El mismo que el video s1a4v1 en el minuto 2:34 explicación	E11	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V7	E1	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V8 EL MISMO QUE V3		X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V9	E3	X	N	X	N	X	X	X	N	N	N
	S1A4V10	E5	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V11	E8	X	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A4V11 S1A4E1 CONSTRUYE TRIANGULO CON 2 HERRAMIENTAS EN TABLERO		X	N	X	X?	N	X	X	N	N	N

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 1	NOMBRE DEL VIDEO	E*	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 5	S1A5V1	E5	N	N	XB	XB	XB	XB	XB	X	X	N
	S1A5V2	E22	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V3	E10	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V4	E6	XM	N	XM	XM	XM	XM	XM	X	X	X
	S1A5V5	E12	N	N	XM	XM	N	N	XM	?	?	?
	S1A5V6	E26	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V7	E26	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5V8	E1										
	S1A5V9	E11	XM	N	X?	X	N	X	X	?	?	?
	S1A5V10	E15	XM	N	X	X	X?	X	X	?	?	?
	S1A5V11	E21										
	S1A5V12	E16	N	N	XB	XB	X	X	X	X	X	X
	S1A5 EIENTABlero	N/A	X	X	N	N	X	X	X	X	X	X
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 1	E25										
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 2	E9										
	S1A5 PRUEBA DEL ANGULO 3	E18										

NO APLICA

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS												
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	DESCRIPCIÓN DEL VIDEO	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA				RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER / DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
			Ex	USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	LO QUE SE ESPERABA	NO SE ESPERABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	PROLONGACION DE LINEAS
ACTIVIDAD 1	S2A1V1	SIN	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V2	E22	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V3	E14	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V4	E11	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X
	S2A1V5	E23	X	X	N	N	X	X	X	X	N	X

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS														
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	FECHA DE LA CREACIÓN	E*	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE VER		
				TIPO DE HERRAMIENTA		USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL	
				ESCUADRA	REGLA								PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS
ACTIVIDAD 2	S2A2V1	01/12/2014	E1	X	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V1.1 El mismo Video S2A2V1	01/12/2014	E1	X	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V2	01/12/2014	E12	N	X	N	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V3	01/12/2014	E14	X	X	X	X	N	X	X	X	X	N	X
	S2A2V4	01/12/2014	E25	X	X	X	N	N	N	N	N	X	N	X
	S2A2V5	01/12/2014	E13	N	X	N	N	N	N	X	N	X	N	X
	S2A2V6	01/12/2014	E13	N	X	N	N	N	N	X	N	X	N	X
	S2A2V7	01/12/2014	E22	N	X	N	N	X	N?	N?	X	X	N	X
	S2A2V8	01/12/2014	E21	X	X	X	N	X	X	X	X	X	N	X

DESCRIPCIÓN DE VIDEOS PARA REJILLA DE ANALISIS DE LOS VIDEOS															
SITUACIÓN 2	NOMBRE DEL VIDEO	FECHA DE LA CREACIÓN	Ex	RESPECTO AL USO LA HERRAMIENTA					RESPECTO A LA FIGURA RESPECTO AL INSTRUMENTO			VISUALIZACION Y FORMA DE YER			
				TIPO DE HERRAMIENTA		USA EL TOTAL DE HERRAMIENTAS	NO SE ESPARABA	ES DIFERENTE "CURIOSIDADES" DEL USO DE LA HERRAMIENTA	RELACIONES DE ANGULOS	RELACION DE LADOS	LOGRA LA RECONSTRUCCION	CAMBIOS DE FIGURA DADA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN	DESCONSTRUCCION DIMENSIONAL		
				ESCUDRA	REGLA								PROLONGACION DE LINEAS	CONSTRUCCION DE NUEVAS LINEAS	
ACTIVIDAD 5	S2A5V1	24/11/2014	E14	X	X	X	X	X	X	X	?	X	X	X	
	S2A5V2	24/11/2014	E1	X	X	X	X	X	?	?	?	X	X	X	
	S2A5V3	24/11/2014	SIN	?	?	?	?	?	?	?	?	X	X	X	
	S2A5V4	24/11/2014	SIN	N	X	N	X	N	N	N	N	N	N	N	
	S2A5V5	24/11/2014	SIN	?	?	?	X	X	X	X	X	X	N	N	
	S2A5V6	24/11/2014	E7	X	N	N	X	X	N	X	N	N	N	N	
	S2A5V7	24/11/2014	E9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	S2A5V8	24/11/2014	E11	N	X	N	X	X	X	X	X	X	X	N	X
	S2A5V9	24/11/2014	E21	N	X	N	X	X	N	X	?	X	N	X	