Acercamiento a la evolución histórica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano

CAROLINA RODRÍGUEZ RAIGOZA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI 2016

Acercamiento a la evolución histórica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano

CAROLINA RODRÍGUEZ RAIGOZA
201124384

Trabajo de grado, entregado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTORA
M.g. MÓNICA ANDREA APONTE MARÍN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI 2016

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Lic. en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Fecha	Día	Mes	Año
	27	2	2016

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
Acercamiento a la Evolución Histórica del Número Cero en los Sistemas de Numeración: Mediterráneo, Oriental y Americano

Se trata de:

Proyecto ☐ Informe Final ☑

Director
MÓNICA ANDREA APONTE
Nombre del Primer Evaluador
ÁNGELA MARÍA GÓMEZ
Nombre del Segundo Evaluador
ANA KATHERINE VALENCIA

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan
CAROLINA RODRÍGUEZ RAIGOZA	201124384	3469

Evaluación

Aprobado ☒ Meritorio ☐ Laureado ☐
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ____________ (máximo un mes)* **ante:**
Director del Trabajo de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ______ semestre(s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* ____ ____ ____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

	Ana Katherine Valencia	
Director del Trabajo de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

F-0401-03-04-02V-01-2014

Elaborado por Instituto de Educación y Pedagogía

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Acercamiento a la evolución historica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterraneo, oriental y americano.

Autores:

Nombre: Carolina Rodríguez Raigoza
Firma: Carolina Rodriguez Raigoza
C.C. 1.143.926.069 de Cali.

Nombre:
Firma:
C.C.

Nombre:
Firma:
C.C.

Fecha: Abril 6 /2016.

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

Agradecimientos

Agradezco a DIOS por todas las bendiciones recibidas,
por permitir que este logro fuera posible.

A mis padres Zoila Rosa Raigoza y Luis Alberto Rodríguez
a ellos agradezco darme la vida, todo el amor, la paciencia y el apoyo brindado,
por sus regaños y consejos,
gracias por inculcarme siempre una vida centrada en valores,
por ser un ejemplo a seguir;
son el motor para cada día seguir avanzando.

A mis hermanos Deisy y Javier por ser amigos y compañeros,
por ser parte de mis logros y por celebrarlos juntos,
a mis hermanos que a la distancia han hecho parte de mi vida,
especialmente a mi hermano Carlos Alberto,
por escucharme y darme las palabras oportunas en cada momento.

Así mismo a todos los familiares, amigos y compañeros
que estuvieron al pendiente de este recorrido.

A mi esposo Christian David Campo Marín,
por su amor incondicional y paciencia,
su apoyo fue esencial, durante mi carrera y en la culminación de esta meta.

A la profesora Mónica Aponte por aceptar dirigir este trabajo,
por sus valiosas apreciaciones y oportunos consejos,
a las profesoras Ángela María Gómez y Ana Katherine Valencia
por sus aportes y sugerencias.

Por último agradezco a todos los profesores de la Universidad del Valle
que hicieron parte de este proceso formativo.

Contenido

Tabla de ilustraciones

Resumen

El presente trabajo final se enmarca en la Línea de Investigación ***Historia de las Matemáticas*** del área de Educación Matemática de la Universidad del Valle. Este plantea una aproximación a la evolución histórica y epistemológica del número cero a través de los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano, con el fin de presentar la génesis del número en mención a través de sus antecedentes históricos, su evolución y su conceptualización como número. Además se relacionan los elementos teóricos y algunos aspectos matemáticos, como base de referencia y los elementos metodológicos que son tenidos en cuenta como enfoque para el desarrollo de este documento.

Términos claves: cero, evolución histórica, epistemología, Educación Matemática.

Introducción

Este trabajo se enmarca en la Línea de Investigación ***Historia de las Matemáticas*** del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Con él se plantea un acercamiento a la evolución histórica del número cero a través de los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano, con el fin de presentar la génesis del número en mención a través de sus antecedentes históricos y epistemológicos, su evolución y su conceptualización como número.

Interesó en este sentido, desarrollar un trabajo donde se evidencia de manera unificada el proceso histórico y epistemológico de la institucionalización del número cero, en el que se plantea como cuerpo de la investigación cuatro (4) capítulos.

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales del trabajo, planteamiento del problema, objetivos y justificación, que hicieron parte de la orientación de la investigación. Además se relacionan elementos teóricos como base de referencia y los elementos metodológicos que son tenidos en cuenta como enfoque para el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo se identifican los diferentes elementos históricos que hacen parte de la constitución del cero, haciendo un recorrido a través de los diferentes sistemas de numeración, y prestando especial atención a aquellos que en su proceso de creación tuvo presente el cero. Además se incluyen algunos aportes matemáticos importantes presentados bajo el lente de la historia, donde se exhiben algunas demostraciones utilizadas para dar validez a uso del cero como número, para que este pudiera ser tratado como igual a los otros números.

En el tercer capítulo se muestra la dimensión epistemológica que fundamenta los diferentes obstáculos presentes en el transcurso de la constitución del cero como número. Como capítulo final se encuentran las conclusiones y los referentes bibliográficos que se obtienen gracias a la investigación realizada.

Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación

En este apartado se muestran los aspectos generales del trabajo, en el que se incluye la problemática a abordar, el objetivo general, los objetivos específicos, metodología y la justificación, los cuales guiaron el trabajo investigativo del mismo. También se evidencian los elementos teóricos y metodológicos que sirvieron de referentes no sólo de la problemática sino del trabajo en general.

1.1. Planteamiento del problema

La constitución de los números naturales, así como el período de su institucionalización, no puede ser determinado con certeza, lo que se precisa es que ha sido un proceso histórico, natural y lento, pero evolutivo. Desde comienzos de la humanidad se ha hecho necesario el surgimiento y la consolidación de las matemáticas como una ciencia, que permite el puente entre actividades como el conteo, la representación de medidas reales con símbolos, etc., y resolver problemas a medida que las necesidades de las sociedades humanas se iban haciendo mayores (Magaña, 2012).

Mientras que algunos antropólogos consideran la necesidad de contar como algo natural e innato en el ser humano, debido a que algunos pueblos primitivos se valían de objetos del medio y de su propio cuerpo (manos, pies, codos, etc.) para contar. Otros aportes, como los realizados por la arqueología, sugieren que la noción de número se inicia hace más de 30.000 años, además ésta no surge gracias a la exigencia cultural y social de contar o medir, sino al apremio de ordenar, al respecto Fedriani y Tenorio (2004) afirman: *"Cuando nuestros lejanos antepasados celebraban sus ceremonias religiosas, necesitaban una forma* *de establecer el orden de participación de cada uno y un modo de hacer que todos supieran cuándo actuar”* (p. 160).

Es así como poco a poco y tras un proceso de abstracción natural, se ve la necesidad de saber cuántos objetos se tienen, y así relacionarlo con una cierta cantidad a la cual se le asigna un símbolo que la representa, estos símbolos han adquirido diferentes formas sígnicas a través del tiempo y las culturas, un hecho que se puede evidenciar a través de las diferentes escrituras de los números en la historia.

Todo este proceso del cambio de representación sígnica del número, viene acompañado del desarrollo del conocimiento humano, como lo sustenta Restrepo (2005), donde asevera: “se ve claro que a los símbolos universales no se llegó de la noche a la mañana, ni por azar; se ve claro el esfuerzo de los hombres por establecer la comunicación matemática, su idioma, sus símbolos” (p.55). Ha sido producto de miles de años, en donde se realizaron avances importantes, iniciando con la separación de los números y el uso del propio cuerpo para representarlos, hasta llegar a la invención de las cifras.

Ahora bien, cuando se tienen objetos para contar, el número cobra forma y puede representarse, pero cómo representar el hecho de no tener nada, cómo simbolizar este “vacío”; a través de la historia puede verse el surgimiento de lo que hoy en día conocemos como cero, y cómo en las diferentes culturas en espacio y tiempo fueron aceptando la idea de “nada”, y cómo han decidido representarla. Al respecto, Macias (2010) se pronuncia:

> Es difícil determinar con precisión cuándo se produjo, pero en esta época apareció el primer cero, para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto rango. Cada vez que faltaba una potencia de 60, representaban mediante este símbolo la ausencia de la misma, en lugar del espacio vacío. El símbolo tenía la significación de vacío, pero todavía no estaba pensado en el sentido de nada. (p. 32)

Recalde (2001), afirma que en la antigüedad griega, el cero no es aceptado como número, dado que en diferentes concepciones así se evidencia, se tiene que no se ubica dentro de la concepción Aristotélica en la que se propone que "*el número es la pluralidad de las unidades",* en la Teoría de Números de Euclides y su libro VII, en donde se presentan 22 definiciones en las que se incluye la VII.2: "*número, como una pluralidad compuesta de unidades",* tampoco es considerado dentro de las concepciones filosóficas griegas, dado que no se tiene en cuenta el *no ser.*

Desde sus primeros avisos como número cero o como una relación con la representación de la nada o de ninguno, este tema ha sido relevante en la Historia de las Matemáticas, por lo que algunos investigadores han dedicado sus estudios a identificar la forma de reconocimiento del cero en diferentes culturas, incluso en las culturas aborígenes.

Lo anterior se proyectó como una breve caracterización del proceso evolutivo del cero, en este trabajo se considera fundamental no solo quedarse en este estudio, sino conjuntamente puede analizarse qué repercusiones tiene la concepción del cero en algunos conceptos matemáticos, por enlistar algunos:

- ✓ Sistemas de numeración posicional
- ✓ Aritmética: ubicación del cero en un conjunto numérico, manejo del cero en las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), ubicación del cero a la derecha o a la izquierda de un número, cero en la potencia, cero como número par, manejo del cero en un número racional.
- ✓ Conjuntos: representación del cero como el conjunto vacío $\{\quad\}$
- ✓ Cálculo diferencial: cambio de las variables es infinitesimal, cociente diferencial alternativo, cálculo de límites, derivada de cero.

- ✓ Estadística y probabilidad: probabilidad matemática de cero, escala de razón, cero absoluto o natural,
- ✓ Topología: entornos de cero en un espacio vectorial, espacio cero-dimensional.
- ✓ Geometría analítica: rectas con pendiente cero, cortes con los ejes.
- ✓ En Matrices o vectores ortogonales: producto nulo, algebra con exponentes cero.
- ✓ Entre otros.

Puede verse el amplio campo de impacto que tiene el cero en algunos conceptos matemáticos mencionados en el párrafo anterior. Aunque no sea un objetivo del trabajo se pretende analizar un posible acercamiento a la evolución histórico-epistemológica del número cero con algunos de estos conceptos.

Se puede considerar que la invención del cero, las cifras, el sistema posicional, entre otros, funcionan como una herramienta potente para el ser humano hoy en día, interesa en este trabajo una búsqueda de los registros históricos que hicieron parte de los momentos en que se institucionalizó el cero como cantidad y como número. Un número puede definirse según sus propiedades, así que resultaría interesante saber si el cero podría definirse como número a partir de sus propiedades.

En relación a todo lo anterior, el problema de investigación se concreta bajo la siguiente pregunta:

> ***¿Cuál ha sido el proceso de la evolución histórica – epistemológica del número cero en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano?***

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General.

Presentar una génesis histórica – epistemológica del número cero en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano.

1.2.2. Objetivos específicos.

1. Caracterizar a través de los antecedentes históricos, la evolución y conceptualización del número cero en los sistemas: mediterráneo, oriental y americano.

2. Identificar algunos aspectos epistemológicos en torno a la consolidación del concepto de número cero.

1.3. Justificación a la problemática de investigación

El surgimiento de los números es uno de los hechos de mayor relevancia en la Historia de las Matemáticas, debido a que refleja los diferentes procesos que se han llevado a cabo para que en la actualidad, en las diferentes culturas se pueda tener de alguna manera acceso a ellos. No puede dejarse de lado el proceso histórico y epistemológico que ha conllevado la aceptación y la consolidación del concepto de número, es preciso hacer énfasis en que ha sido un proceso lento, con diferentes cambios, en donde cada cultura concibió unos u otros sistemas de numeración y símbolos para expresarlos, que se fueron desarrollando a lo largo de la historia, perpetuándose algunos, perdiéndose otros. Anacona (2003) sustenta que:

> (…) Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural. Esto significa que las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales. (p. 32)

Es así, como las relaciones y estructuras sociales determinadas en las diferentes culturas, pueden haber intervenido en la consolidación del concepto de número y de otros fundamentos matemáticos, y en la esencia misma de la investigación de este trabajo, en la aceptación o no del cero como número; siendo la historia entonces una manera de acceder al conocimiento básico de los conceptos matemáticos, logrando a través de ella adentrarse en el objeto mismo. El MEN (2006) afirma: *"Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas."* (p. 49-50).

Además, como sustenta el MEN la filosofía no puede ser dejada de lado, debido a que sigue siendo parte de la naturaleza de la matemática y este es un hecho innegable, sin embargo, hoy en día la matemática ha ampliado su espectro, partiendo desde perspectivas que son además de la misma rama de la filosofía, comparte su visión con la historia y todo lo que esta puede aportar como Línea de investigación.

Este planteamiento ha llevado a considerar que el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y que sirve como argumento de justificación.

A continuación se exponen algunas reflexiones de los profesores Miguel Guzmán y Daniel Gil sobre la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática.

> La filosofía de la matemática actual ha dejado de preocuparse tan insistentemente como en la primera mitad del siglo sobre los problemas de fundamentación de la matemática, especialmente tras los resultados de Gödel a comienzos de los años 30, para enfocar su atención en el carácter cuasiempírico de la actividad matemática (I. Lakatos), así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de las matemáticas en la cultura de la sociedad en la que se origina (R. L. Wilder), considerando la matemática como un subsistema cultural con características en gran parte comunes a otros sistemas semejantes. Tales cambios en lo hondo del entender y del sentir mismo de los matemáticos sobre su propio quehacer vienen provocando, de forma más o menos consciente, fluctuaciones importantes en las consideraciones sobre lo que la enseñanza matemática debe ser" (Guzmán y Gil, 1993). (p. 66)

El docente de matemática debe apoyar entonces su labor en los soportes legales que le brinda el MEN en los documentos que este aporta, ahondando en los aportes de la Historia y Epistemología de las matemáticas para tomar conciencia sobre la naturaleza de los objetos matemáticos trabajados en el aula de clase y de la ciencia misma.

Se supone imperativo que el aula de clase sea un espacio que permita generar un ambiente en el cual el docente sea consciente de la naturaleza del objeto matemático, sin necesidad de convertir la clase de matemáticas en un espacio donde la Historia de las Matemáticas sea prioridad, una clase que permita al estudiante movilizar los conocimientos necesarios, y que el desarrollo de las competencias matemáticas haga parte del eje central de la actividad pedagógica, para abordar el concepto de competencia, el MEN (2006) lo presenta de la siguiente manera:

> (…) Una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. (p. 49)

El docente debe pensarse una actividad matemática desarrollada a través de una clase que le permita al estudiante desarrollar las competencias matemáticas propuestas y brindarle las herramientas, como se propone en este estudio, a través la Historia de las Matemáticas, para llevar a cabo este objetivo.

Se considera significativo indicar que este trabajo además de los aportes en la línea de Historia de las de las Matemáticas, puede realizar de alguna manera, una contribución a la línea de investigación de Comunicación, Lenguaje, y Razonamiento Matemático, sin pretender realizar un análisis exhaustivo en esta línea. Como se mencionó anteriormente, se precisa que la diversidad de las culturas presentó a las matemáticas una oportunidad de enriquecer la escritura de números en los diferentes sistemas, incluido el cero.

Boyer (1987) menciona: "Lo que distingue de manera más notable al hombre del resto de los animales es el lenguaje articulado, lenguaje cuyo desarrollo fue esencial para el nacimiento del pensamiento matemático abstracto" (p. 22-23). De esta forma se presenta al lenguaje como una puerta abierta a una mejora en las matemáticas, hace énfasis además, en que el uso del lenguaje como medio para expresar ideas numéricas fue de surgimiento lento. Incluso le da un papel primordial a los *signos* utilizados para representar números, debido a que como él señala, se antepusieron a las palabras; incluso hasta los primeros signos primitivos, como las muescas en un palo, eran una vía más cómoda para realizar conteos, que intentar armar una frase que representara un número concreto.

Así como Boyer menciona en la simpleza de las muescas el óptimo uso de los signos, Duval (2004) se pronuncia: *"La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes" (p. 13)*. Lo que propone es la posibilidad de acercarse de la manera más legítima posible al objeto matemático, es decir, sin cambiar su naturaleza, gracias a los diferentes sistemas de representación, siendo las representaciones semióticas las que hacen posible evidenciar las representaciones mentales del objeto matemático.

Según Duval (2004), se entiende por Representación Semiótica a las representaciones que se realizan por medio de signos, muestran y utilizan diferentes registros y cumplen además diversas funciones: expresión, objetivación o identificación y tratamiento. Las representaciones semióticas son el medio que hace posible cualquier actividad sobre los objetos matemáticos.

Se reitera además, que el medio cultural en el que se encuentran inmersos los objetos representa una variedad de modos de representación, obteniendo así, por ejemplo: variados sistemas de escritura para los números; en esta investigación se realiza una aproximación a algunos de los sistemas de numeración, especialmente se tienen en cuenta los que consideren el cero.

1.3.1. Relevancia del estudio histórico-epistemológico del número.

Ahora para presentar los referentes teóricos sobre la relevancia del estudio histórico-epistemológico del número, se considera la tesis de pregrado, inscrita en la línea de Historia de las Matemáticas.

- Giraldo, L. (2014). Los números enteros negativos en la matemática moderna y la matemática actual. Trabajo de investigación de pregrado. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Este trabajo hace parte del marco de referencia sobre la importancia de los estudios histórico-epistemológico del número, teniendo como pauta el trabajo de Anacona (2003), en donde se hace énfasis en los aportes de esta línea en la Educación Matemática y la relevancia de este tipo de investigaciones en la formación del discurso y quehacer del docente de matemáticas.

Una de las reformas curriculares más significativas para la educación colombiana, han sido los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), brindando diferentes orientaciones pedagógicos, curriculares y legales que pueden aportar herramientas al docente para tratar de responder preguntas sobre ¿qué?, ¿cómo?, ¿para qué? y ¿a quién enseñar?, teniendo en cuenta que el propósito de investigación hace referencia a la importancia de considerar que el conocimiento matemático es producto de una evolución histórica, el MEN (1998) afirma:

> En primer lugar, para aceptar que el conocimiento matemático es el resultado de una evolución histórica se requiere profundizar en el análisis de este proceso, análisis que transforma el conocimiento de áridos hechos y destrezas en conocimiento ansiosa y tesoneramente buscado, construido por seres humanos que se corren arduos y largos caminos, esto es, la perspectiva histórica conlleva a concebir la matemática como una ciencia humana por ende no acabada ni constituida por verdades infalibles, en ocasiones falible pero capaz de corregir sus errores; a su vez este análisis permite alcanzar un

> conocimiento más profundo de la matemática misma ya que en el proceso histórico los objetos matemáticos aparecen en su verdadera perspectiva. (p. 9)

En este sentido el MEN proporciona un soporte en el que se considera significativo para la educación pensar el conocimiento como parte de una evolución histórica. En este trabajo precisamente se muestra como diferentes autores han intentado a través de sus trabajos presentar la evolución histórica de los números, es en el estudio de estos trabajos que la presente investigación intenta aterrizar su objeto de estudio.

Se tienen en cuenta igualmente los estudios realizados recientemente por algunos antropólogos que evidencian la existencia de prácticas que son típicamente matemáticas, como el conteo, ordenación, medida, peso, clasificación, los cuales son hechos de forma radical y universal, siendo esto diferente a los aspectos comúnmente trabajados en un sistema escolar básico. Así, para realizar un recuento histórico de las Matemáticas, se realiza una periodización de algunos apartes de la historia, desde el estudio de algunas culturas y los sistemas de numeración: mediterráneos, orientales y americanos.

1.4. Antecedentes a la problemática de investigación

En cuanto a la evolución de los números, en particular del cero y su concepción en las diferentes culturas, se encuentran una tesis de pregrado, enmarcada en la línea de Didáctica de las Matemáticas y dos de maestría en la línea de Historia de las Matemáticas, que hacen parte de los referentes teóricos, para el seguimiento del proceso evolutivo del concepto de número y la institucionalización del número cero.

- Blanco, H. (2009). Del número a los sistemas de numeración. Trabajo de investigación de Maestría. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

  En esta tesis de maestría se presenta un análisis sobre la construcción de los sistemas de numeración de diferentes "comunidades tradicionales" (Mayas, Incas, Yorubas y Tule), lo anterior gracias al enfoque histórico-epistemológico y al análisis de la constitución del número natural, centra entonces su atención en el proceso constructivo y constitutivo de los sistemas de numeración. Se considera un estudio significativo ya que aunque el autor no pretende estudiar cómo se originó el número en occidente hasta su formalización, da cuenta de otros aspectos históricos relevantes y que aportan en cuanto a la manera cómo se desarrolló la idea de número.
- Duque, H. (2013). El sentido del número en la cultura maya. Trabajo de investigación de Maestría. Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

  Esta Tesis de Maestría aporta diferentes categorías de investigación al presente trabajo, en cuanto a la cultura Maya y el sentido de número en esta cultura, se realiza una diferenciación entre: definición de número, concepto de número y sentido de número, además se dedica un apartado en la identificación y concepción del cero en los mayas.

Por otra parte, Magaña (2012) y Macías, M. (2010) presentan el marco fundamental para el seguimiento del proceso evolutivo del concepto de número, aportando elementos históricos y epistemológicos para hacer el rastreo de la institucionalización del número cero.

1.5 Metodología

El trabajo investigativo es de tipo monografía y se enmarca en la línea de investigación de Historia de las Matemáticas. La metodología del trabajo se presenta en tres momentos, en los cuales se espera mostrar un acercamiento al proceso histórico del número cero.

Primer momento: a través de la indagación y fundamentación teórica, se amplía el marco teórico, buscando establecer las bases teóricas de la problemática, que giran en torno a los diferentes aspectos históricos. A partir de estos aspectos, se presenta el proceso evolutivo del cero en los sistemas de numeración: mediterráneos, orientales y americanos.

Segundo momento: se construyen los elementos que dan soporte al trabajo desde la dimensión epistemológica, en este sentido, se describen los diferentes elementos epistemológicos en torno a la constitución del concepto del número cero, en relación a la enseñanza y aprendizaje.

Tercer momento: consideraciones finales, aportes del trabajo al área de Educación Matemática y más específicamente en la línea de investigación de Historia de las Matemáticas.

Capítulo 2. Perspectiva histórica del concepto de número cero

En este apartado se presentan los fundamentos históricos que se hacen necesarios para fundamentar la constitución del concepto de número cero. A través de las diferentes culturas en las que se consideró y algunos aportes a nivel matemático vistos bajo la luz del proceso de institucionalización del cero como número.

2.1 Caracterización histórica en la evolución del número cero

Desde la arqueología, en Fedriani y Tenorio (2004), se propone que la noción de número no surge gracias a la exigencia cultural y social de contar o medir, sino gracias a la necesidad de ordenar, siendo un proceso que ocurrió poco a poco y tras un proceso de abstracción natural, en donde se tiene la necesidad de contabilizar los objetos que se tienen, y poder asignar "algo" que determine esta cantidad, es entonces cuando se asigna un símbolo representa lo que se posee, estos símbolos han adquirido diferentes formas sígnicas a través del tiempo y las culturas. Guedj (1998) (citado en Frediani & Tenorio, 2004), presenta dos formas de clasificar los sistemas de numeración manifestando la forma visual, oral y escrita, el último en los casos en que la escritura es posible, en los que los clasifica en primera instancia como:

1. **Sistemas de numeración figurada:** son los constituidos por un sistema de marcas físicas realizadas sobre soportes u objetos. Entre estos sistemas de numeración se encuentran las cuerdas con nudos o quipus de los incas (desarrollados en el s. XIII d.C.)
2. **Sistemas de numeración hablada:** son los que atribuyen un nombre a cada número con palabras de la lengua natural, de modo que al transcribirlas por escrito, se escribirían con todas sus letras como en: uno, dos, mil.

3. **Sistemas de numeración escrita:** son los que emplean símbolos ya existentes o inéditos para representar los números. Entre estos sistemas se encuentran los sistemas de numeración de los mayas y de los aztecas, por ejemplo.

Puede verse que dependiendo la forma de comunicación; se presentan los anteriores sistemas de numeración. A medida que se hizo necesario representar cantidades, se fue construyendo la noción de número, así el hombre fue construyendo paulatinamente los diferentes sistemas de numeración, cada sistema aportando un nuevo nivel de practicidad para ser utilizado en la práctica de la actividad matemática.

Ahora para la segunda clasificación, presentada así y respondiendo a la manera en cómo deben ser interpretados los símbolos en un sistema de numeración escrito:

I. **Sistema de numeración aditivo:** en este sistema a través de la suma, se acumulan los símbolos para obtener el número que desea representarse, estos símbolos pueden estar ubicados en cualquier orden.

II. **Sistema de numeración híbrido:** en este sistema se unen el principio del sistema aditivo con el multiplicativo para componer números. Debe respetarse el orden de escritura de los números para no generar confusiones.

III. **Sistema de numeración de posición:** considerado como el más eficaz sistema de numeración, los símbolos se denominan cifras y su posición indica la potencia de la base que tiene cada una.

Para llegar a cada uno de los anteriores sistemas se hicieron necesarios miles de años, con los cuales se fueron perfeccionando y unificando criterios con la llegada de cada uno, este se considera uno de los mejores inventos del hombre, dado que gracias al uso de estos sistemas se fue disminuyendo la cantidad de símbolos utilizados para escribir un número muy grande, permitieron con esto un gran ahorro en escritura y una mayor comprensión y precisión al escribir números.

A continuación se enlistan algunos sistemas de numeración que son aportes teóricos de Magaña (2012) en su escrito "*El origen de los números"* y Macias, M. (2010) quien presenta sus ideas en el artículo "*Evolución histórica del concepto de número*", estos hacen parte del marco fundamental para el seguimiento del proceso evolutivo del concepto de número y la institucionalización del número cero, se identifican algunos sistemas de numeración que se consideran relevantes para este estudio debido a que hacen parte de los aportes teóricos de los autores mencionados, especialmente se ampliaran aquellas culturas en donde el cero haga parte del sistema de numeración.

2.1.1 Sistemas de numeración mediterráneos.

Se nombran sistemas de numeración mediterráneos a los sistemas desarrollados en la antigua Mesopotamia, entre los ríos Tigris y Éufrates, se ubican las culturas Sumeria, Semitas y Babilónica. Luego ampliaremos el estudio a las culturas egipcia, griega y romana.

2.1.1.1 *Sumerios.*

Los sumerios ubicados en la parte baja de Mesopotamia, se ubicaron a finales del año 4.000 a.C. desarrollaron un tipo de escritura en tablillas de arcilla, llamada *cuneiforme*, se insinúa como la primera forma de comunicación escrita, es importante aclarar que a las civilizaciones mesopotámicas se les nombra como babilónicas.

Aaboe, (1964) denomina "matemáticas babilónicas" a las que se encontraban en la antigua Mesopotamia; hoy en día se tienen 400 tablillas y algunos fragmentos de otras con textos matemáticos que han sido procesados: copiados, transcritos, traducidos y explicados de manera detallada para que se pueda tener una mejor comprensión de ellas. La escritura presente ha sido llamada *cuneiforme* debido a su parecido a cuñas.

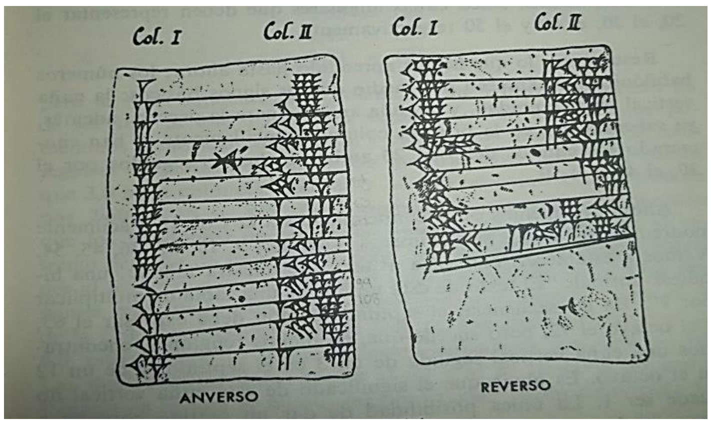


Ilustración 1. Representación del sistema de numeración sumerio

Interesa resaltar que en la ilustración 1, puede observarse como por ejemplo en la columna 1, se inicia con una cuña y se van agregando cuñas en cada renglón, lo que puede interpretarse como los números 1, 2, 3… 9, seguido del número 10 con un nuevo símbolo; en esta ilustración se encuentra la tabla del nueve resultados que pueden verse en la columna 2. A manera de conclusión, en este sistema se utilizaba dos símbolos la cuña vertical para representar unidades y la cuña angular para decenas, con estos podían escribirse todos los números, debido a que se observa que al correr un espacio a la izquierda la unidad, ésta multiplica su valor por 60 y se le suma la cantidad de cuñas del lado derecho para obtener un número.

Así, su sistema de numeración era en base 60, con este sistema, utilizaban diferentes símbolos para representar los números del 1 al 60, como no se conocía el cero, entonces utilizaban el 10 como unidad auxiliar.

El sistema de numeración era fundamentado en el principio de la adición, se presenta un uso repetitivo de signos, ya que la unidad es repetida las veces necesarias para representar los primeros nueve números naturales, al igual que se repite la decena el número de veces que va ser representado.

2.1.1.2 *Los semitas.*

Se determina semitas a la unión de varias civilizaciones: acadios, asirios, babilónicos, entre otros, que en el orden presentado, representaron un cambio para el pueblo sumerio, y su sistema de numeración, se identifican tres etapas. Al respecto, Macias, (2010) se pronuncia:

> La primera etapa corresponde a una asimilación por los acadios de la cultura sumeria, adoptando el sistema sexagesimal. En la segunda etapa, se produce la convivencia de los sistemas sexagesimal y decimal. Y en la tercera etapa, se elimina por completo el sistema sexagesimal. (p. 32)

Los números se representan con el uso de dos símbolos básicos, la unidad se representa con una cuña vertical y la decena por una cuña angular. En cuanto al cero, en las tablillas no se registra un símbolo para el cero, más si se deja un espacio en blanco, en el caso de los textos antiguos se deja un espacio en blanco o en algunas ocasiones no. Aunque no se puede determinar con certeza en que época, pero se produjo el primer aviso de cero que significaba ausencia de unidades sexagesimales de determinado rango, se dejaba un espacio en blanco, no se tenía un símbolo para este, pero se presentaba como significado de vacío, pero no pensado en el sentido de la nada.

En Boyer (1987), se menciona que los babilonios inicialmente presentan un significado, para el cero en el sentido posicional, sin embargo, dejar el espacio no era una forma clara de representar el cero, debido a que en la escritura de algunos números se presentaban confusiones, lo que sugiere un gran problema para este sistema.

Más, no siempre se tuvo esta imposibilidad de representar el cero, debido a que en la época de la conquista de Alejandro Magno aparece un signo basado en *dos cuñas pequeñas inclinadas* que hacen el papel del cero, se utilizaba para expresar una posición en la que faltaba una cifra o un lugar vacío.

Ilustración 2. Posible representación del cero

Sin embargo el uso de estas *dos cuñas* no resolvió todas las ambigüedades del sistema, ya que, este signo era usado sólo para representar una posición vacía que estuviese en medio de las cifras significativas de un numeral. No se conserva al momento evidencia de lo anterior en ninguna tablilla existente, lo que sugiriere que los babilonios no presentaban un sistema posicional completo, pero si un aviso de este.

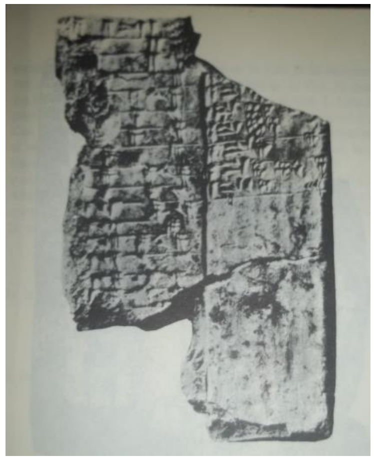


Ilustración 3. Tablilla encontrada en Nippur

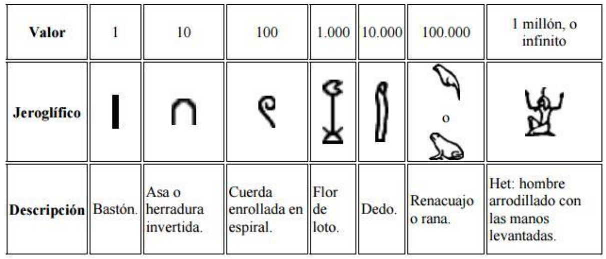
Según Magaña (2012) el método de contar de los babilonios era un poco complicado, manejaban un sistema de numeración en base 60, tenían como eje central en su aritmética al 10 y al 60, en donde primaba la posición de los mismos, para ser leídos e interpretados.

Sin embargo Restrepo (2005) considera que los babilonios tendrían al cero como una cantidad en el siglo III y además funcionó como operador aritmético. Asegura además que en Mesopotamia se consideraba al cero como vacío, siendo la ausencia de unidades un orden especifico, así se veía al vacío como nada, sin considerarse estos dos como iguales.

Recamán (2002) presenta la conclusión de que no hay claridad ni certeza de que los babilonios consideran al cero como un número semejante a los otros.

2.1.1.3 *Los egipcios.*

Hacia el año 3000 a.C. los egipcios utilizando la escritura ideográfica que luego fue llamada jeroglífica, inventaron un sistema de numeración autóctono en base diez, aditivo, no posicional, que les permitía escribir números mayores a 10^6, como se muestra en la siguiente ilustración.



Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 millón, o infinito
Jeroglífico						o	
Descripción	Bastón.	Asa o herradura invertida.	Cuerda enrollada en espiral.	Flor de loto.	Dedo.	Renacuajo o rana.	Het: hombre arrodillado con las manos levantadas.

Ilustración 4. Sistema de numeración jeroglífica egipcia

Este sistema utilizaba siete símbolos base, que al ser escritos no tenían valor posicional y cada símbolo podía ser repetido hasta nueve veces en cada número. Cabe resaltar que los egipcios aportaron en la escritura de números fraccionarios al agregar un símbolo en la parte superior, sin embargo en este sistema no era posicional ni tenía en cuenta el cero.

2.1.1.4 *Los romanos.*

El sistema numérico romano no posicional, en base diez, está compuesto por siete letras, su valor numérico no cambia sin importar el lugar en donde se encuentre, estas letras no son propiamente de los romanos, incluso existían antes de la civilización romana, se supone descendían de los etruscos. Inicialmente era un sistema aditivo, luego fue modificado al agregar algunas reglas:

1. Todo signo numérico colocado a la izquierda de una cifra de valor superior se resta.
2. Todo signo numérico colocado a la derecha de una cifra de igual o mayor valor se suma.
3. No se repite más de tres veces un mismo símbolo
4. Los símbolos V, L, D no pueden ser duplicados porque ya hay letras que representan esos valores.

5. Colocaban una raya sobre la letra para indicar tantos millares como unidades tenga ese símbolo, dos rayitas encima de cualquier símbolo indican tantos millones como unidades tenga el símbolo.

Como una de las deficiencias que evidenciaba este sistema al igual que otros anteriores mencionados, era que faltaba eficacia para realizar operaciones, además debido a ser un sistema no posicional, no consideraban el cero.

2.1.1.5 *Los griegos.*

Se inicia el recorrido histórico, remontándose al segundo milenio a.C. en la antigüedad griega, en la cual los números fueron concebidos de una u otra manera, pensadores occidentales como Pitágoras, son puntuales en su filosofía, para éstos el cero no se imagina. Boyer (1987) menciona: "Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen números; pues no es posible que sin número nada pueda ser concebido ni conocido" (p. 85), es así como gracias a las concepciones filosóficas se puede concluir que para los Pitagóricos el cero no es pensado como número.

En Recalde (2001) se sugiere que en los tiempos de Platón y Aristóteles, la premisa era que *"el número es la pluralidad de las unidades"* esta proposición también exonera al cero y al uno como números. Con los anteriores argumentos se puede concretar entonces que dentro de las concepciones filosóficas griegas, el cero no es aceptado como número, ya que en estas no se tiene en cuenta el *no ser*.

En los griegos pueden identificarse dos tipos de sistemas de numeración:

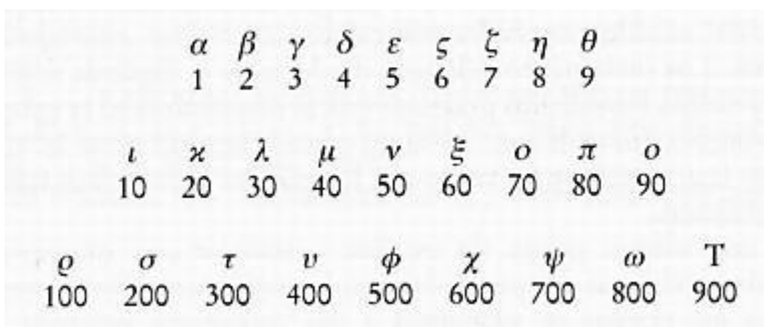
- Sistema de numeración Ática:

Fue desarrollado aproximadamente en el año 600 a.C. aditivo en base diez, tambien se obtenian números por el principio multiplicativo, utilizaban nueve simbolos base para representar los números, como se muestra en la siguiente ilustración.

Ilustración 5. Sistema de numeración Ática

- Sistema de Numeración Jónica o Alfabética:

En este sistema de numeración se presentan 27 letras minúsculas del alfabeto y algunos símbolos, como se muestra en la ilustración 6. Los números se asemejaban mucho a las palabras y éstos representaban números, este uso de letras dificultó mucho la realización de operaciones.



α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ο
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	Τ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Ilustración 6. Sistema de numeración Jónica

En la época de los antiguos griegos unos de los importantes sucesos fue el descubrimiento por parte de los pitagóricos de los números inconmensurables, cuando intentan medir la diagonal de un cuadrado de lado 1. Es importante mencionar que para los griegos el número solo se atribuía a los enteros positivos, sin incluir el cero.

Kaplan (2004) asegura que no hay prueba del cero en la Grecia homérica o clásica, fue hasta Alejandro cuando en unas columnas de fichas, se empieza a presentar un asomo de dejar un espacio en blanco, que no hace más progresos que esto. Al no tener notación posicional los griegos presentaban un atasco para el desarrollo de la matemática de esos tiempos, incluyendo con esto no contar con un símbolo para el cero.

Es en los tiempos de Alejandro cuando se inicia a significar al cero con un papel importante, cuando se invade en 331 a.C el imperio babilónico, se encuentran papiros con un símbolo "O" para representar el cero.

En un intento por explicar el porqué de utilizar el símbolo "O" para representar el cero, Kaplan (2004) afirma: "la explicación más común es que el "O" proviene de la palabra griega *omicrón,* la primera letra de ούδέν, *ouden* (nada)" (p.37). Sin embargo hay teorías que niegan esta explicación sustentando que ya este símbolo estaba asignado a otro número; sin querer generar mayor atención a este hecho, se podría decir que fue una arbitrariedad de los griegos en la que posiblemente tuvieron en cuenta los aportes circulares que ofrece la naturaleza. Sin embargo a pesar de pensar en atribuirle un símbolo al cero, lo que más interesa es la falta de definirlo como número, para lo que harían faltan varios siglos.

2.1.2. Sistemas de numeración orientales.

Aunque las civilizaciones de la China y de la India preceden en antigüedad a los griegos, Magaña (2012) refiere que a los griegos los sucedieron los hindúes, en lo que respecta al estudio de las matemáticas, los chinos e hindúes, recibieron su influencia directa, posteriormente cuando fueron dominados por los árabes en el 632 d.C. adaptaron los símbolos numéricos de los hindúes, para mejorarlos, lo mismo que la notación posicional.

2.1.2.1. *Los hindúes.*

Boyer (1987) afirma que para el siglo sexto dos matemáticos hindúes escriben dos obras, de la que se menciona la más antigua e importante llamada *Aryabhatiya,* su escritor Aryabhata presentaba una idea firme sobre "valor local o posicional" aunque éste ya había sido propuesto de manera incompleta en los babilónicos. Para llegar a la notación moderna, fueron necesarios años de ajustes a los sistemas de numeración hindúes y griegos, específicamente se mencionan tres sistemas que fueron evolucionando, se inicia con los numerales herodiánicos en la época de Asoka (siglo III a.C) donde se usaba un sistema en el que se reunían en grupos palotes verticales, luego en la escritura *Karosthi,* haciendo uso de la repetición, aportó al anterior sistema nuevos símbolos para unidades de orden superior como cuatro, diez, veinte y cien, como puede verse en la ilustración 7.

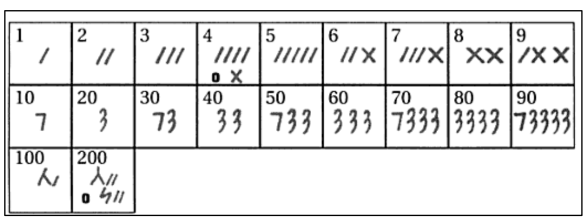


Ilustración 7. Sistema de numeración Karosthi

Cada cambio permitió un avance en el desarrollo de un nuevo sistema de notación, llamado caracteres de Brahmi, haciendo recuerdo del cifrado alfabético jónico griego, como puede verse en la siguiente ilustración.

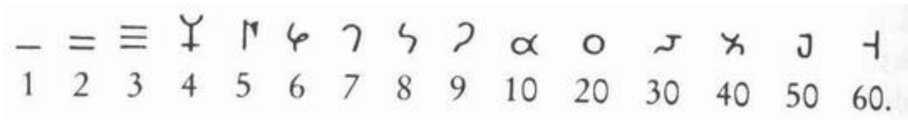


Ilustración 8. Sistema de numeración Brahmi

Ya en los numerales cifrados del sistema Brahmi, se suponen dos etapas para llegar a la notación moderna, la primera etapa es la reducción de cifras de los anteriores sistemas, que data del 662, Boyer (1987) se pronuncia:

> … La primera consiste en reconocer que, utilizando estrictamente el principio posicional, las cifras que representan los nueve primeros números pueden servir también como cifras para los correspondientes múltiplos de diez o, por la misma razón, como cifras para representar los múltiplos correspondientes de cualquier potencia de diez. (p. 276)

Así, en este sistema se propone una reducción a nueve cifras, ya que al considerar el principio posicional, las otras cifras serían sobrantes. Sin tener precisión sobre el origen del nuevo sistema, se consideran como importantes adelantos los intercambios con Persia, China e incluso un inicio más antiguo en Alejandría. Ahora, para la segunda etapa, consistía en reconocer la existencia de una posición que faltaba o lo que se puede decir, como asignar un símbolo al cero, Smith (citado en Boyer, 1987) sugiere que “la primera aparición indudable del cero en la India es en una inscripción del año 876”, se especula en Alejandría como posible origen del cero y en la India como consolidación del mismo.

El símbolo utilizado para representar el cero en el sistema de notación hindú tenía forma de un huevo redondo de oca y era llamada *sunya,* que traduce literalmente “nada” o “vacío”. Así, con la introducción de este nuevo símbolo, los hindúes presentarían un completo sistema de numeración para los enteros, formando un precedente teórico establecido.

Kaplan (2004) hace referencia a los hindúes no como los primeros en denotar el círculo hueco para el cero, sino que cita a Karl Lang-Kirnberg, como el historiador que le quita este privilegio de asignar un símbolo para el cero a los griegos, babilonios e hindúes y le da merito a los sumerios, quienes en el 3000 a.C presentaron en sus marcas de arcilla el símbolo para el 10 como una especie de O, sin embargo se reitera lo impreciso que puede ser la génesis del cero.

En la ilustración 9, Karl Menninger (citado en Boyer, 1987), presenta lo que considera la genealogía de los números dígitos.

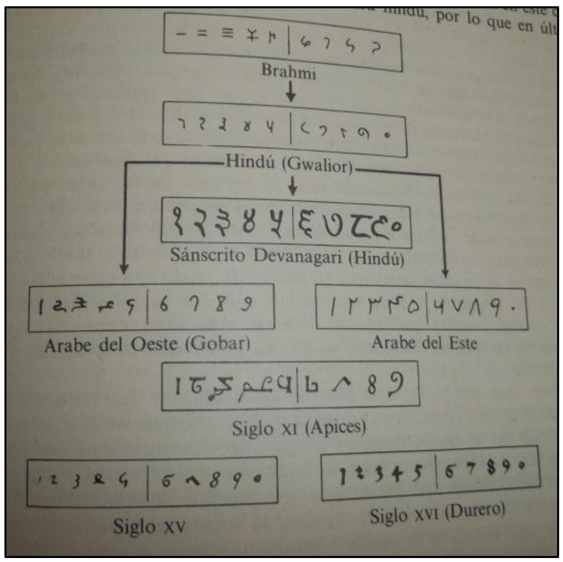


Ilustración 9. Genealogía de los números dígitos

Magaña (2012) refiere que hacia el año 570 a.C los hindúes desarrollaron un completo y práctico sistema de numeración en que gracias al uso del principio posicional permitía escribir cualquier número utilizando solo diez (10) dígitos.

Kaplan (2004) menciona que no puede ser sorpresa que el cero tome forma circular hueca para los hindúes, como se observó en los papiros de astronomía de los griegos. Se enfatizan en algunas palabras que darían vida al cero, sin asignarle un símbolo, Sphujidhvaja escribe el *Yavanajataka* que se denominó el “horóscopo de los griegos” en él aparece el cero escrito como “*bindu”* y como “kha” esto para el 150 d.C, además el astrónomo Aryabhata que para el 500 d.C llamó también “kha” al cero, siendo una de las más populares para nombrarlo en la India, es una posible evidencia de que los nombres asignados al cero tienen procedencia de los griegos.

Cualquiera de los nombres asignados al cero: sunya, bindu o kha, pueden incluso haber sido mal interpretados como vacío y estos significados ser más bien como algo que está listo para ser completado, pues en el caso de sunya su significado puede acomodarse hueco o matriz o lista para ampliarse; para bindu o kha se tiene que puede entenderse como “cavar” o “agujero” listo para llenar. Será esto una cuestión que aún inquieta más al lector del cero, en la naturaleza que se le atribuía a las épocas anteriores.

De todas formas se reitera la falta de atribución como número al cero, en los documentos de Bhaskara se muestran los nueve dígitos que hacían de números y el cero, apareciendo como “nulo”, que viene del latín medieval *nulla figura*, “ningún número”.

Varios matemáticos hindúes intentan acercar al cero a su naturaleza de número, presentado reglas matemáticas que reemplazarían una gran cantidad de pasos, como si se realizara una receta con muchos ingredientes. Así, gracias a la lenta evolución de la matemática y lo que este proceso conlleva, se da paso a que el cero y los números tengan una menor brecha que los diferencie.

2.1.2.2. *Los chinos.*

Los chinos plantearon un sistema de numeración utilizando varillas, sin embargo fueron muchos los inconvenientes que presentaron en el desarrollo del mismo, por ejemplo, hacia el año 213 a.C el emperador chino ordenó quemar los libros, excepto los de contenido técnico, algunos textos matemáticos pudieron ser preservados. Se considera que las culturas india y china, así como, entre china y oeste tuvieron contacto, y a pesar de la influencia cultural, sucedieron posibles choques, como por ejemplo, que en china nunca hicieron uso de las fracciones sexagesimales.

China presentaba un sistema de numeración hibrido combinando el principio aditivo con el multiplicativo en base diez además de tener en cuenta el orden de la escritura ya fuera horizontal o vertical. En la ilustración 10 se observa el sistema de numeración china, en donde se utilizan trece (13) ideogramas, que se combinaban entre sí para obtener la cifra deseada.

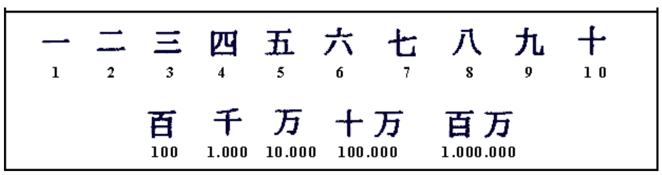


Ilustración 10. Sistema de numeración china

Los chinos lograron el acercamiento a las fracciones, los decimales, los números negativos; además estudiaron a fondo el número cero. Fue en el siglo VIII d.C cuando los chinos desarrollan un sistema posicional, en donde introdujeron un signo para el cero, se representaba la falta de unidades, con un pequeño círculo, se considera que está idea fue adquirida de la cultura hindú.

2.1.2.3. *Los árabes.*

En Magaña (2010) se sugiere que la cultura árabe adquiere gran parte de su conocimiento matemático gracias a los intercambios culturales con los hindúes, los griegos y los egipcios, al traducir diferentes obras al idioma árabe. Justamente, presentan el sistema de numeración arábigo gracias a la cultura hindú, lo que incluye al cero, que es llamado “céfer”, que en idioma árabe significa vacío, como se muestra en la ilustración 11.

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ilustración 11. Sistema de numeración árabe

Mónaco (2009) afirma que para el año 876 d.C el cero aparece como indicio de vacío, incluso le dan la denominación de cifra, este último número llegó a Europa a través de los procesos comerciales de los árabes.

En cuanto al desarrollo de diferentes conceptos matemáticos, gracias a la aparición del cero, en Europa, permitió el cálculo infinitesimal, la matemática financiera, entre otros, se agrega algunos avances en la física de Isaac Newton llegando a la geometría proyectiva de Georg Reinmann, además de las teorías de Albert Einstein y Max Planck sobre la relatividad y la mecánica cuántica.

Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, realizó un gran aporte a la difusión del cero en Europa, con respeto a esto Fernández (2015) afirma:

> El sistema de numeración hindú-arábigo que incluyó el cero fue promulgado en occidente por Fibonacci, en su Liber Abaci (Libro del ábaco), publicado en 1202. Leonardo de Pisa reconoció el poder del 0. Y usó el nuevo símbolo, pero no como un número al mismo nivel que los otros.

Como conclusión, se considera que el nuevo sistema de numeración decimal fue llegando paulatinamente a la cultura occidental, reemplazando los números romanos, sin embargo, el primer manuscrito europeo en el que se utilizó la numeración árabe data del año 976 d.C.

2.1.3. Sistemas de numeración americanos.

Las culturas azteca y maya, fueron las dos civilizaciones desarrolladas en el continente americano, los mayas dejaron un legado, del que, solo hasta el siglo XX se conoció gracias a exploraciones arqueológicas.

2.1.3.1. *Los mayas.*

Boyer (1987) manifiesta que los mayas de Yucatan utilizaban una numeración posicional vertical, para representar intervalos de tiempo entre distintas fechas de su calendario, tenían un sistema de numeración posicional con base veinte o vigesimal, utilizando cinco como base auxiliar. Representaban el cero con un símbolo parecido a un ojo semiabierto, sin embargo este aparece en diversas formas, pueden verse los símbolos del cero en la ilustración 12.

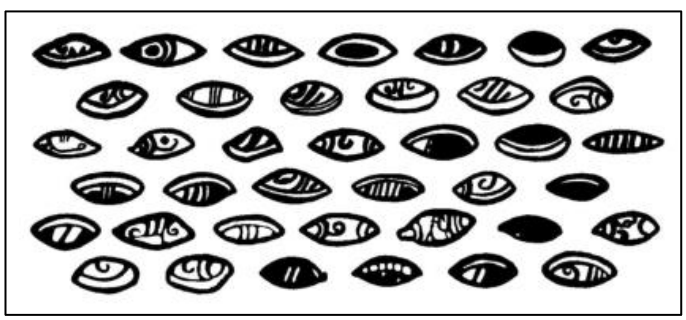


Ilustración 12. Representación del número cero en los mayas

El sistema de numeración maya, se representaba con tres símbolos, las unidades simples se representaban con puntos, una barra horizontal representaba los grupos de cinco y el caracol que representaba el cero.

Duque (2013) alude al hecho de que los mayas no consideren el cero como ausencia sino como algo que implica plenitud, proporcionaron al cero la categoría de que las cantidades estaban completas. Los mayas atribuían diferentes significados al cero según la figura que lo representara. Significado del cero como:

- Puño cerrado: los numerales (dedos) que sirvieron para contar al hombre están contenidos, integrados y completos en un espacio cerrado.

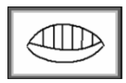


Ilustración 13. El cero como puño cerrado

- Semilla: como generadora de vida, contiene el comienzo y el fin, se supone que en el contexto matemático es generación de números.

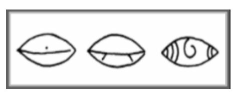


Ilustración 14. El cero como semilla

- Concha: significa muerte, terminación de un ciclo, es la medida que se completa.

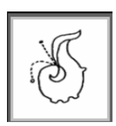


Ilustración 15. El cero como concha

- Flor incompleta: significa el inicio de la creación del cosmos, donde se completa una fase pero no está terminada

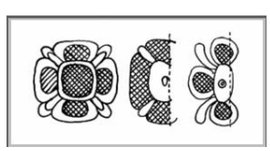


Ilustración 16. El cero como flor incompleta

En estas indicaciones, se establece el cero como la unidad matemática que está completa y pasa a ser una nueva categoría, una que está llena, se considera como la finalización de un periodo completo.

A continuación Duque (2013) presenta una tabla en la que reúne las diferentes concepciones del cero para los Mayas.

CATEGORIA 5: La concepción del cero		
Mientras los mayas conciben el tiempo de la forma ya vista, el intelecto de esta cultura lleva a cabo una de las invenciones más sorprendentes que civilización alguna haya podido alcanzar, el cero.		
Identificador	**Frase**	**Explicación**
FILOS-9-7-1	"En maya no es posible, lo que en la escuela se enseña: EL CERO ES AUSENCIA DE CANTIDAD, NO ES NADA, NO VALE NADA".	El autor con esta frase lo que da a entender es que el cero maya es diferente del cero occidental. El cero tal y como lo concibe occidente no encajaría dentro de la cosmovisión maya.
MATEM-21-4-1	"El concepto maya del cero no implica la ausencia de todo. En realidad, el maya no pretendía indicar ausencia o negación, sino que le deba al cero un sentido de plenitud: es decir, que al escribir la cifra 20, el cero únicamente indicaba que la veintena estaba completa…que no le faltaba nada, lo cual es una acepción opuesta al concepto de ausencia o carencia".	El cero occidental significa vacío, nada. Desde el punto de vista de la cosmovisión maya el cero es todo, es completitud. Aritméticamente significan lo mismo, conceptualmente el sentido que ambas culturas dan a esta creación es totalmente opuesto.
CALEN-218-3-1	"El cero para los mayas no es negación, no es la nada como se ha formado en el mundo occidental. Por el contrario, el cero es principio, categoría llena, es positivo".	Al hablar de categoría, según la cosmovisión maya, se está haciendo referencia a uno de los grupos de entidades en que los mayas clasificaban su universo.
CALEN-218-4-1	"No significa "no hay", sino que significa "todo está". En donde aparece la categoría cero, queda representado que las cantidades están completas y que debe pasarse al siguiente eslabón o categoría matemática".	El cero aunque permite completar categorías, es a su vez una categoría. La categoría cero es la conformada por aquellas entidades que están completas.
CALEN-229-2-1	"Debe quedar claro que el cero enseña que hay una categoría que está llena y sobre esta base puede pasarse al establecimiento de una nueva entidad, pero de ninguna manera destruyendo la entidad anterior, como enseñan algunas escuelas de la dialéctica, sino construyendo sobre ésta".	La dialéctica maya, a diferencia de la dialéctica marxista, no trata la lucha de opuestos o contrarios, sino de entidades distintas que se complementan una a la otra contribuyendo al balance universal.

Ilustración 17. Concepción del cero para los mayas

Restrepo (2005) afirma que los mayas además de descubrir el principio de posición también habrían inventado el cero, pero este no habría servido como operador aritmético, debido a cuestiones religiosas.

2.1.3.2. *Los incas.*

Frediani & Tenorio (2004) determinan que el imperio inca fue construido hacia el año 1250 a.C, es importante mencionar que en la cultura inca no se desarrolló la escritura, sin embargo su limitación no fue imperante al momento de registrar cantidades ni de representar números, utilizando un sistema de numeración decimal posicional. Gracias a la falta de escritura y viendo la necesidad de registrar información numérica, los incas producen un instrumento denominado *quipu* (ilustración 18), el cual consistía en un conjunto de cuerdas con nudos, que según el grosor, posición, entrelazamiento y color de sus cuerdas atribuían diferentes significados.

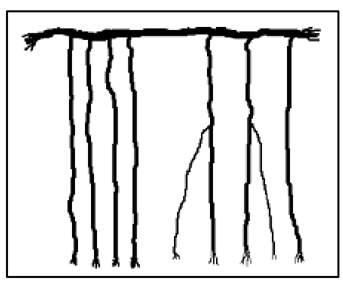


Ilustración 18. Esquema de un quipu sin nudos

La manera de representar números en el quipu venía regida por el sistema de numeración decimal posicional y por el uso de nudos, estos se contaban según su orden como unidad, decena, centena y sucesivamente hasta la centena de millar. Al igual que las cuerdas, se manejaban diferentes tipos de nudos, quien según su característica representaba el orden posicional del número.

El cero en los quipus, se representaba al no colocar ningún nudo en la posición a determinar, para esto se necesitaba que la distancia de los grupos de nudos fuese aproximadamente igual, así la ausencia de nudo sería interpretada como cero.

Como consideraciones finales, Ifrah (1985) presenta un cuadro comparativo de los ceros conocidos a través de la historia en los diferentes sistemas de numeración.

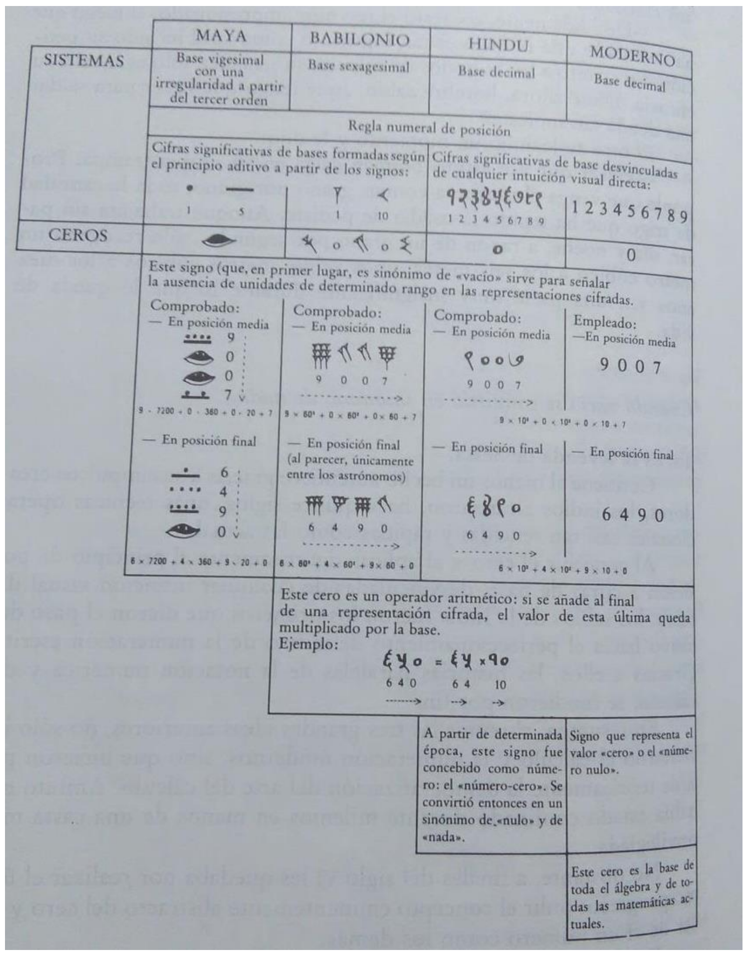


Ilustración 19. Cuadro comparativo de los diversos ceros de la historia

Se presenta este cuadro a manera de conclusión, pues en él se reúnen los sistemas de numeración que tuvieron en cuenta el cero, haciendo un importante aporte a su reconocimiento como número, permitiendo además que fuera reconocido como un valor numérico nulo y sirviera de operador aritmético.

Las anteriores culturas mediterráneas, orientales y americanas, sirvieron de guía para el seguimiento de la evolución del cero. En Giraldo (2014) se pronuncia, que a partir del estudio de estas culturas puede determinarse que son los enteros positivos la base de los sistemas de numeración, se justifica que en solo tres culturas: incas, mayas y los árabes, se considera el cero, pero como referencia de ausencia y es incluido en el sistema de numeración, más no es conceptualizado como número; siendo la cultura Hindú, una de las pocas en donde se muestra al cero como concepto matemático.

En Frediani & Tenorio (2004) se alega que a pesar de los diferentes símbolos utilizados para representar el cero por las diferentes culturas antes estudiadas, no se llega a determinar que el cero es un número, solamente lo utilizan de manera conveniente para evitar la escritura ambigua de los números.

Cabrera (citado en Duque, 2013) afirma que “pocos descubrimientos del talento humano han tenido tanta trascendencia en el engrandecimiento del tesoro intelectual y material del hombre, como el de categoría filosófica y matemática del cero” (Cabrera, 1995, p.210). Otro sustento del interesante suceso que produjo en matemática en surgimiento del cero.

Así mismo, Duque (2013) sugiere que el cero surge, en gran parte, gracias al aparecimiento del sistema posicional, dándole valor a la cifra de acuerdo a la posición que ocupen. El cero para los mayas y los incas era considerado como algo tangible significaba principio y final, a diferencia del cero considerado en la cultura occidental como “vacío” o “ausencia”.

La cultura hindú es una de las pocas, en las que se suponen, no solo se le atribuyó al cero un significado de ausencia sino también gracias a las contribuciones del matemático hindú Brahmagupta, ya que en su obra se presenta por primera vez sistematizada la aritmética de los números negativos y del número cero. A pesar de los aportes realizados por la cultura griega sobre el cero como concepto de nada o vacío, no fue interpretado como número como si lo hicieron los hindúes.

2.2 Caracterización matemática del cero en su institucionalización como número

Es importante hacer énfasis en aquellos procesos históricos que hicieron parte de la evolución de los procesos matemáticos en los cuales el cero podría considerarse como número, incluyendo su naturaleza como tal.

2.2.1 Definición matemática del cero.

En este apartado se intenta realizar precisión sobre la definición, concepto o sentido del número cero en lo que se refiera a la matemática actual y los elementos que ésta aporta para que esto sea posible.

Duque (2013) hace claridad en que los términos definición, concepto y sentido, deben ser diferenciados, y presenta la distinción entre estos

> La definición es una expresión exacta y rigurosa de un objeto, el concepto es la idea de ese objeto y el sentido es esa misma idea cuando se involucran las creencias, costumbres, valores y normas del individuo o grupo. Con el sentido, el concepto se aferra mejor al entendimiento, aunque es por medio de concepciones que se adquiere dicho sentido. (p. 6)

Así pues en este apartado se hace un acercamiento al sentido que tiene el cero actualmente, haciendo la aclaración sobre lo que se considera número, según Castro Puche (citado en

Duque, 2013), hace énfasis en lo difícil que puede resultar asignar un concepto para número.

> El concepto de número es complejo e involucra no solo el manejo de actividades de conteo y reconocimiento de símbolos sino también el desarrollo de estructuras cognitivas que permitan formar las ideas de las partes y el todo, las conexiones con las cantidades reales y su medidas y las relaciones que existen entre dichas nociones. (Duque, 2013, p.7)

Cataño (2007) presenta una definición para el cero, se toma en cuenta para esta investigación, pues se considera que une varios aspectos que definen al cero, incluso desde diferentes puntos de vista, teniendo en cuenta lo ambiguo que puede resultar dar una definición unificada del cero.

> El Cero es un número neutro que sirve como elemento de transición entre los números positivos y negativos. Como número independiente significa ausencia de valor o elementos. Dentro de un contexto específico su significado puede variar para establecer un espacio vacío en alguna casilla de unidades en una cantidad, es decir como elemento de valor de posición; hasta ser un elemento para determinar balance o estabilidad, como sería en el caso de una ecuación. (p.85)

Teniendo en cuenta el sentido que puede otorgársele al cero como número, se analizan algunas características que podrían designarse al cero. Por ejemplo en el caso de los conceptos de cardinal y la ordinal para los números, ¿se puede considerar al cero cómo cardinal o como ordinal? La cardinalidad se define como el número de elementos de un conjunto finito, matemáticamente se dice que:

$$card\ (\emptyset) = 0$$

Entonces puede decirse que en el conjunto vacío hay cero elementos, considerando al cero como una cantidad nula.

Ahora considerando que con los números cardinales se puede contar y además con ellos se pueden realizar operaciones aritméticas, ya desde la época de Brahmagupta, se incluía al cero para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación, división, entre otras. Dicho esto, puede decirse que el cero tiene sentido como número cardinal; sin embargo no hay precisión matemática que determine que ser cardinal sea una condición unívoca para ser natural.

En el caso de cero como número ordinal, Alain (2006) argumenta que un número es ordinal, cuando denomina un determinado orden, presenta un oportuno ejemplo para hacer claridad en la diferencia entre número cardinal y número ordinal:

> El mes de diciembre, por ejemplo, tiene 31 días. El número 31 indica la cantidad total de días de este mes; es por ende un número cardinal. Si en cambio, consideramos una expresión como "el 31 de diciembre", el número 31 no está empleado bajo su aspecto cardinal. Se trata en realidad del "trigésimo tercer" día de diciembre: especifica el rango de un elemento determinado (en este caso el último) de un conjunto que comprende treinta y un días; por consiguiente, se trata sin lugar a dudas de un número ordinal. (p.306)

El cero entonces también podría ser considerado como ordinal en el caso de un conjunto de números naturales, si se determina que cada número natural es un conjunto bien ordenado, dentro de este puede asignarse un orden, en el que se incluiría el cero. Por ejemplo, en el conjunto del número natural 3, se tienen los números $\{0, 1, 2, 3\}$ dentro del cual se tiene que $0 < 1 < 2 < 3$.

Por ahora, y para no implicar la formalidad matemática de una definición del cero, Cataño (2007), argumenta lo que considera como características de "individualización" del concepto cero, citando el trabajo de Castillo y Salas. "[…] Un entero que no puede definirse como positivo o negativo, que es par, que es el elemento neutro en la adición y que cuando se utiliza en la multiplicación siempre dará por resultado el mismo cero" (p.10). El cero entonces presenta diferentes definiciones según el autor que se investigue, por esto, podría resultar más oportuno recalcar las características de las que puede valerse para asevera su categorización como número.

2.2.2 Aserciones de algunos matemáticos entorno al concepto de número cero.

En la matemática moderna las reglas o leyes planteadas por los matemáticos antiguos, se presentan como definiciones o axiomas dependiendo de la teoría de números desde donde se analice, a las que se les atribuye un lugar importante en los procesos matemáticos.

Kaplan (2004) señala que en una traducción realizada en 1817, para el 600 a.C Brahmagrupta afirma:

- Representación del cero: “cualquier número, menos él mismo, es cero”
- En la suma, el cero es neutro: “la suma de cero con negativo es negativo: de afirmativo y cero es positivo; de dos ceros es cero”
- En la resta: “un negativo retirado del cero se hace positivo; y el afirmativo se vuelve negativo, menos cero, es negativo; el positivo es positivo; cero, nada”
- Para la división:

> Positivo o negativo, dividido entre cero, es una fracción con cero por denominador [lo llama “khacheda”, de la palabra para el cero, “kha”]. Cero dividido entre negativo o afirmativo es cero o se expresa por una fracción de cero como numerador y la cantidad finita como denominador […] cero dividido entre cero es cero. (Kaplan, 2004, p.100)

Se puede demostrar por contradicción la última afirmación: Se inicia sobre el concepto de que no hay un número igual a otro, en donde Kaplan (2004) continúa:

> La experiencia nos dice, por ejemplo, que 6 no es 17 y, […]. Pero si en realidad se pudiera dividir entre cero, todos los números serían iguales a sí mismos. ¿Por qué? Los matemáticos hindúes vienen en nuestra ayuda: cualquier número multiplicados por cero es cero. Así, $6 \cdot 0 = 0$ y $17 \cdot 0 = 0$. De ahí que $6 \cdot 0 = 17 \cdot 0$. Si pudiéramos dividir entre cero obtendríamos: $\frac{6 \cdot 0}{0} = \frac{17 \cdot 0}{0}$; al cancelar los ceros,

> obtendríamos que $6 = 17$. Pero no lo es y, por tanto, en forma legítima no se puede dividir por cero; $\frac{a}{0}$ carece de significado. (p.101)

En Kaplan (2004) se encuentran diferentes aportes a nivel matemático del cero, en el que se mencionan los trabajos de Mahavira, Bhaskara, John Napier y finalmente Bernoulli. Asevera que con el uso de ecuaciones y fracciones, actualmente podría argumentarse porqué la división con cero como denominador no es posible. En el caso de las fracciones, se puede argumentar por contradicción, suponemos posible $\frac{7}{0}$ y se plantea a siguiente ecuación:

$\frac{7}{0} = x$ Aplicamos la propiedad uniforme de las igualdades, se puede concluir que no existe un número que multiplicado por 0 no dé como resultado 7, entonces se puede decir, que no existe un número, en la matemática actual, que resuelva $\frac{7}{0}$, o que se hace general para cualquier número $\frac{n}{0}$.

En el 830 d.C Mahavira afirma:

- "Un número multiplicado por cero es cero, y que ese número se mantiene invariante cuando se […] reduce por cero", lo que apoyaron Brahmagrupta antes y Bhaskara después.
- "Un número se mantiene invariante cuando se le divide entre cero". Está afirmación es errónea, e incluso el traductor trata de adaptar tal error, intentando explicar que Mahavira no considera como posible ninguna división por cero.

En el 1100 d.C, Bhaskara interpreta las palabras de Brahmagrupta reformulándolas:

- "En la adición de cero, o en su sustracción, la cantidad, positiva o negativa, permanece igual. Pero sustraído de cero, se invierte"
- "Una cantidad, dividida entre cero, se convierte en una fracción cuyo denominador es cero".
- $0^2 = 0$
- $\sqrt{0} = 0$

En el 1700 d.C John Napier presentas las llamadas "ecuaciones a nada", haciendo un importante avance en la solución de ecuaciones cuadráticas con x como número racional, pues presenta:

- $ab = 0,$ entonces a, b o ambos$= 0$

Con esto se da solución a las ecuaciones cuadráticas expresadas como el producto de dos polinomios de grado 1, en donde aplicando la propiedad enunciada anteriormente se puede hallar los dos posibles valores de x que satisfagan la ecuación. Dichos valores de x se denominan actualmente raíces de la ecuación.

A finales del siglo $XVII$ Bernoulli crea una ley llamada regla del l'Hopital y realiza su prueba, sin embargo este luego es asignado al marqués del l'Hopital, por ejemplo en el caso de: sea $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3x$, al pensar en la relación $\frac{f(x)}{g(x)}$, se encuentra que es $\frac{2}{3}$ para cualquier $x \neq 0$, pues de otro modo se llegaría al caso $\frac{0}{0}$, para lo cual Bernoulli, evitando esta indeterminación propone analizar, no las funciones sino, la relación entre sus pendientes, con $f'(x)$ y $g'(x)$ como pendientes de dichas funciones. De la siguiente manera hablando en términos de límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Actualmente este descubrimiento se conoce como Regla del l'Hopital, con esta no se da solución al enigma de $\frac{0}{0}$, pues sólo se hace posible para el caso de las pendientes y sus relaciones.

Los anteriores hacen parte de algunos de los avances de las matemáticas gracias a la aceptación del cero como número, sin embargo al momento, son muchos aspectos importantes los que haría falta mencionar, incluso en otras áreas como en la física, por esto y más se puede considerar al cero como la base del álgebra y de gran parte de las matemáticas actuales.

2.2.3 Algunos axiomas y teoremas de la matemática sobre el cero.

El siguiente apartado constituye la evolución matemática de las afirmaciones presentadas anteriormente, fundamentadas en el volumen I del libro Cálculos de Tom M. Apóstol, lo cual es una constitución de los reales desde una perspectiva axiomática, en el cual se sustenta que las notaciones matemáticas has surgido un cambio lento pero revolucionario, iniciando en el siglo XVI d.C.

En Apóstol, T. (1980), se presentan algunos axiomas y teoremas que hacen un aporte importante a la aceptación del cero como número, ente ellos:

Axioma 4. Existencia de elementos neutros: Existen dos números reales distintos, que se indican por $0 \; y \; 1$ tales que para cada número real x se tiene: $0 + x = x + 0 = x$ y $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Axioma 5. Existencia de negativos: Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$

Teorema I.4. $-(-a) = a$, lo que puede verse como $0 - (-a) = a$

Teorema I.6. $0 \times a = a \times 0 = 0$

Teorema I.11. Si $a \times b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$

Por otra parte se tiene que Chinea (2010), realiza un aporte en la fundamentación axiomática, que instauró Peano en el siglo XIX, en sus 5 axiomas: Se define el conjunto ℕ de los números naturales como un conjunto que verifica las siguientes cinco condiciones:

1) Existe un elemento de ℕ al que llamaremos cero (0), esto es, $0 \in \mathbb{N}$

2) Existe la llamada aplicación siguiente:

$$\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \in \mathbb{N}$$

3) El cero no es imagen por la aplicación siguiente: $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \neq 0$

4) La aplicación siguiente es inyectiva:

$$n, m \in \mathbb{N} \, x \, \mathbb{N}, \phi(n) = \phi(m) \rightarrow n = m$$

5) Se verifica la inducción completa:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\, 0 \in \mathrm{A} \\ 2) \forall n \in \mathrm{A} \rightarrow \varphi(n) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = N$$

Con los anteriores postulados Peano construye su axiomática del conjunto de los números naturales, en el que se incluye el cero, y además que este es el primer elemento del conjunto. Sin embargo al anterior en sólo uno de los dos enunciados de Peano, en la primer axiomática los números naturales iniciaban en uno (1), debieron pasar diez años, después de que Cantor al estudiar la teoría de conjuntos, determinara que al conjunto vacío debía asignársele un cardinal, cuando Peano decide incluir al cero como natural y que sea este número el primero del conjunto.

Por las propiedades de la división de potencias, se tiene que: $n^0 = 1, n \neq 0$, pues:

$$1 = \frac{n^x}{n^x} = n^{x-x} = n^0$$

Importante aclarar que 0^0, pues se llegaría a $\frac{0}{0}$

Otro importante avance de la ciencia en el uso del cero es el considerado Sistema Binario, siendo un sistema de numeración posicional, en el que se usan el cero (0) y el uno (1).

Se finaliza este apartado, dejando claridad sobre la importante articulación que tiene la naturaleza del cero con diferentes conceptos matemáticos, a su vez, en un intento por darle formalidad como número, se le han atribuido algunos atributos matemáticos, que han sido base para el desarrollo y surgimiento de nuevos conceptos matemáticos.

Capítulo 3. Perspectiva epistemológica del concepto de número cero

En esta parte de la investigación se presentan el análisis epistemológico del número, en particular el cero, los diferentes obstáculos que subyacen a su reconocimiento e institucionalización como número, lo anterior se realiza bajo los fundamentos teóricos de Gaston Bachelard y Guy Brousseau.

3.1 Breve caracterización de obstáculo epistemológico

La asignación de un símbolo para el cero y su reconocimiento como número pasaron por una serie de dificultades, es hasta el 600 a.C donde Brahmagrupta en su libro le da un carácter de ser consolidado como número, al considerarlo dentro de sus procesos aritméticos como un número más.

No puede negarse el hecho de lo polémico que ha sido reconocer y asignar la categorización de número al cero, por esto se considera en este trabajo importante llevar a cabo un estudio epistemológico de este proceso, bajo los sustentos teóricos de Bachelard quien introdujo por primera vez en 1938 la noción de obstáculo epistemológico y fue retomado y redefinido por Brousseau en 1976, estipulando la existencia de obstáculos en la Educación Matemática.

Bachelard (citado en Schubring, 2012), en su investigación contempla la formación de un espíritu científico como punto de partida, y enfatiza en que se puede presentar como primer obstáculo, lo que denomina experiencia primera, siendo estos los conocimientos previos adquiridos a través de los sentidos, oponiéndose a los conocimientos científicos; es prioridad entonces, hacer y aceptar una ruptura entre estos dos conocimientos en pro de la formación de un espíritu científico.

Se considera que en el proceso educativo, el docente debe promover y proponer al estudiante actividades que le permitan desligar los conocimientos sensibles, para reformularlos y crear un conocimiento científico, que le permita adquirir nuevos conocimientos.

Artigue (1990), presenta la noción de obstáculo en palabras de Bachelard.

> "El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido". Tomado de Artigue M, Epistemología y Didáctica, (1990). Traducción Olaya, M. (Sf)

Es así como el error, debe ser visto no como una imposibilidad de adquirir conocimiento, sino como una herramienta que permita reformular los conocimientos previos, buscando una situación de éxito en pro del nuevo conocimiento. Ahora en el caso de Brousseau, este determina como obstáculo:

> En particular, califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. (Cid, 2000, p.2)

Sin embargo Brousseau (citado en Cid, 2000) propone como importante hacer la diferenciación entre "dificultad" y "obstáculo", presentando la primera como una manera de llegar a la segunda, viendo éste como un conocimiento-obstáculo, además enfatiza en que no sólo basta con identificar las dificultades del conocimiento-obstáculo, sino que deben resaltarse sus éxitos.

En un intento de identificar el éxito detrás de un obstáculo, teniendo en cuenta los aportes de Alain (2006), puede resaltarse, que la evolución del sentido del cero como un genuino número que designa una cantidad nula, es producto del proceso progresivo de ser denotado inicialmente como "ausencia de algo". Cid (2000) afirma:

> Un obstáculo es además una concepción que se resiste a evolucionar o a ser sustituida por otra, incluso cuando se hace patente su fracaso. Establecer el carácter de obstáculo de una concepción histórica exige algo más que comprobar su eficacia o ineficacia en un cierto campo de problemas, exige comprobar que, a pesar de las repetidas dificultades que producía, la comunidad matemática se resistió por largo tiempo a abandonarla. (p.11)

La anterior definición parece apropiada para el caso de la aceptación del cero, a pesar de aparecer inicialmente como dos cuñas para expresar una posición en la que faltaba una cifra o un lugar vacío, fueron necesarios varios siglos para su verdadera aceptación como número e incluso actualmente, no hay una aceptación matemática unificada, que lo determine como número natural.

3.1.1 Metodología para determinar obstáculos epistemológicos en la Historia de las Matemáticas.

Cid (2000), afirma que los obstáculos son concepciones, es decir "un conjunto de conocimientos y saberes que lleva a un individuo a dar respuestas válidas en un cierto campo de problemas, pero falsas o poco adecuadas en otro" (p.10). En el caso de los antiguos matemáticos, es a través de sus obras, que puede determinarse sus concepciones, sin embargo el proceso de transposición didáctica que ha tenido que llevarse a cabo, hace resaltar los errores y fracasos de la actividad matemática. Sin embargo, destacar estos errores no puede ser la base de las concepciones matemáticas.

De acuerdo a la categorización de obstáculos presentada con anterioridad por Cid (2000), en donde los obstáculos, tienen un lugar privilegiado en la Historia Matemática, debido a que dan cuenta de las diferentes facetas, que han tenido lugar, algunos conocimientos matemáticos para ser aceptados por una comunidad matemática. Se hace necesario tener en cuenta:

- Un determinado campo de problemas puede que no sea estudiado debido a varios factores, inicialmente debido a las estructuras mentales de los matemáticos de la época, que pueden considerar que a pesar de estudiar dicho problema matemático debe ser dejado de lado gracias a que no puede ser resuelto con éxito o simplemente no despertaron interés en ser estudiados.
- Puede ser muestra de un obstáculo no hacer la distinción entre conocimiento y saber, pues en ocasiones para resolver problemas se utilizan conocimientos de los que no se hablan, lo que indicaría que no hay una articulación de conocimientos para resolver nuevos problemas.
- Gascón (1993) (citado en Cid, 2000), afirma que para identificar obstáculos en la Historia de las Matemáticas, deben analizarse los momentos de ruptura que han tenido lugar en el proceso evolutivo de las matemáticas.

Con lo anterior Cid (2000) propone un grupo de señales que deben tenerse en cuenta para identificar los obstáculos epistemológicos en la Historia de las Matemáticas, aspectos que han sido considerados para la identificación de los obstáculos que han hecho parte del proceso evolutivo de la constitución el cero como número.

3.2 Principales obstáculos epistemológicos en la concepción del número cero

A continuación se identifican los obstáculos epistemológicos presentes en la concepción del de número, en particular del cero. A través de la indagación histórica – epistemológica realizada en esta investigación, se señalan los siguientes obstáculos epistemológicos, en torno al cero.

3.2.1.1 *Considerar el cero como nada y como elemento neutro.*

Recalde (2001) afirma que en la filosofía de Platón y Aristóteles, se considera que *"el número es la pluralidad de las unidades",* lo que deja al cero y al uno fuera de las posibilidades de haber sido considerado como número. Al contemplar al cero como nada, en la filosofía griega no se tiene en cuenta al no ser, la constitución de su base numérica contempla los números naturales sin el uno y el cero.

Para el ser humano puede resultar difícil asimilar la idea de la nada y si a esto se le agrega que se debe representar esa nada, así esta concepción no sólo es un obstáculo a nivel matemático sino también a nivel socioepistemológico. Se considera que diferentes escenarios culturales traen consigo huellas sobre conceptos y sucesos, son conocimientos heredados, como ejemplo, se encuentra la cultura maya, quienes debido a sus concepciones cosmológicas y culturales no aceptaron completamente la idea del cero, aunque si lo reconocieron.

Además, es importante anotar que es la representación matemática de la nada y el vacío ideas que, según D'Amore (citado en Veiga (2014)), son simples de entender hasta por un niño de cinco años. Sin embargo, detrás de esa "aparente" simplicidad, ocultos se encuentran siglos de investigaciones, búsquedas, explicaciones, ideas controvertidas que dan cuenta de las diferentes dificultades relacionadas a este concepto.

Se reconoce en el pensamiento griego se casó con la idea de los números expresaban formas geométricas, y ¿qué forma podría corresponder a algo que no estaba ahí? Solo podía ser la ausencia de algo es eso lo que toman como vacío, un concepto que dominaba en la cosmología de la época.

Pues se conoce en gran medida, que tanto Aristóteles y sus discípulos, entendían el mundo de los planetas como incrustados a una serie de esferas celestes concéntricas de una extensión finita, estas esferas estaban contenidas de una sustancia etérea, centrada en la tierra, la cual se ponía en marcha por un motor inmóvil, esa imagen la adopta la cosmología cristiana para quien el motor inmóvil es Dios, desterrándose así el vacío en la cosmología, lo cual implicaba deducir que todo lo relacionado con el vacío era un concepto ateo. De allí, que después se empiece a considerar el cero como elemento neutro.

Matemáticamente se considera como neutro todo elemento que al ser operado con cualquier número no se altera. El cero se considera como neutro en la adición y la sustracción, por ejemplo:

- En el caso de la adición:

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$

- Para la sustracción:

$$7 - 0 = 7$$

Cabe anotar que considerar al cero como elemento neutro en la adición y en la sustracción, trae implicaciones a nivel conceptual, dado que se sigue considerando la idea de cero como nada, por lo cual para los estudiantes este tipo de operaciones carece de sentido.

3.2.1.2 *No tener cómo representar el cero.*

Duval (2004) presenta que es a través de las representaciones semióticas que se tiene la posibilidad de hacer "visible" los objetos matemáticos, debido a la naturaleza de los mismos, no hay forma de acceder a ellos sino es gracias a sus representaciones. Pero como representar una cantidad que representó vacío inicialmente y luego se fue convirtiendo en un sinónimo de nada.

Así, para los griegos fue causa de atraso no tener una forma de representar el "vacío" que llegaría a representar el cero, los babilonios dejaban un espacio en blanco, pero esto no era una forma efectiva de representarlo pues daba paso a confusiones en la escritura de algunos números, esto ocasionó en gran parte que diferentes sistemas de numeración no llegaran a ser funcionales y completos, apenas es en los tiempos de Alejandro cuando se inicia a significar al cero su importante papel, cuando aparecen dos cuñas pequeñas inclinadas, las cuales harían el lugar de cero.

3.2.1.3 *Las operaciones con cero carecían de lógica.*

Kaplan (2004) sustenta que mientras que Brahmagupta en su libro presenta por primera vez la posibilidad de realizar operaciones algebraicas con el cero, en las que se incluyen números negativos, reiterando la estrecha relación de los números enteros con el cero, también presenta el obstáculo generado por la división entre cero, intentando no prestar mayor atención al asunto, de la siguiente manera según Kaplan (2004):

- Positivo o negativo, dividido entre cero, es una fracción con cero por denominador
- Cero dividido entre negativo o afirmativo es cero o se expresa por una fracción de cero como numerador y la cantidad finita como denominador
- Cero dividido entre cero es cero.

De igual forma sus sucesores Mahavira y Bhaskara no consideran la división por cero como posible.

Veiga (2014) presenta las conclusiones obtenidas de un análisis realizado a partir de la experimentación realizada en tres (3) cursos de grado quinto, la cual consistió en la solución de actividades que involucran la división por cero en tres (3) contextos distintos, a partir de lo anterior se identifican los siguientes obstáculos asociados a la división por cero.

- Dificultades asociadas al concepto de división aritmética: tener la concepción radicada de que todas las divisiones deben tener un resultado porque ésta es un reparto equitativo.
- Dificultades asociadas al concepto de infinito: Algunos alumnos consideran como número al infinito, incluso realizan operaciones con él. Otros, en cambio, usan la expresión del infinito como equivalente a algo que no tiene solución.
- Dificultades asociadas al concepto de ecuación: en general, no conciben la posibilidad de que una ecuación pueda no tener solución o infinitas.

- Dificultades asociadas al concepto de función. Ausencia de la noción de infinitesimal: en general, consideran el cálculo de límites y de imágenes como conceptos equivalentes.
- Dificultades asociadas a las características de las situaciones planteadas: en general, no diferencian la naturaleza la división por cero planteada en un contexto aritmético, algebraico o analítico.

Así mismo Veiga (2014) presenta los siguientes obstáculos que están relacionados con la división por cero:

- Obstáculos didácticos: se generan por la falta de tratamiento específico durante toda la etapa escolar, debido a múltiples factores, en las que se podría mencionar la transposición didáctica, el trabajo con funciones en situaciones escolares pierde dinamismo, lo que dificulta el aprendizaje de nociones de cálculo que involucran el concepto de infinitesimal.
- Obstáculos epistemológicos: se refleja en la concepción que tienen acerca de la división por cero, del infinito y las funciones.
- Obstáculos ontogenéticos: no se considera la diferencia entre el dinamismo de los infinitesimales y de la división aritmética. Por otro lado, la búsqueda permanente de generalizaciones asociadas a la división por cero dejan entrever la dificultad que este concepto encierra.

Según Veiga (2014) con todo lo expuesto puede verse el impacto que tienen los diferentes obstáculos mencionados en el tratamiento del cero por parte de los alumnos, en la división aritmética por cero y otros ámbitos que pueden relacionarse como el algebraico y analítico.

3.2.1.4 *La ambigüedad de los dos ceros.*

Cid (2000) menciona como obstáculo a lo que denomina ambigüedad de los dos ceros, refiriéndose a lo señalado por Glaeser, en cuanto a la dificultad de algunos matemáticos, para pasar de un cero absoluto, visto como ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen que se elige arbitrariamente.

3.3 Los diferentes sentidos del número cero

Gallardo (citado en Gallardo, A., Santos, N., y Hernández, J. (2013)) realizó un estudio empírico donde se descubrió las condiciones que tienen los estudiantes cuando amplían el conjunto de los números naturales a los enteros, así pudo identificar los "sentidos de uso" de los números negativos, y señala además la conexión que estos números tienen con el cero. Luego Gallardo y Hernández (citado en Gallardo et al. (2013)) realizan una nueva investigación una vez más en el período que data desde la Antigüedad hasta la segunda mitad del siglo XIX, recurriendo al método histórico crítico y encontraste presentan un estudio empírico con estudiantes de secundaria en el que identificaron y dieron nombre a los "sentidos de uso" siguientes:

- *Cero nulo*, "no tiene valor, es la nada, el vacío", identificar el cero como valor nulo pero no representarlo.
- *Cero implícito,* no aparece escrito, es verbal y utilizado durante el proceso de resolución de la tarea.
- *Cero total,* está formado por parejas de opuestos ($+n$, $-n$ con $n \in N$)
- *Cero aritmético*, surge como el resultado de una operación aritmética

- *Cero origen* es localizado sobre la recta numérica o bien como un elemento que separa los números positivos de los negativos
- *Cero algebraico*, emerge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación.

Gallardo et al. (2013) consideran importante que el docente identifique y preste especial atención no solo a la comprensión por parte del estudiante de los conceptos matemáticos, sino también a los procesos de abstracción y generalización, pues es en esta separación de los conceptos matemáticos y conocimientos humanos, que se genera una artificialidad de las matemáticas.

3.4 El cero y la negatividad

Tanto el cero como los números negativos han sido conceptos matemáticos con fácil aceptación, fueron necesarios muchos años después del surgir de los números naturales, para la aparición e institucionalización del cero y de los negativos.

Hernández, A. y Gallardo, A. (Agosto de 2007), afirman que:

> Actualmente el cero y los números negativos son temas del currículo escolar, generalmente tratados sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros y alcanzar una competencia en el manejo del lenguaje algebraico. (p.1)

Según lo mencionado anteriormente los contenidos con el cero y los números negativos, están dados en el currículo de matemática sin darles el estatus que realmente merecen. Ambos han sido considerados obstáculos en la Educación Matemática, debido a que no han tenido una fácil aceptación por la comunidad matemática, hicieron falta muchos esfuerzos por parte de diferentes autores para atribuirles el lugar que actualmente merecen en el conjunto de los enteros, hicieron falta estos dos conceptos para la ampliación del conjuntos de los números naturales, además de hacer posible la respuesta a diferentes operaciones aritméticas, algébricas y analíticas, aunque en el caso del cero, puede que no sea solución para algunas expresiones.

Capítulo 4. Conclusiones finales

Por último se realizan las consideraciones finales, que concluyen la presente investigación, dejando además abierta la posibilidad a otras investigaciones que pueden ampliar el sentido del número cero.

4.1 Alcance de los objetivos

En la presente investigación que realizó un estudio histórico – epistemológico del número cero en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano, en el que se encuentran importantes aportes a nivel matemático gracias a la consolidación del cero, y aunque actualmente no se le atribuye, una institucionalización a nivel general en la matemática como número natural, si es considerado en gran parte de los conceptos matemáticos actuales, desde simples cálculos aritméticos hasta contenidos complejos del cálculo.

La existencia del cero se especula inicialmente a partir de pensar la "nada", esta puede ser una de las múltiples causas de demora en su constitución como número, debido a que las consideraciones filosóficas griegas no tienen en cuenta el no ser.

4.1.1 Objetivo Específico 1: Caracterizar a través de los antecedentes históricos, la evolución y conceptualización del número cero en los sistemas: mediterráneo, oriental y americano.

Los estudios realizados en los diferentes documentos de Historia de las Matemáticas, hicieron base, para realizar la caracterización a través de los antecedentes históricos de la evolución y conceptualización del número cero en los sistemas: mediterráneo, oriental y americano.

Cada sistema realizó un aporte significativo a la constitución del cero, siendo los hindúes quienes finalmente dieron al cero un lugar como número, específicamente el matemático Brahmagupta fue el primero en categorizarlo como número, además de otorgarle un espacio en la aritmética con números positivos y negativos.

Hicieron falta dos siglos para que el cero hiciera su aparición después de los otros nueve numerales, se considera la edad media y el Renacimiento las épocas, en las cuales los árabes y los griegos hacen su mayor aporte a las matemáticas, con el invento de las cifras, la notación posicional, el cero, entre otros, permitiendo así, el desarrollo de conceptos matemáticos modernos.

4.1.2 Objetivo Específico 2: Identificar algunos aspectos epistemológicos en torno a la consolidación del concepto de número cero.

Finalmente, se realizó un estudio histórico y epistemológico sobre el número cero, en el que se identificaron algunos aspectos epistemológicos en torno a su consolidación, en el que se encontró una serie de concepciones y obstáculos, que lejos de ser problemas, hicieron parte fundamental y fueron pilares para la constitución del cero como número.

Los diferentes obstáculos epistemológicos identificados en la investigación, dan cuenta del proceso evolutivo del cero, cruzando un extenuante recorrido histórico – epistemológico, iniciando en la negación de su existencia, en su uso incorrecto y a la falta de representación, hasta su reconocimiento como número.

4.2 A nivel personal y profesional

A modo personal y profesional, se considera la importancia de tener en cuenta los estudios histórico – epistemológicos de los conceptos matemáticos a enseñar, la labor docente conlleva una serie de retos que ponen diariamente a prueba la capacidad para enfrentar y enseñar en el aula, tener las herramientas, no sólo didácticas, sino también tener un conjunto amplio de posibilidades que brinda la Historia de las Matemáticas y otras líneas de estudio en la matemática, hacen que, realizar investigaciones como estás sea un esfuerzo positivo, en pro de la potencialización de la educación como futuros licenciados.

4.3 Qué queda por hacer

Se deja abierta la investigación sobre los números cardinales, pues si estos son una forma de generalizar los números naturales, podemos concluir entonces que ¿el cero es cardinal y por tanto también es un número natural? ¿Qué relación podría establecerse entre un número cardinal y natural, de tal manera que garantice que al ser cero un cardinal es condición suficiente para ser número natural?

Referencias

Aaboe, A. (1964). *Episodios de la historia temprano de las matemáticas*. Traducido por Linares A. Cali, Colombia: Primera edición en español realizada por la Editorial Norma.

Alain, M (2006). *El misterio de las cifras*. Traducido por Jorge Salvetti. España: Editorial Manontroppo. Recuperado el 10 de diciembre de 2015, del sitio web: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=BRXEOBmMHVEC&oi=fnd&pg=PA88&dq=El+misterio+de+las+cifras&ots=3ALB5WePNo&sig=zyZid3nSMot4BBIgis-MMMkNLFU#v=onepage&q&f=false

Anacona, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. *EMA, 8* (1), 30-46.

Apóstol, T (1980). *Calculus Volumen I*. Barcelona, España: Reverté.

Artigue, M (1990). *Epistémologie et didactique. reserches en didactique des mathématiques. 10*(23). Traducido por Espitia Ma. F. Recuperado del sitio web: http://www.grupocalculo.galeon.com/articulo2.doc

Blanco, H. (2009). Del número a los sistemas de numeración. Trabajo de investigación de maestría no publicado. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Boyer, C. (1987). *History of Mathematics.* Traducido por Wiley J. & Sons. Madrid, España: Primera edición en español por la Editorial Alianza Universidad Textos.

Cataño, A. (2007). Estudio Didáctico del Cero. Trabajo de investigación de maestría. Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Recuperado el 4 de diciembre de 2015, del sitio web: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Chinea, C. (2010). Introducción de los Números Naturales Mediante los Axiomas de Peano. Recuperado el 27 de noviembre de 2015 del sitio: http://casanchi.com/matematica.htm

Duque, H. (2013). El sentido del número en la cultura maya. Trabajo de investigación de maestría. Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.

Fedriani, E. & Tenorio, A. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas matemáticas, 25*(), 159-190.

Fernández, J. (2015). *La historia del cero. Cuando la nada se convirtió en el todo.* Recuperado el 29 de marzo del 2016, del sitio web: http://soymatematicas.com/la-historia-del-cero/

Gallardo, A. y Hernández, A. (Agosto de 2007). *Las dualidades de la negatividad y el cero en la transición de la aritmética al algebra*. Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. pp. 101-106.

Gallardo, A., Hernández, A. y Santos, N. (2010). *La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria: un estudio de caso.* En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 303-314). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Giraldo, L. (2014). Los números enteros negativos en la matemática moderna y la matemática actual. Trabajo de investigación de pregrado. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Guzmán, M. & Gil, D. (1993). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e Innovaciones. Edit. Popular. Madrid.

Ifrah, G. (1985). *Las Cifras Historia de una Gran invención*. Madrid, España: Alianza.

Kaplan, R. (2004). *Una Historia Natural del Cero: La nada de existe*. México: Océano de México.

Macías, M. (2010). Evolución histórica del concepto de Número. *Revista Autodidacta, v.1*, n.1. Recuperado el 27 de agosto de 2014 del sitio: http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/

Magaña, P. (2012). El Origen De Los Números. Recuperado del sitio de internet de Monografías. Recuperado el 27 de agosto de 2014 del sitio: http://www.monografias.com/trabajos38/origen-numeros/origen-numeros2.shtml

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Primera edición Editorial Magisterio.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias.* MEN. Bogotá.

Mónaco, N. (2009). Matemática e historia "el número cero" ¿la nada matemática? Trabajo de investigación de pregrado. Dirección general de cultura y educación, Instituto Superior "Fundación Suzuki", Buenos Aires, Argentina.

Recalde, L. (2001). Lecciones de Historia de las Matemáticas. Santiago de Cali, Universidad del Valle: En Prensa.

Recamán, B. (2002). *Los Números una Historia para Contar.* Bogotá, Colombia: Taurus.

Restrepo, O. (2005). *Historia y Epistemología del Número*. Bogotá, Colombia: primera edición realizada por Omar Ciro Restrepo.

Schubring, G. (2012). *Os números negativos: Exemplos de obstáculos epistemológicos?*. Rio de Janeiro, Brasil: LIMC-UFRJ.

Veiga, D. (2014). *Análisis socioepistemológico de los obstáculos asociados a la división por cero.* EnLestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1655-1663). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.