La extensión de los números naturales a los números enteros, una propuesta de aula dirigida a estudiantes de grado 5º de la Educación Básica colombiana.

Olga Inés Chacón Gutiérrez Cód. 1331092

Leidy Johanna Guapacha Ospitia Cód. 0842477

Universidad del Valle.

Instituto de Educación y Pedagogía.

Área de Educación Matemática.

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Santiago de Cali, 2016

La extensión de los números naturales a los números enteros, una propuesta de aula dirigida a estudiantes de grado 5º de la Educación Básica colombiana.

Olga Inés Chacón Gutiérrez Cód. 1331092

Leidy Johanna Guapacha Ospitia Cód. 0842477

Directora:

Lic. Ángela María Gómez Vela.

Universidad del Valle.

Instituto de Educación y Pedagogía.

Área de Educación Matemática.

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Santiago de Cali, 2016

Agradecimientos

Dedicado a Dios, quien nos ilumina y llena de sabiduría para lograr nuestras metas, a nuestros padres, hermanos y parejas quienes con su apoyo y amor estuvieron siempre brindándonos lo mejor para llegar a cumplir este logro, a nuestros compañeros y amigos que estuvieron con nosotras compartiendo nuestras alegrías y tristezas durante esta linda experiencia, a nuestra tutora Ángela M. Gómez V. por todas sus enseñanzas, apoyo y gran disposición, a nuestros evaluadores por brindarnos su apoyo y guiarnos en el conocimiento, finalmente a todos nuestros maestros que con su comprensión y ejemplo a seguir, nos han permitido alcanzar esta meta.

Olga Inés Chacón G.

Leidy Johanna Guapacha O.

Contenido

Contenido de figuras

Contenido de tablas

Resumen

En el presente trabajo de grado se tienen en consideración las problemáticas que están inmersas en torno a la enseñanza y aprendizaje del número entero en la escuela, lo cual, ha sido objeto de estudio por parte de algunos investigadores como Bruno (1997), Cid (2000) González et. al. (1999), Iriarte et. al. (1991) y Navia y Orozco (2012); donde estos han manifestado algunos errores, dificultades y obstáculos alrededor del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del número entero. De acuerdo con lo anterior el interés principal de este trabajo es poder determinar ¿Cómo a través de una propuesta de aula, se puede favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros en estudiantes degrado 5º de la Educación Básica colombiana? para lo cual se realizará el diseño de una propuesta de aula que tienen como fin, abordar la enseñanza de los números enteros de manera integrada teniendo en cuenta los distintos sistemas numéricos, como lo plantea Bruno (1997) desde la perspectiva unitaria y las dimensiones de recta, contextual y abstracta. Finalmente se espera que este trabajo aporte una reflexión didáctica para la formación de profesores de matemáticas, en cuanto a propuestas alternativas en la introducción de los números enteros en grado 5º de la Educación Básica.

Palabras claves: Número Entero, propuesta de aula y Visión Unitaria en Bruno (1997)

Abstract

In this paper grade takes into consideration the problems that are immersed around the teaching and learning at school integer, which has been studied by some researchers as Bruno (1997), Cid (2000) González et. al. (1999), Iriarte et. al. (1991) y Navia y Orozco (2012); where they have expressed some mistakes, difficulties and obstacles around the process of teaching and learning concept integer. Agree with the above of the main interest of this work is to determine ¿ How through a proposed classroom, it can favor the extension of the natural numbers to integers in the 5th grade students of Colombian Basic Education? for which the design of a proposal whose purpose classroom will be made, to address the Teaching of Integers integrated manner, taking into account the different number systems As planted Bruno (1997) From the unitary perspective and dimensions straight, contextual and abstract. Finally work is expected to contribute a didactic reflection for the Training of Teachers of Mathematics, The Alternative Proposals in the Introduction of integers in the 5th grade of Basic Education.

Keywords: Integer Number, Proposed Vision classroom and Unitarian is Bruno (1997)

Introducción

El presente trabajo está inscrito en la Línea de Formación: Didáctica de las Matemáticas del programa de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. En él se plantea una propuesta de aula dirigida a estudiantes de grado 5º de la Educación Básica Colombia, la cual tiene como fin, favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros, para ello se tienen en cuenta algunos referentes históricos y metodológicos reportados por autores como Cid (2000), González et. al. (1999), Bruno (1997, 2001), Iriarte et. al. (1991), Ordoñez y Chavarro (2012), Martínez (2013), Chica (2011), Socas (1997) y Navia y Orozco (2012) para la introducción de los números enteros en la escuela, en los cuales los autores reportan los problemas, dificultades, obstáculos y errores presentes en la enseñanza y aprendizaje de este concepto, como también indican o dan posibles soluciones para la introducción de los números enteros en la escuela.

Con respeto a lo anterior este trabajo se divide en cuatro capítulos, el primer capítulo está dedicado a la presentación de los aspectos generales de la investigación como la contextualización de la problemática que es objeto de estudio, los objetivos a alcanzar en el transcurso de este trabajo y la justificación que permite dar cuenta de algunos elementos que favorecen al mejoramiento de algunos de los problemas presentes en la enseñanza y aprendizaje del número entero y en la extensión de los números naturales a los números enteros.

En el segundo capítulo se encuentran los referentes teóricos que fundamentan la estructura de este trabajo, los cuales son: los aspectos relacionados con la concepción del número entero a partir de la dimensión matemática la cual permite dar cuenta de una de las formas de construir los números enteros a partir de los naturales, se presenta igualmente a partir de la dimensión didáctica aspectos que permiten dar cuenta de algunas dificultades, obstáculos y errores en torno al número expuestas en diversas investigaciones, además de algunas propuestas de enseñanza en pro del diseño de la propuesta de aula para realizar un acercamiento a los números enteros en grado 5°, por último, en este apartado se presenta la dimensión curricular a partir de las propuestas vigentes del Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus documentos Los lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) en los cuales estará basado este trabajo de grado.

En el tercer capítulo se expone, la propuesta de aula para la extensión de los números naturales a los números enteros, lo cual se basa en el marco teórico propuesto en el capítulo anterior, también se indica el diseño metodológico propuesto, los conceptos matemáticos y perspectivas de desempeño de cada situación dentro de la propuesta de aula, así mismo se exponen los resultados y análisis de resultados de las producciones de los estudiantes, con el propósito de observar los procedimientos realizados por ellos y validar los errores, obstáculos y dificultades presentados en la investigación, además de algunas conclusiones a partir de la implementación.

Finalmente, en el cuarto capítulo se exponen las conclusiones finales del trabajo de grado las cuales responden a los objetivos planteados en el desarrollo de este y permiten dar cuenta del diseño y aplicación de la propuesta de aula dirigida a estuantes de grado 5° que busca favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros.

Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación

1.1. Planteamiento del problema

En torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros se vislumbran una serie de errores, obstáculos y dificultades[1] que han sido objeto de estudio por parte de diferentes autores tales como Cid (2000), González et. al. (1999), Bruno (1997, 2001), Navia y Orozco (2012) e Iriarte et. al. (1991), Los cuales han manifestado que esta serie de problemas pueden estar relacionados a la poca familiaridad que se tiene con la recta numérica y su unificación con la recta real, a entender el número como expresión de cantidad e ignorar el signo que precede al número, a la idea del número negativo y positivo como número relativo y finalmente presentar el concepto de número entero de forma aislada con relación a otros conjuntos numéricos como los naturales y los racionales. A continuación se exponen cada uno de estas problemáticas.

Partiendo desde la enseñanza de los números enteros en la escuela se puede evidenciar una de estas problemáticas, ya que se relaciona a la forma como se presenta y enseña este concepto, tomándolo como ente aislado de otros conjuntos numéricos generando así obstáculos en el aprendizaje, esto se debe en ocasiones al error de presentar los números enteros sin tener en cuenta a los números naturales, "olvidando" que los números enteros son una generalización de los naturales, a demás de compartir algunas propiedades como las plantea Bruno (2001) en relación a las dimensiones de recta, contextual y abstracta,[2] pues hay aspectos que permanecen

---

[1]Es importante aclarar que estos conceptos (Errores, Dificultades y Obstáculos) se presentaran en detalle en el marco teórico desde la perspectiva de Martin M. Socas (1997)

[2] Bruno (2001) define cada una de las tres dimensiones como: *dimensión de recta* hace referencia a la representación de los números sobre una recta, puntos y vectores, la *dimensión contextual* hace referencia a la

comunes en cada una de estas tres dimensiones permitiendo unificar estos conjuntos numéricos de forma adecuada. Lo anterior, también puede estar relacionado al no tener en consideración el conocimiento previo que los estudiantes han ido adquiriendo a largo de su aprendizaje y de sus experiencias, esto se puede dar porque en ocasiones se tiende a pensar que estos no son tan suficientes, significativos o funcionales, para la construcción de nuevos conocimientos y quizás puedan surgirle preguntas o dudas razonables al docente, en cuanto a que si estas ideas previas aportan al desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, llevándolo en ocasiones a tomar la decisión de tomarlos como supuesto que ya están establecidos y finalmente no se abordan como punto de referencia para el abordaje de nuevos conceptos, lo cual es una problemática planteada por Bruno (1997).

Otro aspecto importante, que genera una problemática en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros es entender el número como expresión de cantidad, ya que genera problemas en las operaciones aritméticas y las relaciones de orden, por ejemplo el entender la suma como aumento o como acción de añadir una cantidad a otra, es una dificultad que impide en algunos estudiantes responder a preguntas como: ¿puedes encontrar un número que sumado a 3 de -4?, lo cual, los lleva a la poca comprensión de la cuestión planteada, llegando a la conclusión de que no es posible realizar dicha operación (Iriarte et. al., 1991). lo anterior puede originarse desde el conjunto de los números naturales, puesto que, dentro de este conjunto no es posible realizar este tipo de operaciones, por la forma cómo están estructurados los números naturales, es decir, porque sus propiedades no lo permiten, y la sustracción no es considerada una operación interna en los naturales, todo esto conlleva a que los estudiantes interpreten de forma equivoca este tipo

---

utilidad de los números y su uso, finalmente en la *dimensión abstracta* se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas.

de preguntas establecidas dentro del conjunto de los números enteros, además podría generar en ellos avances muy leves en su conocimiento.

No obstante, se debe tener en cuenta que hay otras razones por las cuales los estudiantes no pueden responder a preguntas como la anterior, dado que dicha dificultad también puede estar relacionada con el signo menos y la tendencia a ignorarlo, esto se debe a que el símbolo menos en la actividad matemática se puede tomar como operador binario para hacer referencia a una operación o como operador unario para determinar o caracterizar el opuesto de un número, generando un obstáculo en el estudiante (Navia y Orozco, 2012), ya que al no resaltar la diferencia entre estos dos significados el estudiante puede relacionar el signo menos como el signo de una operación, esto se puede apreciar cuando al presentarle al estudiante operaciones tales como 3 + (-5) este ignora el sino menos que precede al número y solo toma el símbolo más para realizar la operación sin diferenciar que lo que se busca aquí es caracterizar el opuesto de un número en este caso de 5, llevándolos a seguir pensando dentro del conjunto de los números naturales por el conocimiento tan arraigado que tienen estos. Es por ello que se hace necesario comprender la razón por la cual se debe extender el conjunto numérico de los naturales a los números enteros.

> Otra problemática con relación a los números enteros está asociada a la idea del número negativo y positivo como número relativo[3], lo cual consiste en considerarlo en varios contextos (temperatura, nivel del mar, cronología, entre otros) como una transformación de cantidades que suponen una disminución o un aumento de una cantidad inicial. Los números relativos expresan

[3]El número relativo ha sido caracterizado por González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1999 p.72) como un número entero contextualizado, es por tanto la parte intuitiva-concreta del número entero. Estos números representan clases o posiciones en una serie ordenada con primer elemento (Citado por Fory, 2010)

> en este caso cantidades relativas con una estructura de doble número natural, es decir los números naturales con direcciones contrarias a los números enteros negativos, de este modo se espera que el estudiante comprenda que los números no sólo se usan para hacer referencia a magnitudes o cantidades positivas, sino que existen cantidades relativas, las cuales pueden ser positivas, negativas o cero de acuerdo con la posición que ocupen según sea el punto (o valor) de referencia elegido (Navia y Orozco, 2012, p. 7)

Por otro lado, Bruno (2001) menciona que la poca familiaridad con la recta numérica y la representación de los números naturales en ella influyen en las representaciones de los números enteros negativos, apoyando lo anterior Glaeser (1981, citado por Cid, 2000), expresa que esto genera una dificultad en la unificación de la recta real, ya que los estudiantes, no pueden concebir en un solo conjunto numérico tanto los negativos como los positivos y es por ello que establecen un modelo de recta numérica como dos semirrectas que funcionan separadamente, lo cual, impide la unificación de los números naturales con los números enteros, esta dificultad ha estado presente desde tiempo atrás con algunos matemáticos como McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy, pues ellos concebían y entendían las cantidades negativas como cantidades reales, es decir, las cantidades negativas era tan reales como las positivas, pero las negativas eran interpretadas en el sentido opuesto de las positivas, dicha heterogeneidad entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente, generando así un obstáculo[4] epistemológico en torno al concepto de número entero.

[4]Glaeser parte de la noción de obstáculo entendiéndolo como: dificultad umbral o síntoma.

De todo lo anterior, es preciso indicar que la recta numérica necesita un trabajo directo en el aula, aunque no sea un modelo sencillo de trabajar, y que los estudiantes utilicen de forma espontánea, aunque se ha constatado que se consigue mayor comprensión en las representaciones en la recta si se asocian a situaciones reales (Bruno, 2001).; por esta razón González et. al. (1999) señalan que la recta numérica es un modelo que proporciona una interpretación bastante "jugosa" de los números enteros y que además posee múltiples usos en las matemáticas, de modo que las representaciones de los números enteros requieren de un énfasis mayor en los libros de texto.

Ahora bien, para concretar la problemática se debe indicar que en Colombia la enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros se aborda desde los grados 6º o 7º de la Educación Básica, y es en esta etapa donde se evidencian algunos errores, dificultades y obstáculos en los estudiantes al momento de aprender dicho concepto; además como ya se ha mencionado, este problema se relaciona con la enseñanza del número natural y las operaciones dentro de este sistema numérico abordado en la Educación Básica Primaria, donde las concepciones de "número" son difíciles de modificar en la medida que se quiere construir un nuevo sistema numérico como el de los números enteros; de esta forma se hace necesario encaminar la enseñanza del concepto de número entero, a través de una propuesta de aula que responda al siguiente cuestionamiento:

¿Cómo a través de una propuesta de aula, se puede favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros en estudiantes degrado 5º de la Educación Básica colombiana?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general.

Favorecer a través de una propuesta de aula, la extensión de los números naturales a los números enteros, en estudiantes de grado 5º de la Educación Básica en una Institución Educativa oficial de la ciudad de Cali.

1.2.2. Objetivos específicos.

- Documentar la problemática desde algunos elementos conceptuales y procedimentales como son la concepción de número relativo, opuesto, distancia, relación de orden y el tratamiento de la recta; que den cuenta de algunas de las dificultades, errores y obstáculos con relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero.

- Articular en una propuesta de aula, una serie de actividades para movilizar en los estudiantes el concepto de número entero a través de la concepción de opuesto y el tratamiento de la recta.

- Implementar la propuesta en un grupo de estudiantes de grado 5º de una institución educativa de la ciudad de Cali.

- Validar las similitudes o diferencias encontradas entre lo que reportan las investigaciones teóricas y la aplicación de las actividades con el grupo de estudiantes.

1.3. Justificación

Teniendo en cuenta que el abordaje de los números enteros genera algunos problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el ciclo de grados 6º y 7º de la Educación Básica, se busca con el presente trabajo brindar elementos que favorezcan en el mejoramiento de algunos de los problemas y en la extensión de los números naturales a los números enteros. En este sentido se exponen a continuación 3 razones que dan sentido a la propuesta en pro de evidenciar argumentos de su importancia. La primera razón gira alrededor de tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, la segunda brinda elementos referentes a la utilización y el trabajo que se hace con la recta numérica, especialmente en la relación de las transferencias entre la dimensión contextual la recta y viceversa. Y la última razón aborda argumentos del porque el trabajo de grado es novedoso en cuanto a que busca la extensión de los números relativos a los números enteros en grado 5º y no en el ciclo de grados 6º y 7º como usualmente se trabaja en la educación colombiana.

A partir de lo anterior, se indica que el primer argumento de importancia del trabajo de grado es resaltar los conocimientos previos adquiridos por los estudiantes desde el grado 5º en relación a los números naturales, debido a que estos conocimientos se pueden aprovechar para realizar un acercamiento a los números enteros, puesto que el conocimiento previo no solo permite acercarse al nuevo conocimiento, sino que además estos son los fundamentos de la construcción del nuevo saber, ya que le permiten al estudiante explorar, poner en práctica lo que sabe, e interpretar la información; dándole sentido a este nuevo conocimiento y así atribuirle un primer nivel de significación, iniciando el proceso de aprendizaje. Lo anterior se relaciona con lo planteado por Bruno (1997) desde la Visión Unitaria, donde comenta que la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos numéricos se debe realizar a través de elementos que aporten a la relación e integración de los conocimientos nuevos con los viejos, permitiendo además que los estudiantes no construyan un conocimiento aislado de los números. Apoyando lo anterior Schubring (2012) comenta que:

> Un resultado clave de toda la investigación es la importancia de las ideas preconcebidas, es decir, los conocimientos ya establecidos por el alumno cuando este se enfrenta a nuevos conocimientos.

> Como muestra la investigación, los estudiantes no suelen asimilar nuevos conocimientos enseñados directamente y en su totalidad, por el contrario, existen interacciones del nuevo conocimiento con el conocimiento existente, que puede desarrollarse en forma de conflictos. (Schubring, G. 2012. p. 20, Traducción libre)

De este modo, al desarrollarse los nuevos conocimientos en forma de conflictos estos permiten que los estudiantes encuentren diferencias y semejanzas entre los nuevos conocimientos y los ya establecidos, permitiendo así que se asimile el nuevo conocimiento y se forme un solo conocimiento. Para ampliar esta idea se expone la siguiente cita:

> Al momento de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, lo que el estudiante ya sabe sobre ese tema de las matemáticas (formal o informalmente), o sea, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes, son la base de su proceso de aprendizaje. Así al docente le parezca que las concepciones previas son erróneas, las potencialidades mínimas y las actitudes negativas, no dispone de otra base para que el estudiante mismo inicie activamente sus procesos de aprendizaje. Sólo a partir de ellas puede empezar a cuestionar las preconcepciones, a incrementar las potencialidades y a modificarlas actitudes para que el progreso en los saberes conceptuales y procedimentales le vaya dando la seguridad y la confianza en que puede avanzar hacia nuevos aprendizajes. (MEN, 2006, p.73)

De lo anterior se tiene que, el conocer o realizar la extensión de los números enteros a través de los números naturales, puede permitir hacer uso de operaciones matemáticas como la resta o sustracción de forma más amplia, es decir, se le puede presentar a los estudiantes situaciones las cuales involucren “quitarle” a un número pequeño uno grande, lo cual no es posible de expresar en el conjunto de los números naturales ya que, la resta (sustracción) dentro de este conjunto numérico representa la operación de eliminación de objetos de una colección, de modo que, el realizar esta extensión ofrece un acercamiento a una nueva perspectiva al concepto de adición en los números enteros entendiendo la resta como la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo, donde, el resultado de restar dos números naturales no siempre es otro número natural.

Seguido a esto, la legislación colombiana enmarcada en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) propone dentro del componente del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, la pertinencia de que los conocimientos, los procesos y contextos trabajados en matemáticas deben ser cada vez más integrados, para evitar caer en algún fenómenos de la enseñanza y aprendizaje en este caso los obstáculos, errores y dificultades en torno a la extensión del número natural al número entero.

El segundo argumento que sustenta la importancia del presente trabajo de grado, es la utilización y el trabajo que se hace con la recta numérica, ya que es un modelo que proporciona una interpretación bastante amplia de los números enteros, donde estos pueden interpretarse como los opuestos de los números naturales, además la recta numérica permite representar operaciones de suma, resta o sustracción tanto en los naturales como en los enteros y se pueden establecer relaciones de orden, donde los estudiantes logran reconocer las diferencias y semejanzas de los números naturales y los números enteros, por otro lado, los estudiantes puede llegar a reconocer mediante la recta numérica los problemas que se plantean a partir de situaciones de la vida real como: dinero adeudado, la temperatura bajo cero, la profundidad bajo el nivel del mar, la posición de algún objeto o persona.

Además, trabajar con los números enteros a través de la recta numérica permite en los estudiantes tener claridad en la organización de los números y hacer interpretaciones de ellos en cuanto a su posición, resultado de una operación, representación de situaciones en la vida real o cuando un número es mayor o menor que otro, como también permite la integración de los conocimientos previos con el nuevo conocimiento y facilitar el aprendizaje de las posteriores extensiones numéricas. En este sentido se espera que el estudiante se apropie de algunos elementos que le permitan fortalecer el pensamiento numérico en torno a la comprensión del concepto y significación de número y del sentido.

Ahora bien la transferencia entre la dimensión contextual a la de recta y viceversa es un aporte importante en el diseño de la propuesta ya que permite una visión más integrada de los sistemas numéricos y de los procesos que se pretenden trabajar en el aula de clases, además de permitir que los estudiantes exploren en la recta, estas transferencias permiten que ellos puedan expresar operaciones matemáticas, diferenciar distancias y determinar el opuesto de un número.

La última razón de importancia del trabajo de grado, expone que lo que se busca con esta propuesta de aula es dar a conocer algunas estrategias, para que los estudiantes comprendan el concepto de número entero a través del número relativo y logren aplicarlo en diferentes situaciones, para ello se desarrollarán actividades que involucren el número relativo como mediador en la construcción del número entero, además de implementar situaciones de la vida diaria y del entorno de los estudiantes que permitan dicho acercamiento a los números enteros, con un referente motivador para el estudiante e integrador de conocimientos. Además se busca contrarrestar un poco las problemáticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de este concepto; lo anterior debe considerar: un lenguaje que se adapte a las capacidades y comprensión de los alumnos, un aprendizaje adaptado a la lógica interna de las matemáticas, los ritmos de trabajo en clase, los recursos y una representación adecuada. Por lo tanto, la exploración que realiza este trabajo de incorporar las actividades en el grado 5º, se sale de lo que tradicionalmente se ha realizado en otras propuestas colombianas que usualmente abordan el ciclo de grados 6º y 7º de la Educación Básica, para dar cuenta si lo que se encuentra en los diferentes referentes teóricos se puede validar al analizar los resultados de la aplicación de las actividades con los estudiantes.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1. Dimensión matemática

A lo largo de la historia las diferentes culturas o civilizaciones se vieron en la necesidad de contar, ordenar, medir, relacionar y comparar los objetos que tenían, y así llevar una organización de los objetos; para ello utilizaron recursos del medio que los rodeaba, representando cantidades a través de marcas o símbolos los cuales se fueron puliendo al pasar de los tiempos, pero a medida que las necesidades iban aumentando "cada cultura concibió unos u otros sistemas de numeración y símbolos para expresarlos, que se fueron desarrollando a lo largo de la Historia, perpetuándose algunos, perdiéndose otros" (Hernández, 2010, p.1). Vale la pena indicar que estos procesos de constitución del objeto matemático no fueron lineales ni homogéneos, y tampoco pueden atribuirse a un solo autor o cultura; este argumento se puede inferir de lo planteado por González et. al. (1999), de la siguiente manera:

> Ahora bien, El periodo de los negativos que va desde su aparición hasta su aceptación duró más de 1000 años, y la historia de su aceptación como números, fue un proceso lleno de avances y retrocesos, de oscilaciones que van del total rechazo a su aceptación como "artificios del cálculo", de intentos infructuosos por dotarlos de una existencia real. Y esta larga y azarosa historia no se cerró hasta el siglo pasado. El problema de los negativos, que había atormentado durante mucho tiempo a los matemáticos, terminó cuando éstos abandonaron la empresa de descubrirlos en la naturaleza y comenzaron a verlos como creaciones intelectuales. La solución supuso, pues, una inversión en la forma de entender la relación entre lo real y lo formal. Desde una perspectiva se vio claro que la justificación de los negativos sólo proviene de las leyes lógicas y aritméticas.
> (p. 21-22)

De modo que, la creación de los números negativos tiene su origen en la práctica matemática y más aun en las manipulaciones algebraicas, lo cual lleva a distintos matemáticos a intentar encajar esas nuevas ideas con las que ya se conocían, pero fue casi imposible de hacerlo. Por tanto, fue necesario crear un nuevo conjunto numérico que estuviera conformado por los números naturales ya conocidos para la época y el cero que permitiera además introducir el principio de permanencia, para obtener un resultado coherente, válido y totalmente satisfactorio, en la creación de los números enteros, los cuales serán el resultado de la ampliación de los números naturales, teniendo como base al cero y los números negativos.

Teniendo en cuenta lo anterior y algunos aspectos de tipo matemático encontrados en Suarez (1994) como axiomas, teoremas, definiciones y propiedades; a continuación se fundamenta en la construcción formal del conjunto numérico de los números enteros, con el objetivo de encontrar elementos para el diseño, aplicación y análisis de las actividades que se proponen a los estudiantes en los capítulos siguientes del presente trabajo de grado.

2.1.1. Presentación de una construcción de los números enteros negativos.

Para la construcción de los números enteros se partirá del conjunto de axiomas que describe el sistema de este conjunto numérico, **Z =** {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…} y que serán de gran utilidad en la construcción de sistemas más generales como los números reales.

Axiomas fundamentales de los números enteros.

Axioma 0 (A_0): Existen dos funciones *s* y *p*, definidas de la siguiente manera:

$$s, p: Z \times Z \rightarrow Z$$

Tales que

$s(a, b) = a + b$ llamada adición y $p(a, b) = ab$ llamada producto.

Ahora bien dichas funciones indican que Z es cerrado respecto a las operaciones de adicción y multiplicación, lo cual permite afirmar que estas operaciones están bien definidas. Esto es:

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $(a, c) = (b, d)$ y por tanto $a + c = b + d$; es decir, se puede sumar un mismo número entero a ambos lados de la igualdad. Análogamente se puede hacer con $ac=bd$. Ahora bien estas dos operaciones se satisfacen para todo $a, b, c \in$ **Z**.

- s_1: Si, $a, b, c \in$ Z, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$
- p_1: Si, $a, b, c \in$ Z, entonces $(ab)c = a(bc)$
- s_2: Si, $a, b, \in$ Z, entonces $a + b = a + b$
- p_2: Si, $a, b, \in$ Z, entonces $ab = ba$
- s_3: Existe un único entero 0 (cero) tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in$ Z (0 se llama el *neutro* para la adición).
- P_3: Existe un único entero $1 \neq 0$ tal que $a1 = a$, para todo $a \in$ Z (se llama el *neutro* para la multiplicación).
- s_4: Si, $a \in$ Z entonces existe un único $-a \in$ Z (el opuesto aditivo de a) tal que $a + (-a) = 0$
- p_4: Sean $a, b, c \in$ Z. $a \neq 0$. Si $ab = ac$, entonces $b = c$ (propiedad cancelativa de la multiplicación).
- p_5: Si $a, b, c \in$ Z, entonces $a(b + c) = ab + ac$

Observación: La operación definida como $a - b = a + (-b)$. Luego **Z** es cerrado para la sustracción o la diferencia. De acuerdo a la observación anterior, la sustracción dentro del conjunto de los números enteros se puede expresar en términos de la adición es decir, que al minuendo se le suma el opuesto del sustraendo, como se muestra en el siguiente ejemplo: 7 – 9 = 7 + (-9) = -2

A continuación se presentan algunas propiedades de los números enteros entendidas como teoremas los cuales se deducen de los axiomas anteriores.

Teorema 1: Si $a, b, c \in$ **Z**, entonces $b = c$

Demostración: Según S_4,existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ (por S_2), entonces a partir de $a + b = a + c$ y el axioma 0, $(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$ de donde por S_1, $(-a + a) + b$, es decir $0 + b = 0 + c$, por lo tanto $b = c$

Teorema 2: Para todo $a, \in$ **Z**$a0 = 0$

Demostración: Según S_3, y P_5 $a0 = a(0+0) = a0 + a0$ y también $a0 + 0 = a0$; por consiguiente $a0 + a0 = a0 + 0$ y el teorema 1 implica $a0 = 0$

Teorema 3: Si $a, b \in$ Z, entonces

i. $-(-a) = a$

ii. $(-a)\, b = a\,(b) = -(ab)$

iii. $(-a)(-b) = ab$

Demostración:

i. $(-a) + a = 0$ y $(-a) + [-(-a)] = 0$ (de acuerdo con S_4). Entonces $(-a + [-(-a)] = (-a) + a$ y por el teorema 1, $-(-a) = a$

ii. $(-a)\,b + ab = b\,(-a) + ba = b\,(-a + a) = 0$. Igualmente $-(ab) + ab = 0$ y finalmente $(-a)\,b = a(-b)$.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto de **Z**, llamado *enteros positivos* Z^+, que satisface las siguientes propiedades:

- O_1: Si $a, b \in \mathbf{Z}^+$ entonces $a + b \in \mathbf{Z}^+$ y $ab \in \mathbf{Z}^+$ ($\mathbf{Z}^+$ es cerrado para la adición y la multiplicación).
- O_2: Dado cualquier número $a \in \mathbf{Z}^+$ se cumple que $a \in \mathbf{Z}^+$, ó $a = 0$ ó $-a = 0$ (las disyunciones son exclusivas). Cuando $-a \in \mathbf{Z}^+$ se dice que a es negativo.

Teorema 4: $1 \in Z^+$

Demostración: $1 \neq 0$ por P_3, entonces $1 \in Z^+$ ó $-1 \in Z^+$ (según O_2); si, $-1 \in Z^+$ entonces, $(-1)\,(-1) = 1 \in Z^+$ lo cual contradice a O_2.

Definición 1: Sean a, b ∈ Z. Se dice que *a* es menor que *b*, en símbolos $a < b$ equivalente a $b > a$ es decir que *b* es mayor que *a* y significan $b - a > Z^+$. Además $a \geq b$ significa $a < b$ ó $a = b$; $a < b < c$ Equivale a, $a < b$ y $b < c$.

Teorema 5: Sean $a, b, c \in Z$, entonces

i. $a \in Z^+$ *si, y sólo si,* $a > 0$.

ii. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$ y $ab > 0$

iii. $a > 0$, ó, $a = 0$, ó $-a > 0$.

iv. $aa = a^2 \geq 0$

v. Si $a > 0$ *y* $b < 0$ entonces $ab < 0$

vi. Si $ab > 0$ y $b > 0$ entonces $a > 0$

vii. Si $a > 0$, $ab < ac$ si, y solo si $b < c$

Demostración VI: Supondremos que $a \leq 0$ y llegaremos a una contradicción. En efecto, si $a=0$ entonces $ab = 0$; si $a< 0$, como $b > 0$ tendremos $ab < 0$, en cualquiera de los dos casos obtendremos una contradicción con la hipótesis.

Definición 2: Sea a ϵ Z, el valor absoluto de a, $|a|$ se define por:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Geométricamente el valor absoluto de un número entero es la distancia que hay del numero al cero y esta idea se puede extender a distancia entre dos números, el valor absoluto de un número entero es positivo o cero. Esto permite justificar y explicar la razón del porque la suma de dos números enteros negativos es la suma de sus valores absolutos, donde el resultado final de esta operación es otro número entero negativo.

Teorema 6: $Si\ a, b\ \in Z\ entonces$

i. $|-a| = |a|$

ii. $\left|ab = |a|\ |b|\right|$

iii. $-|a| < = a \leq = |a|$

iv. $Si\ b\ > 0, |a\ \leq b\ si,\ y\ sólo\ si, -b\ \leq a\ \leq b|$

v. $|a + b| \leq |a| + |b|$

El número entero por medio del modelo de la escala numérica.

La representación de la recta numérica es un modelo de tipo geométrico, según lo planteado por Gonzales et. al .(1999) este tipo de representación permite caracterizar el concepto de número entero ya que, se parte del conocimiento de los números naturales sobre el soporte de la recta geométrica, lo cual permite extender este concepto matemático hasta los números enteros, donde los elementos de este conjunto estarán representados por un punto en la recta o bien por una distancia, desplazamiento, vector o saltos que permiten contextualizar trayectos realizados por objetos, animales o personas, además puede ayudar a los estudiantes en la compresión de operaciones matemáticas viendo el número entero como punto en la recta y como operador, se espera reflejar algunas de estos aspectos en las tareas de la secuencia a aplicar.

Ahora bien para describir la posición de un punto sobre una recta, se necesita un punto de referencia y los dos sentidos de la recta, una unidad de medida para considerar las distancias de los puntos al origen, o la distancia entre los puntos de una recta.

Tomando un punto A como origen y un segmento AA_1 como una unidad de medida, se determinan una serie de puntos $A_{1,}$ $A_{2,}$ $A_{3......}A_n$ tal que la distancia entre los puntos consecutivos sea la misma distancia entre A y $A_{1.}$ Los puntos A_i de esta semirrecta, se pueden identificar con los números naturales, el punto A con el 0, el punto A con el 1, y así sucesivamente. El punto A_1 está a una unidad de distancia del origen, el punto A_2 a dos unidades de distancia, etc.

Sobre la otra semirrecta se realiza un proceso análogo, pues para cualquier punto $A_{i,}$ existe un punto A'_i, tal que la distancia de ambos al origen es la misma. Estos puntos tienen las mismas condiciones que los anteriores, la distancia de A'_i, al origen es 1 , la distancia de A'_2 origen es 2 , etc., en este caso es necesario una nueva serie numérica para la otra semirrecta, números que indican la misma distancia pero en distinto sentido, a estos números es a lo que se denomina “números negativos” y se denotaran por – 1, – 2 , -3 ,…., - n ,…, donde N es un número positivo.

Así se ha establecido una escala en la recta identificando puntos con números, lo que ha dado lugar a un nuevo conjunto numérico al que se denomina conjunto de los números enteros, formados por los números naturales, los números negativos y el cero como se muestra a continuación en la figura 1

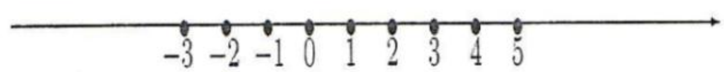


Figura 1. *Representación de los números enteros en la recta.*

A hora bien al pasar las operaciones sobre la recta numérica, la mayoría de las ocasiones el número entero tiene que aparecer en su aspecto dinámico, simultaneándose en ocasiones el número entero como punto de la recta y como operador. A continuación se ilustra algunos ejemplos en el que se da algunas reglas de la adición para visualizarlas en la recta numérica.

Sí el número a es positivo y b es negativo para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la derecha con el origen en cero y extremo en *a*. Luego se traza otra flecha con origen en *a* y que recorra hacia la izquierda *b* unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma. A continuación se plantea un ejemplo sobre la representación de la suma en la recta numérica: primero sumamos gráficamente los números 6 y (- 8) como se muestra en la figura 2 Luego la suma 6 y (- 8) es igual a (- 2), ahora bien esta suma se expresa de la siguiente manera: 6 + (- 8) = (-2)

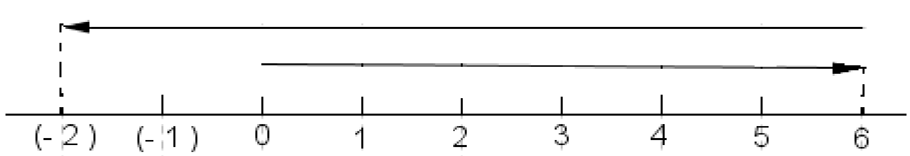


Figura 2. *Representación 1 de operación suma a través de la recta*

Si el primer sumando es negativo y el segundo positivo, la primera flecha se traza hacia la izquierda y la segunda hacia la derecha. Como se muestra en el ejemplo de la figura 3

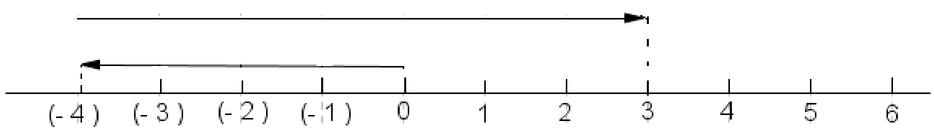


Figura 3. *Representación 2 de la operación suma a través de la recta*

Un aspecto importante de la recta numérica es la de permitir entender e interpretar las operaciones como las planteadas anteriormente, relación de orden, y el concepto de distancia en términos de valor absoluto de los números enteros de esta forma la recta numérica se utiliza como soporte intuitivo.

En cuanto al orden y a su representación en la recta se tiene que: Para definir un orden en Ẓ que conserve el orden de los naturales y que incluya los elementos de Z^-. Para ello se recurre a la representación que ubica el cero como punto de referencia; a su derecha se colocan de manera progresiva los elementos de Z^+ y a la izquierda, los elementos de Z^-. Esta es una denominación al nominal que permite una visualización integral de Z^- y Z^+ :

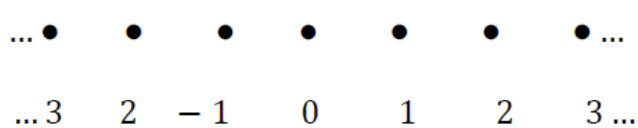


Figura 4. *Representación de la propiedad de orden en la recta.*

Dado un número entero $\times \in Z$, se presenta uno y sólo uno de los tres casos siguientes: $X = 0,\ X \in Z^{+},\ X \in\ Z^{-}$ Además, hay que tener en cuenta que $\times \in Z^{+}$, entonces $-\times \in\ Z^{-}$; si $\in\ \ Z^{-}$ si $X\ \in\ Z^{-}$ entonces $-X \in\ Z^{+}$.

Se suele denominar a los elementos de Z^{+} los enteros positivos y a los elementos de Z^{-} en teros negativos. En este orden de los enteros permite definir formalmente el orden en todo, a través de la resta Zill, D. y Dewar J. (1993). Citado en Navia y Orozco (2012)

Dados dos números enteros a y b pertenecientes a Z, decimos que $a < b$ *si* $b - a\ \in Z^{+}$. *Cuando* $a < b$ *también escribiremos* $b > a$. *Además escribiremos* $a \leq\ b$ *si* $a\ < b$ *o* $a = b$

A hora bien, en cuanto a la relación: "mayor que" y "menor que". Se tiene:

Si a y b son número enteros, se dice a es menor que b, si $b - a$ es positivo, y se escribe $a < b$. También en este caso se dice que b es mayor que a y se escribe $b\ > a$. Esto significa que, en la recta, a está a la izquierda de b (si se ha dibujado de tal manera que 0 está a la izquierda de 1). En particular, la expresión $a > 0$ quiere decir que a es positivo y la expresión $a < 0$ significa que a es negativo.

Dos relaciones adicionales de orden que son importantes Robledo j. (2007) citado en Navia y Orozco (2012)

1. a **es menor o igual a** b , dado por

   $a\ \ \leq\ b$ sí y sólo si $a\ < b$ o $a = b$.

2. a **es mayor o igual a** b, dado por

   $a \geq b$ sí y sólo si $a\ > 0$ o $a\ 0\ b$.

Por último la distancia en términos del valor absoluto**.** Teniendo que:

Dada una recta el cero (0) es la coordenada del punto 0 y X es la coordenada de un punto P. Se usa la expresión "distancia entre los números 0 y X", que se denota, con el significado intuitivo de "longitud del segmento $\overline{0\,P}$", o "distancia entre 0 y P" con esta correspondencia, debe ser claro que sí X es positivo entonces la distancia entre 0 y X es el opuesto de X, $-X$ (por ejemplo, la distancia entre 0 y -5 es $-(-5)$). Además si se define la distancia entre cero y cero como cero, entonces la distancia entre 0 y un número entero X , cualquiera que él sea, se puede expresar a través de la fórmula siguiente:

$$d\ (0, X) = \begin{cases} X, si\ X \geq 0 \\ 0. si\ X = 0 \\ -X,\ \ si\ X < 0 \end{cases}$$

Esta fórmula de distancia está relacionada con el concepto algebraico conocido como: **valor absoluto.** Por ejemplo, $d\,(0\,,5\,) = \ 5 = |5|$, $d\,(\,0\,,-5\,) = -(-\,5\,) = 5 = |-\,5|$, $d(0,0) = 0 = |0|$

Teniendo en cuenta los elementos expuestos sobre el concepto de número entero desde el punto de vista matemático, es importante resaltar dos aspectos primero, la enseñanza de este concepto matemático debe estar basada desde aspectos empíricos y desde una perspectiva matemática ya que permite dar cuenta de la naturaleza del objeto matemático a través de las leyes axiomáticas, preposiciones, definiciones, teoremas etc. Segundo, los números enteros se pueden introducir desde el marco geométrico, ya que dentro de este marco existen diversos modelos para la introducción los números y más aún los números enteros, donde generalmente se utiliza la recta numérica como soporte para introducirlos, ya que ella favorece la comprensión de este concepto en su extensión de los números naturales a los enteros.

Por lo tanto para efecto de este trabajo se tendrán en cuenta los elementos expuestos anteriormente para el diseño de la propuesta de aula aún que se tiene en cuenta el valor absoluto y sus propiedades no es objeto de análisis.

2.2. Dimensión didáctica

En esta parte del documento se tendrán en cuenta aspectos tales como las dificultades, obstáculos y errores en torno al número entero reportados en las investigaciones de autores como Socas (1997), Bruno (1997), González et. al. (1999), Cid (2003) y la propuesta de enseñanza en pro del diseño de la propuesta de aula desde la visión unitaria de Bruno (1997).

2.2.1. Dificultades, obstáculos y Errores en torno al número entero negativo.

A lo largo de la historia en el aprendizaje de las matemáticas y más específicamente en el caso del aprendizaje de los números enteros se han evidenciado dificultades, obstáculos y errores en los estudiantes, que impiden el desarrollo de su conocimiento alrededor de este concepto. Donde según Socas (1997) comenta que "las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica, en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (p.1), lo cual impide el desarrollo adecuado del aprendizaje. Por tanto conocer de manera general o de manera específica las razones por las cuales se generan estas dificultades, obstáculos y errores en los estudiantes, permite diseñar e implementar una enseñanza adecuada en los alumnos y facilitar un mejor aprendizaje de las matemáticas. A continuación se expondrán cada una de estas problemáticas según las investigaciones reportadas por Bruno (1997), Cid (2003), Socas (1997) y González et. al.:

Bruno (1997) en sus estudios realizados en cuanto a la enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación plantea que estas dificultades y errores están relacionadas con la resolución de problemas adictivos y en los cambios que se producen en la simbología. A continuación se explican estas dos dificultades:

- Los problemas aditivos con números negativos pues los estudiantes al venir trabajando durante su proceso escolar con los números naturales y sus operaciones no conciben la idea que existan números negativos y que estos sean menores que los positivos.
- Los cambios que se producen en la simbología $+a = a$, esto genera una dificultad en los estudiantes ya que ellos pueden encontrar los números $\{+1, +2, +3, \ldots\}$ de naturaleza distinta a los que ya conocían $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Ahora bien, Cid (2003) en su trabajo la investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión plantea que las dificultades en el aprendizaje de los números enteros negativos pueden estar asociadas a:

- Los números enteros se manejan como si se tratasen de naturales; lo que significa que el signo menos se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que producen muchas respuestas erróneas.
- El número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positiva es decir, se reconoce que los enteros negativos son menores que los positivos, pero la relación de orden entre los negativos se establece en el mismo sentido que sus valores absolutos.
- Las estrategias de resolución en los enteros ponen de manifiesto su homogenización: positivos y negativos son tratados de la misma, realizar ningún tipo de distinción entre estos dos. La relación de orden entre enteros negativos se establece correctamente y empiezan a utilizarse las relaciones de compatibilidad entre el orden y la suma de enteros.

Socas (1997) en el capitulo V: dificultades obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria comenta que las dificultades y los errores en las matemáticas no se reducen a los menos capaces, sino que estas dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son de naturalezas distintas, es decir, estas pueden estar asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: uso de la lengua común y el lenguaje habitual o a los procesos de pensamiento matemático, a continuación exhiben estas dificultades:

- Los conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos monográficos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o asociación. Sin embargo el lenguaje de las Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos. Este conflicto involucrado en el uso del lenguaje ordinario, dentro del contexto matemático, es un conflicto de precisión.
- Los procesos de pensamiento matemático, los cuales se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático; esta dificultad tiene que ver con la capacidad de seguir un argumento lógico, es decir a la deducción lógica, la cual no debe confundirse con la deducción formal ni con los procedimientos algorítmicos, esta capacidad se pierde con el uso excesivo de métodos rutinarios.

- los juicios o las valoraciones que contradicen el conocimiento que se considera como válido, por ejemplo: en los números enteros es frecuente que los estudiantes ignore el signo que precede a las temperaturas negativas o a cualquier cantidad que represente un número entero, identificado así los números enteros negativos como los números naturales, es por ello que realizar una confrontación adecuada del error permite que el estudiante lo corrija y genere un nuevo conocimiento, donde el error le sirve de ayuda para constatar o validad sus respuestas.

Ahora bien González et. al. (1999) Plantean sus investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje de los números enteros negativos que estos problemas se presentar en los estudiantes por:

- La creencia arraigada en la experiencia de cada cual, que identifica el número con cantidad, lo que indica que al no abandonar el plano de lo real, es difícil concebir los números negativos, porque, simplemente no son necesarios, ejemplo: Nadie dice, “tengo -300 puntos” ni “tengo -1/2 metro”.
- La suma como aumento, es decir, si un número se identifica con cantidad, la adición se asocia con la acción de añadir una cantidad a otra, por lo que conlleva siempre a un aumento; por lo que al hacerles la pregunta: “¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?” responden que no es posible.
- La sustracción como disminución, también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y por tanto, con disminución, por lo cual donde no hay no se puede quitar.

Finalmente se ha podido observar que son varias las dificultades, obstáculos y errores presentes en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros, los cuales deben ser tenidos en cuenta al ser llevados al aula de clase para evitar caer en ellos y fomentar en los estudiantes nuevas estrategias de aprendizaje que le permitan evidenciar cada una de estas problemáticas y superarlas, para ello Socas (1997) indica que "el profesor debe provocar conflicto en su mente a partir de la inconsistencia de sus propios errores, forzándolo a participar activamente en la resolución del conflicto, sustituyendo los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada" (p.34). Ahora bien, estas dificultades, obstáculos y errores reportados por el autor serán tenidos en cuenta en la construcción y el análisis de las actividades de la propuesta de aula que se implementará en estudiantes de grado 5º de la Educación Básica. A continuación se presenta una tabla, la cual se espera que sirva como marco de referencia para el análisis de los resultados de los estudiantes, que participan del estudio y con el objeto de validar algunas de ellas en el ámbito de la educación colombiana.

2.2.2. Desde las propuestas de enseñanza en pro del diseño de una propuesta de aula para realizar un acercamiento a los números enteros en grado 5º.

A continuación se mencionan algunas de las propuestas de enseñanza que han reportado las investigaciones anteriormente señaladas, en los cuales este trabajo se apoya para trabajar el marco teórico y el diseño de la propuesta de aula.

2.2.2.1. Propuesta didáctica en torno a la visión unitaria de Bruno (1997)

El presente apartado expone una propuesta de enseñanza de los números, desde una visión unitaria, la cual tiene como fin conectar los conocimientos adquiridos desde los primeros años de escolaridad en único conocimiento, Para ampliar esta idea se expone la siguiente cita:

> Lo que se aprende acerca de los números, tanto en los primeros años como cuando se cursa la Educación Secundaria Obligatoria, forma parte de un único *conocimiento numérico*, que debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo. Es necesario conectar los conjuntos numéricos de forma que los alumnos no construyan un conocimiento de los números como núcleos aislados. (Bruno, 1997, p. 6)

De acuerdo con lo anterior, es importante que el conocimiento adquirido por los estudiantes sobre los números, sea parte de un proceso continuo en donde se puedan realizar las conexiones pertinentes entre las limitaciones y potencialidades de cada sistema numérico, de modo tal que, el nuevo conocimiento sea una ampliación del conocimiento previo y este se integre con el nuevo, lo cual implica aspectos relativos a los números, para ello la autora propone tres aspectos que denomina como dimensiones: *Dimensión abstracta:* en ella se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escritura de los números. *Dimensión de recta:* en ella se ubican la representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma. Y *Dimensión contextual:* en ella se encuentran las utilidades y uso de los números.

Ahora bien, el conocimiento numérico no se debe limitar solo al conocimiento de las tres dimensiones, debe además abarcar la transferencia entre ellas, es decir, la expresión en una dimensión de un conocimiento dado en otra. Como se muestra en la siguiente figura

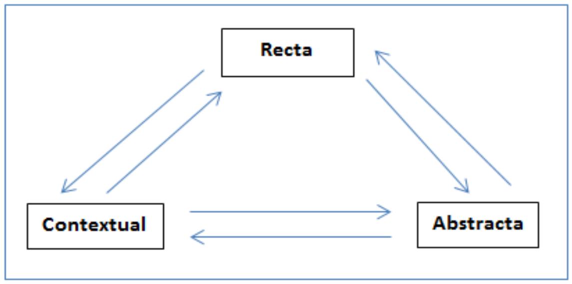


Figura 5. *Transferencia de las dimensiones.*

La transferencia entre las tres dimensiones permite una visión unificada de los sistemas numéricos y de los procesos que se estén trabajando en el aula de clases, lo cual facilita una construcción adecuada de los sistemas numéricos. En la siguiente figura se muestra algunos ejemplos de actividades que permite ver las transferencias entre las dimensiones y algunos elementos importantes que están inmersos en esta perspectiva, uno de ellos es el significado de las operaciones o las reglas operatorias que se sitúan en la dimensión abstracta y que por ende deben ser muy claras al trasladarlas a la dimensión contextual y de recta.

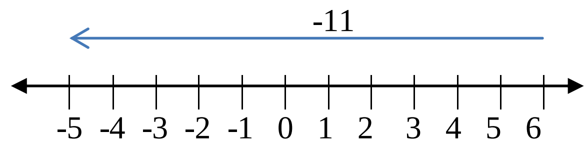
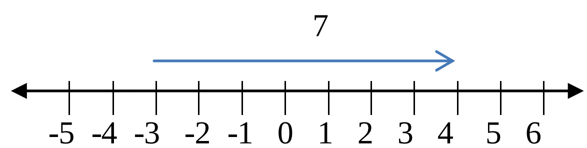
Transferencia abstracto → recta Representa en la recta la operación: -4+10=6	**Transferencia recta → abstracto** Dime una operación que pueda ser representada en la recta de la siguiente forma 
Transferencia abstracto → contextual dime una situación que pueda ser resuelta con la siguiente operación: -4+7=4	**Transferencia contextual → abstracto** Dime una operación que pueda resolver la siguiente situación: *La temperatura en Madrid es de 9 grados sobre cero. En parís hay 12 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en Madrid?*
Transferencia contextual → recta Representa la siguiente situación en la recta *Un ascensor estaba en el piso 5del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?*	**Transferencia recta → contextual** Dime una situación que pueda ser representada de la siguiente forma: 

Figura 6. *Ejemplos de actividades de las transferencias entre las dimensiones* (Figura tomada la enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación de Alicia Bruno, 1997)

Ahora bien, Bruno (1997) plantea que dicha visión se puede concretar para el caso de los números enteros negativos, donde la enseñanza de estos considere las tres dimensiones expuestas anteriormente y siga una secuencia de extensiones que avanzan hacia los números reales, así pues "introducir los números negativos supone ampliar un sistema numérico A, que los alumnos ya conocen, a un nuevo sistema numérico que lo contiene" (p.8). De modo que, es posible llegar a la extensión de los números negativos mostrándolos como los opuestos de los números positivos, sin poner énfasis en la creación del conjunto numérico de los enteros.

De acuerdo con lo planteado anteriormente desde la visión unitaria para introducir los números enteros negativos, es importante tener en cuenta que la toma de algunos elementos reportados por el autor en sus investigaciones, aportan al desarrollo de las tareas a considerar en la propuesta de aula que se diseñara en este trabajo, donde estos elementos pueden ayudar a que los estudiantes reconozcan y logren dar cuenta de algunas diferencias, particularidades, potencialidades y limitaciones entre los números naturales y los números enteros negativos, como también a que estos realicen conexiones entre el conocimiento que ya tienen de los números naturales y el nuevo conocimiento que involucra al número entero, además de comprender la unificación entre estos dos sistemas, aunque para el interés de este trabajo no se tendrán en cuenta todas las transferencias entre las tres dimensiones expuestas, sino que solo se tomarán las siguientes: transferencia de lo contextual a la recta, de la recta a lo contextual y por ultimo de lo contextual a lo abstracto. Como se muestra en la siguiente figura.

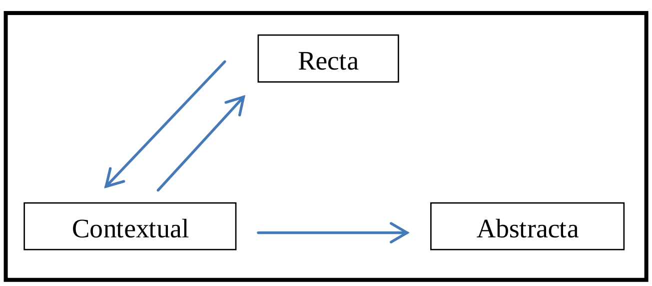


Figura 7. *Transferencias a tomar.*

Esto se debe a que, los conceptos matemáticos manejados desde el grado 5° permiten que el estudiante pueda realizar estas transferencias, por ejemplo el estudiante puede ser capaz de pasar de una situación contextual como una situación problema a una representación gráfica mediante una recta como se muestra en la figura 8

transferencia contextual → recta
Representa la siguiente situación en la recta
Un ascensor estaba en el piso 5 del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?

Figura 8. *Transferencia de lo contextual a la recta.*

Análogamente esto puede ocurrir cuando el estudiante pasa de la recta a lo contextual y de lo contextual a lo abstracto, además el MEN (2006) plantea dentro del pensamiento numérico y los sistemas numéricos que el estudiante debe ser capaz de resolver y formular problemas cuyas estrategias de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

2.2.2.2. Propuesta didáctica en torno a la visión de González et. al. (1999).

En esta parte del documento se expondrán algunas propuestas de enseñanza que tratan de relacionar los obstáculos y concepciones que se han observado a lo largo de la historia en la enseñanza y aprendizaje de los enteros, a partir del análisis de estudios epistemológicos, donde se contemplan los acercamientos que tienen los textos escolares en el trabajo con los números enteros negativos, por lo cual los autores han planteado unas vías de aproximación a los enteros, las cuales se plantean como modelos que parten de dichas situaciones y que se clasifican como modelos aritméticos, algebraicos y geométricos dependiendo del campo conceptual en el que se encuentre el problema de partida y los conceptos que se utilicen en ese momento.

Aunque hay que tener en cuenta que con estas vías de acceso al conjunto de los enteros, no se trata de establecer su existencia, por el contrario estas son vías constructivas y no existenciales que tienen su base en el principio de permanencia de las leyes de la aritmética, las cuales se refieren a la ampliación de los conjuntos numéricos y sus operaciones de tal forma, que se conservan algunas leyes que se consideran fundamentales. A continuación se exponen cada una de estas vías de acceso a los números enteros.

Modelo aritmético: lo que prevalece en este modelo es la aparición de los números negativos por la necesidad de ampliar la operación de resta en los naturales, por tanto estos números serán el resultado de las operaciones de resta.

Modelo algebraico: la base predominante es la constitución del conjunto de los números negativos como soluciones de ecuaciones imposibles de resolver en los naturales. Ahora bien, al ser este modelo puramente algebraico, no se puede llevar a cabo en la enseñanza primaria, dado que se requiere que el alumno este en la capacidad de deducir, inferir, abstraer, etc., las cuales aun en ellos son insipientes.

Modelo geométrico: los números negativos se pueden introducir en un marco geométrico ya sea como una necesidad de ampliar el campo de los números naturales o como objetos geométricos. Dentro del marco de lo geométrico existen diversos modelos para la introducción de los números enteros, y generalmente todos ellos utilizan la recta numérica como soporte intuitivo. Dos de estos son: el modelo de la escala numérica sobre una recta y el modelo de las magnitudes dirigidas, considerando flechas o vectores determinados por dos puntos de la recta, un origen y el otro el extremo.

Para el propósito de este trabajo es conveniente la utilización de este último modelo (geométrico) ya que, su introducción resultaría adecuada en grado 5º puesto que el modelo de escala numérica sobre una recta es familiar en los estudiantes, y con ella se puede describir la posición de un punto sobre una recta teniendo en consideración los sentidos de la recta, adoptar una unidad de medida que les permita considerar las distancias de los puntos al origen, o la distancia entre dos puntos de una recta.

Ahora bien, según et. al. (1999) Indican que el modelo de escala numérica es una escala de recta que se identifica por puntos con números, que permiten dar lugar a un nuevo conjunto numérico al que se le denomina conjunto de los números enteros, formado por los números naturales, de modo que en este nuevo conjunto numérico el cual es una ampliación del conjunto de los números naturales, se debe definir las operaciones de suma, resta y multiplicación, además de la relación de orden.

La suma se define entonces como la aplicación de la recta en la recta, una traslación a la derecha tantas unidades como indique el número si es positivo, o la izquierda si es negativo, por ejemplo sea 1 + 3 y 2 + (- 3) los cuales se representa en la recta como se muestra en la siguiente figura

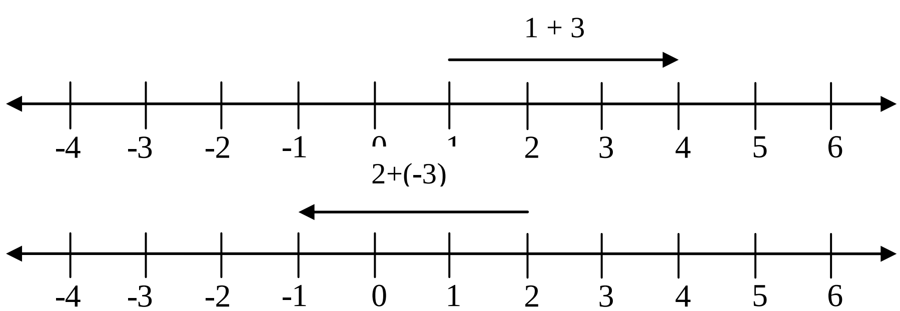


Figura 9. *La suma como la aplicación de la recta en la recta*

Hay que tener en cuenta que en este modelo sumar cero se entiende como la aplicación identidad, pues indica la falta de movimiento y la suma definida se puede considerar desde otro punto de vista como un cambio de origen en la recta numérica, así, sumar 3 sería cambiar el origen de la recta que estaba situado en el punto (A) identificado por el cero al punto (A_3) asociado al punto 3, como se muestra en la siguiente figura

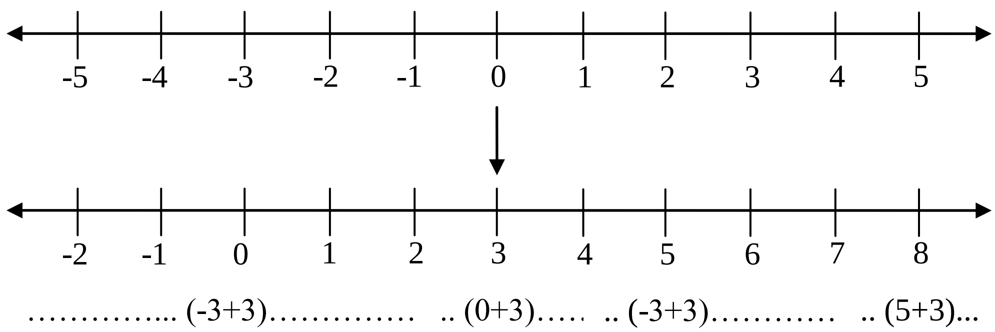


Figura 10. *La suma como un cambio de origen en la recta numérica*

De lo anterior los autores indican que la resta se puede definir de forma análoga a la suma por traslaciones de la recta en la recta, a la izquierda si se resta un número positivo y a la derecha si restamos un número negativo. Teniendo así que la resta es la operación inversa de la suma, y según esta definición, tenemos que $a – b = a + (- b)$, pues restar b es sumar $(-b)$. Realizando actividades sobre la recta o resolviendo situaciones concretas sobre ella, se llega a establecer resultados como: $a – (-b) = a + b$ y $(- a) – b = - (a + b)$

Ahora bien, la multiplicación se puede definir como una dilatación si se trata de multiplicar por un número positivo, y por una dilatación seguida de una inversión si se trata de un número negativo; es pues una aplicación de la recta en la recta. Es decir, al multiplicar por un número positivo, ampliamos la escala; si multiplicamos por un número negativo, se trata de ampliar la escala e invertir el orden de la secuencia numérica.

Aunque hay que aclarar que en el modelo de la escala numérica sobre una recta los números negativos se trabajan dentro de un contexto puramente geométrico, pero para poder llegar a afianzar las operaciones, es preciso trabajar con ellas a niveles aritméticos, calculando resultados, estableciendo tablas, relaciones entre las operaciones, propiedades, etc. y considerando estos números en situaciones no geométricas.

A partir de lo anterior, González et. al. (1999) plantean una propuesta para la introducción de los números enteros en la educación matemática, la cual, basan en un proceso educativo de seis fases en las cuales se

> Pretende construir una primera guía ejemplificada para la construcción de *ingenierías didácticas* sobre los números enteros y sobre los conceptos, propiedades y estructuras directamente relacionadas con ellos y que se encuentran subyacentes a su comprensión y constitución. De este modo se parte de lo más concreto y elemental como lo son las relaciones y comparaciones cualitativas (fase 1), para concluir en lo más abstracto y complejo como es la construcción y validación formales de los números enteros (fase 6). En dicho proceso, se han de producir necesariamente dos *descontextualizaciones* o abstracciones de diferente naturaleza (fases 2 y 4): una primera que supone el salto de *útil* a *objeto* en contextos concretos, y una segunda que supone el paso de número

relativo al número entero como útil matemático[5]. Ahora bien, existe una tercera abstracción o salto a un nivel superior, aunque esta vez es implícito, en el paso de la fase 5 a la fase 6, donde por necesidades de coherencias con las teorías matemáticas conocidas, se ha de definir y dotar de un cuerpo formal al número entero como útil para obtener el número entero como objeto matemático; como objeto de demostración valida. (González et. al., 1999, pp. 168-169)

En la siguiente figura se muestra un esquema de cómo está estructurada esta propuesta según los autores:

1. El número relativo como relación en contextos
2. De la relación-útil a la relación-objeto. Contextos concretos con el número natural implícito.
3. El número relativo como objeto contextualizado.
4. Del número relativo al número entero.
5. El número entero como útil matemático.
6. El número entero como objeto matemático.

Figura 11. *Proceso Educativo.* Esquema tomado del capítulo 7, libro números enteros de matemáticas: cultura y aprendizaje de González et. al., 1999, pag.168

Aunque, este esquema tiene una estructura lógica que se podría seguir al pie de la letra, los autores indican que no es un proceso que se deba seguir de forma lineal, por el contrario con

[5]La distinción entre número relativo y número entero, es fundamental para entender el proceso. Por tanto se remite al lector al capítulo 3 del libro números enteros de matemáticas: cultura y aprendizaje de González et. al. (1999)

este proceso lo que se pretende es estructurar lo que debería ser un proceso *progresivo y acumulativo*, caracterizado por sucesivos reinicios en diversas etapas, en las que se debería volver sobre los conceptos y relaciones más elementales en situaciones cada vez más complejas, para alcanzar en cada una de ellas una fase superior a la de la etapa anterior. Ahora bien, Para efectos de este trabajo se tendrán en cuenta las cuatro primeras fases ya que nuestro interés principal es el de hacer un acercamiento los números enteros en grado 5^{o} de la Educación Básica, las cuales se explicaran a continuación:

Fase 1: El número relativo como relación en contextos concretos.

> El modelo de las situaciones relativas que proponemos para iniciar al niño en su creación de estos nuevos conceptos numéricos, tiene su punto de partida en la potenciación de la *estructura conceptual comparativa*, que con la clasificación y la métrica, constituyen el <<software>>adecuado para el enriquecimiento progresivo de nuestro mundo pensado. (Stegmüller, W., 1979, citado por González et. al., 1999, p. 173)

Es decir, lo que se busca en esta fase es iniciar al niño en el proceso comparativo que le permita distinguir entre lo cualitativo y lo cuantitativo. Entendiendo lo cualitativo como conceptos clasificatorios ya que, esta relación está constituida por términos duales como: mas, menos, mayor, menor etc. que acompañaran la cualidad comparada, y en la que uno de los objetos, servirá de referencia para el otro, y finalmente se entiende lo cuantitativo como conceptos métricos, lo cual le permite al niño diferenciar de forma más precisa que los clasificatorios y a la vez constituyen un primer paso en la introducción de los métricos o numéricos, siendo este el paso siguiente de lo cualitativo lo cual permite introducir los números relativos como nuevos números que presentan relaciones asimétricas y transitivas, que preparan la posterior construcción de enteros y que constituyen un soporte importante para conocimientos matemáticos posteriores.

Fase 2: De la relación-útil a la relación-objeto. Contextos concretos con el número natural implícito.

En esta fase lo que se busca es lograr mediante situaciones didácticas adecuadas, la *transición* del contexto absoluto de cuantificación al contexto relativo; pasar del número relativo en su aceptación de relación-útil, al número relativo en su aceptación de relación-objeto. Ahora bien las situaciones a trabajar en esta fase siguen siendo las mismas en ambas, es decir se sigue estando en contextos concretos, los cuales permite seguir hablando de relación para reforzar la idea de que los números relativos como herramientas u operadores, como resultados de comparaciones o como elementos que permiten transformaciones que deben ir progresivamente adquiriendo significado en sí mismos sin perder los anteriores, para terminar describiendo las situaciones sin necesidad de hacer referencia a las cantidades o posiciones comparadas y/o transformadas.

Lo anterior se relaciona con lo planteado por Bruno (1997) cuando menciona que la enseñanza de los números debe hacer parte de un único conocimiento numérico, el cual debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo, de tal forma que los estudiantes no construyan un conocimiento de los números como núcleos aislados, proponiendo así en sus investigaciones reconocer la necesidad de currículos integrados para que los estudiantes puedan hacer las conexiones pertinentes. Ahora bien según González et. al. (1999) indican que hay situaciones que se pueden aprovechar para facilitar el paso de la relación-útil a la relación-objeto y hacer conexiones entre estos significados para ello propone situaciones que conllevan a transformaciones como: ganar-perder, añadir-quitar, subir-bajar o nacimientos-defunciones etc.

Por otro lado, el cero relativo juega un papel fundamental en esta fase ya que este:

> Resulta del cambio de origen, de las relaciones comparativas de igualdad, de la transformación nula, bien aislada como tal, o bien como resultado de composiciones. No obstante hay que tener en cuenta que, la noción de cero relativo, surge a partir de una relación de coincidencia básicamente distinta a la relación de procedencia que da lugar al resto de dichos números. (González et. al., 1999, p.185)

Fase 3: El número relativo como objeto contextualizado.

En esta fase se continúa con el proceso ya iniciado en las anteriores fases, dando mayor protagonismo al número relativo y continuando el trabajo con situaciones más complejas, se analizan nuevas situaciones que involucren situaciones de cronología, temperaturas, altura sobre el nivel del mar etc., las cuales al no adaptarse al orden natural, se conciben con una estructura relativa, además en esta fase se pretende operar con números relativos denominando así estas operaciones como una aritmética relativa y potenciar las estructuras adictivas y multiplicativas, cuyas propiedades se empezaran a construir aquí de forma intuitiva, para ser institucionalizadas en fases posteriores que permitirán el armazón de los números enteros.

Al retomar las situaciones anteriores a niveles cuantitativos y cualitativos y hacer mayor énfasis en el número relativo, se deben ampliar el nivel de dificultad y relacionar cada uno de estos, planteando además nuevas actividades en contextos más complejos, de distinto contenido social y significado a los ya trabajados, aunque estos deben de guardar la particularidad de presentar la misma estructura lógico-matemática que sigue el proceso ya establecido a partir de las comparaciones y transformaciones cualitativas y cuantitativas. Ahora bien, a la hora de analizar nuevas situaciones se debe tener en cuenta que estas situaciones deben permitir en el alumno construir conocimientos nuevos y adaptados, además de ser adecuadas para el tratamiento didáctico interdisciplinar en virtud de sus múltiples conexiones con otras aéreas de conocimiento como las ciencias sociales, las ciencias experimentales, etc. Algunas situaciones que se pueden tener en cuenta para seguir con este proceso son aquellas que involucren la temperatura, cronologías observaciones en la naturaleza entere otras. Por ejemplo con la temperatura a parte de familiarizar al alumno con la terminología e instrumentos, se le puede pedir al alumno que realice gráficas, experimentos, comparaciones y transformaciones, lo cual permite plantear nuevas cuestiones que le ayuden al estudiante indicar las diferencias (máximas y mínimas) que hay entre las temperaturas encontradas y ordenar de mayor a menor o de menor a mayor dichos datos.

Un ejemplo que plantea González et. al. (1999) y que podría ser tomado en cuenta en la construcción de la propuesta es el siguiente:

Situación 1: partiendo de un listado de ciudades con las temperaturas máximas y mínimas correspondientes (ver figura 12), se analizaría en primer lugar, el significado de esta información, para pasar a continuación a realizar comparaciones y transformaciones en problemas relacionados con el mencionado listado.

Ciudades	***Temperatura máx.***	***Temperatura min.***
A	20°	7°
B	15°	2°
C	7°	-2°
D	5°	-7°
E	8°	-1°

Figura 12. *Listado de ciudades y sus temperaturas.*

Situación 2: indicar la diferencia entre las temperaturas máximas y mínimas de las ciudades A y B

Situación 3: ordenar de menor a mayor, las temperaturas máximas, mínimas, las diferencias en cada ciudad.

Después de hacer uso de situaciones de este tipo, que requieren del uso de la transitividad, de la idea de elemento simétrico, de las composiciones de relaciones o transformaciones, etc., como instrumentos que permitan la extensión a más de dos objetos o estados, para resolver dichas situaciones desde un punto de vista cualitativo, o desde un punto de vista cuantitativo, donde se supone que el número relativo ha debido alcanzar entidad por sí mismo con independencia de las cantidades naturales sobre las que se construye, constituyéndose así en un objeto conceptual todavía contextualizado, que puede jugar un doble papel como estado y como operador, lo que en cierto modo obliga a regular su funcionamiento con el fin de completar el perfil estático-dinámico que caracteriza a todas las ideas numéricas por tanto se hace necesario el uso de la aritmética con números relativos es decir, de la aritmética relativa, donde el número relativo se sigue viendo como objeto que presenta una gran variedad de significados tanto por sí mismo como por su funcionamiento operacional.

Aunque, hay situaciones en las que pueden aparecer la necesidad de obtener resultados que resuman por ejemplo tiradas consecutivas, movimientos, resultados parciales, etc., en las cuales es imprescindible desarrollar procedimientos y técnicas algorítmicas que permiten una manipulación rápida, sencilla y eficaz de las situaciones relativas. Las regularidades y características de dichos procedimientos y técnicas, constituirán la base de la estructura aditiva de los números enteros.

Fase 4: Del número relativo al número entero

En este punto del proceso didáctico González et. al. (1999) indican que el alumno ya dispone de una base amplia y variada de experiencias en situaciones relativas por tanto proponen primero, generalizar los resultados particulares, mediante la obtención de las mencionadas regularidades en forma de leyes, reglas y propiedades, segundo propone establecer un puente que favorezca el salto de un nivel de abstracción a otro superior.

Para ello, los autores plantean utilizar tres vías distintas pero no excluyentes:

- A partir de situaciones conocidas se busca completar tablas, para obtener y generalizar posteriormente las regularidades constatadas.

- Mediante tablas de exploración intuitiva, confeccionadas a partir de situaciones anteriores, lo que se busca es que el proceso inductivo en el estudiante se vaya reforzando lo cual le permita responder a nuevas cuestiones donde varíe la cantidad o el tiempo de algún objeto o cosa. Por ejemplo: Juanito ha llenado un balde con agua, pero no se ha dado cuenta que este tenía un roto por donde se iba botando el agua a medida que pasaba el tiempo. Se le pide al estudiante que registre los datos en una tabla realizando lo mismo que Juanito. Tiempo después se le pregunta ¿Cuál era la cantidad de agua hace tres horas? Para que el empiece a realizar su proceso inductivo, luego se le podrían poner nuevas cuestiones donde el número de hora variará en la serie entera. Ahora bien este proceso inductivo puede ir unido al proceso de simbolización al introducir nuevos datos hipotéticos y puede además ir unido al proceso de institucionalización de las reglas, lo que supone un hecho básico para el logro del número entero como útil matemático.
- A través de juegos con números relativos aislados, en los que se ponga en funcionamiento las ideas adquiridas tanto en las vías anteriores, como en las fases precedentes. Donde estos juegos deben ir encaminados a favorecer la toma de conciencia de las propiedades aludidas, al mismo tiempo que se constituyen en pruebas del grado de consecución de los objetivos propios de esta fase.

Estas propuestas describen la importancia de reconocer el sentido que tienen los números enteros en la enseñanza de las matemáticas, además de la necesidad de desarrollar este concepto con todas sus relaciones e interpretaciones en el entorno escolar, lo cual es un proceso a largo plazo y por ello es fundamental tener en cuenta que las habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes en el manejo de este concepto, no serán de fácil apropiación si no se crea un modelo a partir de propuestas concretas que le permitan a los estudiantes comprender e interpretar los números enteros. Por lo tanto el presente trabajo de grado intenta integrar en una serie de tareas actividades para mejorar el concepto de número entero desde sus relaciones e integraciones en un contexto escolar particular como el de una institución pública para el grado 5º de la Educación Básica.

2.3. Dimensión curricular

Los aspectos a tener en cuenta en este apartado son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Estos documentos serán de suma importancia en el desarrollo y la aplicación de la propuesta de aula diseñada para los números enteros, dado que los estudiantes a quienes se les aplicará la serie de actividades de la propuesta son estudiantes colombianos que se rigen bajo estos parámetros curriculares.

2.3.1. Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1998).

En este documento se propone que el estudio de los números debe potenciar el desarrollo del pensamiento numérico, y por ello centra su atención en la comprensión, representación, el uso, el sentido y el significado de los números, sus relaciones y operaciones dentro de cada sistema numérico, para así abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números de forma integrada. Lo cual confirma lo planteado por Bruno (1997), cuando menciona la necesidad de realizar transferencias entre las tres dimensiones (recta, abstracta y contextual), ya que estas permiten unificar el conocimiento de los sistemas numéricos, teniendo en cuenta cada una de las posibles representaciones existentes que se deben abordar en las instituciones escolares que supone plantear el campo de acción y estructura que los compone. Es por ello que, los Lineamientos Curriculares al tener una visión global e integral sobre el quehacer matemático dentro del aula, proponen organizar el currículo en tres grandes aspectos, que integran los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto. Los cuales se describen de manera general a continuación:

Procesos generales: son los que tienen que ver con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Conocimientos básicos: son los que tienen que ver con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) y con sistemas propios de las matemáticas (numéricos, geométricos, métricos, de datos, algebraicos y analíticos).

***El contexto*:** es el que tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. Todo esto se debe realizar sin dejar de lado la intervención continua del docente para aprovechar este contexto en la medida que se pueda modificar y enriquecer con el fin de que los estudiantes aprendan.

Ahora bien, en pro del diseño, ejecución y evaluación de la propuesta de aula para la extensión de los números naturales a los números enteros en el grado 5º de la Educación Básica en Colombia se privilegian los siguientes aspectos:

Algunos de los *procesos generales* tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, como también se tendrá en cuenta el contexto extraescolar o sociocultural y el contexto inmediato o de aula dado que, estos se relacionan con los procesos generales le dan sentido al aprendizaje de las matemáticas. En cuanto a los *conocimientos básicos* se tendrá en cuenta *el pensamiento numérico y los sistemas numéricos,* el cual tiene como base el estudio de los números e incluye el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitudes, etc. De modo que, en el caso particular de los números enteros, el pensamiento numérico permite expresar las cantidades negativas a través de las magnitudes con respecto a la medición teniendo un punto de referencia por ejemplo: las altitudes o profundidades con respecto al nivel del mar, la temperatura, o con respecto a los cambios (aumento o disminución) en la medida de una magnitud como: el aumento o la disminución del peso de una persona, cambios en el precio de un articulo, cambios en la temperatura de un lugar determinado, entre otras.

2.3.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Este documento indica que los estándares están planteados en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradualmente e integralmente, con el fin de ir superando niveles de complejidad crecientes en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo de los estudiantes, para logar esto, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) recogen la estructura general de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) basados en los cinco procesos generales de la actividad matemática y los conocimientos estipulados desde los diferentes pensamientos y sistemas anteriormente mencionados.

Ahora bien, de acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), la introducción de los números enteros en la escuela no se hace explícita como contenido matemático en el conjunto de grados de 6º a 7º, esto es, por la misma naturaleza de los de competencias donde se promueve el trabajo en diferentes contextos y dominios numéricos, lo que se puede interpretar como números naturales, enteros y racionales, y es de esta manera que queda abierta la posibilidad que en ciclos de escolaridad anteriores a estos grados se puedan abordar, y de hecho, en los estándares de grados de 4º a 5º se promueve identificar y usar medidas relativas en distintos contextos, por este motivo se justifica la validez de la propuesta en el grado 5º de la Educación Básica en Colombia.

A partir de lo anterior, se deduce que este concepto puede llegar a ser abordado desde grados más anticipados a los grados 6º y 7º de la escolaridad, tal como se plantea en los estándares, ya que estos guardan una coherencia tanto vertical como horizontal a lo largo del proceso educativo, lo cual facilita el paso de un estándar a otro con relación a sus pensamientos. Confirmando así, lo planteado por el MEN (2006) cuando argumenta que los estándares no son metas que se pueden delimitar en un tiempo determinado, sino por el contrario son niveles de avance en procesos graduales e integrales en el desarrollo de competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo. De este modo, se plantea que los números enteros pueden ser trabajados desde los años anteriores, más específicamente desde el 5º de la Educación Básica, teniendo en cuenta que se debe procurar una organización del trabajo escolar, el cual garantice un trabajo integrador de algunos estándares correspondientes al grado y atendiendo además a la conexión existente con los estándares de los grados anteriores y de los siguientes de acuerdo con la coherencia vertical.

A continuación en la figura 13 se exhiben los estándares seleccionados, para la implementación de la propuesta de aula, en pro de la introducción del concepto de número entero en el grado 5º, así como se evidencia la coherencia vertical y horizontal entre los estándares de los grados anteriores y siguientes, además de los diferentes pensamientos. Este modelo de esquema fue sacado de MEN (2006, p.79), pero fue ajustado con los estándares que corresponden a los intereses de la propuesta de aula en este trabajo de grado.

Coherencia vertical

De 10° a 11°

- Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y las operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

De 8° a 9°

- Utilizo los números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

De 6° a 7°

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.

De 4° a 5° Pensamiento numérico y sistemas numéricos:

- Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.
- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos:

- Utilizo sistemas de coordenadas especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos:

- Uso e interpreto la medida (o promedio) y comparo lo que indican.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

De 1° a 3°

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar...) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por....) en diferentes contextos.
- Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

Coherencia horizontal.

Figura 13. *Coherencia horizontal y vertical que guardan los estándares.*

En la anterior figura se exponen los estándares relacionados al pensamiento numérico y los sistemas numéricos en los distintos grados y su relación con la coherencia horizontal y vertical, de modo que, en cuanto a la coherencia vertical muestra la relación existente entre los estándares de un grupo de grados y los del grupo anterior o siguiente, por ejemplo los estándares del grupo del grados de 4° a 5° involucran los estándares del grupo de grados de 1° a 3° con el propósito de garantizar el desarrollo de las competencias las cuales se van desarrollando a lo largo del proceso educativo, así como estos estándares aportan al avance en lo de los grados 8º a 11º.

Específicamente el presente trabajo de grado se centra en los dos estándares para los grados 4º y 5º "identifico y uso medidas relativas en distintos contextos" y "resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones". La coherencia vertical entre el primer estándar mencionado y alguno de los de grados anteriores tiene que ver que en los grados 1º a 3º los estudiantes deben reconocer significados del número en diferentes contextos y a su vez describir situaciones que requieren el uso de medidas relativas, lo cual aporta a que esas medidas relativas puedan a futuro relacionarse con los diferentes contextos de los significados de los números, mientras que en los grados 6° a 7° se puede observar la coherencia pues se procede a realizar problemas pero en el contexto de medidas relativas y de variación en las medidas.

El segundo estándar escogido del grado 4° a 5° hace relación al uso de relaciones y propiedades de los números, lo cual se aborda en los grados 1º a 3º en el tercer estándar de esos grados expuesto en la figura 14. De esta manera los conocimientos previos serán el soporte para la construcción de nuevos conocimientos que se integran y avanzan hacia niveles cada vez más complejos.

Aunque el concepto a trabajar (números enteros) no es del todo explícito, esta coherencia permite ver los niveles de complejidad en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo de los estudiantes. Por otro lado, respecto a la coherencia horizontal se muestra como se articulan los estándares y los pensamientos expuestos en el grado 5º ya que, por ejemplo para la relación con el pensamiento geométrico, este se articula con el pensamiento numérico, en tanto se puede ver el uso de los números para especificar localizaciones y describir la relación espacial, lo que en la secuencia didáctica se ve reflejado cuando en una de las situaciones se usa el signo negativo para diferenciar posiciones a la derecha o a la izquierda; de esta misma forma para el caso del pensamiento variacional, aunque no es el enfoque del presente trabajo de grado, se puede relacionar cuando en una de las situaciones de la secuencia, se plantea que un preparador físico compara las variaciones de la masa de un grupo de jugadores respecto a la masa ideal, aunque vale la pena aclarar que en la secuencia didáctica se le denomino “peso” en vez de masa, porque para los estudiantes de grado 5º es un término más cotidiano, es decir, el término usual “peso” culturalmente en Colombia es interpretado como la cantidad de masa, aunque para la Física como disciplina científica, se sabe que está mal empleado. En cuanto al pensamiento aleatorio, se usó una gráfica de barras en la situación del preparador físico y aunque no se abordará específicamente en la secuencia didáctica, a futuro se pueden proponer actividades que requieran promediar datos negativos o trabajar otras medidas estadísticas con estos conjuntos de datos. Para justificar esta coherencia, se puede reflexionar desde la propuesta de Bruno (1997), quien propone desde la visión unitaria trabajar los conjuntos numéricos de forma no aislada, esto reafirma la propuesta curricular colombiana que plantea la necesidad de una coherencia vertical. Después de identificar los estándares relacionados con la incorporación de los números enteros en la escuela colombiana, se identifica la pertinencia de ajustar los estándares de competencia en matemáticas porque el enfoque que se da a los pensamientos no hace ningún tipo de alusión a las cantidades negativas ni una conexión entre los distintos sistemas numéricos como por ejemplo de los naturales a los enteros.

Por otro lado, es preciso resaltar que en los Lineamientos Curriculares de Matemática (citado por Navia y Orozco, 2012), se puede apreciar que en lo estipulado para trabajar pensamiento numérico no se establece la formalización de los números enteros, pero si hay una postura más desde la construcción de los números enteros en el aspecto de número relativo, entendido como número contextualizado, donde los estudiantes se acercan al avance del pensamiento numérico por medio de situaciones didácticas como propuestas de trabajo en el aula. En el estudio del pensamiento numérico, los puntos de referencia absolutos o relativos son importantes, sobre todo, cuando se trata de hacer interpretaciones de los números enteros y de sus operaciones en la recta numérica, o de utilizarlos para representar situaciones de la vida real.

Capítulo 3. Una propuesta de aula para la extensión de los números naturales a los números enteros

3.1. Diseño metodológico

Para la implementación de este trabajo de grado se tendrán en cuenta las siguientes fases metodológicas que describen el proceso a seguir para el diseño, ejecución y evaluación de la propuesta de aula a proponer para la extensión de los números naturales a los números enteros en el grado 5º de la Educación Básica en Colombia, fases que a su vez permiten alcanzar los objetivos específicos propuestos en este trabajo de grado.

Objetivos específicos	Fases	Actividad
Documentar la problemática desde algunos elementos conceptuales y procedimentales como son la concepción de número relativo, opuesto, distancia, relación de orden y el tratamiento de la recta; que den cuenta de algunas de las dificultades, errores y obstáculos con relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero.	**I**	Búsqueda y revisión bibliográfica. Construcción del marco teórico.
Articular en una propuesta de aula, una serie de actividades para movilizar en los estudiantes el concepto de número entero a través de la concepción de opuesto y el tratamiento de la recta.	**II**	Construcción de la propuesta de aula, apoyada en el marco teórico identificado con los elementos didácticos, curriculares y matemáticos
Implementar la propuesta en un grupo de estudiantes de grado 5º de una institución educativa de la ciudad de Cali.	**III**	Implementación de la propuesta con el grupo de estudiantes para sustentar el problema de investigación.
Validar las similitudes o diferencias encontradas entre lo que reportan las investigaciones teóricas y la aplicación de las actividades con el grupo de estudiantes.	**IV**	Validar la información registrada a través de la implementación de la propuesta Decantar y perfilar el informe final del trabajo de grado.

***Tabla 1**. Fases metodológicas*

3.2. Sobre el diseño de la propuesta de aula

En este trabajo se plantea una propuesta de aula dirigida a estudiantes de grado 5º de la Educación Básica, con ella se tiene como propósito favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros. Ahora bien, en el desarrollo didáctico de la propuesta, se utilizará el término situaciones para designar aspectos, cuestiones y actividades interesantes para los estudiantes en el momento de ser empleadas en las clases (González et. al., 1999). De modo que se entiende por situaciones "el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes" (MEN, 2006, p.72). De lo anterior se tiene que las situaciones aquí planteadas están basadas en contextos cotidianos que permiten evidenciar las distintas fases planteadas por González et. al. (1999) en las que aparece dividida la propuesta de aula, además de tener una correlación con las transferencias entre dimensiones abstracta, contextual y de recta expuestas por Bruno (1997). De acuerdo con lo anterior las situaciones están diseñadas, de tal forma que se correlacionan las situaciones con las fases y transferencias tal como se muestra en la tabla 2

Situación	Fase según González et. al. (1999)	Transferencia según Bruno (1997)
Situación 1: Aproximación al número entero a través del número relativo.	**Fase 1:** el número relativo como relación en contextos concretos. **Fase 2:** de la relación-útil a la relación-objeto. Contextos concretos con el número natural implícito.	De lo contextual a la recta
Situación 2: Caracterización del número entero	**Fase 2:** de la relación-útil a la relación-objeto. Contextos concretos con el número natural implícito. **Fase 3:** el número relativo como objeto contextualizado.	De lo contextual a la recta
Situación 3: Adición de números enteros	**Fase 3:** el número relativo como objeto contextualizado. **Fase 4:** del número relativo al número entero.	De lo contextual a lo abstracto De lo contextual a la recta De la recta a lo contextual

Tabla 2. *Correlación entre las situaciones con las fases y transferencias.*

La propuesta de aula está conformada por tres situaciones, cada situación se enmarca en un contexto o problema, que abarca aspectos empíricos hasta llegar a un aspecto formal, de manera que se puedan articular los elementos curriculares, matemáticos y didácticos que se han mencionado anteriormente y que se van a trabajar en la extensión de los números naturales a los números enteros, así como, sus diferentes tipos de representaciones, partiendo del número relativo, hasta llegar a la aproximación del concepto de número entero.

Ahora bien, estas situaciones tienen como propósito ayudar a los profesores de matemáticas a intentar resolver preguntas sobre algunas problemáticas presentes sobre la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de número entero, las dificultades en la construcción de este, y en la identificación de los errores conceptuales que están tras las problemáticas encontradas, de igual manera se espera que estas situaciones orienten a los estudiantes en el desarrollo de la extensión de un conjunto numérico a otro.

3.2.1. Conceptos matemáticos y perspectivas de desempeño.

En cada una de las situaciones que conforman la propuesta de aula se presentan una serie de actividades, las cuales tienen en cuenta la intencionalidad y la pertinencia de las preguntas basadas en algunos contenidos matemáticos que se pretenden movilizar. Ahora bien, según lo que plantea Bruno (1997) la propuesta de aula se apoya en los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes desde sus primeros años de escolaridad, lo cual permite que en el trabajo en el aula de clases se promueva el uso de las matemáticas en situaciones significativas, las cuales les ayuden a construir nuevos conocimientos que se puedan usar para hacer diferentes razonamientos, logrando que en estos se puedan integrar las dimensiones en las cuales se construya una visión integrada de los números enteros por medio de las relaciones entre estas dimensiones, y las fases expuestas por González et. al. (1999) que permiten que este sea un proceso progresivo y acumulativo en el aprendizaje de los números enteros.

De igual manera, se pretende realizar un contraste entre lo propuesto en este trabajo a la luz de lo que han planteado los distintos autores expuestos en el marco teórico y lo que han desarrollado los estudiantes en el resultado de la implementación de la propuesta de aula. En cuanto a las situaciones que se plantean en la propuesta de aula, estas se fundamentan en el reconocimiento de los conceptos matemáticos y la caracterización de estos por parte de los estudiantes, de este modo en cada situación se pretende alcanzar un objetivo o desempeño en particular, los cuales se exponen a continuación.

En la situación 1 el concepto matemático que se pretende movilizar es el uso del número relativo como medida relativa para llegar a una aproximación del número entero en contextos concretos, para ello se realizan actividades que acerquen a los estudiantes al uso de la recta numérica, a través de la ubicación adecuada de los signos matemáticos (positivos y negativos) que acompañan a los números relativos, de manera que a partir de actividades contextualizadas como la historia de Pedrito, permitan reconocer porque se puede asignar a una cantidad ubicada en la recta numérica el signo más y menos, tomando como un punto de referencia el nacimiento de Pedrito, y puedan establecer su relación con el cero, es decir, verlo como un cero relativo, es por ello que con esta primera situación se busca reconocer el concepto de número entero como relativo, el cual es el resultado de la cuantificación de ciertos cambios de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, identificado con el cero. Ahora bien, los desempeños que se esperan lograr es que los estudiantes puedan expresar con números relativos información acerca de la cantidad de una magnitud, a partir de una referencia y pasar de una dimensión contextual a una dimensión de recta; además se espera que los estudiantes puedan hacer uso de sus conocimientos previos tales como uso de medidas relativas, orden en los números naturales y unidad de medida en la recta numérica, los cuales están fundamentados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas donde se plantea describir, identificar y usar situaciones que requieran el uso de medidas relativas en distintos contextos, para así realizar una aproximación al número entero a través del números relativo.

En la situación 2 los conceptos matemáticos que se pretenden movilizar son la distancia al cero, el opuesto de un número y la relación de orden, establecidos alrededor del concepto de número entero. Lo cual, se realizará a partir de actividades que permitan evidenciar algunas características de los números enteros como por ejemplo el número negativo como opuesto al número positivo, los cuales se denominan números opuestos, de manera que al escribir ciertos valores con diferente signo, los estudiantes puedan reconocer que la ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero, es decir, dos números enteros con distinto signo se encuentren a la misma distancia de un punto de referencia tomando este como el cero en la recta numérica; y al final se espera que los estudiantes puedan concluir que todo número entero tiene opuesto. De ahí se pasa a introducir la relación de orden en los números enteros, con actividades que permitan en el estudiante comparar los números enteros en parejas ubicados en la recta numérica, estableciendo que un número es mayor que otro si este se encuentra ubicado a la derecha del número a comparar o que este es menor si se encuentra a la izquierda. Ahora bien, los desempeños que se esperan lograr es que los estudiantes puedan reconocer propiedades que caractericen el número entero resolviendo ejercicios y problemas en algunos contextos y pasar de una dimensión contextual a una dimensión de recta; además se espera que los estudiantes puedan hacer uso de sus conocimientos previos tales como distancia, opuesto de un número, relación de orden y unidad de medida, para reconocer propiedades de los números y las relaciones entre ellos (ser mayor que y ser menor que) en diferentes contextos, Reconocer los significados de los números en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros), resolver y formular problemas cuyas estrategias de solución requieran de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones, para así llegar a una caracterización del número entero; esto último está establecido dentro de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Finalmente en la situación 3 se pretende movilizar como concepto matemático la operación suma en la recta numérica con los números enteros, para ello se realizan actividades que acerquen a los estudiantes a la suma mediante el desplazamiento en la recta, a través de la ubicación adecuada de los signos matemáticos (positivos y negativos) que acompañan a los números enteros, de manera que a partir de actividades contextualizadas como la historia de salto en salto voy avanzando de la rana Clementina, la cual permite que el estudiante haga un acercamiento a la operación suma determinando en primera instancia que si un cuerpo se mueve de un lugar a otro y cambia de posición este se desplaza, y si esto ocurre él puede tomar valores positivos o negativos dependiendo de su movimiento, ya sea a la izquierda o a la derecha; de esta forma el estudiante también puede determinar que la adición de números enteros en la recta se puede realizar mediante el uso de flechas tal como lo plantea González et. al. (1999) indicando que la suma se define como la aplicación de la recta en la recta, es decir, una traslación a la derecha tantas unidades como indique el número si es positivo, o la izquierda si es negativo. Ahora bien, los desempeños que se esperan lograr en esta situación es que los estudiantes puedan resolver ejercicios que involucren adicionar números enteros con diferente signo mediante la representación gráfica, pasar de la dimensión contextual a la dimensión abstracta, y pasar de la dimensión contextual a la dimensión recta y viceversa; además se espera que los estudiantes puedan hacer uso de sus conocimientos previos tales como la adición o sustracción en los números naturales, distancias y unidad de medida en la recta numérica, los cuales están fundamentados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas tales como resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.

A continuación se detalla cada uno de estos conceptos matemáticos, los conocimientos previos, los desempeños y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas presentes en cada una de las situaciones de la propuesta de aula (ver tabla 3).

Situación y número de actividades	**Concepto Matemático.**	**Desempeño.**	**Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas desde el grado 1º a 5º de la Educación Básica.**
Situación 1, contiene una Actividad.	Uso de medidas relativas, orden en los números naturales y unidad de medida.	Expresar con números relativos información acerca de la cantidad de una magnitud, a partir de una referencia. Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta.	Describo situaciones que requieran el uso de medidas relativas. Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.
Situación 2, contiene tres actividades.	Caracterización del número entero: distancia, el opuesto de un número, relación de orden y unidad de medida.	Reconocer propiedades que caracterizan el número entero resolviendo ejercicios y problemas en algunos contextos. Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta.	Resuelvo y formulo problemas cuyas estrategias de solución requieran de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
Situación 3, contiene una actividad.	Adición o sustracción de los números naturales y de los números enteros, distancia y unidad de medida.	Resolver ejercicios que involucren adicionar números enteros de diferente signo mediante la representación gráfica. Pasar de la dimensión contextual a la dimensión recta y viceversa. Pasar de la dimensión contextual a la dimensión abstracta.	Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.

Tabla 3. *Conceptos matemáticos, perspectivas de desempeño y Estándares Curriculares de Matemáticas que se abordan en la propuesta de aula.*

3.2.2. Presentación de la propuesta de aula aplicada.

Situación 1: Aproximación al número entero a través del número relativo
Desempeños: • Expresar con números relativos información acerca de la cantidad de una magnitud, a partir de una referencia. • Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta.

LA HISTORIA DE PEDRITO

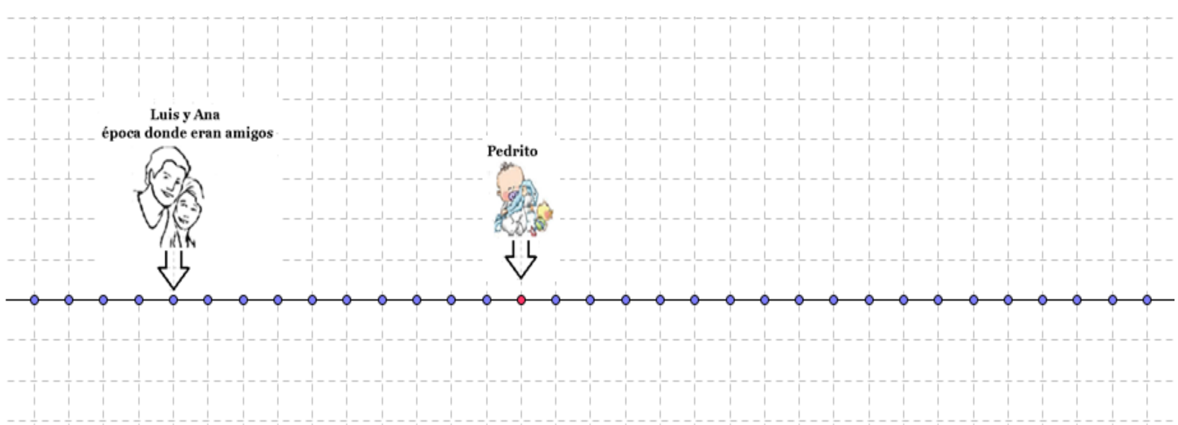
Había una vez un par de amigos llamados Luis y Ana, se conocieron en el año 1965, al pasar 7 años de ser amigos se casaron y 3 años después nace su hermoso hijo Pedrito, el cual llenó de alegría y amor su hogar. Pedrito inicia sus estudios cuando tenía 4 años de edad, allí conoce a muchos amigos. A Pedrito le encantan los parques mecánicos y su juego favorito es el carrusel porque le parecen divertidos los caballos, para celebrar su séptimo cumpleaños sus padres lo llevaron al mejor parque de la ciudad. Tiempo después nace su hermanita Valentina en el año 1990. Un día Pedrito le pregunta a su padre como conoció a su hermosa madre, y Luis le cuenta que se conocieron en la universidad y se hicieron novios cinco años después de conocerse, justo el día en el que ambos se graduaron el de veterinario y ella de enfermera. Finalmente, Pedrito les da un abrazo a sus padres porque se siente el niño más afortunado.

Actividad 1: Usando números enteros en la línea recta con acontecimientos importantes de la vida de Pedrito.			
Grado:5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** Parejas

1. Con la ayuda de tu compañero, realiza una lista con los acontecimientos importantes de la vida de Pedrito y representa esos momentos con años. Usa la siguiente tabla para escribirlos.

Año	**Acontecimiento**

2. Usen la recta horizontal que se da a continuación, en donde cada separación equivale a un año en la historia (unidad de medida) y ubiquen en ella los eventos más importantes de Pedrito y su familia antes y después de que él naciera.



A partir de la recta horizontal que acaban de completar respondan las preguntas 3, 4 y 5

3. ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

5. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

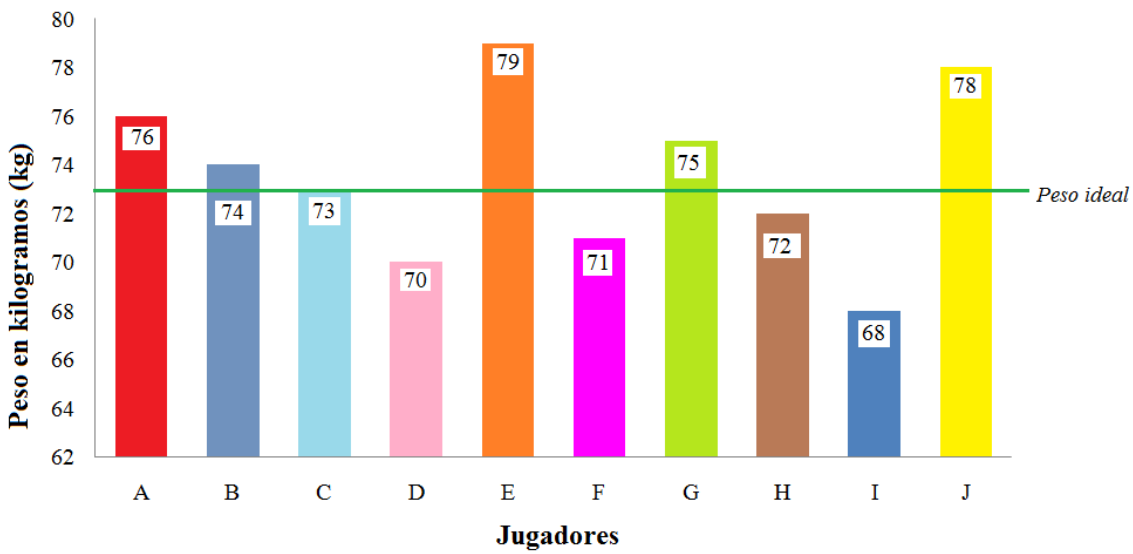
6. Realicen una nueva recta horizontal que se llamará recta numérica, en la mitad ubiquen el nacimiento de Pedrito y representen su nacimiento con el cero, luego ubiquen con números los siguientes sucesos de la vida de Pedrito antes y después de su nacimiento que se indican en la siguiente lista. (Nota: A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más, además usa una escala adecuada, es decir, que las subdivisiones de la recta deben ser de igual tamaño o medida)

- Luis y Ana se casaron tres años antes de que naciera Pedrito.
- Cuatro años después del nacimiento de Pedrito el inicia sus estudios.
- Doce años después de que Ana y Luis eran novios Pedrito celebra su séptimo cumpleaños.
- Siete años antes de que se casaran los padres de Pedrito ellos inician su amistad.
- Quince años después del nacimiento de Pedrito nace su hermana Valentina.

Situación 2: Caracterización del número entero
Desempeños: • Identificar y reconocer propiedades que caractericen el número entero resolviendo ejercicios y problemas en contexto. • Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta

EL PESO IDEAL PARA ESTAR EN EL EQUIPO DE FÚTBOL

El preparador físico de un equipo de fútbol realiza el control de peso de diez de sus jugadores cuando regresan de vacaciones. Para tal fin elabora un diagrama con el peso de cada uno de sus jugadores y el destaca con una línea de color verde, el peso que considera ideal para sus jugadores.



Como el preparador físico sólo le interesa saber cuántos kilogramos tiene de más o de menos cada jugador, respecto al peso ideal, decide simplificar la información en una tabla.

Actividad 1: Acerquémonos a los números enteros mediante su representación en la recta y la distancia al cero.			
Grado: 5°	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

> *Los números pueden ser positivos o negativos, dependiendo su valor absoluto, es decir, un número es positivo si su valor absoluto es mayor o igual a cero y es negativo si su valor absoluto es menor que cero.*

Nota: Ten en cuenta la información y la historia de la situación 2 y realiza las preguntas del 1 y 2

1. Ayuda al preparador físico a llenar la tabla y ten en cuenta que los valores que están por encima del peso ideal se representaran con el signo más (+) y los que están por debajo se representaran con el signo menos (-) y el jugador C será el punto de referencia puesto que tiene el peso ideal

Jugador	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Kg de más o de menos			0		+6				-5	

2. Representa los valores encontrados anteriormente en la recta numérica. (Usa las letras mayúsculas para indicar el número que corresponde a cada una de ellas)

3. Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C?

---

b. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto D hasta el punto C?

---

c. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto B?

---

d. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto H?

---

e. Compara la distancia que hay del punto A a C y del punto D a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

---

f. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto G a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

---

g. Compara la distancia que hay del punto B a C y del punto H a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

---

h. Compara la distancia que hay del punto F a C y del punto E a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

---

i. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto J a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

---

j. ¿Hay otros puntos distintos en la recta que tengan la misma distancia con respecto al punto C? Si tu respuesta es sí, ¿Di cuáles son?

Actividad 2: Acerquémonos a los números enteros mediante la noción de opuesto.			
Grado:5°	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

De acuerdo a los resultados encontrados en la actividad 1 se concluye que al preparador físico sólo le interesa saber cuántos kilogramos tiene de más o de menos cada jugador, respecto al peso ideal, y él decide simplificar la información en la siguiente tabla.

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	2	-1	-5	5

Tiempo después de que sus jugadores alcanzan el peso ideal, el preparador junto con el entrenador deciden realizar una convocatoria para incluir nuevos jugadores en su equipo y se presentan los siguientes candidatos.

Jugador	**Peso ideal según el preparador físico**	**Peso en kilogramos de los jugadores**	**kg de más o de menos según el peso ideal**
K	73	69	-4
L	73	77	+4
M	73	83	+10
N	73	67	-6
Ñ	73	82	+9
O	73	64	-9
P	73	66	-7

1. Representa en una recta numérica los kilogramos de más y de menos de los nuevos jugadores y los viejos. (Recuerda que el peso ideal se representa con cero en la recta numérica)

2. A partir de la recta numérica que acabas de realizar responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -4 y +4 con respecto al punto 0?

b. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -6 y +6 con respecto al punto 0?

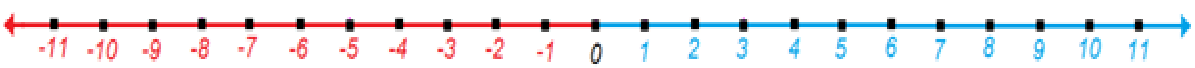
c. ¿Qué número esta a la misma distancia de +10 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

d. ¿Qué número esta a la misma distancia de -7 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

Reflexionemos acerca de la distancia de un punto al cero: *los números que están a la misma distancia del cero y tienen signos diferentes se llaman opuestos. ¿Y que son los opuestos?*

En la vida cotidiana la mayoría de las cosas que tienen su opuesto o su contrario, como por ejemplo: lo opuesto de la noche el día, lo opuesto del blanco es el negro, ahora bien en las matemáticas ocurre lo mismo con los números, dado que a dos números iguales en cantidad o magnitud que solo se diferencian en el signo se les llama opuestos y estos están a la misma distancia del cero en la recta numérica. Además dos números son opuestos porque su suma es igual a cero, tal como se muestra a continuación: $a + (-b) = 0 \ \forall a, b \in Z$ *ejemplo:* $5 + (-5) = 0$

3. Teniendo en cuenta el enunciado anterior y usando la siguiente recta numérica, completa los enunciados escribiendo que números hay entre los pares de números dados e indica que pareja de opuestos hay entre ellos, en caso de haberlos.



a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

____

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

____

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son:____

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

____

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

____

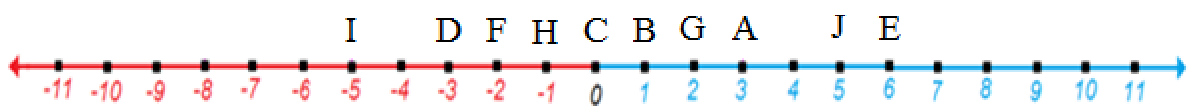
Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

Actividad 3: Acerquémonos a los números enteros mediante la relación de orden.		
Grado:5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.

1. Teniendo en cuenta la tabla de la actividad 1 y la recta. Responde las siguientes preguntas

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	2	-1	-5	5



a. ¿Entre el jugador B y E, quién está más lejos de llagar a C? ¿y por qué?

b. ¿Entre el jugador I y H, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

c. ¿Entre el jugador F y A, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

d. ¿Entre el jugador G y J, a quién le hace falta menos para bajar y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

e. ¿Entre el jugador D y H, a quién le hace falta subir más de peso y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

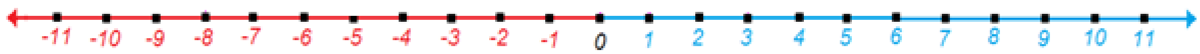
f. ¿Entre el jugador B y E, quién tiene más peso y por qué?

g. ¿Entre el jugador D y H, quién tiene más peso y por qué?

Reflexionemos acerca de los números y su posición en la recta:

Cualquier número que este situado a la izquierda de otro es menor y si está situado a la derecha es mayor. El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo. Ahora bien, una de las alternativas para comparar los números positivos y negativos es a través de la recta numérica interpretando la anterior observación o se puede realizar mediante el siguiente análisis matemático: $a < b \leftrightarrow |b - a| > 0 \; \forall a, b \in Z$

2. Teniendo en cuenta la reflexión anterior y la recta numérica realiza el siguiente ejercicio.



Escribe en el recuadro si el número que está al lado izquierdo del otro es mayor o menor según corresponda. Mira los ejemplos

-2 *Es menor que* **10**

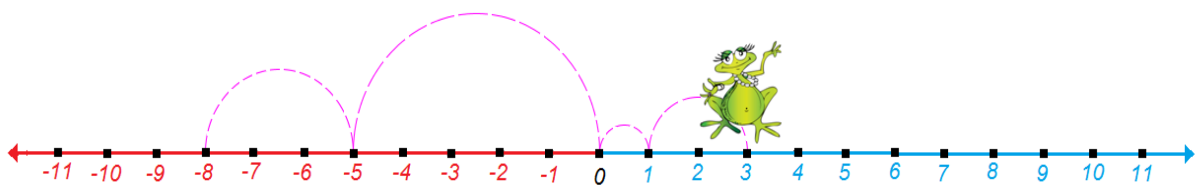
8 *Es mayor que* **5**

-3		2	3		-8	-11		6
-7		-5	9		-7	-9		2
21		-21	-2		2	21		2

Situación 3: Adición de números enteros
Desempeños: • Resolver ejercicios que involucren adicionar números enteros de diferente signo mediante la representación gráfica. • Pasar de la dimensión contextual a la dimensión recta y viceversa. • Pasar de la dimensión contextual a la dimensión abstracta.

De salto en salto voy avanzando.

A la rana Clementina, le gusta saltar sobre la recta numérica de izquierda a derecha, unas veces salta muy alto dando varios pasos a la vez y otras veces muy bajito dando solo un paso como se muestra en la imagen. A ella le gusta ver cómo va aumentando cada paso que da y por eso salta así.



Actividad 1: Acerquémonos a la suma de números enteros mediante el desplazamiento en la recta numérica.			
Grado:5°	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

Teniendo en cuenta la historia de la situación 3 y la imagen responde las preguntas.

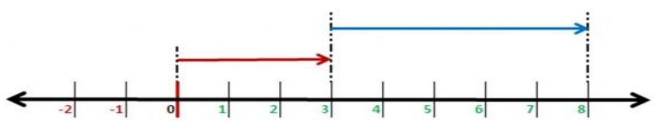
a. Si la rana Clementina empieza a saltar desde la posición -8 avanzando hacia la derecha con saltos pequeños de a una unidad y salta en total 11 unidades en la recta ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

b. Si Clementina la rana empieza a saltar desde la posición 0 y hace su primera parada en la posición -5 y luego decide seguir saltando solo 2 unidades más en la recta en la misma dirección que tenia, ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

c. Si la rana Clementina está en la posición 0 y pega un gran salto hasta la posición 7, pero decide devolverse cuatro unidades en la recta porque se le olvido su cartera ¿A qué distancia esta Clementina desde su nueva posición hasta el origen? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

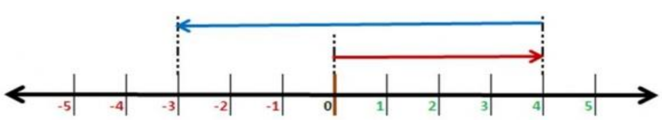
Reflexionemos acerca del desplazamiento en la recta:

Un cuerpo se desplaza cuando al moverse cambia de posición. Ahora bien, teniendo en cuenta que siempre el punto de origen es cero, que los desplazamientos a la izquierda son cantidades negativas y que los desplazamiento a la derecha son cantidades positivas, podemos definir la adición de números enteros, mediante su representación en la recta numérica usando flechas. Veamos algunos ejemplos: Pedro camina tres pasos hacia la derecha desde el origen y luego cinco en la misma dirección ¿a cuántos pasos se encuentra de la posición inicial?



Operación matemática: 0 + 3 = 3 luego 3 + 5 = 8

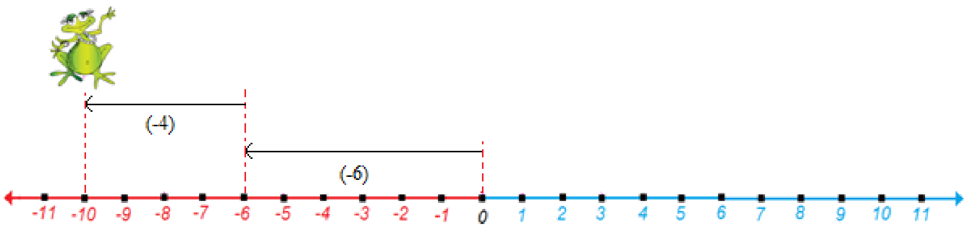
Pedro camina cuatro pasos hacia la derecha desde el origen y luego se regresa siete pasos hacia la izquierda. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?



Operación matemática: 0 + 4 = 4 luego 4 + (– 7) = – 3

d. Teniendo en cuenta el enunciado anterior, escribe un enunciado con tus propias palabras que represente las siguientes gráficas y realiza una operación matemática que pueda resolver dicho enunciado. (Recuerda que: la rana Clementina siempre inicia desde el origen o el punto cero y finaliza donde está ubicada su figura)

a)



Situación:____

____

____

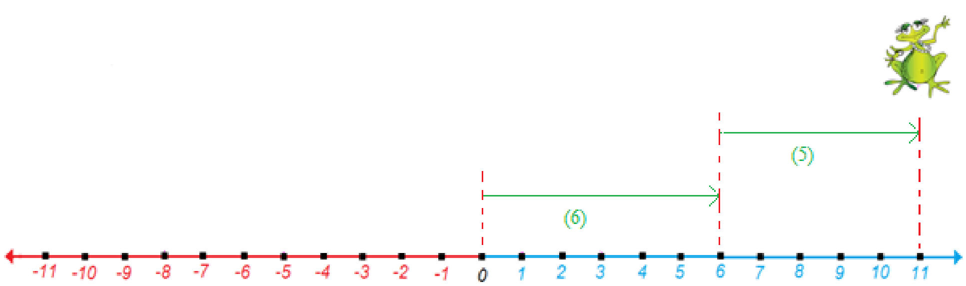
____

____

Operación:

Resultado:

b)



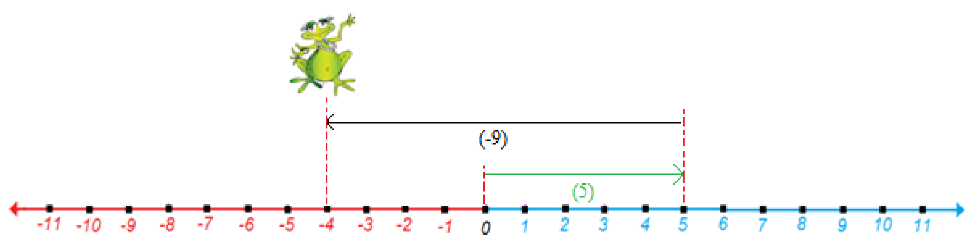
Situación:____

____

____

Operación:

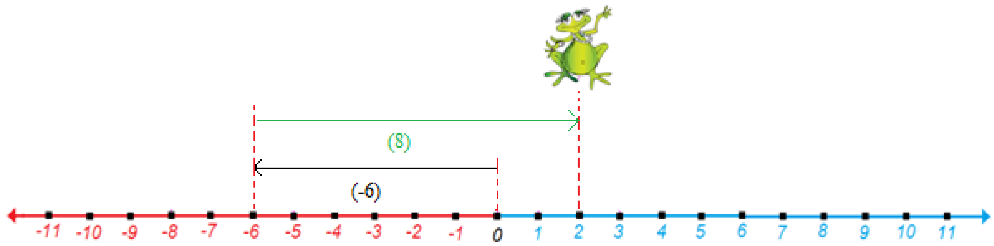
Resultado:

c) 

Situación:

Operación:

Resultado:



d)

Situación:____

____

____

____

____

Operación:

Resultado:

3.3. Análisis preliminares a la aplicación de la propuesta de aula

3.3.1. Situación 1: aproximación al número entero a través del número relativo.

En el momento de socializar las respuestas en el aula de clases se espera que los estudiantes en la **actividad 1:** Usando números enteros en la línea recta con acontecimientos importantes de la vida de Pedrito, logren alcanzar los siguientes desempeños: Expresar con números relativos información acerca de la cantidad de una magnitud, a partir de una referencia y pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta; todo esto se espera a partir del concepto matemático trabajado por los estudiantes acerca de las medidas relativas, el orden en los números de forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda y la unidad de medida dada en años.

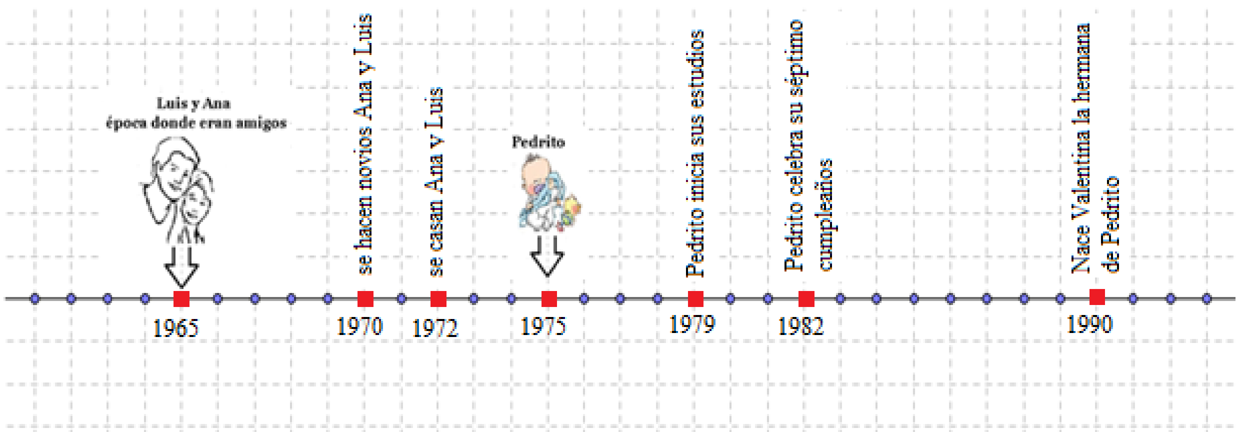
A partir de lo anterior, en el punto uno de dicha actividad se espera que después de la lectura realizada en la situación 1 sobre la historia de Pedrito, el estudiante pueda expresar con números naturales las fechas mencionada en dicha historia, aparte de poder hacer uso de sus conocimientos previos como el uso de operaciones simples tales como la suma y la resta, de forma implícita para sacar las fechas que no están a la vista y así poder llenar la tabla que le permitirá usar la recta horizontal que aparece en el punto dos, donde se espera que el estudiante pueda representar con números naturales los eventos más importantes de la vida de Pedrito, haciendo uso adecuado del orden cronológico en la recta horizontal y se vea el paso de la dimensión contextual a la dimensión de recta.

A continuación se exponen las respuestas esperadas en los ítems 1 y 2

1.

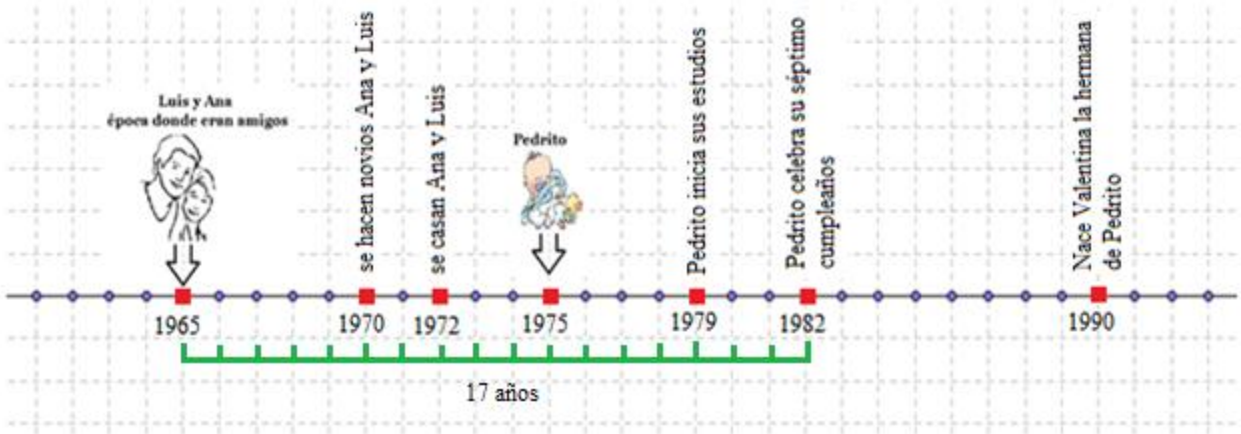
Año	Acontecimiento
1965	Se conocieron y se hacen amigos Ana y Luis
1972	Se casaron Ana y Luis
1975	Nace Pedrito
1979	Pedrito inicia sus estudios
1982	Pedrito celebra su séptimo cumpleaños
1990	Nace Valentina la hermana de Pedrito
1970	Se hicieron novios Ana y Luis

2.



Ahora bien, en los puntos del 3 al 5 se espera que los estudiantes hagan uso de la representación de las fechas en la recta horizontal para decir la cantidad o diferencia que hay de una fecha a otra, es decir, que el estudiante pueda realizar el conteo desde una fecha o suceso hasta otra, teniendo en cuenta el punto de referencia, es decir, el punto de partida para iniciar el conteo y que la unidad de medida que está dada en años para así llegar a la respuesta correcta por ejemplo en el punto 3:

3. ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?



Respuesta: 17 años

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

Respuesta: 3 años

5. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

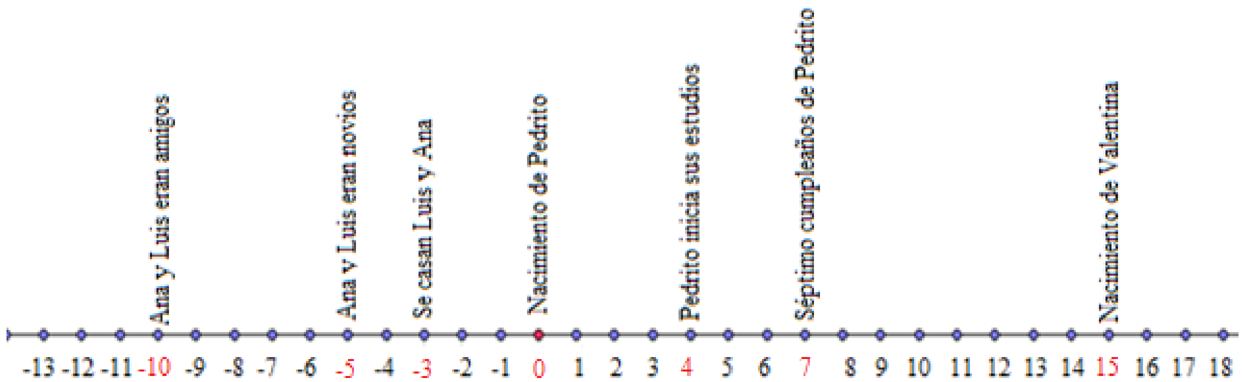
Respuesta: 25 años

Finalmente, en la sexta pregunta lo que se espera es que los estudiantes puedan pasar de la dimensión contextual a la de recta, identificando y usándolas medidas relativas y números relativos en distintos contextos, usando el cero relativo como punto de partida, además de usar el orden de los números de forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda y la unidad de medida en la recta horizontal para representar dichas cantidades. Las respuestas esperadas son:

6.

- Luis y Ana se casaron tres años antes de que naciera Pedrito.

- Cuatro años después del nacimiento de Pedrito el inicia sus estudios.
- Doce años después de que Ana y Luis eran novios Pedrito celebra su séptimo cumpleaños.
- Siete años antes de que se casaran los padres de Pedrito ellos inician su amistad.
- Quince años después del nacimiento de Pedrito nace su hermana Valentina.



3.3.2. Situación 2: caracterización del número entero.

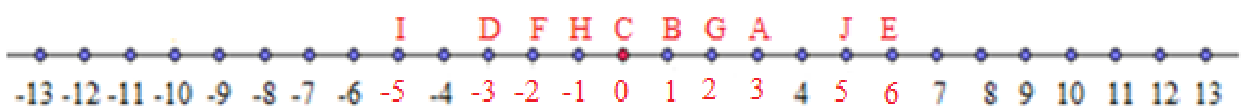
Al socializar las respuestas de las **actividades 1, 2 y 3** de la situación 2 se espera que los estudiantes logren alcanzar los siguientes desempeños: identificar y reconocer propiedades que caracterizan el número entero resolviendo ejercicios y problemas en algunos contextos y pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta; todo esto a partir del concepto matemático trabajado por los estudiantes acerca de la distancia de un punto a otro, el opuesto de un número, la relación de orden y la unidad de medida, además de resolver y formular problemas donde cuyas estrategias de solución requieran de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

A partir de lo anterior, en la **actividad 1:** acerquémonos a los números enteros mediante su representación en la recta y la distancia al cero lo que se espera es que los estudiantes con base a la lectura realizada en la situación 2 acerca del peso ideal para estar en el equipo de fútbol, la lectura de la nube (para tener en cuenta: los números pueden ser…) y lo realizado anteriormente en la situación 1 en cuanto a la representación en la recta horizontal con cantidades relativas y el cero relativo, es que el estudiante pueda representar en el punto uno la información suministrada en la lectura y en la gráfica en una tabla dándole valores relativos al peso de los jugadores teniendo en cuenta cuanto estos deben subir o bajar para llegar al peso ideal del jugador C el cual es el punto de referencia además del signo que le corresponde a cada uno de estos, ahora bien con esta información se espera que los estudiantes en el punto dos realicen una recta horizontal donde se relacionen cada valor con la letra correspondiente al jugador, a continuación se exponen las respuestas esperadas en los puntos 1 y 2.

1.

Jugador	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	+2	-1	-5	+5

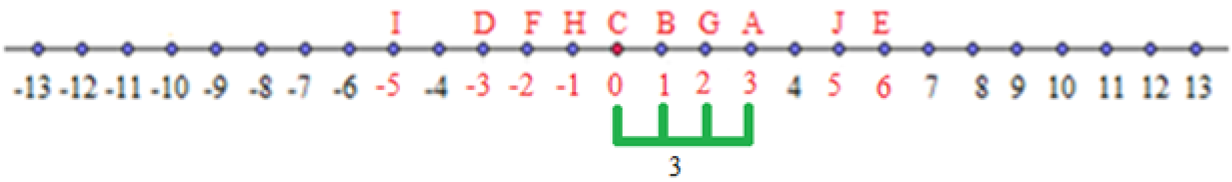
2.



Después de realizar estos dos puntos se espera que el estudiante sea capaz de responder los ítems de la pregunta tres utilizando la recta e indicando cual es la distancia que hay de un punto a otro, además de comparar que hay distancias que son iguales respecto a un punto de referencia. A continuación se muestran las respuestas esperadas en los ítems del punto 3.

3.

a. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C?



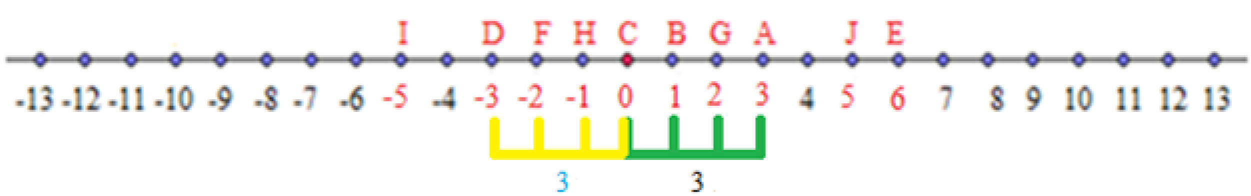
Respuesta: la distancia del punto A hasta el punto C es 3

b. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto D hasta el punto C? **Respuesta:** la distancia del punto D hasta el punto C es 3

c. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto B? **Respuesta:** la distancia del punto C hasta el punto B es 1

d. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto H? **Respuesta:** la distancia del punto C hasta el punto H es 1

e. Compara la distancia que hay del punto A C y del punto D a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?



Respuesta: la distancia es igual y es 3

f. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto G a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias? **Respuesta:** la distancia es distinta puesto que, del punto I a C es 5 y del punto G a C es 2

g. Compara la distancia que hay del punto B a C y del punto H a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias? **Respuesta:** la distancia es igual y es 1

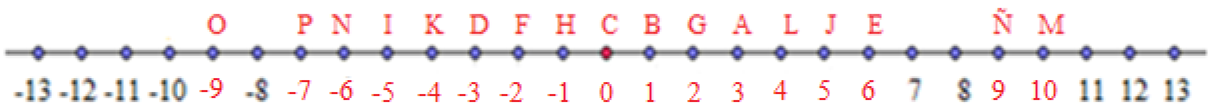
h. Compara la distancia que hay del punto F a C y del punto E a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias? **Respuesta:** la distancia es distinta puesto que, del punto F a C es 2 y del punto E a C es 6

i. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto J a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias? **Respuesta:** la distancia es igual y es 5

j. ¿Hay otros puntos distintos en la recta que tengan la misma distancia con respecto al punto C? Si tu respuesta es sí, ¿Di cuáles son? **Respuesta:** si hay otros puntos distintos que tienen la misma distancia con respecto a C, y son: de C a E con -6 a C; -4 a 0 con 0 a 4, entre otros.

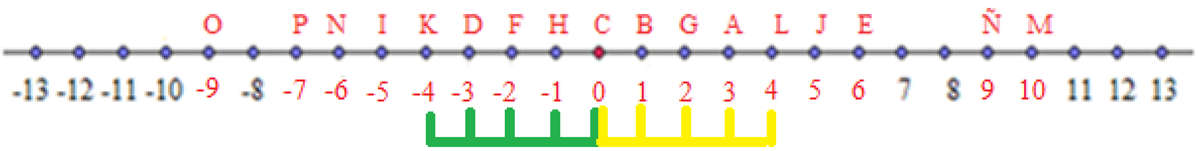
En la **actividad 2:** acerquémonos a los números enteros mediante la noción de opuesto lo que se espera es que los estudiantes a partir de lo realizado en la actividad 1 y la nueva información suministrada de los nuevos jugadores realicen en el punto uno una nueva recta horizontal donde se pueda visualizar los datos anteriores y los nuevos, para así responder los ítems del punto dos los cuales son similares a los del punto tres de la actividad 1 con la diferencia que aquí ya no se trabajará con letras sino con números enteros, que permiten apreciar la distancia que hay de un punto a otro y mirar la noción de opuesto. Como se muestra a continuación

1.



2.

a. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -4 y +4 con respecto al punto 0?



Respuesta: es la misma, ambos están a 4 unidades del 0

b. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -6 y +6 con respecto al punto 0?**Respuesta:** es la misma, ambos están a 6 unidades del 0

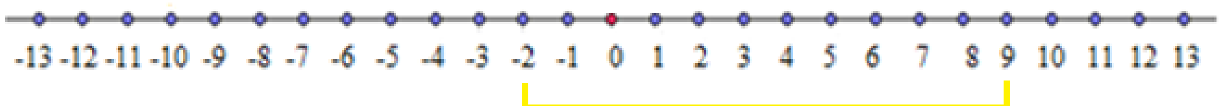
c. ¿Qué número esta a la misma distancia de +10 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta. **Respuesta:** el -10 puesto que está a la misma distancia con respecto al cero que el +10

d. ¿Qué número esta a la misma distancia de -7 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta. **Respuesta:** el +7 puesto que está a la misma distancia con respecto al cero que el -7

Seguido a esto, lo que se espera en el tercer punto es que el estudiante a partir de lo realizado en el punto anterior, la reflexion acerca de la distancia de un punto al cero y la recta horizontal, logre identificar las parejas de opuestos en un intervalo de números, como se muestra a continuación

3.

a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:



-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son: -2 y 2; -1 y 1 Justificación: porque la suma entre estos pares de números es cero

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

-11, -10 y -9

Hay algunas parejas de opuestos: Si ___ No X

En caso de haberlas di cuales son: ___________________________________

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son: -11 y 11; -10 y 10; -9 y 9; -8 y 8; -7 y 7; -6 y 6; -5 y 5; -4 y 4; -3 y 3; -2 y 2; -1 y 1 Justificación: porque la suma entre estos pares de números es cero

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

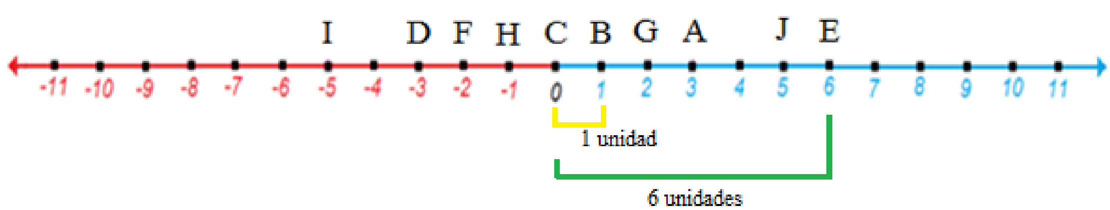
Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son: -6 y 6; -5 y 5; -4 y 4; -3 y 3; -2 y 2; -1 y 1 Justificación: porque la suma entre estos pares de números es cero

Finalmente en la **actividad 3:** acerquémonos a los números enteros mediante la noción de orden lo que se espera por parte de los estudiantes en el punto uno, es que estos logren determinar la posición de los números en la recta y cuando un número es mayor o menor que otro. Como se muestra a continuación

1.

a. ¿Entre el jugador B y E, quién está más lejos de llagar a C? ¿y por qué?



Respuesta: El jugador E porque está a 6 unidades de C mientras que B está a 1 unidad de C

b. ¿Entre el jugador I y H, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué? **Respuesta:** El jugador H porque está a 1 unidad de C mientras que I está a 5 unidades de C

c. ¿Entre el jugador F y A, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué? **Respuesta:** El jugador F porque está a 2 unidades de C mientras que A está a 3 unidades de C

d. ¿Entre el jugador G y J, a quién le hace falta menos para bajar y llegar al peso ideal C? ¿y por qué? **Respuesta:** El jugador G porque le hace falta 2 unidades para llegar a C mientras que I le hace falta 5 unidades para llegar a C

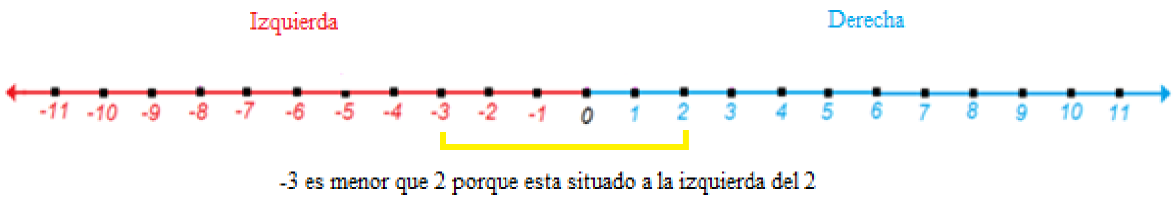
e. ¿Entre el jugador D y H, a quién le hace falta subir más de peso y llegar al peso ideal C? ¿y por qué? **Respuesta:** El jugador D porque le hace falta subir 3 unidades para llegar a C mientras que a H le falta subir 1 unidad para llegar a C

f. ¿Entre el jugador B y E, quién tiene más peso y por qué? **Respuesta:** El jugador E porque tiene 6 unidades más que B con respecto a C

g. ¿Entre el jugador D y H, quién tiene más peso y por qué? **Respuesta:** El jugador H porque le hace falta menos para llegar a C mientras que D le hace falta 3 unidades para llegar a C

Ahora bien, en el punto dos, se espera que los estudiantes a partir de la recta que se les presenta y la reflexión dada sobre la posición de los números en la recta, se espera que los estudiantes puedan determinar cuando un número es mayor o menor que otro, como se muestra a continuación.

2.



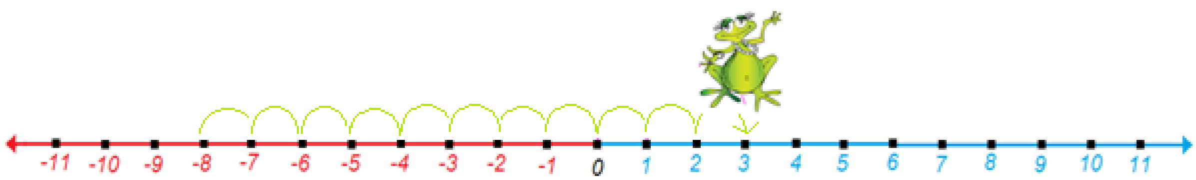
-3	es menor que	2	3	es mayor que	-8	-11	es menor que	6
-7	es menor que	-5	9	es mayor que	-7	-9	es menor que	2
21	es mayor que	-21	-2	es menor que	2	21	es mayor que	2

3.3.3. Situación 3: adición de números enteros.

Al momento de socializar las respuestas en el aula de clases se espera que los estudiantes en la **actividad 1:** Acerquémonos a la suma de números enteros mediante el desplazamiento en la recta numérica, logren alcanzar los siguientes desempeños: Resolver ejercicios que involucren adicionar números enteros de diferente signo mediante la representación gráfica, pasar de la dimensión contextual a la dimensión recta y viceversa, además de pasar de la dimensión contextual a la dimensión abstracta; lo cual se espera que suceda a partir del concepto matemático trabajado por los estudiantes acerca de la adición o sustracción con los números naturales y con los números enteros, la distancia de un punto a otro y unidad de medida en la recta.

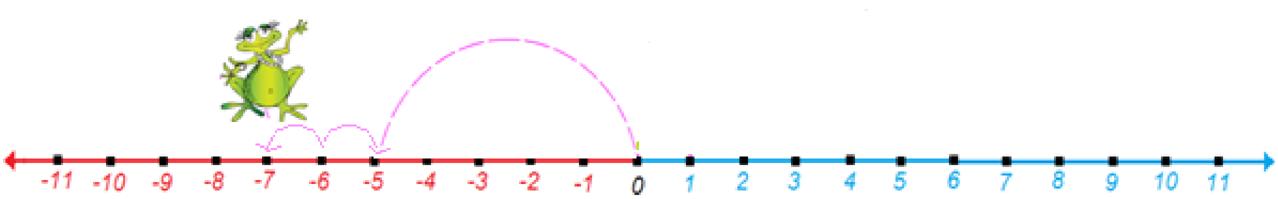
A partir de lo anterior, en los puntos del uno al tres de dicha actividad, se espera que después de la lectura realizada en la situación 3 sobre la rana Clementina (De salto en salto voy avanzando) y la imagen, el estudiante pueda responder y representar gráficamente las preguntas pasando de la dimensión contextual a la dimensión de recta. Como se muestra a continuación

1. Si la rana Clementina empieza a saltar desde la posición -8 avanzando hacia la derecha con saltos pequeños de a una unidad y salta en total 11 unidades en la recta ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



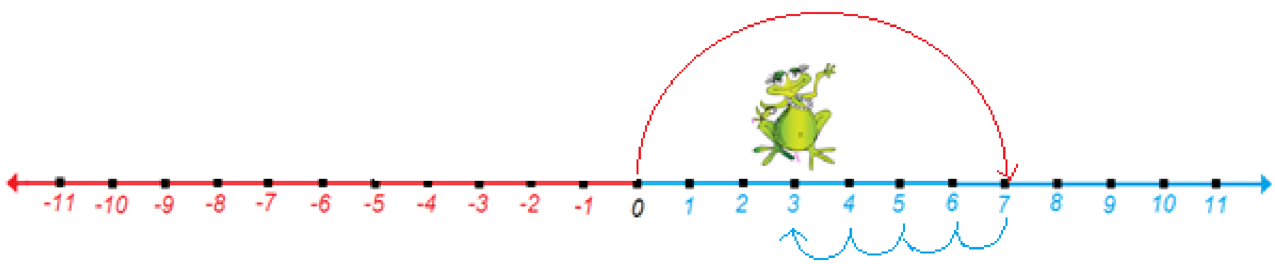
Respuesta: Su nueva posición es 3

2. Si Clementina la rana empieza a saltar desde la posición 0 y hace su primera parada en la posición -5 y luego decide seguir saltando solo 2 unidades más en la recta en la misma dirección que tenia, ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



Respuesta: Su nueva posición es -7

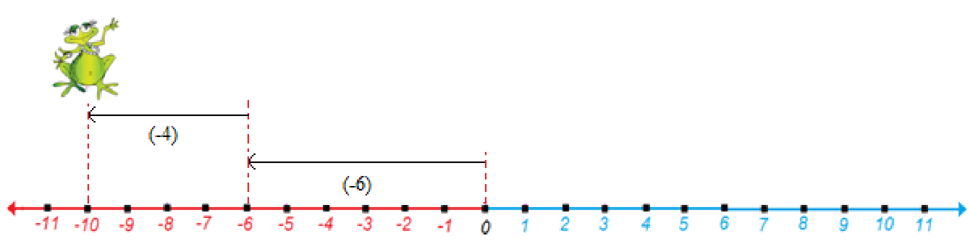
3. Si la rana Clementina está en la posición 0 y pega un gran salto hasta la posición 7, pero decide devolverse cuatro unidades en la recta porque se le olvido su cartera ¿A qué distancia esta Clementina desde su nueva posición hasta el origen? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



Respuesta: Su nueva posición es 3

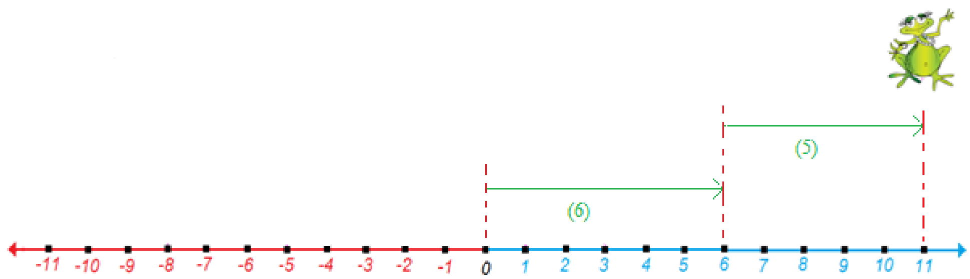
En el punto cuatro lo que se espera es que el estudiante a partir de la reflexión acerca del desplazamiento en la recta y lo realizado en los puntos anteriores, puedan hacer una aproximación a la operación suma con números enteros mediante el desplazamiento en la recta, además de pasar de la dimensión de recta a lo contextual y de la dimensión contextual a la dimensión abstracta, además se espera que se realice el paso del número relativo al número entero. La descripción de la situación se deja a la libre expresión de los estudiantes pretendiendo que esta represente la gráfica, las operaciones se esperan que se den de acuerdo con lo expuesto por ello en la redacción de la situación como se muestra a continuación

4.

a) 

Operación: (-6) + (-4)

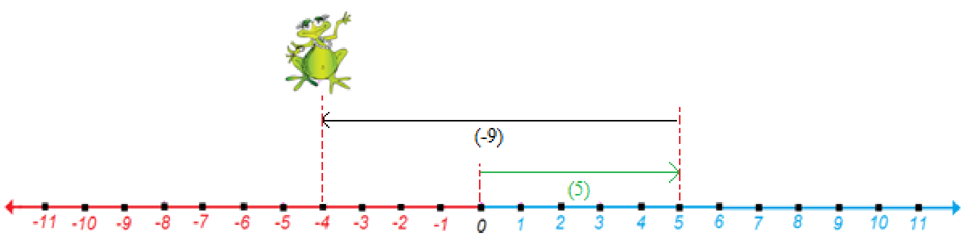
Resultado: -10



b)

Operación: 6 + 5

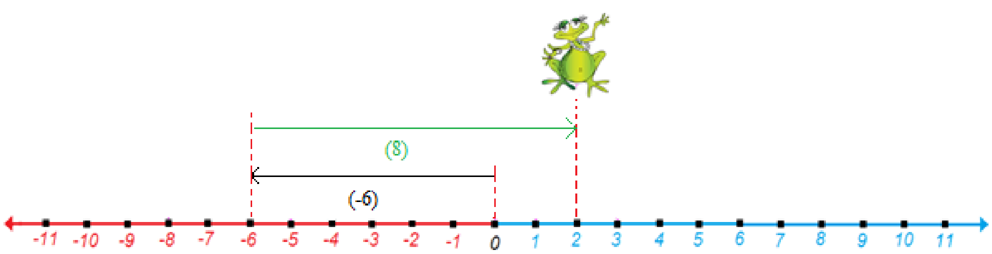
Resultado: 11



c)

Operación: 5 + (-9)

Resultado: -4



d)

Operación: (-6) + 8

Resultado: 2

3.4. Implementación de la propuesta de aula

3.4.1. Contextualización de la población.

La implementación de la propuesta de aula se llevó a cabo en la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali la cual, se encuentra ubicada al oeste de la ciudad; esta es una institución pública formadoras de maestros normalistas para los niveles de preescolar y Educación Básica Primaria. La institución ofrece cuatro niveles de Formación: Transición o Preescolar, Educación Básica, Educación Media Vocacional y Ciclo Complementario con énfasis en Educación Matemática. El énfasis afecta la totalidad del currículo, pero se expresa de manera particular en los diferentes niveles de formación a saber: del grado 0 al grado 7°, impregnando las actividades de formación de modo práctico, por medio del trabajo docente de los maestros en el área de Matemáticas y en la Práctica docente experimental investigativa desarrollada por los estudiantes del ciclo complementario en este nivel. A partir del 8° gado hasta el 11° grado el currículo de la Normal se distribuye en un 80% destinado a las áreas obligatorias y un 20% a la formación pedagógica, el énfasis en este nivel se expresa en el privilegio de los campos de la comunicación y de los diversos lenguajes especializados incrementando gradualmente la atención al lenguaje objeto de la Educación Matemática

Para el desarrollo de la propuesta de aula se conto con la ayuda de la profesora Ángela Reyes, directora del grado 5-1 en el año electivo (2014 - 2015), aceptando disponer de 16 de sus estudiantes, para implementación de esta propuesta de aula, la cual se presenta con una metodología tipo taller donde la interpretación y los conocimientos previos de los estudiantes son aspectos que se destacan en el trabajo realizado dentro del aula de clases; de esta manera la comprensión, análisis, discusión, y registros de lo que sucedió en el aula de clases se realiza mediante la de toma de notas y las muestras del trabajo elaborado por los estudiantes.

Ahora bien, cada situación de la propuesta presenta diversas actividades, que fueron aplicadas en varias sesiones; la primera situación se presentó en una sesión donde la modalidad de trabajo fue grupal y tuvo una duración de 45 minutos, la segunda se presenta en tres sesiones, donde la modalidad de trabajo era individual, cada una con una duración de 45 minutos y la tercera situación se presenta en una sesión de 45 minutos, donde la modalidad sigue siendo individual (en total se realizan 5 sesiones con los estudiantes) y se da inicio a las actividades después de repartir el material a cada estudiante, luego se realiza la lectura de toda la situación, se presentar cada una de las preguntas asociadas a esta y se explica la modalidad de trabajo tanto en la actividad como en la socialización de las respuestas, la cual se realizará después de culminar con la actividad.

3.4.2. Resultados y análisis de resultados

En este apartado se presentan los resultados de las actividades realizadas por los estudiantes con sus respectivos análisis, según lo planteado en el marco teórico de este trabajo, lo cual permite contrastar o verificar los resultados esperados y determinar las debilidades y fortalezas de los estudiantes en el momento de aprender un concepto en matemáticas, en este caso una aproximación al concepto de números enteros a través de los números naturales para así evaluar las actividades diseñadas de la situación didáctica de este trabajo.

Los resultados de cada actividad son presentados a través de una tabla y posteriormente se realizan los respectivos análisis.

3.4.2.1. Situación 1: Aproximación al número entero a través del número relativo.

A continuación se presenta la tabla 4 que contiene la organización de la actividad en la clase

Grado	**Cantidad de estudiantes**	**Modalidad de trabajo**	**Cantidad de actividades**	**Total preguntas**
5-1	16	Parejas	1	6

Tabla 4. *Organización del trabajo en el aula, situación 1.*

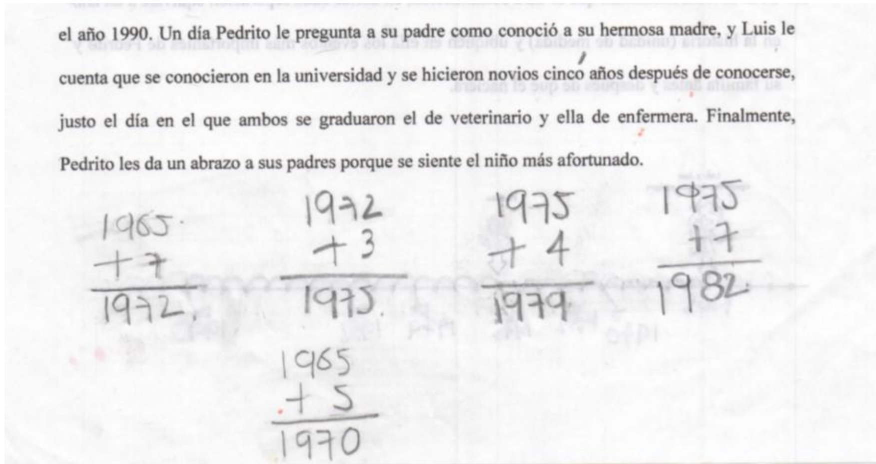
En la actividad de la situación 1 lo que se busca es desarrollar en los estudiantes capacidades para observar características del número entero como número relativo haciendo uso de sus conocimientos previos y el orden de los mismos en la recta numérica, como ya se ha mencionado en el análisis preliminares, para lograr así un acercamiento a este concepto mediante el trabajo en parejas. Ahora bien, en la siguiente tabla se presentan los tipos de respuestas que corresponden a la pregunta 1 la cual era:

Pregunta 1: Con la ayuda de tu compañero, realiza una lista con los acontecimientos importantes de la vida de Pedrito y representa esos momentos con años. Usa la siguiente tabla para escribirlos.

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas.
Los estudiantes realizan utilizan el conteo manual partiendo desde la fecha expuesta en la historia para encontrar las otras que no están exhibidas	6
Los estudiantes realizaron operaciones de suma para encontrar las fechas mencionadas en la lectura a partir de los sucesos ocurridos en la vida de Pedrito, pero plantean algunas fechas que no corresponden a los sucesos ocurridos.	2
Total estudiantes	**8 parejas**

Tabla 5. *Tipos de respuestas preguntas 1, Actividad 1.*

Respecto al desarrollo de la pregunta 1, los estudiantes no presentaron mayores dificultades en la representación de las fechas mencionadas en la lectura con números naturales, pues se observa que algunos estudiantes hacen uso de sus conocimientos previos tal como se ha planteado en el marco teórico desde la propuesta de Bruno (1997) donde se menciona que estos son un aspecto importante en el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes ya que, al estar familiarizados con los números naturales y las operaciones dentro de este conjunto (tales como la diferencia) ellos pueden hacer uso de este conocimiento para llegar a la solución de ciertos problemas; en este caso el conocimiento de la operación resta es utilizado como una "herramienta" para llegar a las fechas que no se encuentran de forma explícita (ver figura 14 y 15), aunque otros optan por utilizar su conocimiento en cuanto al conteo manual partiendo de las fechas que se encuentran expuestas, para llegar a los valores esperados utilizando la fecha que se da y el tiempo que a ha transcurrió, por otro lado, se evidencia que hay estudiantes que no logran comprender lo expuesto en la lectura y colocan fechas erróneas, pues no les es claro el asociar el evento mencionado al final de la lectura con el inicial, evidenciando así una dificultad la cual tiene que ver con la capacidad de seguir un argumento lógico tal como lo plantea Socas (1997).



el año 1990. Un día Pedrito le pregunta a su padre como conoció a su hermosa madre, y Luis le cuenta que se conocieron en la universidad y se hicieron novios cinco años después de conocerse, justo el día en el que ambos se graduaron el de veterinario y ella de enfermera. Finalmente, Pedrito les da un abrazo a sus padres porque se siente el niño más afortunado.

1965 + 7 = 1972

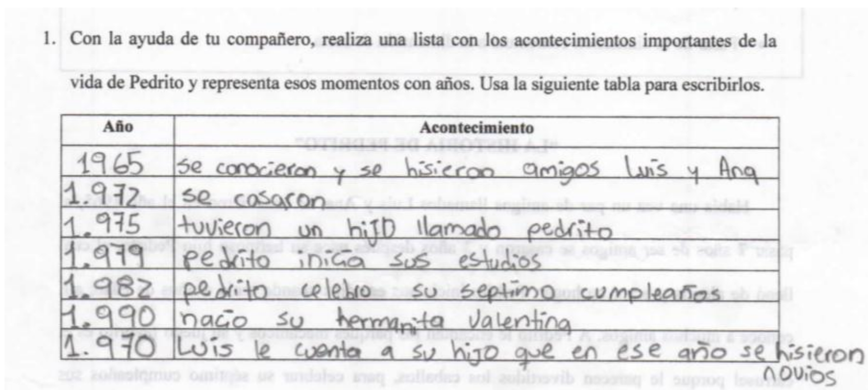
1972 + 3 = 1975

1975 + 4 = 1979

1975 + 7 = 1982

1965 + 5 = 1970

Figura 14. *Uso de algoritmos matemáticos*



1. Con la ayuda de tu compañero, realiza una lista con los acontecimientos importantes de la vida de Pedrito y representa esos momentos con años. Usa la siguiente tabla para escribirlos.

Año	Acontecimiento
1965	se conocieron y se hisieron amigos Luis y Ana
1.972	se casaron
1.975	tuvieron un hijo llamado pedrito
1.979	pedrito inicia sus estudios
1.982	pedrito celebro su septimo cumpleaños
1.990	nació su hermanita Valentina
1.970	Luis le cuenta a su hijo que en ese año se hisieron novios

Figura 15. *Lista de acontecimientos*

En la tabla 6 se presentan los tipos de respuestas que corresponden a las preguntas 2, la cual era:

Pregunta 2: Usen la recta horizontal que se da a continuación, en donde cada separación equivale a un año en la historia (unidad de medida) y ubiquen en ella los eventos más importantes de Pedrito y su familia antes y después de que él naciera.

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas.
Los estudiantes mediante saltos (⌒⌒⌒) en la recta o mediante el conteo manual punto a punto indicando la unidad de medida en la recta, ubican las fechas obtenidas en el punto 1 y los sucesos expuestos, teniendo en cuenta el orden cronológico de los mismos.	2
Los estudiantes usan el conteo manual punto a punto para indicar la unidad de medida en la recta y ubicar las fechas obtenidas en el punto 1, aunque no tienen en cuenta los sucesos, ni el orden cronológico de los mismos.	1
Los estudiantes mediante saltos (⌒⌒⌒) en la recta ubican los sucesos expuestos en la lectura con palabra o dibujos, teniendo en cuenta el orden cronológico de los mismos.	2
Los estudiantes mediantes saltos (⌒⌒⌒) en la recta o mediante el conteo manual punto a punto indicando unidad de medida en la recta, ubican las fechas obtenidas en el punto 1, teniendo en cuenta el orden cronológico de cada una de estas.	3
Total estudiantes	**8 parejas**

Tabla 6. *Tipo de respuestas pregunta 2, actividad 1.*

Ahora bien, al relacionarse la pregunta 2 con la 1, no se presentaran mayores dificultades en el cambio de registro, es decir, los estudiantes realizan la transferencia de la dimensión contextual a la dimensión de recta teniendo tener en cuenta el orden cronológico de las fechas encontradas, los sucesos y la unidad de medida dada en años, aunque algunos estudiantes no relacionen las fechas con los sucesos o viceversa se aprecia la transferencia entre las dimensiones. Como se muestra en las figuras 16, 17 y 18.

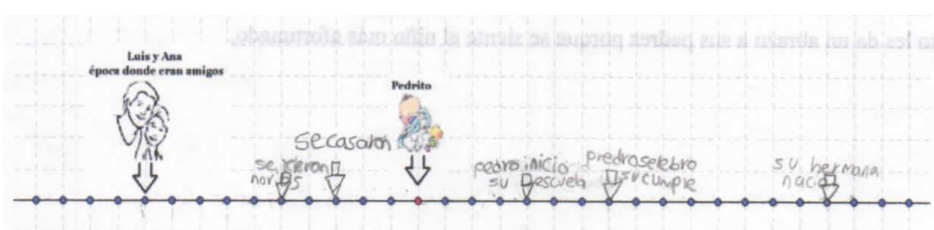


Figura 16. *Recta horizontal con los sucesos*

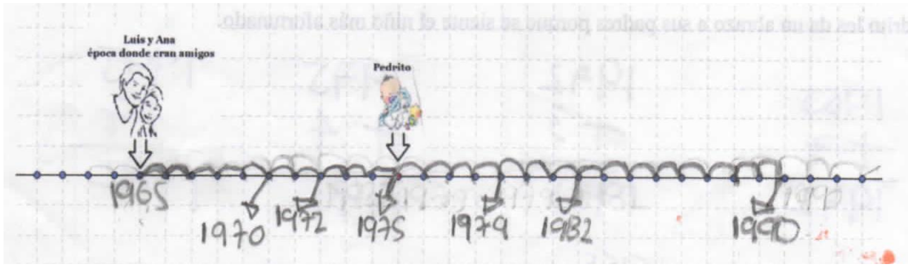


Figura 17. *Recta horizontal con las fechas*

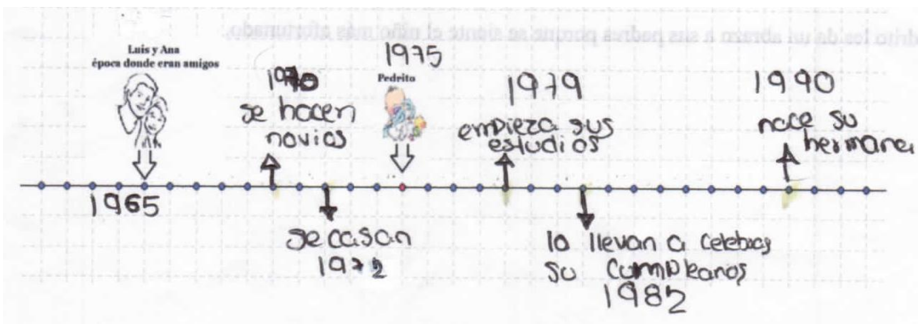


Figura 18. *Recta horizontal con los sucesos y las fechas*

Según lo que se ha planteado en la dimensión matemática expuesta en el marco teórico sobre el modelo de la recta numérica, en la cual se deben ubicar las representaciones de los números en la recta basados en la identificación de los números reales con los puntos de la recta; en este sentido se aprecia que dos de las parejas no logran realizar esta parte puesto que solo ubican en ella los sucesos de la vida de Pedrito teniendo en cuenta el orden cronológico de cada uno de estos pero no las fechas expresadas con números naturales. Ahora bien, la metodología empleada por los estudiantes para la ubicación de las fechas y los sucesos en la recta, se hace mediante el conteo manual o saltos en la recta evidenciando la unidad de medida dada en años.

Para la realización de la tabla 7 se unirán las preguntas del 3 al 5 ya que tienen el mismo objetivo y se realizan a partir de lo obtenido en la pregunta 2. Ahora bien, en esta tabla se presentan los tipos de respuestas obtenidos a partir de las siguientes preguntas:

A partir de la recta horizontal que acaban de completar respondan las preguntas 3, 4 y 5

Pregunta 3: ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?

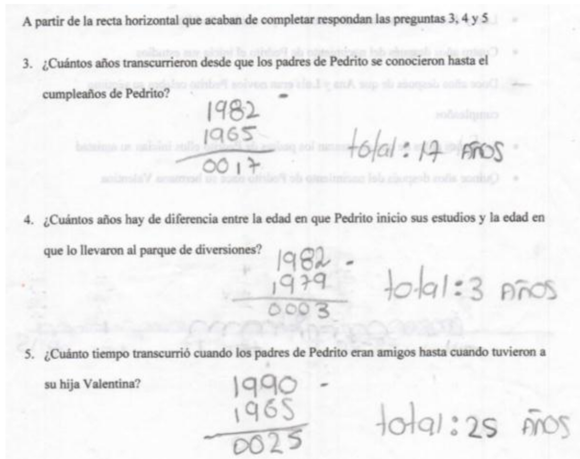
Pregunta 4: ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

Pregunta 5: ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

Tipo de respuestas	**Cantidad de estudiantes por parejas**
Los estudiantes llegan a la respuesta realizando el conteo de las unidades mediante saltos en la recta, partiendo desde los puntos de referencia que se les plantea en las preguntas.	4
Los estudiantes utilizan el algoritmo de la diferencia para llegar a las respuestas de las preguntas planteadas en la actividad.	1
Los estudiantes realizan el conteo manual teniendo en cuenta la unidad de medida en la recta pero su punto de referencia no es el establecido en la pregunta, dando así respuestas erróneas.	3
Total estudiantes	**8 parejas**

Tabla 7. *Tipo de respuestas preguntas 3,4 y 5, actividad 1*

En los puntos del tres al cinco, se observa que la mayoría los estudiantes logran establecer los puntos de referencia como ceros relativos para realizar a partir de ellos el conteo de las unidades y establecer relaciones de diferencias entre las edades o eventos ocurridos en la vida de Pedrito. Esto sustenta lo planteado en el marco teórico en cuanto a la fase 2 planteada por González et. al. (1999) donde comenta que el cero relativo juega un papel fundamental, ya que resulta del cambio de origen, de las relaciones comparadas de igualdad, de la transformación nula, bien aislada como tal o bien como resultados de comparaciones. Aunque en algunos casos no se tienen en cuenta los puntos de referencia en la recta ni la recta, por el contrario se acude a la utilización del algoritmo de la diferencia, donde el estudiante lo aplica tomando como referencia la fecha de mayor valor y le resta la de menor valor para llegar a la respuesta como se muestra en la figura 19.


A partir de la recta horizontal que acaban de completar respondan las preguntas 3, 4 y 5

3. ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?

1982 -
1965
0017
total: 17 AÑOS

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

1982 -
1979
0003
total: 3 AÑOS

5. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

1990 -
1965
0025
total: 25 AÑOS

Figura 19. *Algoritmo matemático de la diferencia*

A continuación se presenta en la tabla 8 los tipos de respuestas que corresponden a la preguntas 6, la cual era:

Pregunta 6: Realicen una nueva recta horizontal que se llamará recta numérica, en la mitad ubiquen el nacimiento de Pedrito y representen su nacimiento con el cero, luego ubiquen con números los siguientes sucesos de la vida de Pedrito antes y después de su nacimiento que se indican en la siguiente lista. (Nota: A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más, además usa una escala adecuada, es decir, que las subdivisiones de la recta deben ser de igual tamaño o medida)

- Luis y Ana se casaron tres años antes de que naciera Pedrito.

- Cuatro años después del nacimiento de Pedrito el inicia sus estudios.
- Doce años después de que Ana y Luis eran novios Pedrito celebra su séptimo cumpleaños.
- Siete años antes de que se casaran los padres de Pedrito ellos inician su amistad.
- Quince años después del nacimiento de Pedrito nace su hermana Valentina.

Tipo de respuestas	**Cantidad de estudiantes por parejas**
Los estudiantes realizan la recta numérica teniendo en cuenta las instrucciones dadas en la actividad e identificando el orden de los números en la recta, ahora bien, para ubicar los números realizan saltos en la recta hasta llegar a número deseado.	5
Los estudiantes realizan la recta numérica sin tener en cuenta: las instrucciones dadas, el orden de los números en la recta, ni la unidad de medida, aunque tratan de ubicar el cero en la mitad de ella, ahora para la ubicación de los números alguno utilizan el conteo manual y otro los saltos en la recta.	3
Total estudiantes	**8 parejas**

Tabla 8. *Tipo de respuestas pregunta 6, actividad 1*

Según los resultados obtenidos en la sexta pregunta se puede apreciar que los estudiantes en su mayoría logran realizar la transferencia de la dimensión contextual a la dimensión de recta, aunque la construcción de la recta no es un proceso simple, dado que se requiere la claridad conceptual con relación a la unidad de medida, ubicar un punto de referencia que en este caso es el cero relativo y el orden de los números de forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda con su respectivo signo. Aunque los estudiantes logran identificar y usar las medidas relativas en distintos contextos para representarlas en la recta, usando el cero relativo como punto de referencia para dividir la recta en partes iguales y ubicar nuevos números a partir de él, de forma ascendente y descendente con su respectivo signo.

Para concluir, según lo expuesto por González et. al. (1999) dentro del marco teórico en cuanto a la fase 1, lo que esperaba alcanzar en esta parte era iniciar al niño en el proceso comparativo que le permita distinguir entre lo cualitativo y lo cuantitativo, donde se entendiera lo cualitativo como conceptos clasificatorios ya que, esta relación está constituida por términos duales como: mas, menos, mayor, menor etc. que acompañaran la cualidad comparada, y en la que uno de los objetos, servirá de referencia para el otro, y finalmente se entiende lo cuantitativo como conceptos métricos, lo cual le permite al niño diferenciar de forma precisa los eventos o sucesos, constituyendo así un primer paso en la introducción de los métricos o numéricos, siendo este el paso siguiente de lo cualitativo lo cual permite introducir los números relativos como nuevos números que presentan relaciones asimétricas y transitivas, que preparan la posterior construcción de enteros y que constituyen un soporte importante para conocimientos matemáticos posteriores.

3.4.2.2. Situación 2: caracterización del número entero.

A continuación se presenta la tabla 9 que contiene la organización de la actividad en la clase para la situación 2.

Grado	**Cantidad de estudiantes**	**Modalidad de trabajo**	**Cantidad de actividades**	**Total preguntas**
5-1	16	Individual	3	8

Tabla 9. *Organización del trabajo en el aula, situación 2*

En general lo que se busca con la situación 2 es caracterizar el concepto de número entero a partir de la representación de los números enteros en la recta numérica, mediante la distancia al cero, la noción de opuesto y la relación de orden, los cuales ayudan a los estudiantes en la compresión de las operaciones matemáticas a desarrollar más adelante, viendo en número entero como punto en la recta y como operador. A continuación, se presenta la tabla 10 donde se muestran los tipos de respuestas obtenidas en la pregunta 1, la cual era:

Pregunta 1: Ayuda al preparador físico a llenar la tabla y ten en cuenta que los valores que están por encima del peso ideal se representaran con el signo más (+) y los que están por debajo se representaran con el signo menos (-) y el jugador C será el punto de referencia puesto que tiene el peso ideal.

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes a partir de la lectura y de la interpretación de la gráfica le dan valores relativos al peso de los jugadores, teniendo en cuenta la diferencia que hay de un valor al el punto de referencia (peso ideal C) para determinar cuánto debe subir o bajar de peso un jugador según el preparador físico, además le asignan el signo que acompaña a esa cantidad.	15
Los estudiantes le asignan valores relativos al peso de los jugadores sin considerar la diferencia que hay de un valor con respecto al peso ya establecido como ideal según el preparador físico	1
Total estudiantes	**16**

Tabla 10. *Tipo de respuestas pregunta 1, actividad 1*

En cuanto a la caracterización del número entero a partir de la representación de los números en a reta, la distancia al cero y los resultados encontrados en la pregunta 1, se aprecia que los estudiantes logran dar valores relativos al peso de los jugadores mediante la comprensión de la lectura y la interpretación de la gráfica, teniendo en cuenta el punto de referencia (peso ideal C) para determinar cuánto debe subir o bajar de peso un jugador y el signo que acompaña a esa cantidad, evidenciando así el uso de la fase 3 expuestas por González et. al. (1999) la cual permite seguir en el proceso de comparación, pero esta vez en niveles más complejos, es decir, pasando del contexto de peso, que hace alusión a la cantidad de masa corporal de un individuo al contexto de número relativo dotándolo de valor.

En la siguiente tabla 11 se presentan los tipos de respuestas obtenidos en la preguntas 2, la cual era:

Pregunta 2: Representa los valores encontrados anteriormente en la recta numérica. (Usa las letras mayúsculas para indicar el número que corresponde a cada una de ellas).

Tipo de respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Los estudiantes realizan la recta horizontal, la dividen en partes iguales ubicando en ella los valores obtenidos en la pregunta 1, de acuerdo a él orden que ocupen en la recta, estos valores los asignan como una correspondencia uno a uno, es decir a cada punto en la recta le asignan un número y una letra distintos.	15
El estudiante realiza la recta horizontal, tratando de realizar la división de esta pero no tiene en cuenta la unidad de medida debe ser igual en toda la recta, expresa en la recta horizontal los valores relativos al peso de los jugadores, pero no relaciona cada valor con la letra correspondiente al jugador, aunque tiene en cuenta el orden de los números en la recta con su respectivo signo y el cero como punto de referencia.	1
Total estudiantes	**16**

Tabla 11. *Tipo de respuestas pregunta 2, actividad 1*

Ahora bien, se observa que los estudiantes logran realizar la transferencia entre la dimensión contextual a la dimensión de recta, mostrando los conocimientos previos que han ido adquiriendo a lo largo de la realización de las actividades propuestas para introducir los números enteros es decir, los estudiantes son capaces de expresar en la recta numérica los valores relativos al peso de los jugadores mostrando las diferencias entre cada uno de estos valores, además de relacionar cada valor con la letra correspondiente al jugador, teniendo en cuenta el orden de los números en la recta, su respectivo signo y el cero relativo como punto de referencia. Como se muestra en la figura 20.

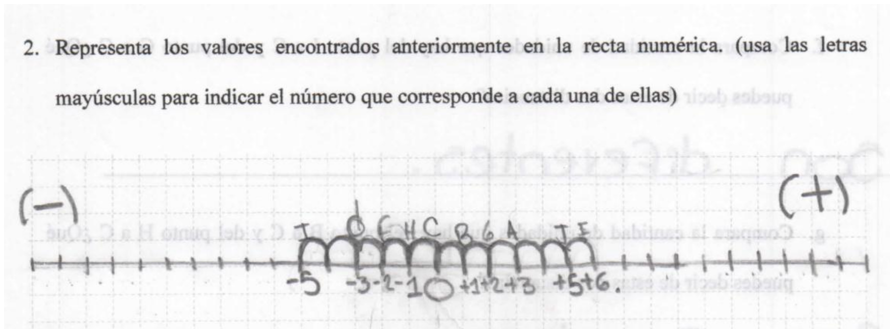


Figura 20. *Peso de los jugadores en la recta.*

La pregunta 3 se dividirá en tres tablas, ya que los ítems de esta pregunta tienen objetivos diferentes, en la tabla 12 se muestran los tipos de respuestas obtenidos en el desarrollo de los ítems de la a hasta la d, los cuales eran:

Pregunta 3: Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto A hasta el punto C?

b. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto D hasta el punto C?

c. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto B?

d. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto C hasta el punto H?

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes se ubican en el punto de referencia dado en la pregunta y se desplazan en la recta realizando saltos teniendo en cuenta la unidad de medida, en otras ocasiones realizan el conteo manual para llegar a hasta el punto c.	10
Los estudiantes se ubican en el punto de referencia dado en la pregunta y realizan el desplazamiento en la recta mediante salto que tienen en cuenta la unidad de medida, hasta llegar al punto de referencia c, pero determinan la distancia en términos de la posición de un número, es decir a la distancia le asignan el signo.	6
Total estudiantes	**16**

***Tabla 12**. Tipo de respuestas pregunta 3, ítems del a hasta el d, actividad 1*

En cuanto a los resultados encontrados en la pregunta tres, ítems de la a hasta la d se puede inferir que la mayoría de los estudiantes tienen en cuenta los puntos de referencia para realizar el conteo de de las unidades y decir cuál es su distancia, entendiendo que la distancia no está relacionada con la posición del número en la recta, mientras que los estudiantes que si asocian esta distancia con el signo lo hacen porque están confundiendo el desplazamiento en la recta con la posición que ocupa el número, esto permite evidenciar una de las dificultades reportadas por González et. al. (1999) y Cid (2003) en el marco teórico donde plantean que La creencia arraigada en la experiencia de cada cual, que identifica el número con cantidad es una dificultad en el aprendizaje de los números enteros donde los números enteros se manejan como si se tratasen de naturales; lo que significa que el signo menos se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que producen muchas respuestas erróneas. Aunque, hay que aclarar que aquí la dificulta no radica en la ausencia del signo sino en la permanencia de este para designar el valor total de un desplazamiento, el cual debe entenderse como algo positivo, ya que el valor absoluto de este siempre será positivo. En las siguientes figuras se presentan los tipos de respuestas planteadas por los estudiantes:

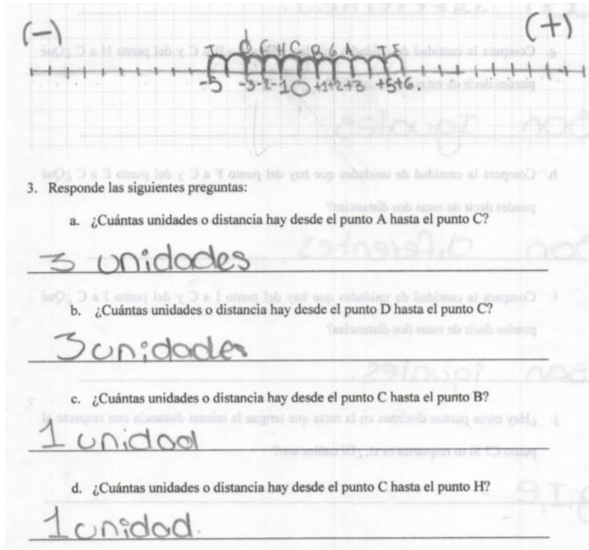


Figura 21. *Estudiantes que no asocian la distancia con el signo.*

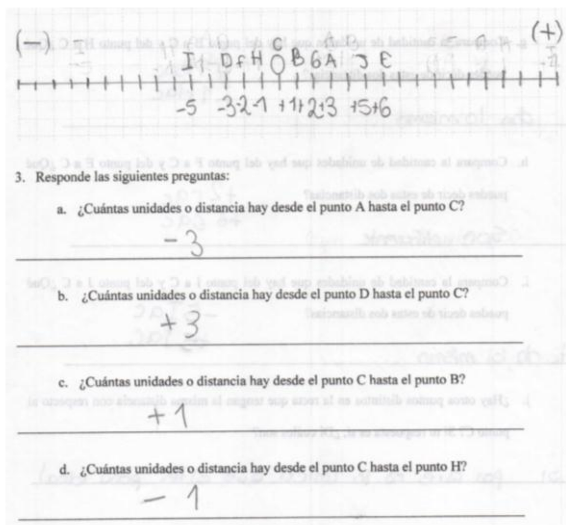


Figura 22*. Estudiantes que asocian la distancia con el signo.*

En la tabla 14 se muestran las repuestas obtenidas en el punto tres y los ítems de la e hasta la i, los cuales eran:

Pregunta 3: Responde las siguientes preguntas:

e. Compara la distancia que hay del punto A a C y del punto D a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

f. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto G a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

g. Compara la distancia que hay del punto B a C y del punto H a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

h. Compara la distancia que hay del punto F a C y del punto E a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

i. Compara la distancia que hay del punto I a C y del punto J a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

Tipo de respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Los estudiantes se ubican en el punto de referencia y realizan el conteo hasta el punto c, realizando el mismo proceso con el otro punto, para luego comparar si las distancian son iguales o no de acuerdo con el desplazamiento realizado en la recta. Finalmente colocan en números el desplazamiento y argumentado con palabras su respuesta (son iguales, no son iguales)	11
Los estudiantes se ubican en el punto de referencia y realizan el conteo hasta el punto c, realizando el mismo proceso con el otro punto, para luego comparar si las distancian son iguales o no de acuerdo con el desplazamiento realizado en la recta. Finalmente colocan el valor del desplazamiento, adicionándole a este el signo que acompaña la cantidad.	3
Los estudiantes no tienen en cuenta los puntos a comparar con respecto al punto de referencia es decir se paran en otros puntos distintos y determinan si estas dos distancias son iguales o distintas.	2
Total estudiantes	**16**

Tabla 13. *Tipo de respuestas pregunta 3, ítems de la e hasta la i, actividad 1*

En los ítems del e al i se puede apreciar que los estudiantes pueden establecer correctamente la comparación entre dos puntos con relación al punto de referencia C, para determinar si el desplazamiento en la recta es el mismo en ambos sentidos. Ahora bien, todavía se evidencia que la dificultad reportada desde González et. al. (1999) y Cid (2003) En el anterior punto la cual hace alusión a confundir la distancia con la posición de un número en la recta, aunque esta dificultad puede también estar asociada al error según lo planteado por Socas (1997) cuando comenta que los errores son juicios o valoraciones que contradicen el conocimiento que se considera como valido, es decir el estudiante establece y da como valido el hecho de que la posición de un número hace referencia a la distancia y por ello continua en círculo vicioso.

Finalmente, en la tabla 14 se presentan los tipos de respuestas obtenidas en el ítem j de la pregunta tres, el cual era:

Pregunta 3: Responde las siguientes preguntas:

j. ¿Hay otros puntos distintos en la recta que tengan la misma distancia con respecto al punto C? Si tu respuesta es sí, ¿Di cuáles son?

Tipo de respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Los estudiantes se ubican en la recta, y a partir de la interpretación que hacen de ella ubicando todos los números, logran determinar que hay otros puntos distintos a los expuestos en la actividad de igual distancia a C y los exponen.	2
Los estudiantes aunque se ubican en la recta que no logran determinar que hay otros puntos distintos a los expuestos en la actividad de igual distancia a C.	14
Total estudiantes	**16**

Tabla 14. *Tipo de respuestas pregunta 3, ítems j, actividad 1*

En cuanto a los resultados obtenidos en el ítem j, se aprecia que los estudiantes no logran reconocer que existen infinitos números con igual distancia la cero o punto de referencia, limitándose solo a los que ven y han expuesto en la recta, manifestando así una dificultad en aprendizaje asociada a los procesos de pensamiento matemático, pues esta dificultad tiene que ver con la capacidad de seguir un argumento lógico, es decir a la deducción lógica que le permite dar argumentos lógicos en un enunciado matemático (Socas, 1997). Aunque los dos estudiantes que sí lograron exponer otros puntos distintos a los expuestos en la actividad, no se expanden a otros números más que a los que están exhibidos dentro del rango planteado en la actividad.

Ahora bien, en la tabla 15 se presentan los tipos de respuestas obtenidas por parte de los estudiantes en la pregunta 1 de la actividad 2, la cual era:

Pregunta 1: Representa en una recta numérica los kilogramos de más y de menos de los nuevos jugadores y los viejos. (Recuerda que el peso ideal se representa con cero en la recta numérica).

Tipo de respuestas	**Cantidad de estudiantes**
Los estudiantes realizan la representación de la recta, algunos designando en ella en la parte superior derecha e izquierda el signo que indica donde deben de ir los números según su signo, luego proceden a dividir la recta en partes iguales conservando siempre la misma unidad de medida y ubican los números en ella según su orden y denotan el cero como punto de referencia en la recta, además relacionan cada valor con un punto en la recta y la letra correspondiente a este.	14
el estudiante realiza la representación de la recta, pero al dividir la recta en partes iguales no conserva la misma unidad de medida aunque, ubica en la recta los números según su orden y denotan el cero como punto de referencia en la recta, además relaciona cada valor con un punto en la recta y la letra correspondiente a este	1
El estudiante realiza la representación de la recta, dividiendo la recta en partes iguales conservando siempre la misma unidad de medida, luego ubica en ella los números según su orden y denotan el cero como punto de referencia en la recta, además relacionan cada valor con un punto en la recta pero a estos no les asigna la letra correspondiente.	1
Total estudiantes	**16**

Tabla 15. *Tipo de respuestas pregunta 1, actividad 2*

De acuerdo con los resultados obtenidos en la pregunta 1 se puede observar que los estudiantes a partir de lo que se realizado en las anteriores actividades han logrado realizar con mayor facilidad la transferencia entre la dimensión contextual a la de recta teniendo en cuenta el orden de los números en la recta, su respectivo signo, el cero relativo como punto de referencia y la unidad de medida, para ubicar cada uno de los valores en la recta con la letra correspondiente al jugador. Esto evidencia lo planteado en el marco teórico con relación a expuesto por Bruno (1997) cundo comenta que las transferencias entre las tres dimensiones permite una visión unificada de los sistemas numéricos y de los procesos que se estén trabajando en el aula de clases, donde introducir los números negativos supone ampliar un sistema numérico A, que los alumnos ya conocen, a un nuevo sistema numérico que lo contiene. De este modo, el estudiante construye nuevos conocimientos que estarán adatados al proceso de aprendizaje de los números enteros.

En cuanto a la pregunta 2 esta se dividirá en dos tablas, ya que los ítems de esta pregunta tienen objetivos diferentes, en la siguiente tabla 16 se muestran los tipos de repuestas obtenidas en los ítems a y b los cuales eran:

Pregunta 2: A partir de la recta numérica que acabas de realizar responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -4 y +4 con respecto al punto 0?
b. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -6 y +6 con respecto al punto 0?

Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes se ubican en la recta y señalan los puntos que les están indicando en la pregunta, de tal forma que estos les permita diferenciar si las distancias a comparar son iguales o no, además justifican su respuesta escribiendo con números cual es la distancia de los puntos al punto de referencia.	4
Los estudiantes se ubican en la recta, señalando los puntos que les están indicando en la pregunta, de tal forma que estos les permita diferenciar si las distancias a comparar son iguales o no, pero escriben cuál es la distancia de cada uno de estos puntos.	9
Los estudiantes se ubican en la recta, señalando los puntos que les están indicando en la pregunta, de tal forma que estos les permita diferenciar las distancias e indicar cuál es su valor, pero no determinan si estas son o no iguales.	3
Total estudiantes	**16**

Tabla 16. *Tipo de respuestas pregunta 2, ítems a y b, actividad 2*

De acuerdo con los resultados obtenidos en la pregunta dos en los ítems a y b se aprecia que cuatro de los dieciséis estudiantes establecen de forma intuitiva a través de la recta que dos números iguales en cantidad pero con distinto signo y estos tienen la misma distancia al punto cero, lo cual se evidencia cuando los estudiantes escriben las distancias de estos puntos con relación al cero y determinan que sus distancias son iguales, por otro lado nueve estudiantes también llegan a la misma conclusión de que las distancias son iguales, pero no escriben el número que corresponde a la distancia, lo cual no está mal pero no evidencia por qué estas dos distancias son iguales. Como se muestra en la figura 23 y 24.

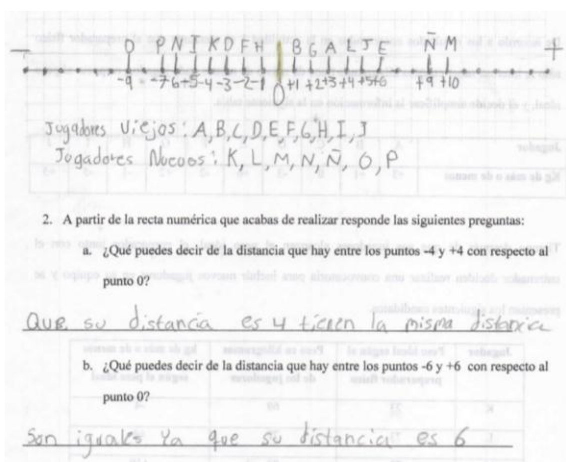


Figura 23. *Valor de la distancia y justificación.*

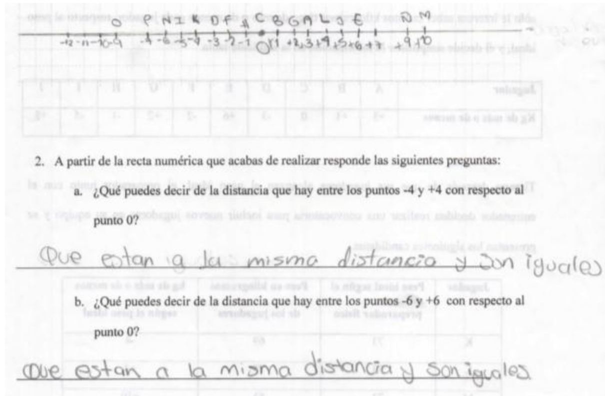


Figura 24. *Justificación de la distancia en términos de igualdad.*

Seguido a esto se tiene que el resto de estudiantes aún no han logrado establecer que dos puntos iguales en cantidad pero con signo distinto tienen la misma distancia con relación al cero, dado que solo establecen cual es la distancia colocando la cantidad de unidades que hay, pero no dicen estas son iguales (ver figura 25), esto evidencia una dificultad reportada por Socas (1997) donde comenta que esta dificultad está ligada al proceso de pensamiento matemático y se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático.

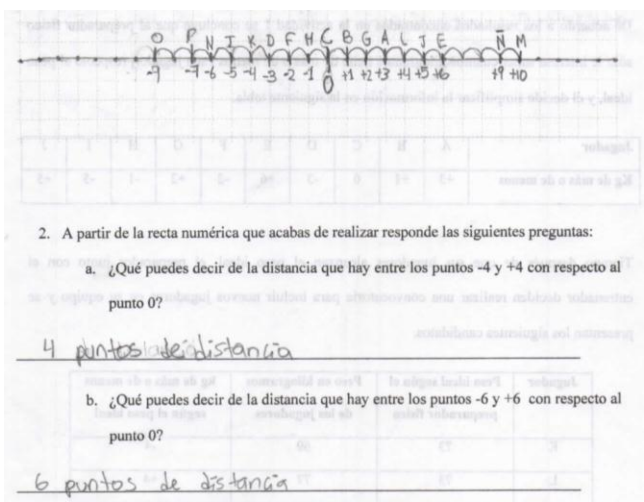


Figura 25. *Estudiantes que determinan la distancia*

En la siguiente tabla 17 se presentan los tipos de respuestas obtenidas en la actividad 2, pregunta 2 ítems c y d los cuales son:

Pregunta 2: A partir de la recta numérica que acabas de realizar responde las siguientes preguntas:

c. ¿Qué número esta a la misma distancia de +10 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta
d. ¿Qué número esta a la misma distancia de -7 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

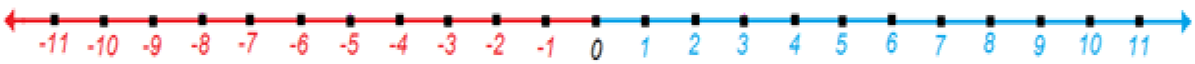
Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes se ubican en la recta, y observan que aunque no están ciertos valores como el -10 representados en la recta, indican que este valor va tener la misma distancia con relación al cero.	15
El estudiante aunque se ubica en la recta establece que no existen otros puntos en la recta que tengan la misma distancia a los puntos establecidos en la pregunta	1
Total estudiantes	**16**

Tabla 17. *Tipo de respuestas pregunta 2, ítems c y d, actividad 2*

En los ítems c y d, los estudiantes no presentan dificultades para determinar e identificar en la recta numérica un número que se encuentre a la misma distancia a él con relación al cero y que tenga signo contrario, lo cual permite decir que los estudiantes de forma implícita han logrado determinar el opuesto de un número con relación al punto cero y su distancia. Lo anterior sustenta lo planteado por Bruno (1997) al mencionar que es posible llegar a la extensión de los números negativos mostrándolos como los opuestos de los números positivos, sin poner énfasis en la creación del conjunto numérico de los enteros.

En la tabla 18 se presentan los tipos de respuestas obtenidas en la pregunta 3 ítems a y d los cuales eran:

Pregunta 3: Teniendo en cuenta el enunciado anterior y usando la siguiente recta numérica, completa los enunciados escribiendo que números hay entre los pares de números dados e indica que pareja de opuestos hay entre ellos, en caso de haberlos.



a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No____

En caso de haberlas di cuales son: ____

Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes ubican en la recta los números establecidos en las preguntas dentro de un intervalo, y proceden a escribirlos en el mismo orden como se encuentran establecidos en la recta, para luego indicar cuáles son las parejas de opuestos que se encuentran en dicho intervalo.	11
Los estudiantes ubican en la recta los números establecidos en las preguntas dentro de un intervalo, y proceden a escribirlos pero en ocasiones no tienen en cuenta el signo que acompaña la cantidad y por ende indican que no existen parejas de opuestos.	5
Total estudiantes	**16**

Tabla 18. *Tipo de respuestas pregunta 3, ítems a, b, c y d, actividad 2*

Se evidencian en los resultados de la pregunta tres que once de los dieciséis estudiantes logran establecer e identificar dentro de un intervalo de números las parejas opuestos, lo cual afirma lo planteado por Navia y Orozco (2012) cuando mencionan que el símbolo menos en la actividad matemática se puede tomar como operador binario para hacer referencia a una operación o como operador unario para determinar o caracterizar el opuesto de un número, resaltando la importancia del cero y la negatividad como elementos fundamentales en la construcción de este concepto. No obstante, se debe tener en cuenta que los estudiantes que no logran determinar las parejas de opuestos, es debido a que se genera una dificultad en el aprendizaje tal como lo plantean Socas (1997) y Cid (2003) en el marco teórico; ya que este tiende a ignorar el signo que le precede al número para determinar su opuesto, al no resaltar la importancia del cero y la negatividad en la construcción de este concepto. Como se muestra a en la siguientes figuras.

a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

2-, -1,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,0,9

Hay algunas parejas de opuestos: Si ✓ No___

En caso de haberlas di cuales son:

-2 y +2, -1 y +1 ya que el resto son solo positivos

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

-9,0,-10 y -11

Hay algunas parejas de opuestos: Si___ No X

En caso de haberlas di cuales son:

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

-11, -10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9,+10,11

Hay algunas parejas de opuestos: Si ✓ No___

En caso de haberlas di cuales son:

-11 y +11, -10 y 10, -9 y 9, -8 y 8, -7 y 7, -6 y 6, -5 y 5, -4 y 4, -3 y 3, -2 y 2, -1 y 1

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

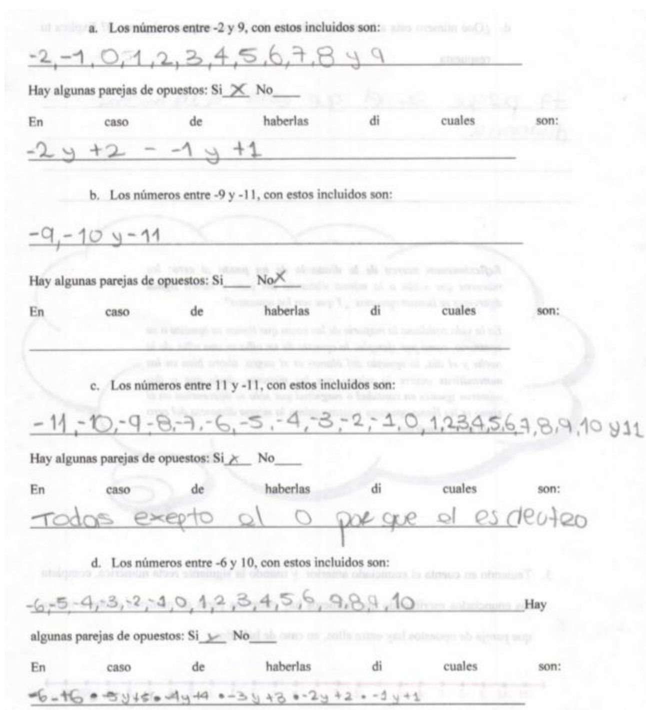
-6 -5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,8,9,+10,0 Hay

algunas parejas de opuestos: Si ✓ No___

En caso de haberlas di cuales son:

-5 y 5, -4 y 4, -3 y 3, -2 y 2, -1 y 1, -6 y 6

Figura 26. *Resultados de la identificación de los números opuestos dentro de un intervalo de números*



a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

-2 y +2 - -1 y +1

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

-9,-10 y -11

Hay algunas parejas de opuestos: Si___ No X

En caso de haberlas di cuales son:

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 y 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

Todos exepto al 0 porque al es neutro

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

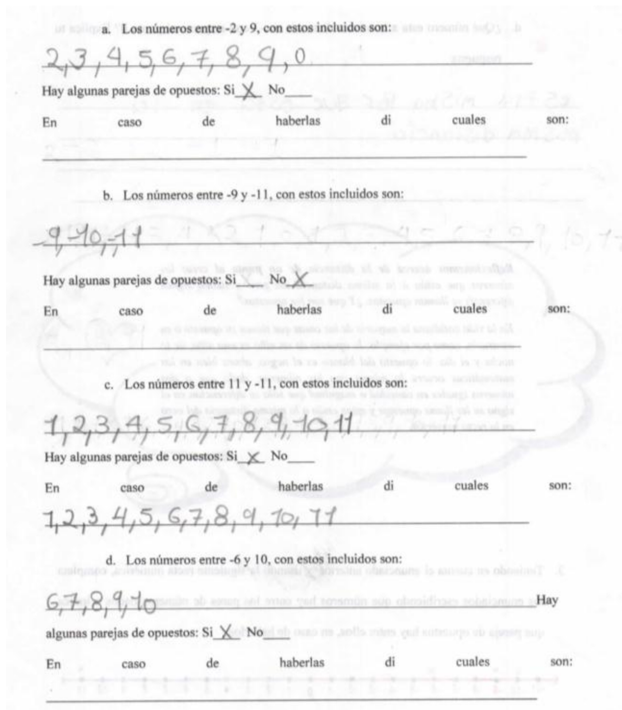
-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 Hay

algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

-6 +6 • -5 y +5 • -4 y +4 • -3 y +3 • -2 y +2 • -1 y +1

Figura 27. *Resultados de la identificación de los números opuestos dentro de un intervalo de números*


a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

9, 10, 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si___ No X

En caso de haberlas di cuales son:

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

6, 7, 8, 9, 10

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No___

En caso de haberlas di cuales son:

Figura 28. *Resultados de estudiantes que no identifican de los números opuestos dentro de un intervalo de números*

En las siguientes tablas se presentan los tipos de respuestas obtenidos en la realización de la actividad 3 de la situación 2. A continuación se presenta la tabla 19, la cual contiene las respuestas obtenidas en la pregunta 1, ítems de la a hasta la g las cuales eran:

Pregunta 1: Teniendo en cuenta la tabla de la actividad 1 y la recta. Responde las siguientes preguntas

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	2	-1	-5	5

a. ¿Entre el jugador B y E, quién está más lejos de llagar a C? ¿y por qué?

b. ¿Entre el jugador I y H, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

c. ¿Entre el jugador F y A, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

d. ¿Entre el jugador G y J, a quién le hace falta menos para bajar y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

e. ¿Entre el jugador D y H, a quién le hace falta subir más de peso y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

f. ¿Entre el jugador B y E, quién tiene más peso y por qué?

g. ¿Entre el jugador D y H, quién tiene más peso y por qué?

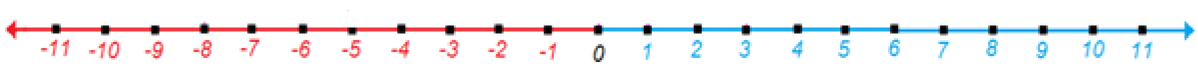
Tipo de respuestas	**Cantidad de estudiantes**
Los estudiantes determinan por medio de la comparación entre dos puntos con respecto al punto de referencia (cero o peso ideal C) y su posición en la recta, la distancia al de cada valor, es decir quien está más cerca o más lejos, a quien le hace falta bajar más o bajar menos para llegar al peso ideal C o el punto cero.	9
Los estudiantes determinan por medio de la comparación entre dos puntos con respecto al punto de referencia (cero o peso ideal C) y su posición en la recta, la distancia al de cada valor, es decir quien está más cerca o más lejos, a quien le hace falta bajar más o bajar menos para llegar al peso ideal C o el punto cero, pero asocian la distancia con el signo (más o menos).	7
Total estudiantes	16

Tabla 19. *Tipo de respuestas pregunta 1, ítems de la a hasta la g, actividad 3*

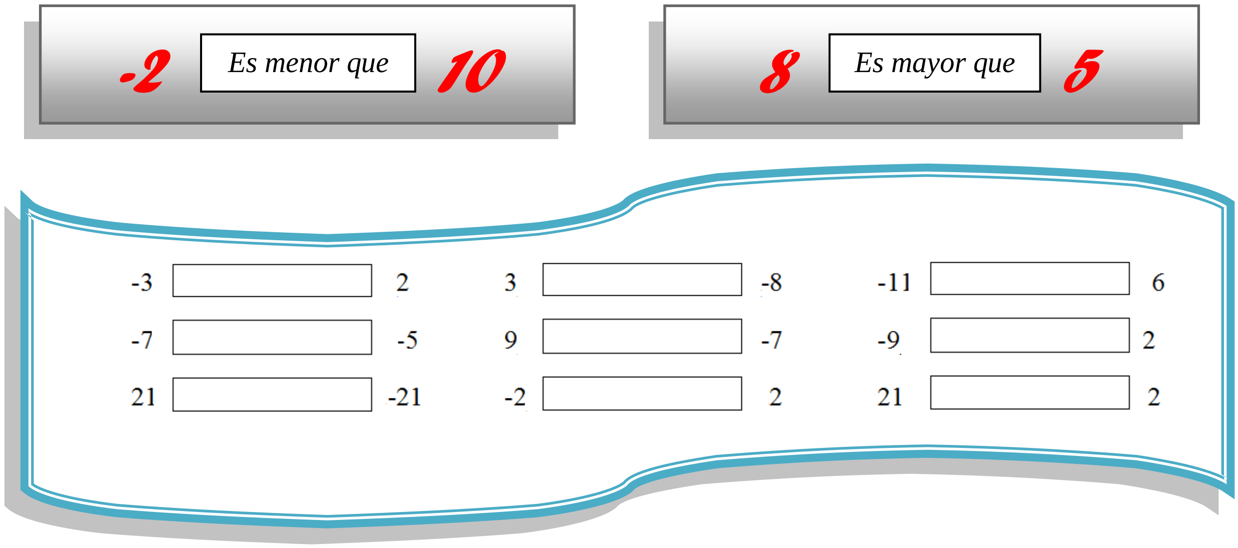
De acuerdo con los resultados encontrados en la pregunta 1 de la actividad 3 y lo que han realizando en actividades anteriores se aprecia que la mayoría de los estudiantes (9 de 16 estudiantes) logran identificar y determinar por medio de la comparación entre dos puntos y su ubicación en la recta, la distancia con relación a punto de referencia C, para concluir cuanto debe subir o bajar de peso un jugador y alcanzar el peso ideal C o quien está más cerca o lejos para llegar a C, logando a través de este tipo de preguntas pasar de la relación-útil a la relación-objeto tal como lo plantea González et. al. (1999) en la fase 2. Ahora bien, con relación a los estudiantes que llegan a la respuesta pero siguen asociando la distancia con el signo, es decir con la posición que ocupa el número en la recta, esto permite mostrar que ya en este punto este "problema" deja de ser una dificultad en el estudiante para convertirse en un obstáculo donde el alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado, pero cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto se generan respuestas inadecuadas, incluso incorrectas y el dominio resulta falso. Es decir, aquí el estudiante se ha quedado en el contexto de la posición que ocupa un número la recta en el cual ha generado un conocimiento valido que ha querido llevar al contexto de distancia.

En la siguiente tabla 20 se presentan los tipos de respuestas obtenidos en la pregunta 2, la cual era:

Pregunta 2: Teniendo en cuenta la reflexión anterior y la recta numérica realiza el siguiente ejercicio.



Rescribe en el recuadro si el número que está al lado izquierdo del otro es mayor o menor según corresponda. Mira los ejemplos



Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes ubican en la recta los puntos a comparar y determinan cuando el número inicial es mayor o menor que el otro, teniendo en cuenta lo expuesto en la reflexión acerca de la posición de un número en la recta.	6
Los estudiantes ubican en la recta los puntos a comparar y determinan cuando el número inicial es mayor o menor que el otro, pero situaciones como -7 y -5 se ignora el signo que precede a la cantidad dando mal la respuesta en otras ocasiones como -9 y 2 se entiende que el número negativo es menor que el positivo.	7
Los estudiantes ubican en la recta los puntos a comparar y determinan cuando el número inicial es mayor o menor que el otro, teniendo en cuenta lo expuesto en la reflexión acerca de la posición de un número en la recta, usando la simbología de mayor qué y menor qué (<, >) para expresar estas cantidades.	3
Total estudiantes	**16**

Tabla 20. *Tipo de respuestas pregunta 2, actividad 3*

En la pregunta 2 de esta actividad lo que se busca es que el estudiante pueda determinar cuando un número es mayor o menor que otro de acuerdo a su posición en la recta, como se ha mencionado en el análisis a preliminares, de acuerdo a los resultados obtenidos de las respuestas dadas por los estudiantes se puede decir que de los dieciséis, seis logran establecer la relación de orden en los números enteros, puesto que al comparar dos números determinan cuando un número es mayor o menor que otro con relación al punto de referencia, teniendo en cuenta el signo y su posición en la recta. Aunque tres estudiantes también lo logran, pero al expresar estas comparaciones no lo hacen de forma escrita como estaba previsto, es decir ellos utilizan los símbolos matemáticos que ya reconocen para referirse cuando una cantidad es mayor o menor que otra (> y <). Ahora bien, cabe señalar que estos nueve estudiantes logran a partir de lo realizado reconocer y establecer algunas diferencias, particularidades y limitaciones entre los números naturales y los números enteros en el caso de la relación de orden, además de realizar conexiones entre las ideas previas y el nuevo conocimiento, tal como lo plantea Bruno (1997).

En cuanto a los estudiantes que no logran del todo terminar cuando un número es mayor o menor que otro, esto se debe a que los estudiantes, aún tienen dificultades en el desarrollo de su aprendizaje, puesto que siguen ignorando el signo que precede a las temperaturas negativas o a cualquier cantidad que represente un número entero, identificado así los números enteros negativos como los números naturales, tal como lo plantea Socas (1997). Esto también se puede justificar desde lo planteado por Cid (2003) cuando comenta que el número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positiva es decir, se reconoce que los enteros negativos son menores que los positivos, pero la relación de orden entre los negativos se establece en el mismo sentido que sus valores absolutos.

3.4.2.3. Situación 3: Adición de números enteros.

A continuación se presenta la tabla 21 que contiene la organización de la actividad en la clase para la situación 3.

Grado	Cantidad de estudiantes	Modalidad de trabajo	Cantidad de actividades	Total preguntas
5-1	16	Individual	1	4

Tabla 21. *Organización del trabajo en el aula, situación 3*

A continuación se presenta las tablas de los tipos de respuestas obtenidas en la situación 3 y sus respectivos análisis. Ahora bien la tabla 22 presenta los tipos de respuestas que corresponden a las preguntas 1, 2 y 3, las cuales eran:

Pregunta 1: Si la rana Clementina empieza a saltar desde la posición -8 avanzando hacia la derecha con saltos pequeños de a una unidad y salta en total 11 unidades en la recta ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

Pregunta 2: Si Clementina la rana empieza a saltar desde la posición 0 y hace su primera parada en la posición -5 y luego decide seguir saltando solo 2 unidades más en la recta en la misma dirección que tenia, ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

Pregunta 3: Si la rana Clementina está en la posición 0 y pega un gran salto hasta la posición 7, pero decide devolverse cuatro unidades en la recta porque se le olvido su cartera ¿A qué distancia esta Clementina desde su nueva posición hasta el origen? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.

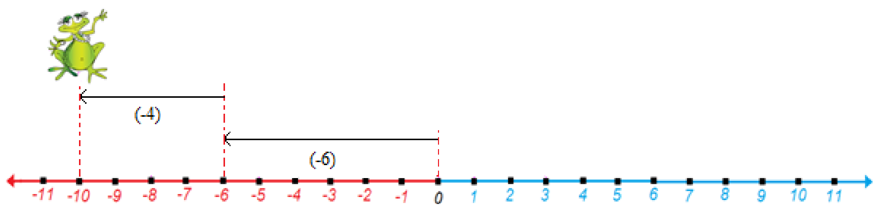
Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes a partir de la situación planteada con la rana Clementina y la interpretación que hacen de esta, representan gráficamente el enunciado, teniendo en cuenta la unidad de medida, el orden de los números enteros y la dirección en que se va hacer el desplazamiento en la recta, para así dar una respuesta adecuada de la nueva posición de la rana Clementina. Este desplazamiento lo realizan por medio de saltos en la recta y flechas que indican donde ha parado la rana, además la mayoría opta por realizar el dibujo de la rana para representar hacia dónde va a mover.	13
Los estudiantes a partir de la situación planteada con la rana Clementina y la interpretación que hacen de esta, representan gráficamente el enunciado, pero no tienen en cuenta la unidad de medida, aunque el orden de los números enteros y la dirección en que se va hacer el desplazamiento en la recta si se tienen en cuanta y por ende da una respuesta de la nueva posición de la rana Clementina pero de forma equivoca. Este desplazamiento lo realizan por medio de saltos en la recta y flechas que indican donde ha parado la rana, además la mayoría opta por realizar el dibujo de la rana para representar hacia dónde va a mover.	3
Total estudiantes	**16**

Tabla 22. *Tipo de respuestas preguntas 1, 2 y 3, actividad 1.*

Según lo que se ha planteado en los análisis preliminares y lo expuesto en el marco teórico en cuanto a las transferencias entre las dimensiones, se aprecia en la tabla 20 que la mayoría de estudiantes logran en la pregunta 1, 2 y 3 realizar la transferencia de la dimensión contextual a la dimensión de recta de forma adecuada, puesto que, en la representación gráfica del enunciado tienen en cuenta la unidad de medida, el orden de los números enteros, la dirección en que se va hacer el desplazamiento en la recta y los puntos de referencia dados en la situación para ubicar los saltos realizados por la rana para determinar así cuál es su nueva posición. Por consiguiente, se logra deducir que la suma en los números enteros se puede ver como la ampliación de la recta en la recta, una traslación a la derecha tantas unidades como indique el número si es positivo, o a la izquierda si es negativo, lo cual es planteado por González et. al. (1999) desde el modelo geométrico.

En la tabla 23 se presentan los tipos de respuestas obtenidos en la pregunta 4 la cual era:

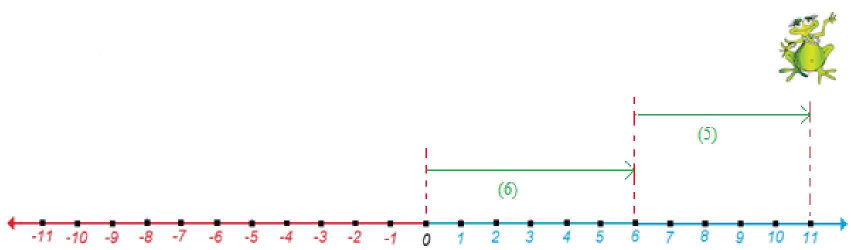
Pregunta 4: Teniendo en cuenta el enunciado anterior, escribe un enunciado con tus propias palabras que represente las siguientes gráficas y realiza una operación matemática que pueda resolver dicho enunciado. (Recuerda que: la rana Clementina siempre inicia desde el origen o el punto cero y finaliza donde está ubicada su figura)

a. 

Situación:

Operación:

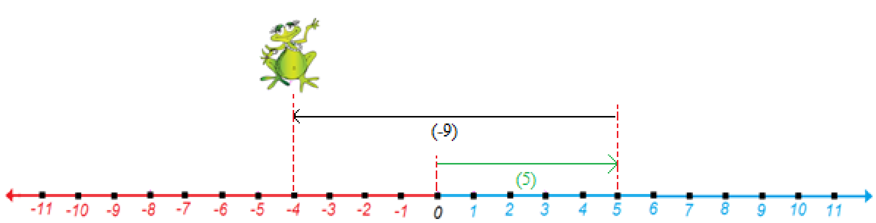
Resultado:

b. 

Situación:

Operación:

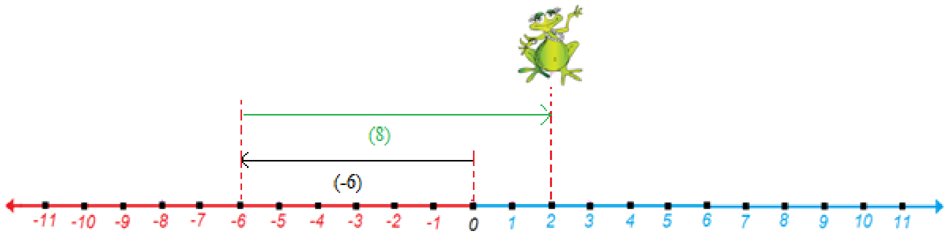
Resultado:

c. 

Situación:

Operación:

Resultado:



d.

Situación:

Operación:

Resultado:

Tipo de respuestas	Cantidad de estudiantes
Los estudiantes de acuerdo a lo que interpretan en el grafico intentan crear una situación que muestre el movimiento del la rana en la recta, esto lo realizan teniendo en cuenta la dirección en la que se desplaza la rana y la cantidad de unidades que hay en cada parada, para luego plantear una operación matemática que haga alusión a lo expuesto por ellos en su enunciado.	12
El estudiante de acuerdo a lo expuesto en el grafico, no logran plantear situaciones que representan la imagen en la recta, ni las operaciones matemáticas que pueden resultar de estas y resuelvan dicha situación, puesto que no tienen en cuenta la dirección y la cantidad de unidades en el que se realiza el desplazamiento desde su posición inicial hasta su punto de llegada.	1
Los estudiantes de acuerdo a lo que interpretan en el grafico intentan crear una situación que muestre el movimiento del la rana en la recta, esto lo realizan teniendo en cuenta la cantidad de unidades que hay en cada parada, es decir son capaces de plantear situaciones que representan la imagen en la recta, pero no logran plantear operaciones que resuelven dicha situación puesto que al plantear el enunciado y la operación ignoran el signo que acompaña la cantidad , dando así una respuesta equivoca.	3
Total estudiantes	**16**

Tabla 23. *Tipo de respuestas pregunta 4, actividad 1.*

Ahora bien, en los resultados obtenidos en la tabla 23 se aprecia que doce estudiantes realizan la transferencia de la dimensión de recta a la dimensión contextual y de esta última a la dimensión abstracta, es decir son capaces de plantear situaciones que representan la imagen en la recta, para luego plantear operaciones que resuelven la situación, todo esto lo realizan teniendo en cuenta la dirección y la cantidad de unidades en el que se realiza el desplazamiento desde su posición inicial hasta su punto de llegada. Lo cual permite inferir que los estudiantes realizaron una aproximación a la operación suma mediante los desplazamientos en la recta. Por ende se reafirma lo planteado por Bruno (1997) cuando menciona que:

> La recta se hace necesaria si se desea trabajar los problemas aditivos con números negativos, ya que en muchos casos, es la ayuda que los alumnos necesitan para llegar a plantear y comprender las operaciones. Por otro lado, no parece adecuado utilizar la recta desconectada de las situaciones concretas. (p. 17)

En cuanto a los que “no logran” realizar las transferencias en su totalidad, es decir solo realizan la transferencia entre la dimensión de recta a la dimensión contextual, pero no de la dimensión contextual a la abstracta esto se debe a que ignoran el signo ya que no tienen en cuenta la dirección y la cantidad de unidades en el que se realiza el desplazamiento desde su posición inicial hasta su llegada.

3.5. Algunas conclusiones de la implementación

A partir de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula y el análisis de estos se puede concluir que:

- Los estudiantes mostraron una buena acogida al trabajo que se realizó para la transferencia de la dimensión contextual a la de recta y viceversa, dado que, en las situaciones relativas se identifican algunos términos duales como por ejemplo: izquierda-derecha, lejos-cerca, más-menos, entre otro. En este sentido, los resultados obtenidos permiten evidenciar que se logra iniciar al niño en el proceso comparativo que le permite distinguir entre lo cualitativo y lo cuantitativo, lo cual es planteado por González et al. (1999) y permite concluir que la representación de las situaciones concretas en la recta favorece a la comprensión de los números enteros.

- Se aprecia en el desarrollo de las situaciones que persiste uno de los problemas presentes en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, el cual está relacionado con el signo que acompaña la cantidad, puesto que en algunas ocasiones se tiende a ignorarlo y genera un error en el estudiante ya que, si se habla de cantidades negativas el estudiante las va identificar como cantidades positivas o como números naturales. Otro aspecto importante, que no se puede dejar de lado y que se evidenció de manera frecuente en los resultados obtenidos de las actividades es la tendencia a dejar expresado el signo aunque la consigna de la pregunta haga referencia a la distancia es decir, que se genero una confusión entre la posición de un número con la distancia al cero. En este sentido se propone para una futura propuesta analizar con mayor detenimiento el concepto de magnitud y sus implicaciones para definir el valor absoluto de un número, lo cual podría hacerse en los años siguientes de la escolaridad.

- En las actividades propuestas dentro de la situación didáctica aplicada se logró una aproximación a la caracterización del número entero, a través del concepto de opuesto, la relación de orden y la distancia al cero, haciendo uso del número relativo, para pasar de la relación-útil a la relación-objeto y finalmente ver el número relativo como objeto contextualizado.

- A raíz de lo trabajado en las distintas actividades planteadas dentro la situación didáctica se observa que estas suscitaron en los estudiantes estrategias que permiten comprender y resolver los problemas llegando a las soluciones de estos. Además estas actividades les permiten crear nuevas situaciones que ayudan en la aproximación del concepto de suma, planteando un algoritmo matemático como fue el caso de inventar una situación de la rana Clementina que evidenciara lo expuesto en la recta. Otro aspecto importante que se evidenció en el desarrollo de las situaciones, es que estas provocaron en los estudiantes una actitud receptiva, aportando a un aprendizaje significativo y comprensivo del objeto matemático trabajado.

- En la metodología que se empleo para el desarrollo de las actividades en el aula de clases, se rescata el trabajo en parejas, ya que les permitió debatir y reflexionar acerca de los resultados obtenidos y de esta manera, el quehacer matemático cobrara sentido en la medida en que estos resultados se dotan de argumentos o razones coherentes validadas con el conocimiento previo. De este modo, es pertinente resaltar el trabajo en equipo dentro del aula de clases ya que permitió un aprendizaje significativo.

- La presentación del objeto matemático que se abordo en la propuesta aplicada, la cual se realizó a través de actividades organizadas de forma estructurada y concatenadas entre sí, permitió a los estudiantes pasar de un nivel básico a uno más complejo, es decir pasar del número relativo como relación en contextos, al número entero con una aproximación la operación suma. Ahora bien, es importante resaltar que a pesar que la propuesta no concluye con actividades que permitan evaluar el proceso específico del aprendizaje de los números enteros, se trató de introducir, conceptualizar y formalizar este concepto, por medio de actividades que desde lo contextual llevaran a lo abstracto, en algunos casos pasando por la dimensión de recta.

Capítulo 4. Conclusiones finales

Después de culminar las fases estipuladas para este trabajo, acorde al proyecto presentado que buscaba lograr los objetivos planteados y dar cuenta del diseño y aplicación de una propuesta de aula que permitiera favorecer la extensión de los números naturales a los números enteros desde la visión unitaria de Bruno (1997) y la propuesta de González et al. (1999), la cual iba dirigida a estudiantes de grado 5º de la Educación Básica Colombiana, se pueden concluir los siguientes aspectos:

- El objetivo principal de el presente trabajo de grado se logra, en la medida que se consigue favorecer a través de una serie de actividades dentro de una propuesta de aula, una aproximación a la noción de número entero a través del número natural, dado que, el desarrollo de estas actividades permiten dar cuenta de los contenidos matemáticos que estuvieron en juego en cada una de las situaciones planteadas en un ambiente exploratorio, ya que algunos estudiantes pudieron dar sentido y significado a estos conceptos matemáticos que intervienen en cada una de estas, y donde los resultados obtenidos en su mayoría satisfacen lo esperado en cuanto a interpretación, procedimientos y superación de dificultades reportadas en el marco teórico.

- En este trabajo fue necesario identificar desde algunos referentes teóricos elementos conceptuales y procedimentales que dieran cuenta de algunas de las dificultades, errores y obstáculos con relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero, dado que estos aspectos permitieron tener mayor claridad sobre las situaciones que se pueden presentar en la escuela en torno al desarrollo de las actividades y en el aprendizaje del concepto de número entero. Y adicional a esto, la identificación de los aspectos mencionados también ayuda a validar estos procesos desde las perspectivas histórica, matemática, didáctica y curricular, en el momento de llevarlos al aula.

- El trabajo de grado permite integrar los aspectos matemáticos, curriculares y didácticos en el diseño de la propuesta de aula y el desarrollo de su implementación en el aula de clases. Desde lo matemático se integran los conceptos de opuesto, la distancia al cero, relación de orden, el número relativo y la estructura aditiva; en cuanto al aspecto curricular se integra a partir de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) desde los procesos generales tales como el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, los conocimientos básicos contenidos en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos; el contexto inmediato o de aula además del contexto extraescolar o sociocultural, ahora bien desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para el grado 5º se relaciona con la coherencia horizontal y la coherencia vertical. Y por consiguiente, estas relaciones permite verificar la presencia de algunas de las dificultades, obstáculos y errores reportados en el marco teórico.

- La realización del trabajo de grado permite reconocer la importancia de introducir los números enteros desde los primeros años de escolaridad, ya que los estudiantes reflejan antecedentes importantes en la asociación de conceptos matemáticos, donde estos conocimientos se pueden aprovechar para realizar un acercamiento a los números enteros, desde el número relativo, donde los estudiantes transfieren algunas relaciones y propiedades de los naturales a los enteros. En este sentido, se observa que los estudiantes a través de los números relativos, los naturales y el trabajo realizado con la recta numérica logran realizar un acercamiento a los números enteros y a la operación suma.

- La realización de este trabajo de grado a través de los referentes teóricos permitió constatar algunas de las problemáticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros en la escuela, además de la importancia que tienen los conocimientos previos en la construcción de este concepto matemático, es por esta razón que consideramos que este trabajo puede ser un aporte en la construcción de este concepto, por medio de actividades lúdicas de trabajo en equipo e individual, tratando de encontrar la forma en el que el abordaje de este concepto sea más amigable y secuenciado para los estudiantes.

- La culminación del presente trabajo de grado aporta a una reflexión desde la Didáctica de las Matemáticas para la formación de profesores, dado que ofrece una propuesta alternativa para la introducción de números enteros en grado 5º de la Educación Básica, y de esta manera, queda abierta la discusión de cómo articular o dar coherencia vertical u horizontal desde los distintos tipos del pensamiento matemático, que eviten de cierta forma la fragmentación los conceptos matemáticos por grados y tiempos, lo cual es una de las mayores problemáticas que aún enfrentan los procesos educativos alrededor de las matemáticas.

Referencias

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Revista de didáctica de las matemáticas,* (29), 5-18

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. La *Gaceta. 4* (2), 415-428

Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C. y Serrano, C. (2003). *ALFA 7 con estándares.* Bogotá, Colombia: Norma.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.

Chica, N. (2011). *Propuesta de intervención pedagógica para comprender el significado del número entero*. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, Colombia.

González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1999). Números Enteros. *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. pp. 27-157. Madrid: Síntesis, S.A.

Gómez, A. y Sánchez, A. (2008). *Los conjuntos numéricos: algunas reflexiones desde el marco curricular y conceptual.* Universidad del Valle, Colombia.

Hrbacek, K., y Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. CrcPress.

Hernández, M. (2010). Evolución histórica del concepto de número. *Autodidacta*, *1*(1), 28-47

Iriarte, M., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma.* (7), 3-18

MEN, (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia: Ed. MEN

MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. (pp. 46 -94). Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia. Ed. MEN

Navia, N., y Orozco, V. (2012). *Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la Educación Básica*. Universidad del valle, Colombia.

Ordoñez, L. y Chavarro, M. (2012). *Un análisis de las obras matemáticas propuestas en la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).* Universidad del valle, Colombia.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Schubring, G. (2012). *Os números negativos–exemplos de obstáculos epistemológicos?.* Rio de Janeiro, Brasil: LIMC-UFRJ

Suárez, M. F., (1994). Los números enteros. *Elementos de álgebra* (pp. 9 - 12). Universidad del valle.

Anexos: algunas producciones de los estudiantes.

Serlin Yoana Tolosa - Samria Yulieth Rosales

Presentación de Secuencia Didáctica a aplicar.

Situación 1: Aproximación al número entero a través del número relativo
Desempeños: • Expresar con números relativos información acerca de la cantidad de una magnitud, a partir de una referencia. • Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta

"LA HISTORIA DE PEDRITO"

Había una vez un par de amigos llamados Luis y Ana, se conocieron en el año 1965, al pasar 7 años de ser amigos se casaron y 3 años después nace su hermoso hijo Pedrito, el cual llenó de alegría y amor su hogar. Pedrito inicia sus estudios cuando tenía 4 años de edad, allí conoce a muchos amigos. A Pedrito le encantan los parques mecánicos y su juego favorito es el carrusel porque le parecen divertidos los caballos, para celebrar su séptimo cumpleaños sus padres lo llevaron al mejor parque de la ciudad. Tiempo después nace su hermanita valentina en el año 1990. Un día Pedrito le pregunta a su padre como conoció a su hermosa madre, y Luis le cuenta que se conocieron en la universidad y se hicieron novios cinco años después de conocerse, justo el día en el que ambos se graduaron el de veterinario y ella de enfermera. Finalmente, Pedrito les da un abrazo a sus padres porque se siente el niño más afortunado.

$$\begin{array}{r} 1965 \\ +\ 7 \\ \hline 1972 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1972 \\ +\ 3 \\ \hline 1975 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1975 \\ +\ 4 \\ \hline 1979 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1975 \\ +\ 7 \\ \hline 1982 \end{array}$$

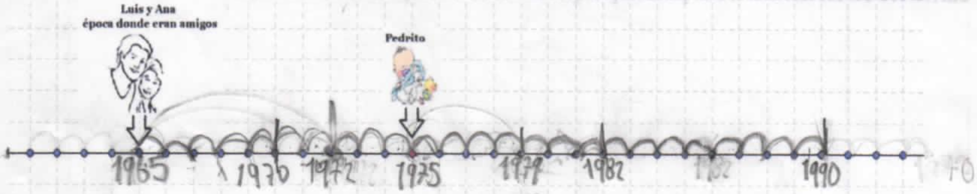
$$\begin{array}{r} 1965 \\ +\ 5 \\ \hline 1970 \end{array}$$

Actividad 1: Usando números enteros en la línea recta con acontecimientos importantes de la vida de Pedrito.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** Parejas

1. Con la ayuda de tu compañero, realiza una lista con los acontecimientos importantes de la vida de Pedrito y representa esos momentos con años. Usa la siguiente tabla para escribirlos.

Año	Acontecimiento
1965	Se conocieron luis y Ana
1972	Se casaron
1975	nacio Pedrito
1979	pedrito inicio sus estudios
1982	Pedrito cumple años
1.990	nacio la hermana de pedrito
1.970	Se hicieron novios [illegible]

2. Usen la recta horizontal que se da a continuación, en donde cada separación equivale a un año en la historia (unidad de medida) y ubiquen en ella los eventos más importantes de Pedrito y su familia antes y después de que él naciera.

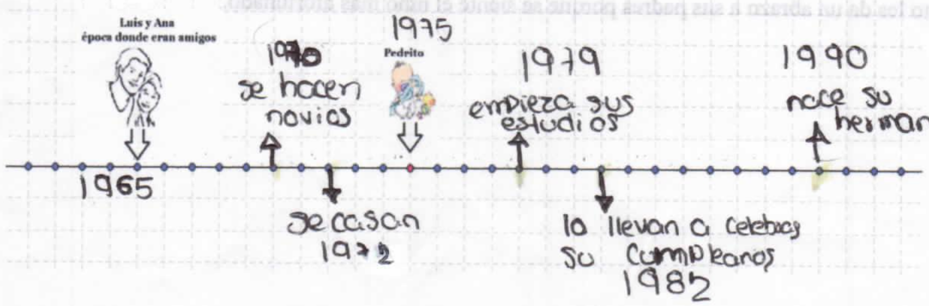


Actividad 1: Usando números enteros en la línea recta con acontecimientos importantes de la vida de Pedrito.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** Parejas

1. Con la ayuda de tu compañero, realiza una lista con los acontecimientos importantes de la vida de Pedrito y representa esos momentos con años. Usa la siguiente tabla para escribirlos.

Año	Acontecimiento
1965	Se Conocieron luis y ana en la universidad
1972	Se casaron despues de ser novios
1975	Nacio Pedrito
1979	Empezo sus estudios
1982	lo llevan a celebrar su cumpleaños a un parque de diverciones
1990	8 años despues nace su hermano valentina
1970	Los Padres de Pedro se hacen novios

2. Usen la recta horizontal que se da a continuación, en donde cada separación equivale a un año en la historia (unidad de medida) y ubiquen en ella los eventos más importantes de Pedrito y su familia antes y después de que él naciera.



A partir de la recta horizontal que acaban de completar respondan las preguntas 3, 4 y 5

3. ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?

R/17 años

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

R/ 3 años

5. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

R/ 25 años

6. Realicen una nueva recta horizontal que se llamará recta numérica, en la mitad ubiquen el nacimiento de Pedrito y representen su nacimiento con el cero, luego ubiquen con números los siguientes sucesos de la vida de Pedrito antes y después de su nacimiento que se indican en la siguiente lista. (Nota: A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más, además usa de una escala adecuada, es decir, que las subdivisiones de la recta deben ser de igual tamaño o medida)

A partir de la recta horizontal que acaban de completar respondan las preguntas 3, 4 y 5

3. ¿Cuántos años transcurrieron desde que los padres de Pedrito se conocieron hasta el cumpleaños de Pedrito?

1982 -
1965
0017

total: 17 AÑOS

4. ¿Cuántos años hay de diferencia entre la edad en que Pedrito inicio sus estudios y la edad en que lo llevaron al parque de diversiones?

1982 -
1979
0003

total: 3 AÑOS

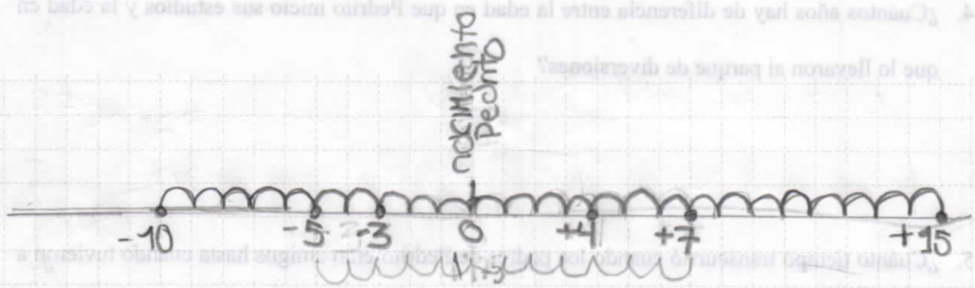
5. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando los padres de Pedrito eran amigos hasta cuando tuvieron a su hija Valentina?

1990 -
1965
0025

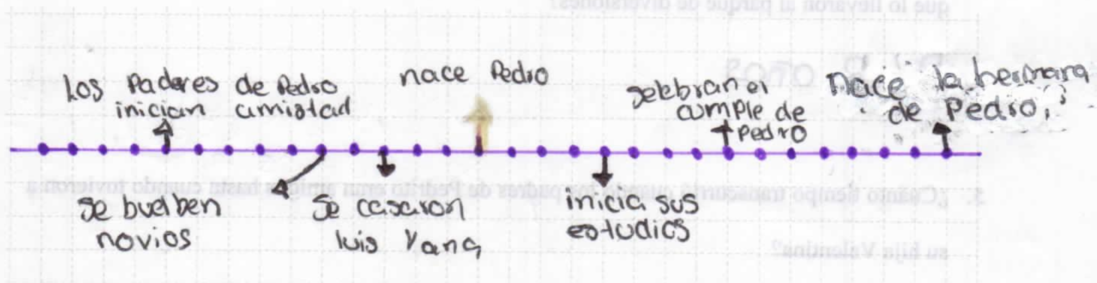
total: 25 AÑOS

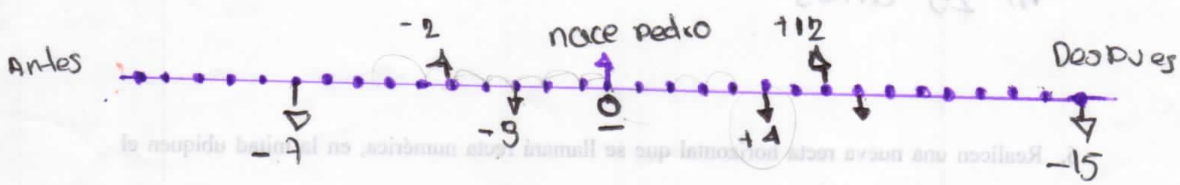
6. Realicen una nueva recta horizontal que se llamará recta numérica, en la mitad ubiquen el nacimiento de Pedrito y representen su nacimiento con el cero, luego ubiquen con números los siguientes sucesos de la vida de Pedrito antes y después de su nacimiento que se indican en la siguiente lista. (Nota: A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más, además usa de una escala adecuada, es decir, que las subdivisiones de la recta deben ser de igual tamaño o medida)

- Luis y Ana se casaron tres años antes de que naciera Pedrito
- Cuatro años después del nacimiento de Pedrito el inicia sus estudios
- Doce años después de que Ana y Luis eran novios Pedrito celebra su séptimo cumpleaños
- Siete años antes de que se casaran los padres de Pedrito ellos inician su amistad
- Quince años después del nacimiento de Pedrito nace su hermana Valentina



- Luis y Ana se casaron tres años antes de que naciera Pedrito
- Cuatro años después del nacimiento de Pedrito el inicia sus estudios
- Doce años después de que Ana y Luis eran novios Pedrito celebra su séptimo cumpleaños
- Siete años antes de que se casaran los padres de Pedrito ellos inician su amistad
- Quince años después del nacimiento de Pedrito nace su hermana Valentina



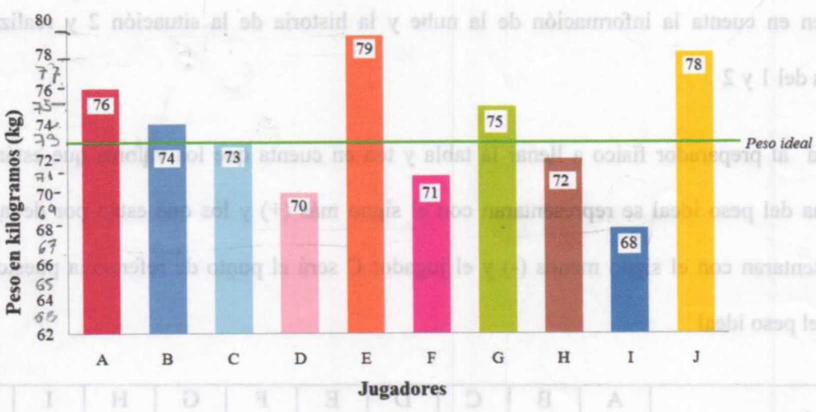


Ayda tatiana lara valencia

Situación 2: Caracterización del número entero
Desempeños:
• Identificar y reconocer propiedades que caractericen el número entero resolviendo ejercicios y problemas en contexto.
• Pasar de la dimensión contextual a la dimensión de recta

"EL PESO IDEAL PARA ESTAR EN EL EQUIPO DE FÚTBOL"

El preparador físico de un equipo de fútbol realiza el control de peso de diez de sus jugadores cuando regresan de vacaciones. Para tal fin elabora un diagrama con el peso de cada uno de sus jugadores y el destaca con una línea de color verde, el peso que considera ideal para sus jugadores.



Como el preparador físico sólo le interesa saber cuántos kilogramos tiene de más o de menos cada jugador, respecto al peso ideal, decide simplificar la información en una tabla.

<table>
<tr><td colspan="4">Actividad 1: Acerquémonos a los números enteros mediante su representación en la recta y la distancia al cero.</td></tr>
<tr><td>Grado: 5º</td><td>Cantidad de estudiantes: 16</td><td>Tiempo de la actividad: 45 min.</td><td>Modalidad: individual</td></tr>
</table>

Para tener en cuenta: *Los números pueden ser positivos o negativos, los positivos llevan delante el signo más (+), los negativos llevan delante el signo menos (-) y el cero es el único número que no es ni positivo ni negativo.*

Nota: Ten en cuenta la información de la nube y la historia de la situación 2 y realiza las preguntas del 1 y 2

1. Ayuda al preparador físico a llenar la tabla y ten en cuenta que los valores que están por encima del peso ideal se representaran con el signo más (+) y los que están por debajo se representaran con el signo menos (-) y el jugador C será el punto de referencia puesto que tiene el peso ideal

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	+2	-1	-5	+5

Actividad 1: Acerquémonos a los números enteros mediante su representación en la recta y la distancia al cero.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

Para tener en cuenta: *Los números pueden ser positivos o negativos, los positivos llevan delante el signo más (+), los negativos llevan delante el signo menos (-) y el cero es el único número que no es ni positivo ni negativo.*

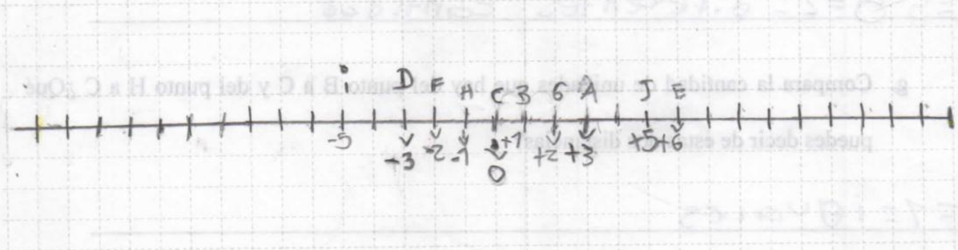
Nota: Ten en cuenta la información de la nube y la historia de la situación 2 y realiza las preguntas del 1 y 2

1. Ayuda al preparador físico a llenar la tabla y ten en cuenta que los valores que están por encima del peso ideal se representaran con el signo más (+) y los que están por debajo se representaran con el signo menos (-) y el jugador C será el punto de referencia puesto que tiene el peso ideal

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	+2	-1	-5	+5

Sebastian Palomino Gomez

2. Representa los valores encontrados anteriormente en la recta numérica. (usa las letras mayúsculas para indicar el número que corresponde a cada una de ellas)



3. Responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto A hasta el punto C?

   3 unidades

   b. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto D hasta el punto C?

   3 unidades

   c. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto C hasta el punto B?

   1 unidades

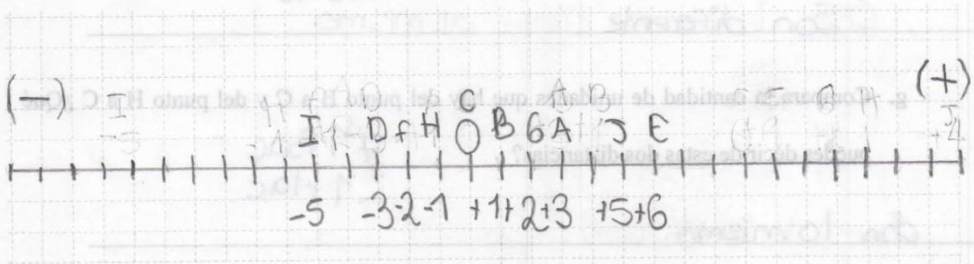
   d. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto C hasta el punto H?

   1 unidades

   e. Compara la cantidad de unidades que hay del punto A a C y del punto D a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

   3 - 3 son iguales

2. Representa los valores encontrados anteriormente en la recta numérica. (usa las letras mayúsculas para indicar el número que corresponde a cada una de ellas)



3. Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto A hasta el punto C?

−3

b. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto D hasta el punto C?

+3

c. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto C hasta el punto B?

+1

d. ¿Cuántas unidades o distancia hay desde el punto C hasta el punto H?

− 1

e. Compara la cantidad de unidades que hay del punto A a C y del punto D a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

+3 A a C
−3 D a C

dan lo mismo pero [illegible] diferente signo

f. Compara la cantidad de unidades que hay del punto I a C y del punto G a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

I=5 5=2= diferentes cantidad

g. Compara la cantidad de unidades que hay del punto B a C y del punto H a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

1=1= iguales

h. Compara la cantidad de unidades que hay del punto F a C y del punto E a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

2=6= diferentes

i. Compara la cantidad de unidades que hay del punto I a C y del punto J a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

5=5= iguales

j. ¿Hay otros puntos distintos en la recta que tengan la misma distancia con respecto al punto C? Si tu respuesta es sí, ¿Di cuáles son?

Si -6,+6,-4,+4,

f. Compara la cantidad de unidades que hay del punto I a C y del punto G a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

Son diferentes.

g. Compara la cantidad de unidades que hay del punto B a C y del punto H a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

Son Iguales

h. Compara la cantidad de unidades que hay del punto F a C y del punto E a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

Son diferentes.

i. Compara la cantidad de unidades que hay del punto I a C y del punto J a C ¿Qué puedes decir de estas dos distancias?

son iguales.

j. ¿Hay otros puntos distintos en la recta que tengan la misma distancia con respecto al punto C? Si tu respuesta es sí, ¿Di cuáles son?

g, I, e

Valeria Gonzalez Rivera Grado 5-1

Actividad 2: Acerquémonos a los números enteros mediante la noción de opuesto.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

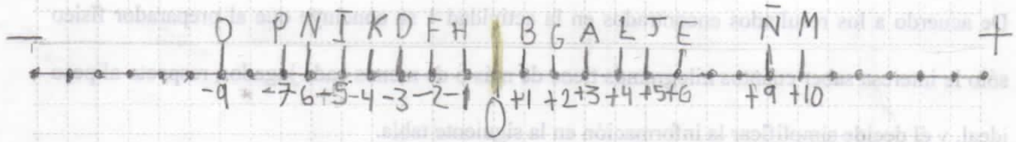
De acuerdo a los resultados encontrados en la actividad 1 se concluye que al preparador físico sólo le interesa saber cuántos kilogramos tiene de más o de menos cada jugador, respecto al peso ideal, y él decide simplificar la información en la siguiente tabla.

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	+2	-1	-5	+5

Tiempo después de que sus jugadores alcanzan el peso ideal, el preparador junto con el entrenador deciden realizar una convocatoria para incluir nuevos jugadores en su equipo y se presentan los siguientes candidatos.

Jugador	**Peso ideal según el preparador físico**	**Peso en kilogramos de los jugadores**	**kg de más o de menos según el peso ideal**
K	73	69	-4
L	73	77	+4
M	73	83	+10
N	73	67	-6
Ñ	73	82	+9
O	73	64	-9
P	73	66	-7

1. Representa en una recta numérica los kilogramos de más y de menos de los nuevos jugadores y los viejos. (Recuerda que el peso ideal se representa con cero en la recta numérica)



Jugadores Viejos: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
Jugadores Nuevos: K, L, M, N, Ñ, O, P

2. A partir de la recta numérica que acabas de realizar responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -4 y +4 con respecto al punto 0?

Que su distancia es 4 tienen la misma distancia

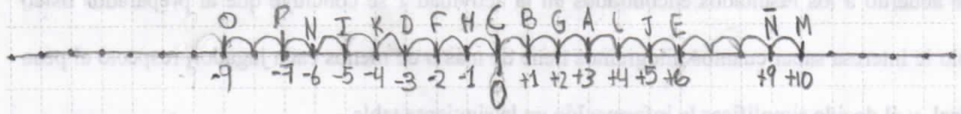
   b. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -6 y +6 con respecto al punto 0?

Son iguales ya que su distancia es 6

   c. ¿Qué número esta a la misma distancia de +10 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

-10 ya que No esta en la recta pero sigue siendo el mismo Número y la recta es infinita.

1. Representa en una recta numérica los kilogramos de más y de menos de los nuevos jugadores y los viejos. (Recuerda que el peso ideal se representa con cero en la recta numérica)



2. A partir de la recta numérica que acabas de realizar responde las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -4 y +4 con respecto al punto 0?

4 puntos de distancia

   b. ¿Qué puedes decir de la distancia que hay entre los puntos -6 y +6 con respecto al punto 0?

6 puntos de distancia

   c. ¿Qué número esta a la misma distancia de +10 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

-10 porque se pueden aumentar mas numeros por que es infinita.

d. ¿Qué número esta a la misma distancia de -7 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

el +7 por que asi como -7 es el Negativo se puede poner el +7 por que el Fragmento positi-vo de la recta deja 2 espacios por rellenar que son el +7 y el +8 y en el negativo el -8.

Reflexionemos acerca de la distancia de un punto al cero: *los números que están a la misma distancia del cero y tienen signos diferentes se llaman opuestos. ¿Y que son los opuestos?*

En la vida cotidiana la mayoría de las cosas que tienen su opuesto o su contrario, como por ejemplo: lo opuesto de un niño es una niña, de la noche y el día, lo opuesto del blanco es el negro, ahora bien en las matemáticas ocurre lo mismo con los números, dado que a dos números iguales en cantidad o magnitud que solo se diferencian en el signo se les llama opuestos y estos están a la misma distancia del cero en la recta numérica.

3. Teniendo en cuenta el enunciado anterior y usando la siguiente recta numérica, completa los enunciados escribiendo que números hay entre los pares de números dados e indica que pareja de opuestos hay entre ellos, en caso de haberlos.

d. ¿Qué número esta a la misma distancia de -7 con respecto al punto 0? Explica tu respuesta

+7 porque es el que esta a la misma distancia

__Reflexionemos acerca de la distancia de un punto al cero:__ los números que están a la misma distancia del cero y tienen signos diferentes se llaman opuestos. ¿Y que son los opuestos?

En la vida cotidiana la mayoría de las cosas que tienen su opuesto o su contrario, como por ejemplo: lo opuesto de un niño es una niña, de la noche y el día, lo opuesto del blanco es el negro, ahora bien en las matemáticas ocurre lo mismo con los números, dado que a dos números iguales en cantidad o magnitud que solo se diferencian en el signo se les llama opuestos y estos están a la misma distancia del cero en la recta numérica.

3. Teniendo en cuenta el enunciado anterior y usando la siguiente recta numérica, completa los enunciados escribiendo que números hay entre los pares de números dados e indica que pareja de opuestos hay entre ellos, en caso de haberlos.

a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son:

-2 y +2 - -1 y +1

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

-9, -10 y -11

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No X

En caso de haberlas di cuales son:

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son:

Todas exepto el 0 porque el es deutro

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Hay algunas parejas de opuestos: Si X No____

En caso de haberlas di cuales son:

-6 - +6 • -5 y +5 • -4 y +4 • -3 y +3 • -2 y +2 • -1 y +1

a. Los números entre -2 y 9, con estos incluidos son:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Hay algunas parejas de opuestos: Si_X_ No____

En caso de haberlas di cuales son:

____

b. Los números entre -9 y -11, con estos incluidos son:

-9, -10, -11

Hay algunas parejas de opuestos: Si____ No_X_

En caso de haberlas di cuales son:

____

c. Los números entre 11 y -11, con estos incluidos son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Hay algunas parejas de opuestos: Si_X_ No____

En caso de haberlas di cuales son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

d. Los números entre -6 y 10, con estos incluidos son:

6, 7, 8, 9, 10

Hay algunas parejas de opuestos: Si_X_ No____

En caso de haberlas di cuales son:

____

Valeria Gonzalez Rivera 5-1

Actividad 3: Acerquémonos a los números enteros mediante la relación de orden.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

1. Teniendo en cuenta la tabla de la actividad 1 y la recta. Responde las siguientes preguntas

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	2	-1	-5	5

a. ¿Entre el jugador B y E, quién está más lejos de llagar a C? ¿y por qué?

El E ya que le faltan 5 casillas para llegar mientras el B una casilla

b. ¿Entre el jugador I y H, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

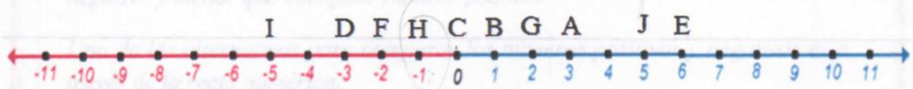
el h ya que sdo le falta una casilla para llegar a la C mientras a la I le f-altan 7 casillas.

Sebastian Palomino Gómez

Actividad 3: Acerquémonos a los números enteros mediante la relación de orden.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

1. Teniendo en cuenta la tabla de la actividad 1 y la recta. Responde las siguientes preguntas

Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Kg de más o de menos	+3	+1	0	-3	+6	-2	2	-1	-5	5



a. ¿Entre el jugador B y E, quién está más lejos de llagar a C? ¿y por qué?

La e porque el jugador B le falta -1 y A el jugador E le falta 6 para alcanzar al jugador C.

b. ¿Entre el jugador I y H, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

El H porque le falta +1 para alcanzar al jugador C y al I le falta +5

Sebastian Palomino Gómez

c. ¿Entre el jugador F y A, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

El f porque le faltan +2 y a la A le falta +3 para que Alcansen a C

d. ¿Entre el jugador G y J, a quién le hace falta menos para bajar y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

a la G porque le falta -2 para llegar a C y a la J le falta -5 para alcanzar a C

e. ¿Entre el jugador D y H, a quién le hace falta subir más de peso y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

a la H Porque le falta +1 para Alcanzar a la C

f. ¿Entre el jugador B y E, quién tiene más peso y por qué?

la E porque tiene +6 peso que la B

c. ¿Entre el jugador F y A, quién está más cerca de llegar a C? ¿y por qué?

F porque A esta a dos puntos

d. ¿Entre el jugador G y J, a quién le hace falta menos para bajar y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

G porque le faltan menos unidades

e. ¿Entre el jugador D y H, a quién le hace falta subir más de peso y llegar al peso ideal C? ¿y por qué?

D por que tiene 3 puntos menos y H tiene solo 1 punto menos

f. ¿Entre el jugador B y E, quién tiene más peso y por qué?

E porque tiene 6 puntos mas y B tiene 1 punto mas

g. ¿Entre el jugador D y H, quién tiene más peso y por qué?

El H ya que tiene mayor peso de 1 kilogramo Mientras la D tiene 3a Kl eso significa que la H se Acerca más a la 6.

Reflexionemos acerca de los números y su posición en la recta:

Cualquier número que este situado a la izquierda de otro es menor y si está situado a la derecha es mayor. El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

Una de las alternativas para comparar los números positivos y negativos es a través de la recta numérica.

2. Teniendo en cuenta la reflexión anterior y la recta numérica realiza el siguiente ejercicio.

Rescribe en el recuadro si el número que está al lado izquierdo del otro es mayor o menor según corresponda. Mira los ejemplos

-2 *Es menor que* **10**

8 Es mayor que **5**

-3	Es menor que	2	3	Es menor que	-8	-11	Es Mayor que	6
-7	Es mayor que	-5	9	Es mayor que	-7	-9	Es menor que	2
21	Es Mayor que	-21	-2	Es menor que	2	21	Es mayor que	2

g. ¿Entre el jugador D y H, quién tiene más peso y por qué?

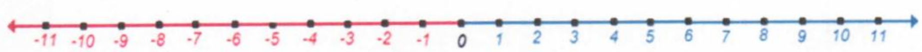
H por que esta mas cerca de c.

Reflexionemos acerca de los números y su posición en la recta:

Cualquier número que este situado a la izquierda de otro es menor y si está situado a la derecha es mayor. El cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

Una de las alternativas para comparar los números positivos y negativos es a través de la recta numérica.

2. Teniendo en cuenta la reflexión anterior y la recta numérica realiza el siguiente ejercicio.



Rescribe en el recuadro si el número que está al lado izquierdo del otro es mayor o menor según corresponda. Mira los ejemplos

-2 *Es menor que* **10**

8 Es mayor que **5**

-3	$<$	2	3	$>$	-8	-11	$<$	6
-7	$<$	-5	9	$>$	-7	-9	$<$	2
21	$>$	-21	-2	$<$	2	21	$>$	2

ashley Ponze

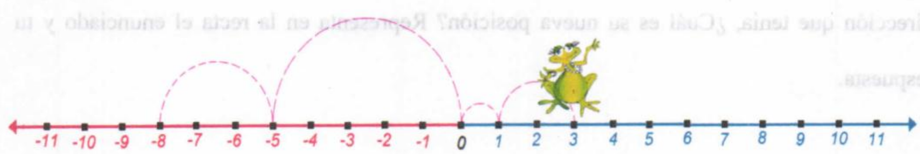
Situación 3: Adición de números enteros

Desempeños:

- Resolver ejercicios que involucren adicionar números enteros de diferente signo mediante la representación grafica.
- Pasar de la dimensión contextual a la dimensión recta y viceversa.
- Pasar de la dimensión contextual a la dimensión abstracta.

De salto en salto voy avanzando.

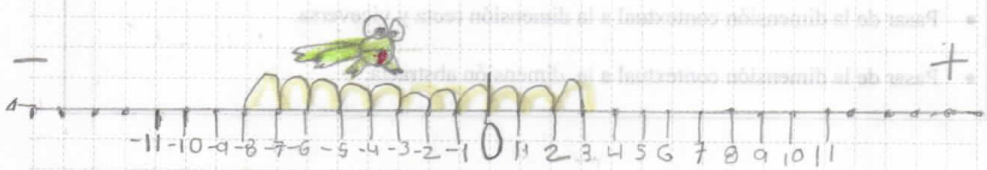
A la rana Clementina, le gusta saltar sobre la recta numérica de izquierda a derecha, unas veces salta muy alto dando varios pasos a la vez y otras veces muy bajito dando solo un paso como se muestra en la imagen. A ella le gusta ver cómo va aumentando cada paso que da y por eso salta así.



Actividad 1: Acerquémonos a la suma de números enteros mediante el desplazamiento en la recta numérica.			
Grado: 5º	**Cantidad de estudiantes:** 16	**Tiempo de la actividad:** 45 min.	**Modalidad:** individual

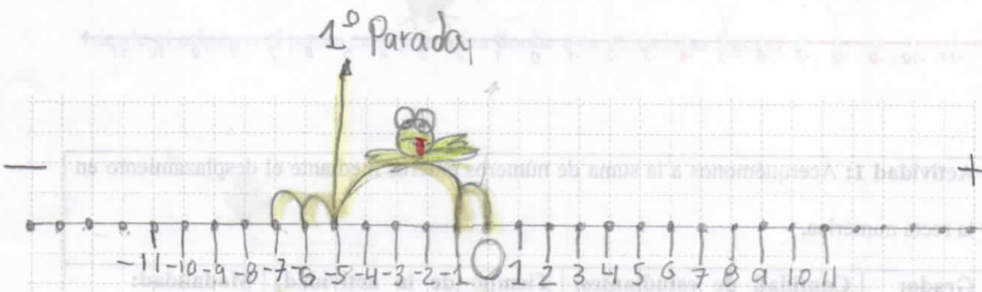
Teniendo en cuenta la historia de la situación 3 y la imagen responde las preguntas.

1. Si la rana Clementina empieza a saltar desde la posición -8 avanzando hacia la derecha con saltos pequeños de a una unidad y salta en total 11 unidades en la recta ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



Cayo en la unidad de 3 luego de 11 saltos

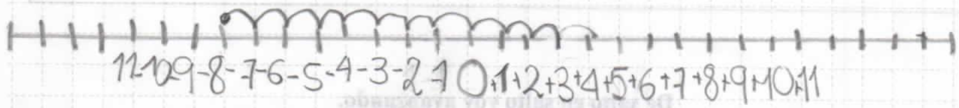
2. Si Clementina la rana empieza a saltar desde la posición 0 y hace su primera parada en la posición -5 y luego decide seguir saltando solo 2 unidades más en la recta en la misma dirección que tenia, ¿Cuál es su nueva posición? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



Su primera parada es en -5 y termina en -7 gracias A 2 Saltos de Más

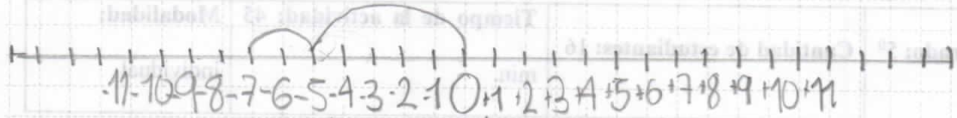
termina en la posicion -10 cuanto saltos debe devolverse clementina para volver a la operacion inicial?

1. Si la rana Clementina empieza a saltar desde la posición -8 avanzando hacia la derecha con saltos pequeños de a una unidad y salta en total 11 unidades en la recta ¿Cuál es su nueva posición? Represente en la recta el enunciado y tu respuesta.



quedo en la posicion +3

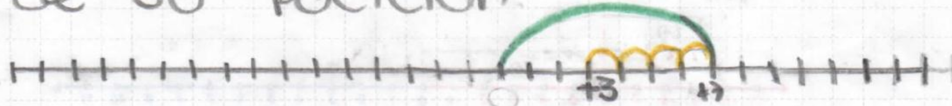
2. Si Clementina la rana empieza a saltar desde la posición 0 y hace su primera parada en la posición -5 y luego decide seguir saltando solo 2 unidades más en la recta en la misma dirección que tenia, ¿Cuál es su nueva posición? Represente en la recta el enunciado y tu respuesta.



quedo en la posicion -7

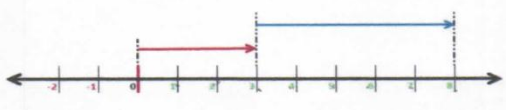
3. Si la rana Clementina está en la posición 0 y pega un gran salto hasta la posición 7, pero decide devolverse cuatro unidades en la recta porque se le olvido su cartera ¿A qué distancia esta Clementina desde su nueva posición hasta el origen? Represente en la recta el enunciado y tu respuesta.

Clementina esta a 3 unidades de su posicion



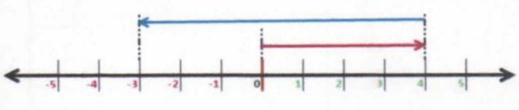
Reflexionemos acerca del desplazamiento en la recta:

Un cuerpo se desplaza cuando al moverse cambia de posición. Ahora bien, teniendo en cuenta que siempre el punto de origen es cero, que los desplazamientos a la izquierda son cantidades negativas y que los desplazamiento a la derecha son cantidades positivas, podemos definir la adición de números enteros, mediante su representación en la recta numérica usando flechas. Veamos algunos ejemplos: Pedro camina tres pasos hacia la derecha desde el origen y luego cinco en la misma dirección ¿a cuántos pasos se encuentra de la posición inicial?



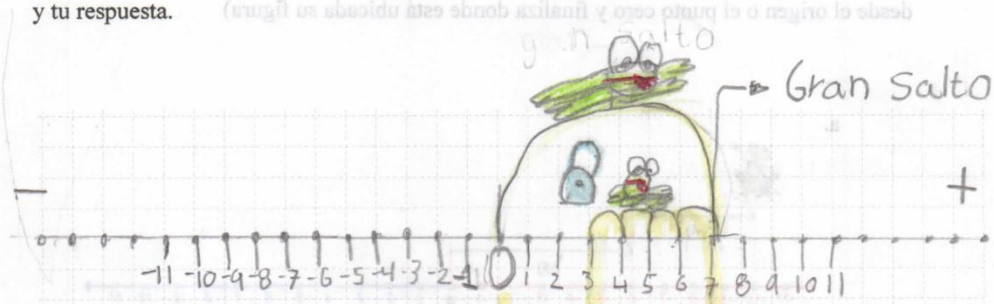
Operación matemática: $3 + 5 = 8$

Pedro camina cuatro pasos hacia la derecha desde el origen y luego se regresa siete pasos hacia la izquierda. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?



Operación matemática: $4 + (-7) = -3$

3. Si la rana Clementina está en la posición 0 y pega un gran salto hasta la posición 7, pero decide devolverse cuatro unidades en la recta porque se le olvido su cartera ¿A qué distancia esta Clementina desde su nueva posición hasta el origen? Representa en la recta el enunciado y tu respuesta.



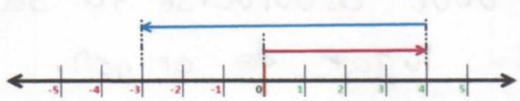
El Esta Queda a 3 unidades de su posición original

Reflexionemos acerca del desplazamiento en la recta:

Un cuerpo se desplaza cuando al moverse cambia de posición. Ahora bien, teniendo en cuenta que siempre el punto de origen es cero, que los desplazamientos a la izquierda son cantidades negativas y que los desplazamiento a la derecha son cantidades positivas, podemos definir la adición de números enteros, mediante su representación en la recta numérica usando flechas. Veamos algunos ejemplos: Pedro camina tres pasos hacia la derecha desde el origen y luego cinco en la misma dirección ¿a cuántos pasos se encuentra de la posición inicial?

Operación matemática: 3 + 5 = 8

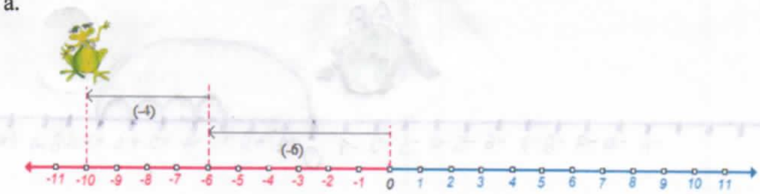
Pedro camina cuatro pasos hacia la derecha desde el origen y luego se regresa siete pasos hacia la izquierda. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?



Operación matemática: 4 + (− 7) = − 3

4. Teniendo en cuenta el enunciado anterior, escribe un enunciado con tus propias palabras que represente las siguientes gráficas y realiza una operación matemática que pueda resolver dicho enunciado. (Recuerda que: la rana Clementina siempre inicia desde el origen o el punto cero y finaliza donde está ubicada su figura)

a.



Situación: Clementina ba a Casa de su amiga Rafaela y da -6 Pasos largos y da -4 Unidades mas

Operación:

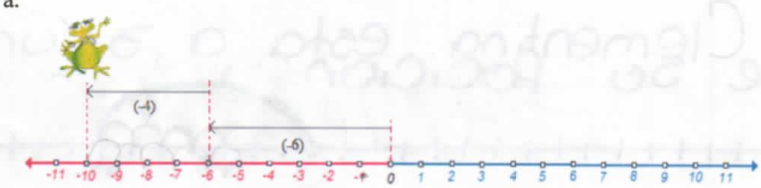
-4 +-6 =-10

Resultado:

los pasos que dio Clementina fueron -10 pasos

4. Teniendo en cuenta el enunciado anterior, escribe un enunciado con tus propias palabras que represente las siguientes gráficas y realiza una operación matemática que pueda resolver dicho enunciado. (Recuerda que: la rana Clementina siempre inicia desde el origen o el punto cero y finaliza donde está ubicada su figura)

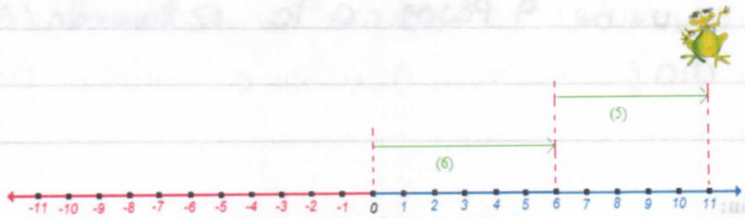
a.



Situación: Clementina camina hacia la Izquierda 6 Pasos y Luego camino otros 4 pasos Para llegar al Colejio

Operación: -6
-4
=-10

Resultado: -10



b.

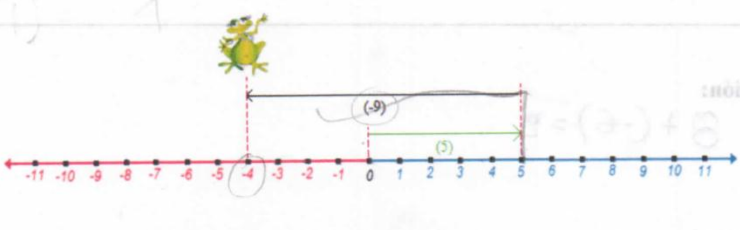
Situación: Clementina ba hacia su casa y da 6 pasos por unidad y 5 largos ¿cuantos pasos dio para llegar a su casa?

Operación:

+6 +5 = 11

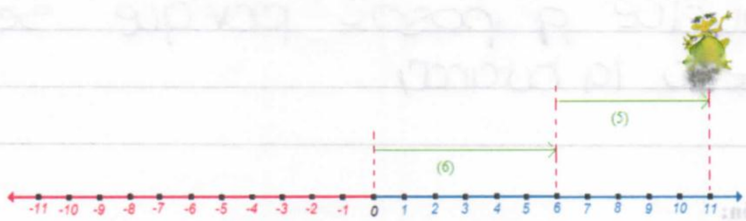
Resultado:

Clementina dio 11 pasos para llegar a su cas



c.

Situación: Clementina va a cazar su comida y da 5 pasos a la derecha, por que se le dvidan sus aretes



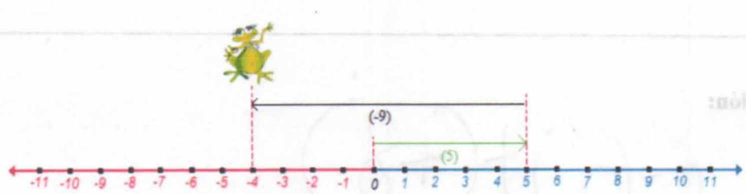
b.

Situación: la rana salta 6 paso hasia la derecha desde el origen y despues salta 5 pasos

Operación:

(+6)+(+5)

Resultado: +11



c.

Situación: la rana salta 5 posos hasia la derecha desde el origen y se

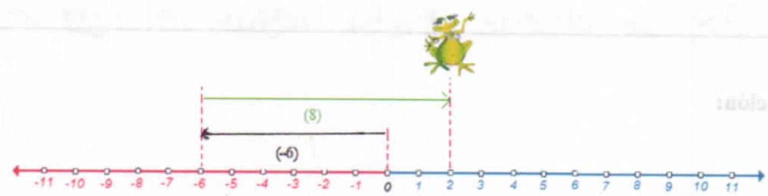
Olvida el dinero en casa de su Amiga y se devuelve saltos y termina en -4 ¿cuantos saltos le faltan para v-olver al punto de origen?

Operación:

$5+(-9) = -4$

Resultado: le toco devolverse 4 saltos hacia el punto de origen?

d.



Situación: Clementina Sale a Buscar hojas en el Bosque DesDE casa Avanza 6 saltos hacia la izquierda luego va a Mos-rarle las hojas a una de sus Amigas que vive cerca de ella ¿si clementina queda a 8 saltos donde su amiga cuan-o le Falta para llegar a su casa?

Operación:

$(-6)+8 = 2$

Resultado: le Faltan 2 saltos para llegar a su casa.

devuelve 9 pasos porque se le quedo la bufanda

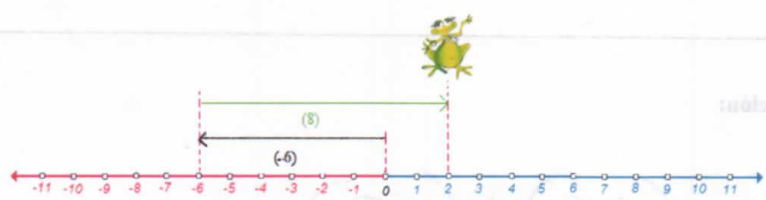
Operación:

$(+5)+(-9)$

Resultado:

-4

d.



Situación: la rana salta 6 pasos a la izquierda y se devuelve 8 pasos porque se le quedo el gorro

Operación:

$(-6)+(+8)$

Resultado:

$+2$