APRENDIZAJE DE LAS INECUACIONES LINEALES CON VALOR ABSOLUTO DESDE UNA PERSPECTIVA PLURIRREGISTRO

MARÍA CRISTINA VELASCO NARVÁEZ
CÓDIGO 0303357

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFSIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

APRENDIZAJE DE LAS INECUACIONES LINEALES CON VALOR ABSOLUTO DESDE UNA PERSPECTIVA PLURIRREGISTRO

MARÍA CRISTINA VELASCO NARVÁEZ
CÓDIGO 0303357

Trabajo realizado como requisito para optar por el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática

DIRECTOR
Mg. JORGE HERNANDO ARCE CHAVES

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 24 de Agosto de 2011
ESTUDIANTE: MARIA CRISTINA VELASCO NARVAEZ - CODIGO: 0303357
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: **"APRENDIZAJE DE LAS INECUACIONES LINEALES CON VALOR ABSOLUTO DESDE UNA PERSPECTIVA PLURIREGISTRO"**
DIRECTOR DE TESIS: Profesor JORGE HERNANDO ARCE CHAVES
EVALUADORES: Profesor LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO Profesora DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO
COMENTARIOS DE LOS JURADOS
APROBADO X *APLAZADO* ___ *RECHAZADO* ___

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. JORGE HERNANDO ARCE CH.
Director de Tesis

Prof. LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO.
Jurado - Evaluador

Prof. DIANA VICTORIA JARAMILLO Q.
Jurado - Evaluador

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
En reemplazo del
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

A Dios por darme la fortaleza necesaria para no desfallecer,

A mi esposo Carlos y a mi hijo Santiago con todo mi amor por su paciencia,

A mis hermanos que alegran mis días con sus palabras y buen ejemplo,

A mi madre Mariela quien siempre ocupará un lugar privilegiado en mi corazón y

A mis estudiantes porque ellos son mi mayor motivación.

AGRADECIMIENTOS

Mi más amplio agradecimiento para el Mg. Jorge Hernando Arce Chaves, Director de este trabajo de grado, por su valiosa orientación y apoyo para la conclusión del mismo. Así mismo quiero expresar mi reconocimiento a Myriam Vega, Jorge Galeano, Rubén Corrales, Teresa Pontón, Ligia Torres, Pilar Ponce de León, Ginno Campaña Castellanos y Giovanni Álvarez Serna por sus valiosos aportes para mejorar la presente investigación.

Desde luego, llego al final de este proyecto gracias al apoyo que me otorgaron y al cariño que me inspiran mi esposo Carlos Andrés, mi hijo Santiago José, mis hermanos Andrés y María Fernanda, mi padre Alfonso, mis suegros José Ananías y Gloria del Carmen, a la mujer que ha sido el motor en mi vida, mi mejor ejemplo, a quien más he amado y amaré, mi madre Mariela.

También tengo siempre presentes a todos mis familiares y amigos, a mi cuñado Duverley, a mis maestros, compañeros, estudiantes y a quienes siempre me han enseñado algo, los cuales son muchos y no podría enumerarlos íntegramente.

A todos mi mayor gratitud.

Tabla de Contenido

AGRADECIMIENTOS	*v*
RESUMEN	*xiii*
INTRODUCCIÓN	*xiv*
CAPÍTULO 1	1
CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1 Contextualización de la investigación	1
2 Problema de investigación	9
3 Objetivos de la investigación	18
3.1 Objetivo general	18
3.2 Objetivos específicos	18
CAPÍTULO 2	23
REFERENTES TEÓRICOS	23
1 Aproximación matemática	24
1.1 Relaciones binarias especiales	24
1.2 Relaciones de equivalencia	25
1.3 Relaciones de orden parcial	26
1.4 Intervalos	27
1.5 El valor absoluto	28
1.6 Inecuaciones con valor absoluto	33
1.7 Coordenadas	34
1.8 Espacios métricos	36
1.9 Vecindad	38
2 Análisis cognitivo de las representaciones	41
2.1 Diferentes tipos de representación utilizados en matemáticas	41
2.2 Tratamientos en registros monofuncionales	43
2.3 Conversión entre dos registros monofuncionales: uno discursivo y otro no discursivo	44
2.4 Diferentes aprehensiones del registro de representación gráfica	50
2.5 Discriminación de las variables visuales y simbólicas en los registros de representación gráfica y de escritura algebraica	52

CAPÍTULO 3 59
REVISIÓN DE ALGUNOS TEXTOS UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS 59
1 Descripción de la selección de los textos universitarios 59
2 Descripción general de los textos universitarios seleccionados 68
2.1 Datos de identificación del texto universitario TU1L0P6TM 70
2.2 Datos de identificación del texto universitario TU2L15P2A 71
2.3 Datos de identificación del texto universitario TU3L10P10TIC 72
3 Dimensiones a considerar en el análisis 73
3.1 La estructura de las unidades temáticas 74
3.1.1 Consideraciones finales respecto a las unidades temáticas 79
3.2 Algunos comentarios sobre las definiciones de desigualdad y valor absoluto 80
3.2.1 La desigualdad en el texto Fundamentos de las Matemáticas 80
3.2.2 La desigualdad en el texto Matemáticas para Administración y Economía. 82
3.2.3 La desigualdad en el texto Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica 84
3.2.4 Consideraciones finales respecto a la definición de desigualdad 85
3.2.5 El valor absoluto en el texto Fundamentos de las Matemáticas 86
3.2.6 El valor absoluto en el texto Matemáticas para Administración y Economía 89
3.2.7 El valor absoluto en el texto Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica 90
3.2.8 Consideraciones finales respecto a la definición de valor absoluto 93
3.3 Significados particulares del valor absoluto 94
3.4 Caracterización de las operaciones cognitivas requeridas por los textos universitarios 96
3.4.1 Tratamientos en el Registro de Escritura Algebraica (REA) 96
3.4.2 Tratamientos en el Registro de Numérico (RN) 96
3.4.3 Conversión del REA la registro de Representación Gráfica (RG) 97
3.4.4 Conversión del REA la Registro del Lenguaje 97

Natural (RLN)
3.4.5 Conversión del RLN al REA 98
3.5 Análisis de los ejercicios propuestos en los textos universitarios seleccionados 98
3.5.1 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU1L0P6TM 102
3.5.2 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU2L15P2A 102
3.5.3 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU3L10P10TIC 104
4 Resultados encontrados 105

CAPÍTULO 4 111
DESCRIPCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LAS VARIABLES COGNITIVAS PERTIENENTES 111
1 Aspectos metodológicos 112
1.1 La población seleccionadas 114
1.2 ¿Por qué escogimos el curso de Iniciación al álgebra? 115
1.3 Sobre el análisis de la información y la presentación de los resultados 116
2 El desarrollo de las clases con el grupo experimental 120
3 Una situación didáctica en torno al aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto en una variable 125
3.1 Sobre la gestión de la situación 125
3.2 Las características de las gráficas identificadas por los estudiantes 138
4 Una prueba de contraste 138
4.1 Estructura de una prueba de contraste 138
4.2 Presentación y análisis de resultados obtenidos 140
4.3 Algunas reflexiones finales 175

CAPÍTULO 5 177
CONCLUSIONES 177

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 187

ANEXOS 192
Anexo A 192
Programas de los cursos de matemáticas fundamentales de siete universidades del Valle del Cauca 227
Anexo B 227

El cuerpo ordenado de los números reales 227
1 Axiomas de cuerpo 227
2 Axiomas de orden 230
Anexo C 234
Una Situación Didáctica 234
Anexo D 250
Una Prueba de Contraste 250

Índice de Figuras

Figura 1. La recta numérica 34
Figura 2. El plano cartesiano 35
Figura 3. Grafica de una parábola que no proviene de una función cuadrática. 45
Figura 4. Diferentes tipos de actividad cognitiva requerida en matemáticas 48
Figura 5. Variables visuales de la representación gráfica en el plano cartesiano. 53
Figura 6. Variables visuales de la representación gráfica en la recta real. 55
Figura 7. Graficas de líneas rectas y sus correspondientes ecuaciones 117
Figura 8. Gráfica de la Situación 1, parte C 132

Índice de Tablas

Tabla 1. Universidades del Valle del Cauca registradas en el SNIES 3
Tabla 2. Los tres polos constitutivos de toda representación semiótica: objeto, contenido y forma. 16
Tabla 3. La equivalencia entre ILVA1V 33
Tabla 4. Las tres condiciones que determinan la congruencia o no congruencia entre los registros de representación semiótica. 47
Tabla 5.Correspondencia entre las variables visuales y simbólicas en las representaciones bidimensionales (Plano cartesiano) 54
Tabla 6. Correspondencia entre las variables visuales y simbólicas en las representaciones unidimensionales (la recta real) 56
Tabla 7. Resultados de la encuesta telefónica realizada a las principales librerías del país. 62
Tabla 8. Frecuencia de los textos universitarios más vendidos en las principales librerías del país. 63
Tabla 9. Frecuencia de textos universitarios de matemáticas citados en los programas de matemáticas fundamentales 65
Tabla 10. Textos universitarios preseleccionados 66
Tabla 11. Clasificación de las actividades de acuerdo con la operación cognitiva (tratamiento/conversión) 99
Tabla 12. Propósitos de las situaciones didácticas propuestas en juego el curso de Iniciación al álgebra. 124
Tabla 13. Respuestas dadas por el grupo plurirregistro a la pregunta II de la Situación 1, parte A. 128

Tabla 14. Respuestas dadas por el grupo plurirregistro a la pregunta II de la Situación 1, parte B. 129
Tabla 15. Frecuencia relativa de éxitos y fracasos del enunciado I correspondiente a la Situación 1, parte C. 132
Tabla 16. Solución de la inecuación, $x < -0.5$ propuesta por algunos estudiantes del grupo plurirregistro. 133
Tabla 17. Semejanzas y diferencias encontradas en el análisis de los gráficos 1 a 5 de la Situación 2, parte A. 136
Tabla 18. Semejanzas y diferencias encontradas en el análisis de los gráficos 6 a 10 de la Situación 2, parte A 137
Tabla 19. Clasificación de las preguntas en la Prueba de Contraste, según la temática y el nivel de dificultad. 139
Tabla 20. Clasificación de respuestas, pregunta 1 de la Prueba de Contraste 141
Tabla 21. Clasificación de respuestas, pregunta 2 de la Prueba de Contraste 145
Tabla 22. Clasificación de respuestas, pregunta 3 de la Prueba de Contraste 147
Tabla 23. Clasificación de respuestas, pregunta 4 de la Prueba de Contraste. 151
Tabla 24. Clasificación de respuestas, pregunta 5*a* de la Prueba de Contraste 154
Tabla 25. Clasificación de respuestas, pregunta 5b de la Prueba de Contraste 157
Tabla 26. Clasificación de respuestas, pregunta 5*c* de la Prueba de Contraste. 161
Tabla 27. Clasificación de respuestas, preguntas 6*a* y 6b de la Prueba de Contraste 163
Tabla 28. Clasificación de respuestas, pregunta 7 de la Prueba de Contraste 167
Tabla 29. Porcentaje de éxito en una prueba de contraste aplicada a los estudiantes del grupo plurirregistro (GP) y monorregistro (GM). 171

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Texto código TU1L0P6TM, pp. 175-176 81
Ilustración 2. Texto código TU1L0P6TM, p. 176 81
Ilustración 3. Texto código TU1L0P6TM, pp. 176-177 82
Ilustración 4. Texto código TU2L15P2A, p. 54 82
Ilustración 5. Definición de desigualdad en el texto código TU2L15P2A, p. 54 83
Ilustración 6. Texto código TU2L15P2A, pp. 54-55 84
Ilustración 7. Texto código TU3L10P10TIC, p. 9 85
Ilustración 8. Texto código TU3L10P10TIC, p.112 85
Ilustración 9. Texto código TU1L0P6TM, p. 165 87
Ilustración 10. Texto código TU1L0P6TM, p. 167 87
Ilustración 11. Texto código TU1L0P6TM, p. 170 88
Ilustración 12. Texto código TU1L0P6TM, p. 177 88
Ilustración 13. Texto código TU2L15P2A, pp. 61–62 89
Ilustración 14. Texto código TU2L15P2A, p. 84 90
Ilustración 15. Texto código TU3L10P10TIC, p. 12 91
Ilustración 16. Texto código TU3L10P10TIC, p. 117 91
Ilustración 17. Texto código TU3L10P10TIC, p. 197 92
Ilustración 18. Tratamientos en el REA, tomado de TU3L10P10TIC, p. 120 96

Ilustración 19. Tratamientos en el RN, tomado de TU3L10P10TIC, p.14 96
Ilustración 20. Conversión del REA al RG (en la recta numérica), tomado de TU1L0P6TM, p.188 97
Ilustración 21. Conversión del REA al RG (en el plano cartesiano), tomado de TU1L0P6TM, p.189 97
Ilustración 22. Conversión del REA al RLN, tomado de TU2L15P2A, p.62 98
Ilustración 23. Conversión de RLN al REA, tomado de TU2L15P2A, p.63 98
Ilustración 24. Tratamientos en el Registros de Escritura Algebraica (REA) 100
Ilustración 25. Conversión del REA al RG, tomado de TU1L0P6TM, pp.188-189 100
Ilustración 26. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p.64 101
Ilustración 27. Conversión del RLN al REA, tomado de TU2l15P2A, p. 65 102
Ilustración 28. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p.63 103
Ilustración 29. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p. 64 103
Ilustración 30. Texto universitario TU3L10P10TIC, p. 120 105
Ilustración 31. Texto universitario TU3L10P10TIC, p. 119 105
Ilustración 32.Procedimientos empleados para determinar el ángulo que forma el segmento de recta ascendente de una función con valor absoluto (de la forma $|x-b| \leq c$), con el $eje\ x$ es de 45°. 127
Ilustración 33. Respuesta de dos estudiantes del grupo plurirregistro a la pregunta III, de la Situación 1, parte B. 131
Ilustración 34. Descripción dada por el estudiante LFS07PCGP a la expresión $|x-a| \leq b$ como una distancia entre dos puntos sobre la recta numérica. 141
Ilustración 35. Respuestas de la primera pregunta, correspondientes a dos estudiantes clasificados en el nivel bajo. 142
Ilustración 36. Interpretación funcional de las ILVA1V dada por dos estudiantes del GP. 143
Ilustración 37. Un procedimiento alternativo de la pregunta 2, el cual muestra el dominio que tienen algunos estudiantes de los tratamientos propios del registro de escritura algebraica (REA) 146
Ilustración 38. Un procedimiento en el cual se muestra que las inecuaciones están subordinadas a las ecuaciones 149
Ilustración 39. Solución de la pregunta 3 de la Prueba de Contraste de un estudiante en el nivel básico. 150
Ilustración 40. La influencia del dominio de la variable en el procedimiento de solución elegido por el estudiante AFG08PCGP. 152
Ilustración 41. Dos propuestas de solución de la pregunta 4 de la Prueba de Contraste 153
Ilustración 42. Diferentes formas de describir una región sombreada en la recta numérica. 155
Ilustración 43. Tomado del texto Precálculo de Stewart *et al* (2001) 156
Ilustración 44. Esquema de solución representativa de la pregunta 5b, de la Prueba de Contraste. 158
Ilustración 45. Procedimiento realizado por un estudiante en el nivel básico para responder la pregunta 5b de la Prueba de Contraste. 159
Ilustración 46. Interpretación incorrecta de la expresión *a lo sumo*, por la no congruencia entre el RLN y REA. 161
Ilustración 47. Solución de la pregunta 6*a*, de la Prueba de Contraste, de un estudiante en el nivel alto. 164

Ilustración 48. Procedimiento realizado por un estudiante del nivel bajo para resolver la pregunta 6*a* de la Prueba de Contraste. 165
Ilustración 49. Un procedimiento en el cual se evidencia que el estudiante ha establecido la correspondencia entre las variables visuales y categoriales. 168
I**lustración 50**. 171
Ilustración 51. Solución exitosa de la pregunta 3 de la prueba de contraste, realizada por el estudiante ZPT08PCGP. 172

RESUMEN

El problema sobre el porcentaje tan alto de reprobación, que existe a nivel universitario en la región, en los dos primeros cursos de matemáticas es una problemática que se ha abordado típicamente desde los contenidos lo cual ha llevado a realizar muchas modificaciones frente a los cursos de matemáticas en la formación básica de los estudiantes de licenciatura, ingenierías, administración y economía. Desde esta propuesta se considera que además de modificar los contenidos es necesario reformular las prácticas, esto implica, reconocer la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos. En este sentido interesa saber **¿Cuáles son las unidades cognitivas pertinentes en el aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro, que exige la coordinación de los registros de representación gráfica (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}$) y de escritura algebraica?**

Para dar solución a la pregunta de investigación se diseñó un conjunto de situaciones las cuales tuvieron como propósito la identificación y puesta en correspondencia de las variables visuales (propias del registro gráfico) y las variables simbólicas (relativas al registro de escritura algebraica) para un objeto matemático en particular. De la intervención se concluye que la conversión que va del registro gráfico al de escritura algebraica es un proceso lento, sin embargo es muy valioso en tanto que permite a los estudiantes acentuar la atención en el rango de las funciones de la forma $f(x) = |ax + b|$ para poder caracterizar e interpretar la solución de las inecuaciones lineales con valor absoluto, es decir que se trabajó dicha noción desde lo funcional más que desde lo numérico poniendo el énfasis en la forma como varían las expresiones algebraicas x, $ax + b$ y $|ax + b|$.

Palabras Claves: aprendizaje plurirregistro, inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable, unidades significantes, variables visuales, variables categoriales, lectura e interpretación de gráficas y pensamiento variacional.

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta tiene como premisa que la naturaleza de la actividad matemática es semiótica; en este sentido interesa ver, para un objeto matemático particular, cómo una propuesta plurirregistro [1] puede estar potenciando el pensamiento variacional y la visualización, en tanto que capacidades cognitivas requeridas para un mejor aprendizaje de las matemáticas en la educación básica, media y superior. En este sentido se ha desarrollado la presente investigación en cuatro capítulos organizados como se sigue:

En el Capítulo 1 se presenta el estado actual del primer curso de matemáticas que deben asumir los estudiantes de siete universidades de Cali; luego se argumenta la razón por la cual vamos a centrar nuestra atención en las inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable (ILVA1V), inmediatamente presentamos algunas dificultades que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a un aprendizaje monorregistro de nociones como las inecuaciones y el valor absoluto; luego enunciamos la pregunta de investigación la cual nos propusimos alcanzar mediante el siguiente objetivo general: *Identificar y describir algunas de las unidades significantes relativas a los registros de representación gráfico (tanto en la recta como en plano cartesiano) y de escritura algebraica que son pertinentes cognitivamente, en el aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto en una variable*.

En el Capítulo 2 se realiza una aproximación matemática de los elementos requeridos en la movilización de las ILVA1V, con esto se exhiben algunas de las propiedades fundamentales que han de caracterizar este objeto matemático; de igual forma damos a conocer los diferentes tipos de representaciones que hemos utilizado para nuestro análisis cognitivo. Dado que uno de los aspectos importantes a desarrollar es la visualización, entonces definimos lo qué entendemos por leer o interpretar gráficos cartesianos.

Posteriormente, en el Capítulo 3, se muestra un análisis de tres textos escolares de matemáticas de los cuales se enuncian los significados particulares que se presentan acerca

[1] El término plurirregistro hace alusión al uso de varios registros de representación.

de la noción de valor absoluto, las actividades típicas que se plantean (por medio de los ejercicios propuestos), así como las conversiones que se privilegian.

En el Capítulo 4 se alude a las situaciones didácticas, la gestión de la maestra (investigadora), el análisis de la intervención en el aula y por último, se presenta una prueba de contraste que fue aplicada a dos grupos del curso *Iniciación al álgebra* (en febrero-julio de 2009), dicha prueba muestra de manera cualitativa y cuantitativa los resultados obtenidos, de tal manera que se pudo comparar los procedimientos de los dos grupos de estudiantes, frente a las expectativas de desempeño planteadas por pregunta.

Finaliza el desarrollo de este trabajo con el Capítulo 5 en el cual se presentan algunas conclusiones de orden didáctico y cognitivo sobre los procesos de visualización, en el acercamiento plurirregistro, reflexiones sobre las situaciones e intervención de aula, el papel de los registros de representación en la formación de pensamiento variacional.

CAPÍTULO 1

CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Introducción

Esta investigación se ha desarrollado en el contexto de la Educación Superior, partiendo de una descripción general de la población universitaria del departamento del Valle del Cauca, seleccionado así, siete instituciones en las cuales se hace referencia a los elementos que les son comunes, en las dinámicas internas asociadas al funcionamiento administrativo y académico, frente al alto porcentaje de reprobación detectado en el primer curso obligatorio de matemáticas, para los estudiantes de licenciaturas, ingenierías, ciencias económicas y administrativas, ciencias naturales y exactas.

Desde una perspectiva plurirregistro, señalo los principales aspectos que permiten caracterizar detalladamente la problemática del aprendizaje, y la enseñanza de las inecuaciones lineales con valor absoluto. Para cerrar el capítulo, se describen los objetivos que guiaron el desarrollo de la investigación.

1. Contextualización de la investigación

De acuerdo con el Sistema Nacional de Información de Educación Superior (SNIES)[2], el Valle del Cauca cuenta con once universidades propias. En la información reseñada por el SNIES aparecen las universidades de origen privado y oficial, el municipio al cual pertenecen, el tipo de acreditación, la página Web y el código de registro. La Tabla 1 da

[2] **El Sistema Nacional de Información de la Educación Superior** (SNIES) es el conjunto de fuentes, procesos, herramientas y usuarios que, articulados entre sí, posibilitan y facilitan la recopilación, divulgación y organización de la información sobre educación superior relevante para la planeación, monitoreo, evaluación, asesoría, inspección y vigilancia del sector. El objetivo general del SNIES es mantener y divulgar la información de las instituciones y los programas de educación superior, con el fin de orientar a la comunidad sobre la calidad, cantidad y características de los mismos.

cuenta de las universidades que hay a nivel Regional en el departamento del Valle del Cauca: su organización es exhibida de acuerdo con el código de cada Institución de Educación Superior (IES).

INSTITUCIONES REGISTRADAS				
Código	Institución	Municipio	Acreditación	Página Web
1104	UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	PALMIRA	N/A	www.palmira.unal.edu.co
1122	UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO	BUENAVENTURA	N/A	www.unipacifico.edu.co
1203	UNIVERSIDAD DEL VALLE	CALI	REGISTRO ALTA CALIDAD	www.univalle.edu.co
1702	PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA	CALI	N/A	www.puj.edu.co[3]
1716	UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA	CALI	N/A	www.usb.edu.co
1730	UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA	PALMIRA	N/A	www.upb.edu.co
1805	UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI	CALI	N/A	www.usaca.edu.co
1807	UNIVERSIDAD LIBRE	CALI	N/A	www.unilibre.edu.co
1828	UNIVERSIDAD ICESI	CALI	N/A	www.icesi.edu.co
1829	UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI	PALMIRA	N/A	www.usaca.edu.co
1830	UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE OCCIDENTE	CALI	N/A	www.cuao.edu.co

Tabla 1. Universidades del Valle del Cauca registradas en el SNIES

[3] Es necesario acotar que la información de la Tabla 1 fue consultada (en la página Web del SNIES) por última vez el 10 de junio de 2010 y se pudo constatar que algunos de los datos no están actualizados por ejemplo, las páginas web de la Pontificia Universidad Javeriana, la Universidad Santiago de Cali, la Universidad Santiago sede Palmira y la Universidad Autónoma son: www.javerianacali.edu.co, www.usc.edu.co, www.usaca.edu.co/palmira/, www.uao.edu.co, respectivamente, de igual forma los datos sobre el nivel de acreditación tampoco están actualizados sin embargo esta información puede ser consultada a través de las páginas web de las instituciones educativas.

De las once IES que hay a nivel regional, se eligió como muestra, las siete Universidades de la ciudad de Cali, que en orden alfabético son: Pontificia Universidad Javeriana Cali, Universidad Autónoma de Occidente, Universidad Icesi, Universidad San Buenaventura, Universidad Santiago de Cali y Universidad del Valle; esta última es de carácter oficial, mientras que las seis primeras, son privadas.

Para guardar la identidad de cada una de las universidades empleadas para el estudio, se utilizará el código U_n (con n variando entre uno y siete). La asignación de valores para n es aleatorio, es decir, que no corresponde necesariamente con el orden alfabético presentado en la Tabla 1.

De acuerdo con la organización interna de las universidades de Cali, se han formado dos grupos: el primero lo conforman aquellas instituciones donde los cursos de matemáticas, que se ofrecen a los estudiantes, están centralizados a través de un departamento o un área de matemáticas, que se encarga de prestar el servicio a las demás dependencias (facultades, escuelas, institutos, etc.). Estas universidades son: U_2, U_3, U_5 y U_6. Los nombres que usualmente utilizan para referirse a estas unidades académicas centralizadas (UAC) son: Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Matemáticas y Estadística, Área de Educación Matemática, Departamento de Ciencias Básicas o, simplemente, Departamento de Matemáticas.

El segundo grupo corresponde a aquellas universidades donde no existe una unidad académica centralizada (UANC), responsable de dar los lineamientos generales y específicos relativos a los cursos de matemáticas; se halla que son los decanos de facultad, los encargados de contratar a los profesores que se requieren para dictar los cursos, en este grupo están U_1, U_4 y U_7.

En cuanto a la recolección de la información es importante resaltar que las UAC generalmente, tienen un coordinador para cada curso, el cual fija los contenidos, su organización, el texto guía, recoge la inquietudes de los docentes frente a los énfasis, estrategias y normas, que son o no permitidas a nivel institucional, tiene la información sobre el desempeño de los estudiantes en cada curso, y fija los contenidos a evaluar, entre otras funciones.

En este sentido, puede afirmarse que el coordinador se constituye en un puente permanente de comunicación entre las directivas y los docentes. Para el caso de las UANC, se notó que hay mayor variabilidad en cuanto al texto guía utilizado para dictar un mismo curso, los enfoques, los contenidos, entre otros elementos.

Con la finalidad de identificar el texto guía y los textos complementarios de consulta, obtuvimos los programas de los cursos de cada una de las universidades a nivel local que aparecen registradas en SNIES, el análisis de los programas también permitió identificar los propósitos éstos, los contenidos que se privilegian, los rasgos comunes de las temáticas, y la intensidad de los cursos de matemáticas entre todos los estudiantes de una misma institución educativa (análisis intra-institucional).

El propósito fundamental, es comparar si los cursos de matemáticas que se dictan en las instituciones educativas, toman en consideración los mismos contenidos (análisis interinstitucional), del primer curso de matemáticas, o si por el contrario, las temáticas varían según el criterio del profesor, y su formación particular.

De acuerdo con la información obtenida, puedo decir que los cursos que ofrecen las UAC y las UANC tiene múltiples nombres, entre los cuales se encuentran: matemática(s) fundamental(es), álgebra y funciones, formación básica en matemáticas, números y operaciones, matemática básica, entre otros. Además dichos cursos no tienen los mismos contenidos, sin embargo se pueden identificar algunos rasgos comunes.

Esta variedad de nombres refleja en parte, los propósitos, los contenidos y demás aspectos que tienen estos cursos a nivel interinstitucional, acorde con el perfil del profesional que desean formar. Por lo tanto, queda evidenciado, que en las U_2, U_3 y U_5 el primer curso de matemáticas no depende de la carrera, mientras que en las universidades restantes (U_1, U_4, U_6, U_7) sí.

Del análisis de los programas de los cursos (ver Anexo A) podemos notar que:

- Todos los cursos tienen una *Clave* o código institucional, en nuestro caso, la clave está compuesta por el programa del curso P*n* (*n* donde es el número que me indica cuántos programas de matemáticas hay en un misma universidad), la universidad a la cual pertenece el programa del curso (denotado por *Um*, donde *m* es un número que varía entre 1 y 7), y por último, el código interno que tiene la asignatura dentro de la IES. Por ejemplo, la clave correspondiente a la única asignatura de matemáticas fundamentales que se ofrece, en el caso de la U_2 está dada por: P1U2AF08272.

- La intensidad horaria, en su mayoría, es de 4 horas semanales, aunque en algunos casos, es de 6 horas semanales.

- Por lo general, en el (87%) de los programas obtenidos, no existen prerrequisitos para el curso de matemáticas fundamentales. En algunas instituciones universitarias, el ver o no el primer curso de matemáticas, depende del puntaje ICFES, el no aprobar una prueba diagnóstica clasificatoria, o la admisión a la universidad.

- No siempre aparece un propósito en los programas de los cursos, pero en la presentación de los objetivos específicos, se puede reconocer un interés general, por generar en los estudiantes, las competencias necesarias para afrontar los demás cursos de la formación básica en matemáticas.

- En cuanto a la organización de los contenidos, varía de acuerdo con el texto guía, sin embargo, es posible reconocer los elementos (o contenidos) comunes que comparten los programas de los cursos, abordando tres ejes temáticos:

  <u>Sistemas numéricos</u>

  Tipo de conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos) y su estructura algebraica. Representación geométrica de los reales y los complejos. El orden en los reales y las propiedades de orden.

<u>Álgebra</u>

Definición de variables, expresiones algebraicas, y sus operaciones. Potenciación (con exponentes enteros y racionales) y radicación. Polinomios, productos notables, factorización. Solución de ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas, con radicales, con valor absoluto, polinómicas. Aplicaciones.

<u>Funciones</u>

Definición de función, dominio y rango. Tipos de funciones y sus operaciones. Composición. Gráfica de funciones. Funciones especiales (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, par, impar, monótona, etc.). Inversa de una función. Funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Aplicaciones.

Sólo en el 36% de los programas de los cursos se estudian temas relacionados con geometría analítica.

- Hay una gran variedad de metodologías, que van, desde la clase magistral (en donde la responsabilidad sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes recae fundamentalmente sobre el profesor, y las estrategias que él emplee para conseguir los objetivos específicos) hasta el aprendizaje activo (en donde el estudiante debe preparar la clase, y el desarrollo de la misma depende de las inquietudes que éste presente, o que el profesor lleve como fuente dinamizadora de la discusión).

- Dentro de la variedad de posibilidades metodológicas, hay universidades como U_6 que no presentan por escrito ni la metodología a seguir ni la evaluación, se cree, que esto puede ser por la libertad de cátedra.

- La evaluación consiste fundamentalmente en dos o tres exámenes parciales equivalentes al 75% (o 80%) de la nota definitiva, y el 25% (o 20%) restante corresponde a exámenes cortos, tareas, talleres, controles de estudio, entre otras alternativas de evaluación que haya diseñado el docente del curso, que pueden ser individuales o colectivas.

- Las referencias bibliográficas son supremamente heterogéneas, ya que en algunos casos, depende de la carrera a la cual va dirigida el curso, bien sea que se trate de administradores, economistas, ingenieros, educadores o matemáticos, entre otros., o del docente encargado de dictar el curso.

De acuerdo con la gran variedad de contenidos presentes en los programas de matemáticas fundamentales, resultaría muy difícil establecer la razón por la cual hay un porcentaje tan alto de reprobación para el primer curso de matemáticas. Algunos de los factores que dificultan el buen desempeño son:

- El tiempo para los procesos de enseñanza y aprendizaje, es muy limitado en la mayoría de las universidades, comparado con el tiempo que disponían los estudiantes en la educación básica y media[4].

- Dar por sentado, que los estudiantes a lo largo de su escolaridad, han alcanzado la suficiente madurez en el pensamiento matemático, es un error. De acuerdo a la investigación de Ursini & Trigueros (2006), se puede afirmar que para medir el desarrollo del pensamiento variacional, es necesario analizar la capacidad que tienen los estudiantes de integrar y diferenciar los distintos usos y aspectos de la variable[5].

  Sin embargo, encuentran que no hay cambios notorios en la manera en la que los estudiantes de los distintos grados escolares (octavos, undécimos y universitarios que toman cursos avanzados de matemáticas) emplean la variable, sobre todo, cuando aparece una relación funcional. Éste ejemplo muestra inmadurez en el desarrollo del pensamiento matemático, en particular, lo relacionado con el pensamiento variacional.

[4] Los programas P5U6NO40-11 y P6U6IA405056M-12 muestran el único caso en que el curso de matemáticas fundamentales se hace en dos semestres (ver Anexo A).
[5] Los aspectos de la variable a los cuales se refiere consisten en que el estudiante sea capaz de trabajar exitosamente problemas y ejercicios que involucran la incógnita, el número general y variables en relación funcional.

- La gran cantidad de contenidos que deben ser abordados en el primer curso de matemáticas, hace que se enfoque, en las habilidades y técnicas, más que el desarrollo de las capacidades cognitivas de orden superior (visualizar, analizar, sintetizar, razonar, argumentar, etc.), que permitan el buen desempeño del pensamiento matemático en diferentes dimensiones.

Ahora bien, al considerar en esta investigación las desigualdades, el valor absoluto y las inecuaciones lineales con valor absoluto, no se está afirmando que el fracaso académico en el primer curso de matemáticas, se deba exclusivamente a los problemas de conceptualización que ellos presentan.

Básicamente, la problemática se debe a que dichas temáticas, se encuentran en un terreno intermedio entre el álgebra y el análisis, poniendo en evidencia la falta de madurez de los estudiantes en relación, con la noción didáctica de la variable.

Otro aspecto problemático en la adquisición de conocimiento matemático está ligada a la mirada de dichos objetos que involucran una perspectiva plurirregistro, con la cual se podría estar contribuyendo en la formación de las capacidades necesarias para afrontar, de mejor manera, los demás cursos de matemáticas en licenciados, ingenieros, matemáticos, administradores, economistas y contadores, entre otros.

2. Problema de investigación

La motivación inicial de este trabajo, nace de la búsqueda por evidenciar, cómo la perspectiva semiótica propuesta por *Duval,*[6] se lleva a la práctica pedagógica a nivel universitario, durante el primer año, momento que, resulta particularmente difícil, para los

[6] Raymond Duval, profesor emérito de la Universidad del Litoral, trabajó durante largo tiempo en el Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo) en cursos de Psicología Genética y Psicología Cognitiva para estudiantes de matemáticas y en la formación continua de docentes. Sus principales publicaciones surgen de los resultados de sus trabajos sobre los problemas relativos a la comprensión de textos, el aprendizaje de diferentes formas de razonamiento (argumentación, demostración, utilización de lenguas formales), la interpretación de las representaciones gráficas y de las figuras geométricas, así como problemas más generales de cambios de registro de representación.

estudiantes. Muestra de ello, son los resultados que registran las universidades U_2 y U_3, en los cuales, se afirma que en promedio, el 30% de sus estudiantes *reprueban* el primer curso de matemáticas a nivel universitario y, además, éste porcentaje se mantiene para el curso siguiente.[7]

Frente a esta situación, las unidades académicas de las diferentes universidades de Cali, han planteado las siguientes estrategias:

- El diseño de cursos[8] o seminarios, como los "Semilleros de Matemáticas", que tienen como propósito complementar la formación que brindan las instituciones educativas, a los estudiantes que aspiran continuar con sus estudios universitarios.

- La aplicación de pruebas diagnósticas, con las cuales se identifican los "vacíos", que tienen los estudiantes en su formación básica y media, para posteriormente proponer un curso que haga especial énfasis, en superar las dificultades previamente identificadas.

- En algunos casos se ha cambiado el curso de cálculo I (donde se estudiaban límites, derivadas e integrales para funciones de una variable), por un curso de Cálculo diferencial, (el cual inicia con un repaso de ecuaciones, inecuaciones y funciones; para luego finalizar con el estudio de límites, continuidad, y derivadas de funciones en una variable).

- También se ha optado, por un examen clasificatorio que permita organizar a los "primíparos" en dos grupos: aquellos que deben iniciar con el curso de "precálculo"[9] , y los que pueden iniciar con Cálculo I (o Cálculo diferencial).

---

[7] Lamentablemente, no fue posible contar con los porcentajes que aluden a la reprobación, del primer curso de matemáticas fundamentales de las siete universidades, porque no todos tienen sistematizada la información. Por ejemplo, para el caso de la universidad U_7, a pesar de contar con la autorización del director académico de la universidad, registro académico no suministró la información.

[8] Actualmente funciona el "Plan Talentos", el cual tiene como propósito preparar a algunos jóvenes del municipio de Cali para que puedan presentar las pruebas ICFES, y acceder a estudios de Educación Superior, esencialmente universitarios. Este programa es un convenio que existe entre la Secretaría de Educación Municipal Alcaldía de Santiago de Cali, y la Universidad del Valle.Como este tipo de programa de formación, existen otros que procuran suplir las deficiencias en la formación matemática, que tienen los estudiantes que aspiran ingresar a la universidad.

- En la actualidad, algunas universidades como: U_3 y U_6 adelantan olimpiadas matemáticas, las cuales buscan incentivar en los estudiantes una buena disposición frente al aprendizaje de las matemáticas, e identificar los talentos de la región.

Aunque han sido muchas las alternativas[10] que se han propuesto para solucionar el problema, la historia se repite, de modo que, incesantemente emerge la cuestión sobre ¿cuál es la raíz del problema, del alto porcentaje de reprobación del primer curso de matemáticas fundamentales?

Muchas de las estrategias que se ponen a prueba en relación con los cursos de matemáticas del primer año universitario, de manera consciente o no, se enfocan no sólo en los contenidos, sino también, en la manera cómo son abordados, en comparación con la educación básica y media.

Las investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático, afirman que la transición de la secundaria a la universidad implica pasar de un pensamiento intuitivo, a un acercamiento lógico-formal, es decir, el paso del Pensamiento Matemático Elemental, (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), lo cual equivale pasar de la descripción y definición, a la demostración.

De acuerdo con lo anterior, las investigaciones cognitivas interesadas en los procesos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de los temas afines con el cálculo infinitesimal, han desarrollado diferentes teorías que intentan explicar la complejidad de los procesos de aprendizaje a nivel universitario; algunas teorías son: los esquemas conceptuales (Tall y Vinner, 1981 citado por Alvarenga (2003)), la teoría de APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), citado por Trigueros (2005) y la perspectiva semiótica de Duval (1995), entre otras.

[9] Los cursos de precálculo se caracterizan por presentar de manera sintética los contenidos que deben haber aprendido los estudiantes en su formación básica y media. Estos son los cursos conocidos bajo el nombre de matemáticas fundamentales, álgebra y funciones, fundamentos de las matemáticas, entre otros.

[10] Observemos que las medidas tomadas no sólo son a posteriori sino a priori al ingreso a la universidad, es decir que también se está pensando en aquellos estudiantes que aspiran a realizar estudios universitarios.

Las dos primeras teorías (esquemas conceptuales y teoría APOE), consideran que el acceso a los objetos matemáticos se da por su manipulación, o por la acción sobre los conceptos, mientras que en la última, el acceso se garantiza por la mediación semiótica, es decir, por la coordinación que el sujeto hace de las diferentes representaciones del objeto.

Se halla que no es posible manipular el objeto sino su representación. Aunque esta última perspectiva se constituye en un referente teórico para las investigaciones enmarcadas en el PMA, son muy pocos los trabajos que hay al respecto, en la educación superior. Además esta perspectiva plantea que **la complejidad de las matemáticas no está ligada principalmente al nivel educativo, sino que obedece a las exigencias cognitivas requeridas para la movilización de los objetos.**

De manera que se plantea una solución alternativa, que no se enfoca en cuáles contenidos deben ser o no abordados[11], sino en las operaciones intelectuales de orden superior (análisis, síntesis, visualización, interpretación, inferencia, etc.), que deben permitir hacer construcciones conceptuales posteriores.

En este orden de ideas estamos de acuerdo con Duval (1999, pp.15-16) cuando afirma que:

> *Se parte del hecho de que los problemas de comprensión en matemáticas no se deben sólo a la complejidad particular de cada contenido enseñado, sino que es necesario considerar también la complejidad de la construcción, no sólo de los saberes, sino de los funcionamientos que constituyen la infraestructura operacional del pensamiento.*

Para la reflexionar sobre las condiciones de la adquisición de conocimientos a nivel universitario, se han seleccionado las inecuaciones lineales con valor absoluto en una

[11] Es importante aclarar que la selección de los contenidos que deben ser abordados en la institución son importantes, sin embargo no podemos garantizar que los estudiantes estén o no sobre informados en relación con su perfil, es decir que no se puede precisar cuáles son con exactitud los conocimientos que él requiere en su vida profesional, sin embargo en las universidades se fijan unos conceptos básicos de acuerdo con los estándares nacionales e internacionales y el perfil que se está formado.

variable, es decir, las expresiones de la forma: $|ax+b| * c$ [12] donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $*$ representa cualquiera de las siguientes relaciones: $>, \geq, \leq$ ó $<$. Se ha elegido este tipo de inecuaciones porque:

- Se encuentran en la transición del álgebra al análisis.
- Permiten abordar aspectos relativos a dos operaciones cognitivas de orden superior, poco trabajadas en la escuela, y que deben desarrollar los estudiantes como parte de su formación, en aras de la construcción del pensamiento matemático sólido, que son, la visualización e interpretación de gráficos.
- Además las inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable (ILVA1V), son transversales en el aprendizaje de los objetos matemáticos estudiados en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, y Análisis en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$.

De otro lado Duval (1999, p. 15) afirma que:

> *El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, no es sólo saber cuáles contenidos enseñar, y de qué manera introducirlos, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión, con los cuales se enfrentan la mayoría de los estudiantes de todos los niveles de enseñanza*.

Teniendo en cuenta lo anterior, se centró la atención en las razones estructurales a las cuales alude Duval, es decir, en el aspecto cognitivo que se ha considerado fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, como es el hecho de que *la actividad matemática es plurirregistro*[13], y en consecuencia, se hace necesario que los objetos matemáticos sean movilizados a través de diferentes registros de representación semiótica, a fin de que el sujeto no confunda el objeto con su representación, y así logre desarrollar sus capacidades de visualización, razonamiento (argumentativo y deductivo), análisis, etcétera.

[12] Cada vez que escribamos * en la expresión $|ax+b|*c$ estamos haciendo alusión a cualquiera de las siguientes ILVA1V: $|ax+b|<c, |ax+b|\leq c, |ax+b|>c$ o $|ax+b|\geq c$.

[13] Dado que los objetos matemáticos no son accesibles por medio de los sentidos, sino por medio de los registros de representación semiótica, Duval afirma que los procesos de comprensión de los objetos matemáticos pasa por el reconocimiento o la diferenciación, que hace el sujeto, entre el objeto matemático y de sus diferentes modos de representación semiótica, en este sentido la comprensión está garantizada por la movilización del objeto matemático a través de diferentes (o múltiples) registros de representación semiótica.

Cabe entonces preguntarse ¿qué ocurre con la enseñanza tradicional, es que acaso no tiene en cuenta los diferentes registros de representación (numérico, de escritura algebraica, el gráfico, la lengua natural, etc.), para la enseñanza de los objetos matemáticos? Al respecto, Duval afirma que la enseñanza tradicional es monorregistro porque la atención se centra en aprender los *tratamientos* propios a cada registro de representación, y no en su coordinación o en la operación cognitiva de *conversión*[14].

Por tanto, toda investigación realizada desde esta perspectiva plurirregistro debe poner especial atención, no sólo en la determinación de los registros que deben ser movilizados, sino también en establecer las reglas de conversión que le permitan al estudiante controlar la correspondencia, entre los diferentes registros de representación semiótica.

Para el caso de las inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable, se pretende determinar las *unidades significantes,* al igual que las reglas de correspondencia, que permiten al estudiante, movilizar las ILVA1V por los registros de representación gráfica (bien sea en la recta numérica, $\mathbb{R}$, o el plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$), y el registro de escritura algebraica.

Las *unidades significantes* sólo se definen, cuando se tiene como propósito construir las reglas de correspondencia entre dos registros de representación, es decir, que no pueden definirse de manera aislada, pues su sentido gira en torno a la relación que puede ser establecida entre dos o más registros de representación.

En esta medida, su identificación o discriminación sólo puede llevarse a cabo sometiendo la representación inicial a todas las variaciones posibles, con la condición de que las representaciones formadas por modificaciones sistemáticas en el registro de partida, generan alguna transformación en el registro de llegada. Dichas variaciones efectuadas en

[14] El ***tratamiento*** es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un sólo registro de representación, mientras que la ***conversión*** es una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues, su coordinación por parte del sujeto. (Duval 1995, p. 31)

el registro de partida, que genera una o varias transformaciones en el registro de llegada, son las denominadas unidades significantes.

En este trabajo en particular las unidades significantes están constituidas por la correspondencia que existe entre las *variables visuales* (ligadas al registro de representación gráfica), y las respectivas *variables simbólicas o categoriales* (ligadas al registro de escritura algebraica). Por ejemplo: para el caso de la representación gráfica de la recta ($y = mx + b$), una unidad visual significante es *el corte con el eje "y"*, el cual puede estar por encima (o por debajo) de la horizontal o simplemente, pasar por el origen. A estos tres valores de la variable visual (*corte con el eje "y"*), le corresponden tres valores de la variable simbólica (b), los cuales son respectivamente: añadir una constante con signo positivo ($y = mx + b$, con $b > 0$), añadir una constante con signo negativo ($y = mx - b$, con $b < 0$) o una constante igual a cero ($y = mx + b$, con $b = 0$).

La correspondencia entre las unidades significantes no siempre es sencilla, en tanto que a una variable visual pueden corresponderle más de una variable simbólica (o viceversa), lo cual hace necesario examinar los tres criterios de congruencia, entre representaciones semióticas:

- La posibilidad de establecer la correspondencia "semántica" de los elementos significantes.
- La univocidad "semántica" terminal.
- La correspondencia en el orden del arreglo de las unidades que componen.

Cuando al menos uno de los tres criterios falla, se dice que la conversión no es congruente. Es posible además, que haya correspondencia en un sentido de la conversión, pero no en el otro, de manera que el estudio de la congruencia implica definir cuáles son los registros de llegada y partida, a través de los cuales son movilizados los objetos matemáticos.

Hasta ahora se ha problematizado la actividad matemática plurirregistro, en tanto que ella exige no sólo la operación cognitiva de tratamiento, sino que demanda de la operación cognitiva de conversión, la cual no se reduce a una decodificación o traducción de la información. Además, se ha definido el objeto matemático con el cual se trabajó. Sin embargo, faltaría mirar otro aspecto importante de la actividad matemática centrada en los registro de representación, la cual está ligada los aspectos sintácticos y semánticos de toda representación.

Una vez seleccionado el *objeto representado,* es importante notar que la elección de un registro de representación determina la dupla *forma/contenido.* La *forma* hace referencia a la marca utilizada para representar el objeto, y que está ligada, a su modalidad de representación: gráfica, simbólica, geométrica, etc. Por su parte, el *contenido* alude al significado particular, el cual depende del contexto, y además determina las propiedades del objeto. La

Tabla **2** ilustra la relación dupla forma/contenido para el caso de la ILVA1V dada por $|x| < 5$.

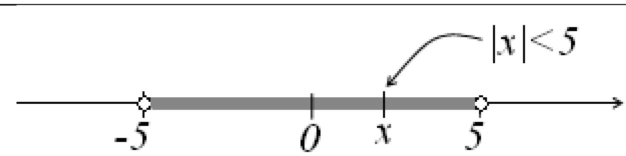
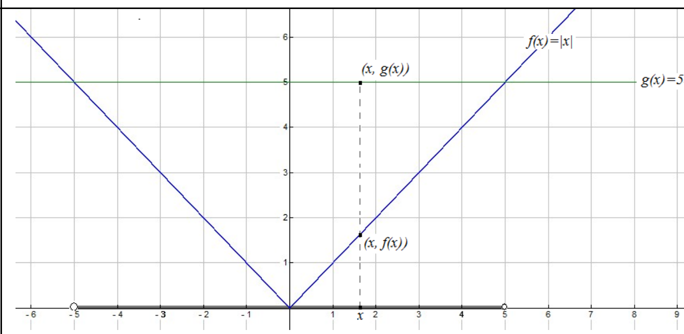
Objeto matemático: Inecuación lineal con valor absoluto en una variable	
Contenido	**Forma**
Geométrico x representa todos los puntos sobre la recta numérica, tales que su distancia a cero es estrictamente menor a cinco unidades	
Funcional x representa los valores de la variable independiente para los cuales $f(x)$, está por debajo de $g(x)$ (o de forma equivalente, nos interesa determinar los valores de x para los cuales $g(x) = 5$ está por encima de $f(x) = \lvert x\rvert$)	

Tabla 2. Los tres polos constitutivos de toda representación semiótica: objeto, contenido y forma.

En el primer caso, el *contenido particular* al cual se alude en geometría, es la noción de distancia sobre la recta real, y *la forma* está ligada a la representación geométrica sobre la recta numérica (región sombreada). En el segundo caso, el *contenido particular* desde el punto de vista funcional, indica que es necesario determinar los valores de x (o preimágenes), para los cuales $f(x)$ está por debajo de (o es menor que) $g(x)$, y *la forma* es la representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el mismo plano cartesiano.

Si bien, las diferentes formas de representación que se han ilustrado pueden utilizarse para hacer referencia al mismo objeto matemático. No se aluden a las mismas propiedades porque comprender un objeto matemático, implica acceder a él a través de diferentes registros de representación (lenguaje natural, gráfico, escritura algebraica, etc.), y en consecuencia, a sus diferentes significados particulares (Duval, 1995).

De esta manera se considera que una enseñanza que toma en consideración la importancia de los usos y coordinación de los diferentes registro de representación, debe evitar, que los estudiantes incurran en afirmaciones incorrectas como: $|x| = x$ y $|-x| = x$, para todo número real x.

Se han privilegiado los registros de escritura algebraica y gráfica inicialmente, porque las investigaciones realizadas por Cantoral *et al*. (2003), Valdez, C. y De Las Fuentes, M (s.f.) en torno a la solución de las inecuaciones, generalmente promueven el uso de los gráficos (en el plano cartesiano), para sobre pasar las dificultades en la determinación del conjunto solución; pues se cree que esta clase de representaciones además de ayudar a dotar de sentido a la expresión algebraica, permite desarrollar pensamiento variacional.

Si bien se le atribuyen bondades al registro de representación gráfica, **no se pretende privilegiar un registro sobre otro**; como el propósito es ganar en comprensión, el interés ha sido, identificar las reglas que debe construir un estudiante a fin de movilizar el objeto a través de diferentes registros de representación, en este caso en particular, los registros de escritura algebraica y de representación gráfica, mediados por el registro de lenguaje natural.

Dado que en principio no se tenía claridad sobre cuál de los dos registros de representación gráfica sería pertinente en la movilización de las inecuaciones lineales con valor absoluto, pues cada una tiene implicaciones didácticas diferentes, fue necesario dar respuesta a siguiente interrogante:

¿Cuáles son las unidades cognitivas pertinentes en el aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro, que exige la coordinación de los registros de representación gráfica (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}$) y el de escritura algebraica?

Una vez definida la pregunta de investigación paso a definir los objetivos que se trazaron para dar respuesta a la pregunta de investigación.

3. Objetivos de la investigación

Objetivo general

Identificar y describir algunas de las unidades significantes, relativas a los registros de representación gráfica y de escritura algebraica, que son pertinentes cognitivamente en el aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto en una variable, desde una perspectiva plurirregistro.

Objetivos específicos

- Determinar los tratamientos propios de cada registro de representación utilizados para la movilización de las inecuaciones lineales con valor absoluto.
- Determinar el tipo de transformaciones que se promueven en los textos escolares de matemáticas, a nivel universitario.
- Establecer las reglas de correspondencia entre registros de representación gráfica (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}$), y registro de escritura algebraica.

- Caracterizar los démarches de solución de ejercicios que involucran ILVA1V, en dos poblaciones, una con intervención plurirregistro y una monorregistro.

Finalmente, este capítulo, por una parte, muestra un panorama general sobre cuáles son los propósitos, cómo están organizados los contenidos, y cuáles han sido los énfasis que se le han dado al primer curso de matemáticas fundamentales en las IES del Valle del Cauca. Además, se mencionan las múltiples estrategias que se han generado para disminuir los índices de pérdida de los cursos de matemáticas fundamentales, máxime cuando se asume este curso, como un espacio donde los estudiantes deben recordar más que construir conocimiento matemático. Al respecto cabe anotar que el propósito es problematizar que el énfasis está en la modificación de los contenidos de los programas, y no en las actividades cognitivas requeridas para un buen desempeño, en cualquier curso de matemáticas fundamentales.

Azcárate & Camacho (2003), afirman que las investigaciones cognitivas que hay sobre los procesos relacionados con el aprendizaje de los conceptos matemáticos a nivel universitario, muestran que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógica formal de presentar un concepto matemático, de hecho, es frecuente que dicha presentación lógica[15] ofrezca obstáculos cognitivos.

En la presentación que hacen Azcárate & Camacho (2003) del desarrollo curricular que ha tenido el Análisis Matemático, se muestra que muchas de las modificaciones que se han hecho, van dirigidas a una introducción del Análisis Matemático más intuitivo y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías.

Igualmente en Francia, Artigue (1997) (citado por Azcárate & Camacho (2003)) muestra que en los programas de Análisis Matemático, se ha reducido sustancialmente la

[15] La presentación lógica a la cual nos referimos tiene que ver con el hecho de que usualmente, en las clases de matemáticas, se introduce una definición, seguido un ejemplo y posteriormente el conjunto de propiedades del objeto matemático que se ha definido. Además esta es la presentación y organización de la mayoría de los textos escolares, lo cual parece basarse en la presunción de que los conceptos matemáticos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas, cuando en realidad, el saberse de memoria una definición de un concepto no garantiza la comprensión de su significado.

formalización, y se organiza la actividad matemáticas en torno a la resolución de problemas de optimización, aproximaciones de números y funciones, modelización de variaciones discretas y continuas.

Si bien, las investigaciones que hay en torno a la enseñanza del Análisis Matemático apuntan a una reducción en la formalización de la presentación de los contenidos, no debe dejarse de lado, que es fundamental en la etapa del desarrollo cognitivo, que el estudiante adquiera los conocimientos matemáticos, para que logre desarrollar de manera progresiva, procesos cognitivos importantes como analizar, definir, formalizar, generalizar, sintetizar, categorizar, conjeturar, representar y visualizar.

Ahora bien, si se tiene en cuenta que el álgebra debe ser autoreferencial, es decir que, los objetos deben estar definidos y caracterizados por sus propiedades, el énfasis debería estar puesto la coordinación del REA y LN, puesto que el REA tiene la potencia de la generalidad. Además, al revisar la perspectiva establecida desde el siglo XIX, a partir de Cauchy, se observa que necesario fundamentar los conocimientos sobre un discurso riguroso y no sobre la intuición, en este sentido, es importante aclarar que un trabajo en esta dirección debería poner el énfasis en los procesos generales de analizar, definir, formalizar, generalizar, entre otros.

Sin embargo esta propuesta didáctica no logra llegar al punto en que es posible la formalización del conocimiento matemático al nivel planteado en el PMA porque ello, de un lado, implica centrar la atención en los REA y LN pero la coordinación de estos dos registros es bastante compleja dado que el registro de la lengua natural es *multifuncional*, es decir que no utilizado de manera exclusiva en matemáticas lo cual hace que la identificación de las variables significantes sea más complejo y de otro porque nos interesa ver cómo el acercamiento funcional a las ILVA permiten superar los obstáculos que se presentan en la aplicación de la noción de valor absoluto cuando dicha noción se introduce desde lo numérico.

De esta manera es pertinente acotar que el interés está en el proceso cognitivo de visualización. Éste consistió en lograr que los estudiantes discriminaran de las representaciones gráficas, las variables cognitivas[16] pertinentes que les permitieran dar solución a las actividades propuestas en las intervenciones de aula, y la prueba de contraste.

Ahora bien, de acuerdo al análisis de los programas, se plantea la pregunta de investigación como uno de los aspectos que se deben considerar en la planeación de las actividades, y de los contenidos que se desarrollan en los cursos de matemáticas, reflexión que es válida, para los estudiantes de los diferentes niveles educativos (estamos haciendo alusión a la educación básica, media y superior).

Se pretende destacar que los programas de los cursos de matemáticas fundamentales (ver Anexo A), fueron estudiados en profundidad. Sin embargo, queda abierta la posibilidad de indagar sobre cómo la organización interna de las IES, en unidades académicas centralizadas y descentralizadas, puede o no influir en la determinación de los contenidos, y la distancia que hay entre el programa de curso planteado y el ejecutado, pues finalmente los cursos de matemáticas, varían mucho de uno a otro, cuando son llevados a cabo por UANC.

Por otra parte, un primer resultado fue la caracterización lograda del primer curso de matemáticas que se dicta en las IES del Valle del Cauca, el cual se obtuvo a partir de la identificación de los rasgos comunes en los programas recolectados. Es importante tener claro que son muchas las propuestas del curso de matemáticas fundamentales, muestra de ello es que los contenidos de geometría analítica sólo aparecen en el 36% de los programas.

Sin embargo, recordemos que los temas relacionados con geometría analítica son necesarios para que los estudiantes afronten con mayor solvencia los cursos de cálculo multivariable. Otro aspecto que hace la diferencia, es la evaluación por competencias, la cual está empezando a aparecer en algunos programas (31% aproximadamente), no

[16] Las variables cognitivas están dadas por el conjunto de valores posibles de las variables visuales y las variables simbólicas.

obstante, debe examinarse a profundidad para ver si estos cambios, son sólo nominales o si por el contrario, tienen un impacto en las prácticas educativas.

CAPÍTULO 2
REFERENTES TEÓRICOS

Introducción

El propósito fundamental en este capítulo, es presentar los referentes teóricos de orden matemático y cognitivo que se tuvieron en cuenta, para la identificación y descripción de las unidades significantes relativas, a la coordinación de los registros de representación gráfica y de escritura algebraica, en el aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto en una variable, desde una perspectiva plurirregistro.

Para ello, se presenta una aproximación matemática del objeto de nuestro interés, donde se evidencian sus propiedades, las cuales están determinadas por los registros semióticos de escritura algebraica y gráfica.

Una vez definidos los aspectos matemáticos tomados en consideración para la secuencia de actividades y análisis de los textos escolares, se presentan los aspectos de orden cognitivo, como son las transformaciones de tratamiento (en el interior de cada registro monofuncional), y de conversión (entre un registro discursivo y otro no discursivo).

Finalizamos la presentación del Capítulo 2, presentando el tipo de tareas incorporadas en los textos y, por ende, el tipo de exigencias cognitivas que de allí se derivan; además, se ilustrarán los registros de representación más utilizados, junto con los procesos matemáticos que pueden colegirse de las actividades propuestas.

Así, planteamos los elementos centrales de orden matemático y cognitivo, a partir de los cuales hemos construido las variables cognitivas utilizadas en el diseño de actividades que tiene como propósito, hacer que el estudiantes domine los diversos tipos de transformaciones posibles, entre los diferentes registros de representación que son objeto de estudio de este trabajo.

1. Aproximación matemática

En esta sección se presentan aquellas definiciones, axiomas y teoremas que se requieren para caracterizar las ILVA1V como objeto matemático, en el primer año universitario.

1.1 Relaciones binarias especiales

En matemáticas fundamentales se abordan las ecuaciones e inecuaciones, la cuales son casos particulares de relaciones más generales como la relación de equivalencia y la relación de orden, las cuales están definidas sobre expresiones algebraicas, respectivamente.

La característica que diferencia los dos tipos de relaciones mencionadas anteriormente, tiene que ver con el hecho de que las ecuaciones son relaciones binarias simétricas, mientras que las inecuaciones son relaciones binarias antisimétricas. Esta distinción tiene repercusiones en términos de los procedimientos, que se deben llevar a cabo en la solución de las ecuaciones y de las inecuaciones.

La presentación se inicia definiendo los cuatro tipos de relaciones binarias especiales, a partir de las cuales se construyen las relaciones de orden total, que son de nuestro interés, particularmente, las inecuaciones.

Sea X una colección de objetos (posiblemente un conjunto). Una relación R de X en X es:

- **Reflexiva**[17] si xRx (x está relacionado con x) para todo $x \in X$.
- **Simétrica** si xRy implica yRx (si x está relacionado con y, entonces y está relacionado con x)
- **Antisimétrica** si xRy y yRx implica $x = y$ o R es **antisimétrica** si y sólo si $x \neq y$ implica ¬ (xRy y yRx) (contrarecíproca)
- **Transitiva** si xRy y yRz entonces xRz.

Como ya se había mencionado, la igualdad (las ecuaciones) y la desigualdad (las inecuaciones), en tanto que casos particulares de relaciones de equivalencia y orden respectivamente, están definidas en función de las relaciones binarias especiales antes mencionadas.

1.2 Relaciones de equivalencia

Si R es una relación de X en Y, definimos $R(x) = \{y \in Y\colon xRy\}$. Es claro que $R(x) \neq \emptyset$ sí y sólo si $x \in dom(R)$.

Sea X una colección de objetos. Una relación de R en X (es decir, una relación de X en X) es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Si R es una relación de equivalencia, diremos que x y y son R-equivalentes (ó equivalentes, sino es necesario explicitar a R) si xRy.

Se Observa que una relación de equivalencia n no es vacía, porque para todo $x \in X$, se tiene que xRx por ser reflexiva.

Cuando no es necesario explicitar a n denotaremos por $[x]$, o por $\dot{x}$ a la clase de equivalencia de x.

No se han presentado todas las propiedades que permiten caracterizar la relación de equivalencia, porque no es el propósito de este trabajo.

[17] Como esquema de presentación, se emplearán **negrillas** para las definiciones.

1.3 Relaciones de orden parcial

Sea X una colección de objetos. Una relación R en X es una **relación de orden parcial** (ó **relación de orden** simplemente) si es reflexiva[18], antisimétrica y transitiva. Es decir,

(OR1) $x \leq x$ para todo $x \in X$ (reflexiva)

(OR2) $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$ (antisimétrica)

(OR3) $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$ (transitiva)

De acuerdo con la definición anterior, podemos observar que las propiedades comunes a las relaciones de equivalencia y orden son: la reflexiva y la transitiva.

Una **colección ordenada** es una colección, X en la cual se ha definido una relación de orden parcial. Si X es un conjunto, diremos que X es un **conjunto ordenado**. Escribiremos $(X, \leq)$ para indicar que X es una colección de objetos con una relación de orden $\leq$. Es posible definir muchas relaciones de orden en un conjunto X. Para indicar relaciones de orden diferentes escribiremos, $\leq_1, \leq_2$, ..., etcétera.

Una **relación de orden total** en una colección es una relación de orden que satisface el axioma adicional siguiente:

(OR4) si $x, y \in X$ y $y \leq x$ entonces $x < y$, ó $y < x$ ó $x = y$.[19]

Una vez definida la relación de orden total se dirá que: si X es cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ (es decir $X \subseteq \mathbb{R}$ y $X \neq \emptyset$), en particular puede ser $\mathbb{R}$ mismo, a la relación de orden total $(X, \leq)$, se denominará **desigualdad**. Es decir, que el término desigualdad se utiliza esencialmente cuando se desea comparar valores numéricos o se quiere ordenar subconjuntos numéricos de $\mathbb{R}$.

[18] Note que $(\mathbb{R}, \leq)$ es una relación de orden total sobre $\mathbb{R}$, además esta relación no puede ser definida por medio de una desigualdad estricta, es decir, por medio de la relación menor que, porque de lo contrario no sería posible que fuese reflexiva.

[19] Este último axioma es más conocido como **axioma de la tricotomía.**

Finalmente veamos que la desigualdad definida sobre el conjunto de números reales es un caso particular de la relación de orden total. Sin embargo, no todas las relaciones de orden son desigualdades, en tanto que la relación de orden depende del conjunto X y la manera como se define $\leq$.

Tenemos que la expresión $x \leq y$ también puede ser escrita como $y \geq x$, a dicha relación binaria se le denomina orden dual de $\leq$ y también es una relación de orden. De modo que si es cierta una afirmación que involucre la relación $\leq$, también es cierta su dual. Además $x \leq y$ es equivalente a $x < y$ ó $x = y$ de acuerdo con la definición de $\leq$. De esta manera se observa que las relaciones: **mayor que y mayor o igual que** se definen, a partir de las relaciones menor que y menor o igual que, respectivamente.[20]

En general, podemos decir que una **inecuación** es una desigualdad en cuyos miembros hay números y letras, a estos últimos se les denomina **incógnitas** de la inecuación. Resolver la inecuación es hallar los valores de la incógnita que hacen cierta la desigualdad. Estos valores se conocen como el **conjunto solución (CS)** de la inecuación. Dado que el CS de una ecuación o de una inecuación, es un subconjunto del dominio (en nuestro caso el dominio de la variable es $\mathbb{R}$), resulta importante introducir la definición de intervalo, porque en su mayoría, la solución de inecuaciones puede ser descrita como un intervalo o la unión de intervalos de $\mathbb{R}$.

1.4 Intervalos

Puesto que el conjunto solución (CS) de una inecuación generalmente corresponde a un intervalo, se presenta la definición de todos los posibles intervalos solución de una inecuación. Sea $(\mathbb{R}, \leq)$ una colección ordenada de objetos. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, cada uno de los conjuntos siguientes es un **intervalo limitado** de extremos a y b.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ (**Intervalo abierto**)

[20] Tomado del diccionario enciclopédico de matemáticas (1977, Numeral 305. pp. 958-959) realizado por la sociedad matemática del Japón

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ (**Intervalo cerrado**)

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Cada uno de los conjuntos siguientes es un **intervalo ilimitado:**

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}: a < x\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Seguidamente se proporciona la definición comúnmente utilizada para el valor absoluto y posteriormente, mostrar otras definiciones alternativas, las cuales dependen del contexto, según se aluda a uno geométrico, funcional, analítico, entre otros posibles.

1.5 El valor absoluto

El **valor absoluto** de $x \in \mathbb{R}$ es el número $|x| \in \mathbb{R}$ definido de la manera siguiente:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0;\ |x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

Una vez presentada la definición, es necesario estudiar las propiedades del valor absoluto, porque la aplicación de las mismas permite determinar expresiones equivalentes a una dada, y en consecuencia, obtener la solución de inecuaciones en particular, de ILVA1V.

Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

<u>*Demostración*</u>.

($\Rightarrow$) Si $|x| = 0$ no es posible que $x < 0$ pues en tal caso $|x| = -x$ y $-x > 0$ por axioma de la tricotomía. De igual manera Si $|x| = 0$ no es posible que $x > 0$ pues en tal caso, $|x| = x > 0$. Luego $x = 0$.

($\Leftarrow$) De la definición de valor absoluto de x, tenemos que $|x| \geq 0$. Si $x = 0$ entonces $0 = x = |x|$.

2. $|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Dado que $x \in \mathbb{R}$ pueden ocurrir cualquiera de los tres casos: $x < 0$, $x = 0$ ó $x > 0$. En el primer caso $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $|-x| = -x$ pues $-x > 0$. En el segundo caso $x = 0$, se sigue que $|x| = 0$ y $|-x| = |(-1) \cdot x| = |-1| \cdot |x| = 1 \cdot 0 = 0$. En el tercer caso $x > 0$, $|x| = x$ y $|-x| = -(-x) = x$ pues $-x < 0$.

3. $x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

De acuerdo con la propiedad de la tricotomía tenemos que: $x > 0$, $x = 0$ ó $x < 0$. Si $x > 0$ entonces $|x| = x$ lo cual implica $x \leq |x|$ o $|x| \leq x$, de igual forma si $x = 0$ tenemos que: $|x| = 0$, luego $|x| \leq 0$ o $|x| \geq 0$, por último si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, como $x < 0$ y $0 \leq |x| \leq -x$, de la propiedad transitiva de la relación de orden en los reales tenemos que $x < 0 \leq |x|$. Por tanto para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$.

4. $x^2 = |x|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, luego $|x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x = x^2$. Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ de modo que $|x|^2 = |x| \cdot |x| = (-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2$, de lo anterior concluimos que para todo número real x, $x^2 = |x|^2$.

5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Sean x y y reales negativos, entonces $|x| = -x$ y $|y| = -y$. $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = |(-x) \cdot (-y)| = |x \cdot y|$. Si x y y son reales positivos, entonces $|x| = x$ y $|y| = y$, de modo que $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$ por cerradura del producto de números positivos (ver axioma 7, p. 145 del Anexo B). Sin pérdida de generalidad supongamos que $x > 0$ y $y < 0$, de la definición de valor absoluto tenemos $|x| = x$ y $|y| = -y$, luego $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) =$

$|x\cdot(-y)| = |-(x\cdot y)| = |x\cdot y|$, esta última desigualdad queda garantizada por la propiedad 2, antes demostrada. Si al menos uno es cero tenemos que $|x|\cdot|y| = 0$ y $|x\cdot y| = |0| = 0$, en consecuencia $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

6. $|x+y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. (*Desigualdad triangular*)

Demostración.

$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ por propiedad distributiva

$|x+y|^2 \leq x^2 + 2|x|\cdot|y| + y^2 \leq |x^2 + 2|x||y| + y^2$ por propiedad 3

$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$ por propiedad 4

$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ por propiedad distributiva

Observemos que: sí $a, b \geq 0$ entonces $a \leq b$ sí y sólo si $a^2 \leq b^2$ ya que $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. De lo anterior podemos concluir que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

7. $|x| < r$ si sólo si $x < r$ y $-x < r$, para todo $r > 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$, luego $|x| < r$ implica $x < r$, ahora bien, si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, de modo que $|x| < r$ implica $-x < r$, en consecuencia para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| < r$ implica $x < r$ y $-x < r$.

($\Leftarrow$)Si $0 \leq x < r$ entonces $|x| < r$. Además es suficiente que $0 < -x < r$, es decir que $x < 0$ y $x < r$, en consecuencia tenemos que $-r < x < r$ implica $|x| < r$.

8. $(-r, r) = \{x : |x| < r\}; r > 0$

Demostración.

De la propiedad 7 si $r > 0$ entonces $|x| < r$ equivale a $x < r$ y $-x < r$, de esta última desigualdad tenemos que $x > -r$, de modo que $-r < x < r$.

Luego $\{x \in \mathbb{R}: |x| < r;\ r > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -r < x < r;\ r > 0\}$. Por definición de intevalo abierto tenemos que $\{x \in \mathbb{R}: -r < x < r;\ r > 0\} = (-r,\ r)$.

9. $|x| < r \Leftrightarrow x \leq r$ y $-x \leq r$; $r > 0$

Demostración.

$|x| < r$ o $|x| = r$ por definición de menor o igual que.

Caso 1: En virtud de la propiedad 7 tenemos que $|x| < r$ sí y sólo si $x < r$ y $-x < r$, para todo $r > 0$.

Caso 2: De la definición de valor absoluto tenemos que $|x| = r$ si y sólo si $x = r$ o $-x = r$, para todo $r > 0$, según sea x un real positivo o negativo.

Del análisis de los dos casos anteriores concluimos que $|x| \leq r \Leftrightarrow x \leq r$ y $-x \leq r$; $r > 0$.

10. $[-r, r] = \{x\colon |x| \leq r\}$; $r > 0$

Demostración.

De la propiedad 9 tenemos que para todos $r > 0$, $|x| \leq r$ equivale a $x \leq r$ y $-x \leq r$, esta última desigualdad significa que $x \geq -r$, por tanto $x \leq r$ y $|x| \leq r$ equivale a $-r \leq x \leq r$. Luego $\{x\colon |x| \leq r; r > 0\} = \{x\colon -r \leq x \leq r; r > 0\}$. Por definición de intevalo cerrado tenemos que $\{x\colon -r \leq x \leq r; r > 0\} = [-r, r]$. En consecuencia $[-r, r] = \{x\colon |x| \leq r\}$; $r > 0$ por el axioma transitivo de la igualdad.

11. $||x| - |y|| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Sea $x = (x - y) + y$. Por propiedad 6 (desigualdad triangular) tenemos que $|x| \leq |x - y| + |y|$; es decir $|x| - |y| \leq |x - y|$. En forma similar, $y = (y - x) + x$, luego $|y| \leq |y - x| + |x|$; esto implica $|y| - |x| \leq |y - x|$. Puesto que $|x - y| = |y - x|$. Por propiedad 9 sí $|x - y| = r$ entonces $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

12. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x = 0$ sí y sólo si $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $x = 0$ claramente $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, pues $|0| = 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y argumentemos por contradicción suponiendo que $x \neq 0$. Entonces $|x| > 0$, luego existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < |x|$ (por ejemplo $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$), lo cual es una contradicción ya que habíamos supuesto para $x \neq 0$ que

$|x| < \varepsilon$ para todo .

13. Sea $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x^2} = |x|$

<u>*Demostración*</u>.

Observe que, sí $a, b \geq 0$ entonces $a = b$ sí y sólo si $a^2 = b^2$ puesto que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. De la propiedad 4 y la observación anterior, se deduce que $x^2 = |x|^2$ implica $\sqrt{x^2} = |x|$.

Esta última propiedad de valor absoluto aparece en algunos textos escolares de matemáticas como la definición de valor absoluto, cuando se están presentado las propiedades de las raíces pares de potencias pares, por ejemplo, cuando se desea simplificar la expresión: $\sqrt[2n]{x^{2k}}$, donde x es un número real cualquiera y $n, k \in \mathbb{N}$, se obtiene el siguiente resultado $\sqrt[n]{|x|^k}$.

Aquí vale la pena resaltar que el valor absoluto también puede ser definido como:

La función valor absoluto f (u operador unario f) se define como una función a trozos, así:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \text{ tal que } \quad f(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

Otra definición alternativa de valor absoluto es: Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|x| = máx\ \{x, -x\}$. Como se observa, es posible encontrar diferentes definiciones para un mismo objeto las cuales dependen del contexto, el tipo de tarea propuesta, entre otros factores.

En nuestro caso, la atención se ha centrado en la definición de valor absoluto como función, y como distancia, dado que estan siendo movilizandas por los registros de representación gráfica en el plano y la recta real.

1.6 Inecuaciones con valor absoluto

Cualquier expresión de la forma $|X| < c$, se llama **inecuación con valor absoluto en una variable**, donde X representa una expresión algebraica que depende de la variable x, c es un número real y el símbolo $<$ puede ser sustituido por algunas de las relaciones siguientes: $>, \geq$ o $\leq$. Este trabajo se enfocó esencialmente, en aquellas inecuaciones con valor absoluto cuya expresión algebraica X es lineal, es decir, de la forma $X = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Las inecuaciones de la forma $|ax + b| < c$, con $a = 1$ las denominadores **inecuaciones simples.** Para encontrar el conjunto solución (CS), de una inecuación de la forma $|ax + b| < c$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0, 1$, desde el punto de vista geométrico, es necesario llevar la inecuación $|ax + b| < c$ a una expresión de la forma $|X - A| < B$ donde A y B son respectivamente, $-\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{|a|}$.

La Tabla 3 exhibe las propiedades que permiten garantizar la equivalencia entre cualquier par de ILVA1V, en particular, muestra que $|ax + b| < c$ es equivalente a la inecuación simple $|X - A| < B$, siempre que $A = -\frac{b}{a}$ y $B = \frac{c}{|a|}$.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA	**JUSTIFICACIÓN**
$\vert ax + b\vert < c$	Inecuación inicial
$\left\vert a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right\vert < c$	Axioma distributivo
$\vert a\vert \left\vert x + \frac{b}{a}\right\vert < c$	Valor absoluto de un producto (propiedad 5)
$\frac{\vert a\vert}{\vert a\vert}\left\vert x + \frac{b}{a}\right\vert < \frac{c}{\vert a\vert}$	Monotonía del producto
$\left\vert x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right\vert < \frac{c}{\vert a\vert}$	Teorema 5.3 (ver Anexo B)
$\vert X - A\vert < B$	Sustitución ($A = -\frac{b}{a}$ y $B = \frac{c}{\vert a\vert}$)

Tabla 3. La equivalencia entre ILVA1V

Una vez transformada la inecuación $|ax+b|<c$ en $|X-A|<B$, la solución de $|X-A|<B$ está dada por los puntos x sobre la recta numérica, cuya distancia a A es menor a B unidades.

Ahora, se transitará por los aspectos matemáticos relativos al registro de representación gráfica en $\mathbb{R}$ (la recta) y $\mathbb{R}^2$(el plano cartesiano), para ello se iniciará, con la definición de sistema de coordenadas.

1.7 Coordenadas

Sean l una recta y O, I puntos de esta recta (ver la Figura 1).

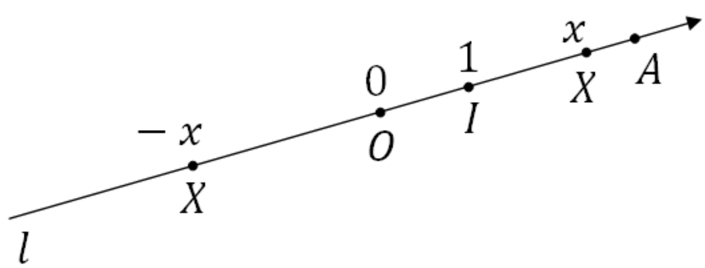


Figura 1. La recta numérica

Para cada punto X en la recta l definimos $\varphi(X)=x\in\mathbb{R}$ de la manera siguiente:

- $\varphi(X)=\lambda(OX)$ (longitud del segmento OX) si X está en la semirrecta $\overrightarrow{OA}$
- $\varphi(X)=-\lambda(OX)$ si X está "a la izquierda de 0";
- $\varphi(O)=0$.

Generalmente esta función $X\to\varphi(X)=x$ de l en $\mathbb{R}$ sugiere que es posible establecer una biyección entre los puntos de la recta l y el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, es decir, que a cada número real le corresponde uno y sólo un punto sobre la recta y viceversa. Si bien la afirmación de que φ es una función biyectiva de l en $\mathbb{R}$, es presentada en algunos textos escolares de matemáticas como un teorema. No obstante, es importante notar que para

Dedekind y Cantor[21] no es posible demostrar que a cada punto sobre la recta numérica le corresponde un número real, ellos sólo lo aceptan como verdadero, es decir, esta afirmación no es más que un axioma.

Establecer una correspondencia biunívoca (o identificación) entre los puntos de una recta ideal y los números reales, da origen al concepto de recta numérica y da la posibilidad de hablar indistintamente de "números" o "puntos", además permite entender e interpretar muchas de las propiedades de los números reales en términos de su representación como puntos de una recta.

Se puede notar que la definición de la función φ depende de la elección de los puntos O, I en l. El número $x = \varphi(X)$ se llama coordenada del punto X. Una recta l en la cual, se han elegido los puntos O, I y se le ha asignado a cada punto X una coordenada $x = \varphi(X)$, se le llama **recta numérica.** [22]

Un **sistema de coordenadas** en un plano $\mathcal{P}$ es un conjunto $\{O, I, I', l, l'\}$donde l y l' son rectas en el plano $\mathcal{P}$ que se intersectan en el punto O, I es un punto de l e I' es un punto de l' (ver la Figura 2). Las rectas l y l' se llaman **ejes de coordenadas** y el punto O se llama **origen de coordenadas**.

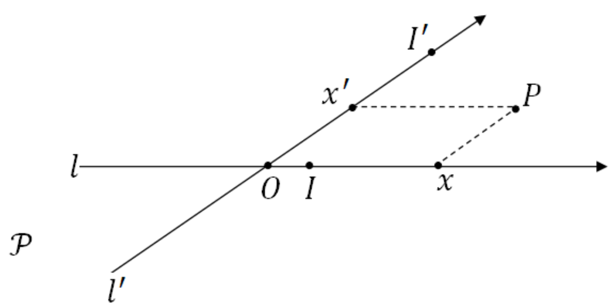


Figura 2. El plano cartesiano

[21] Tomado de: (s.f.) Math. Annalen de Leipzig, T. V, p 123. Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas por C. Cantor (1872) Traducción realizada por: Bares, J. y Climent, J. p.5

[22] La geometría proporciona en realidad, un esquema intuitivo y simple para describir los números reales, es decir, los números que se requieren para medir todas las posibles longitudes en términos de una unidad dada. Pero una vez se consideran todos los números reales, todo punto sobre la recta corresponde exactamente a un número real y todo número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta. El hecho de que todas las longitudes se puedan expresar como números reales, se conoce con el nombre de propiedad de continuidad de los números reales y de esta propiedad depende el desarrollo total del análisis matemático.

Un sistema de coordenadas permite definir una función biyectiva

$$\varphi : \mathcal{P} \leftrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mathcal{P}) = (x, x')$$

(si $P \in \mathcal{P}$, por P se trazan paralelas a l y l' respectivamente, las cuales intersectan a los ejes coordenados en X y X') Los números x y x'se llaman **coordenadas** del punto P. Las coordenadas $(x,\ x')$ de P dependen del sistema de coordenadas elegido.

1.8 Espacios Métricos

Una de las particularidades de la recta real y del plano cartesiano, es que son espacios sobre los cuales se puede definir la función distancia o métrica (denotada, usualmente, por la letra d). Un conjunto en el cual hemos definido una distancia entre elementos del espacio lo llamaremos **espacio métrico**. El definir la función distancia, es posible caracterizar al conjunto de los números reales como un conjunto completo, continuo, compacto y sobre el cual se pueden construir sucesiones convergentes, etcétera.

Una **métrica o función de distancia** en un conjunto X es una función de valores reales d definida de $X \times X$ en X, con los axiomas siguientes:

Para todo x, y y z de X

i. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y,$
ii. $d(x, y) = d(y, x)$ y
iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdad triangular)

Estos tres axiomas afirman que:

i. La distancia es positiva o cero para el caso en que se examine la distancia de x a sí mismo.
ii. Es una función simétrica.
iii. La distancia satisface la propiedad triangular, es decir, que la suma de las longitudes de dos lados del triángulo es mayor que el tercer lado.

Un **espacio métrico** (X, d) es un conjunto no vacio X y una métrica d definida en X.

Veamos cómo se define la **métrica del espacio euclídeo** $\mathbb{R}^n$

Sea $X = \mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las $n - uplas$ de números reales. Si $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ son elementos de X, definimos la distancia $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

En particular, interesa ver cuál es la expresión equivalente a la definición antes mencionada para los casos de la recta real ($\mathbb{R}$) y el plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$), es decir, cuando $n = 1$ y $n = 2$.

<u>La recta real</u> $\mathbb{R}$

Sea $X = \mathbb{R}$, para cada $x_1, y_1 \in X$, la distancia está dada por $d(x_1, y_1) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2}$, de modo que la distancia entre puntos sobre la recta numérica coincide con el valor absoluto de su diferencia[23], es decir, que $d(x_1, y_1) = |y_1 - x_1|$, a esta función d definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_0^+$ se le denomina **métrica usual de** $\mathbb{R}$.

Se encuentra que la recta numérica permite visualizar el orden natural que se da entre los números reales, de modo que: si x_1 e y_1 son números reales asociados con los puntos P y Q, x_1 será menor que y_1 ($x_1 < y_1$) si el punto P está a la izquierda de Q por lo tanto la medida del segmento que va desde P hasta Q es $y_1 - x_1$ y es positiva, en caso contrario (el punto P está a la derecha de Q) la medida del segmento que va desde P hasta Q es $-(y_1 - x_1) = x_1 - y_1$ y es positiva.

<u>El plano cartesiano</u> $\mathbb{R}^2$

Sea $X = \mathbb{R}^2$, para cada par de puntos P_1 y P_2, que pertenecen a X, de coordenadas (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente. La distancia está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i)^2}$$

[23] La expresión que aparece a continuación es el resultado de aplicar la propiedad 13 del valor absoluto (presentada en la sección 2.1.5): Para todo $X \in \mathbb{R}$, tenemos que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Es decir, que $d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, esta última expresión generalmente se interpreta como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen longitud $|y_1 - x_1|$ y $|y_2 - x_2|$.

Otro ejemplo de espacio métrico es $(\mathbb{C}, d)$, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ y d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$ que se definió con anterioridad.

Ya se había mencionado que el valor absoluto puede definirse como una distancia sobre la recta real, la cual es consecuencia de considerar la métrica usual en $\mathbb{R}$.

De acuerdo con la definición de distancia sobre la recta real es posible introducir la noción de vecindad, es decir, que dada una distancia d y un punto de referencia de coordenadas x_0, es posible caracterizar los punto próximos o los puntos distantes al valor de referencia x_0 por medio de la noción de vecindad.

1.9 Vecindad

Primero, se definen bolas, conjuntos abiertos y cerrados en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y d es la métrica usual.

Para cualquier punto x_0 en el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ y cualquier número positivo r, la **bola abierta** con centro x_0 y radio r se define como el conjunto

$$B(x_0, r) = \{y: \ d(x_0, y) < r\}$$

Esta definición permite caracterizar los puntos interiores, frontera y exteriores de cualquier subconjunto X de $\mathbb{R}$.

Sea $x_0 \in X$ y $X \subseteq \mathbb{R}$, entonces:

- x_0 es **un punto interior** de X si existe una bola abierta con centro en x_0 contenida en X
- x_0 es **un punto frontera** de X si existe una bola abierta con centro en x_0 que contiene elementos de X y X' (es decir, el complemento de X).

- x_0 es **un punto exterior** de X si existe una bola abierta con centro en x_0 que contenida en X'.

Los conjuntos compuestos por todos los punto interiores, frontera y exteriores de X se llaman, respectivamente, el **interior**, la **frontera**, y el **exterior** de X y se denotan por $Int(X), Fr(X)$ y $Ext(X)$, respectivamente.

Si X es un conjunto con la propiedad de que todos los puntos de X son interiores de X entonces se dice que X es **abierto** o sea X es abierto si $X = Int(X)$.

Se dice que un conjunto X es **cerrado** si su complemento es abierto; o sea, X es cerrado si $X' = Ext(X)$, o lo que es equivalente a $X = Int(X) \cup Fr(X)$, por lo tanto un conjunto es cerrado, si y sólo si contiene a todos sus puntos frontera. Si un conjunto contiene a algunos de sus puntos frontera, pero no a todos, entonces no es cerrado ni abierto.

Teorema 1.

Una bola abierta $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

<u>*Demostración*</u>

De la definición de bola abierta tenemos que si $x \in B(x_0, r)$, entonces $d(x_0, x) < r$. Sea $d(x_0, x) = s$. Entonces, $B(x,\ r - s) \subset B(x_0, r)$, pues si $y \in B(x,\ r - s)$, entonces

$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < s + (r - s) = r$

y, en consecuencia, $y \in B(x_0, r)$. Esto muestra que $B(x_0, r)$ es abierto.

Teorema 2.

Si X es cualquier conjunto del espacio métrico $\mathbb{R}$, entonces $Int(X)$ es abierto.

<u>*Demostración*</u>

Para cualquier $x_0 \in Int(X)$, existe una bola abierta $B(x_0, r) \subset X$. Entonces,

$B(x_0, r) = Int(B(x_0, r) \subset Int\ (X)$

Por ende, x_0 es un punto interior de $Int\ (X)$.

Como $Ext(X)$ es el interior de X', $Ext(X)$ es un conjunto abierto. Por tanto, su complemento, $Int(X) \cup Fr(X)$, es un conjunto cerrado, que se llama **cerradura** de X y se denota $\overline{X}$. Como un conjunto X es cerrado si, y sólo si, $X = Int(X) \cup Fr(X)$, podemos afirmar ya que X es cerrado si, y sólo si, $X = \overline{X}$.

A continuación se presenta un teorema relacionado con las propiedades básicas de los conjuntos abiertos.

Teorema 3.

La unión de una colección arbitraria de abiertos $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ en un espacio métrico es abierta.

Demostración

Si

$$x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

entonces $x \in X_i$, para algún $i \in \mathbb{N}$. Como X_i es abierto, existe una bola abierta $B(x, r)$ tal que,

$$B(x, r) \subset X_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Se ha probado que todos los puntos que pertenecen a $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ son interiores por tanto el conjunto $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ es abierto.

Si X es un subconjunto no vacío del espacio métrico $\mathbb{R}$, al conjunto abierto que contenga a X le llamaremos **vecindad abierta** de X. Cualquier conjunto que contenga una vecindad abierta se le llamará **vecindad** de X, así si N es una vecindad de x_0, entonces existe una bola abierta $B(x_0, r)$ tal que $B(x_0, r) \subset N$.

Esta sección se cierra con la definición de vecindad, porque éste es el significado particular de las ILVA1V que se privilegia en los cursos de cálculo diferencial e integral en una variable, cuando se estudian las nociones de derivada, continuidad, integral, convergencia, entre otras.

Recordemos que dichas nociones se definen o se caracterizan por el comportamiento o tendencia de la variable $f(x)$ cuando la variable independiente x toma valores próximos a un número dado c, lo cual se formula mediante las expresiones $|x-c|<\delta$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$ que aluden a los puntos vecinos tanto a c como a L, sobre los ejes x e y, respectivamente.

Finalmente, se enfatiza en que la interpretación de la expresión $|x-c|<\delta$ en términos de vecindad, pasa por el reconocimiento de un valor de referencia (o **centro**), en este caso c y una distancia (la cual hemos denotado con la letra griega $\boldsymbol{\delta}$), en tal caso los valores x que satisfancen $|x-c|<\delta$ son $c-\delta<x<c+\delta$, de manera análoga sucede con $|f(x)-L|<\varepsilon$.

2. Análisis cognitivo de las representaciones

En el primer capítulo se afirmó que la actividad cognitiva en matemáticas es plurirregistro, y que como consecuencia de ello el aprendizaje de las mismas pasa por el dominio de dos tipos de transformaciones, que debe realizar un sujeto cuando se enfrenta a cualquier actividad matemática: el tratamiento y la conversión. Sin embargo, en esta sección se clasificarán los diferentes registros, de acuerdo con su tipo de aprensión y el contexto en que se utilizan para posteriormente, relacionarlos con los niveles de dificultad que pueden presentarse en su aprendizaje.

2.1 Diferentes tipos de representación utilizados en matemáticas.

Todo proceso matemático requiere de cuatro diferentes tipos de representación, los cuales se clasifican de acuerdo con su tipo de aprensión, en discursivos o no discursivos y según su campo de acción, en monofuncionales o plurifuncionales:

Los **registros discursivos** tienen una *aprensión secuencial,* y admiten la formulación de proposiciones, las cuales pueden ser calificadas como verdaderas o falsas. A esta clase pertenecen el lenguaje natural, el registro de escritura algebraica, los registros de escritura simbólica utilizados en lógica, entre otros.

Los **registros no discursivos** tienen una *aprensión sinóptica,* y muestran formas o configuraciones de formas así como organizaciones. A esta clase de registros pertenecen las figuras geométricas planas o en perspectiva (es decir, configuraciones de formas en 0, 1, 2 o 3 dimensiones como puntos, líneas, curvas cerradas, entre otras), gráficos cartesianos de funciones, relaciones, el cambio de sistemas de coordenadas, etcétera.

Los **registros monofuncionales** son registros de *carácter técnico o especializado*, las reglas que determinan el empleo de los signos y los símbolos, se hace exclusivamente en función de su forma. Sus *tratamientos son principalmente algoritmizables.* Aquí nos encontramos con los grafos cartesianos, los sistemas de escritura numérica, el lenguaje simbólico utilizado en lógica, etcétera.

Los **registros plurifuncionales** *se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social*. Estos registros *no son algoritmizables,* y su empleo dentro de las matemáticas es completamente diferente al uso que los estudiantes están habituados. Este es el caso del empleo de figuras geométricas para modelizar moléculas, cristales o el lenguaje natural para dar explicaciones, definiciones, descripciones, argumentar a partir de observaciones, entre otras.

Aquí conviene detenerse, a fin de determinar si esta clasificación es o no excluyente, y así definir qué tipo de registro es el gráfico, y el de escritura algebraica, los cuales son interés en la propuesta plurirregistro de enseñanza que se desarrolla en este trabajo.

El registro de representación gráfica es monofuncional, pues no hace parte de los conocimientos de orden social y cultural como ocurre con el lenguaje natural. En suma, esta clase de registros ofrecen de manera simultánea todas las propiedades sobre los objetos matemáticos, lo cual exige del sujeto una discriminación de las variables visuales que aportan información relevante sobre las propiedades del objeto o que le permitan transformar la representación gráfica en otra equivalente, es decir una que conserve la referencia a mismo objeto. En este orden de ideas, tenemos que *los gráficos cartesianos son registros monofuncionales no discursivos.*

El registro de escritura algebraica es monofuncional, debido a que es propio de las matemáticas, como se indicó en la definición. Las transformaciones posibles en el interior del registro son algoritmizables porque están determinadas por las propiedades de los objetos matemáticos, en nuestro caso, los tratamientos propios de las ILVA1V, están establecidos por las propiedades del valor absoluto, los números reales, las inecuaciones, etcétera.

También es cierto que la escritura algebraica es un registro discursivo, en tanto que permite formular proposiciones como: $|x| < 2,\ |x| < -2,\ x < x + 1$, entre otras, las cuales pueden ser calificadas como verdaderas o como falsas para algunos o para todos los valores de x que pertenecen al conjunto numérico X; asimismo admite expansiones discursivas, es decir, que: $|x| < 2$, se puede transformar en $-2 < x < 2$. Podemos, por tanto, decir que el registro de escritura algebraica es monofuncional discursivo.

A continuación, se presentan las implicaciones que tiene esta clasificación de los registros, en las transformaciones que pueden ser establecidas intrarregistro (tratamiento) e interregistros (conversión).

2.2 Tratamientos en registros monofuncionales

Los registros de escritura algebraica y de representación gráfica son monofuncionales, y sus transformaciones están definidas por el conjunto de axiomas, propiedades y definiciones presentadas en la aproximación matemática (pp. 28–32) del Capítulo 2.

Por ejemplo, si una persona afirma que la expresión $|3 - x|$ es equivalente a $|x - 3|$ porque la propiedad 2 del valor absoluto (p. 29) dice que un número real, y su opuesto tienen el mismo valor absoluto, y como $x - 3$ es el opuesto aditivo de $3 - x$, sus valores absolutos son iguales; está realizando una transformación, porque los resultados obtenidos se generan de la aplicación de propiedades que pertenecen al registro de escritura algebraica.

De esta manera, tenemos que el control de los tratamientos está determinado por el conocimiento que tenga el sujeto del cuerpo teórico (definiciones, axiomas, propiedades, etc.), que permite caracterizar el objeto matemático.

2.3 Conversión entre dos registros monofuncionales: uno discursivo y otro no discursivo

Para el desarrollo de esta sección se ha decidido, en primer lugar, retomar los elementos que permiten caracterizar la operación cognitiva de conversión, mencionados en el Capítulo 1. Posteriormente, se presenta una clasificación de las transformaciones que pueden realizarse entre dos registros de representación, bien sea que los dos sean monofuncionales discursivos, o que uno de ellos sea monofuncional discursivo y el otro no. En la tercera y última parte, se definen las unidades significantes que permiten coordinar la conversión que va del registro de representación gráfica, al de escritura algebraica.

En este orden de ideas, tenemos que la transformación de conversión tiene las siguientes características:

Está orientada, es decir, que es necesario determinar cuál es el registro de partida y el de llegada. De modo que no es lo mismo ir de la expresión algebraica de una función a su representación gráfica que a la inversa, puesto que si el registro de partida es la escritura algebraica, y el registro de llegada es el gráfico, hay un algoritmo que le permite a los estudiantes tener éxito en la transformación, dicho algoritmo, consiste en tabular.

Ahora bien, si el registro de partida es la representación gráfica de una función, por ejemplo, una parábola (ver Figura 3) con vértice en el origen, y que pasa por los puntos de coordenadas $A(-1,1)$, $B(0,0$ y $C(1,1)$, hay múltiples expresiones algebraicas que podrían corresponder con la gráfica de la parábola, ellas podrían ser: $y = x^2$ o $y = x^4$, en general cualquier expresión de la forma $y = x^{2n}$, con $n \in \mathbb{N}$, tiene vértice en el origen y pasa por los puntos A, B y C, es decir, que si deseamos pasar de la representación gráfica de una función a su expresión algebraica, esto no siempre es posible, según lo afirma Villa (2001) en su trabajo titulado *Identificar funciones polinómicas: una tarea no siempre realizable*.

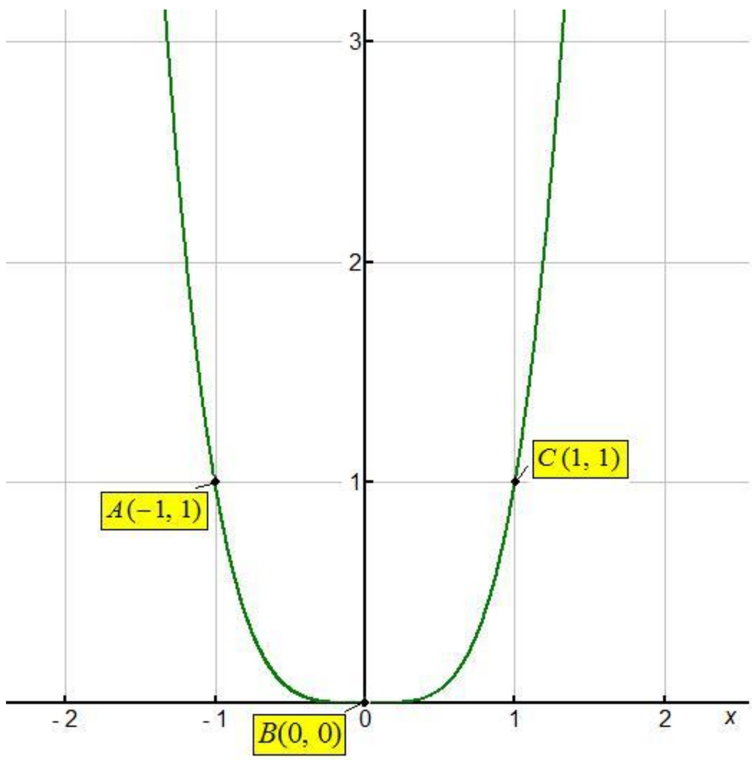


Figura 3. Grafica de una parábola que no proviene de una función cuadrática.

El anterior ejemplo nos lleva a hablar de la segunda característica de la transformación de conversión.

Puede ser o no congruente. Esto quiere decir que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto matemático, puede ser congruente en un sentido, pero no congruente en el otro.

En este punto se considera necesario definir las tres condiciones que hacen de la conversión una transformación congruente:

- Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen.
- Igual orden posible de aprensión de estas unidades en las dos representaciones.
- Convertir una unidad significante, en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

Tabla 4 se ilustran algunas situaciones en las que se cumple, y no se cumplen las tres condiciones necesarias[24] para la congruencia entre dos representaciones, cuando el registro de partida es el lenguaje natural, y el registro de llegada es la escritura simbólica. El ejemplo ha sido tomado de Duval (1995, p.17), veamos:

[24] Se dice que las condiciones son necesarias porque si al menos una de ellas no se da entonces la conversión no es congruente.

REGISTRO DE PARTIDA	REGISTRO DE LLEGADA	(i) CORRESPONDENCIA SEMÁNTICA	(ii) UNIVOCIDAD SEMÁNTICA TERMINAL	(iii) CONSERVACIÓN DEL ORDEN
El conjunto de pares ordenados cuya ordenada es superior a la abscisa.	$\{(x, y): y > x\}$	Sí, porque hay sólo una manera de expresar en el registro de escritura algebraica los términos que aparecen el registro de partida.	Sí	Sí, porque en la representación de escritura algebraica y es la ordenada y x es la abscisa.
El conjunto de pares ordenados cuya abscisa es positiva.	$\{(x, y): x > 0\}$	No, se satisface en tanto que > 0 (mayor que cero) es una perífrasis de la expresión *positiva*.	Sí	Sí
El conjunto de pares ordenados cuya abscisa y ordenada tiene el mismo signo.	$\{(x, y): x \cdot y > 0\}$	No, por la misma razón del ejemplo anterior, > 0 es una perífrasis de la expresión *mismo signo*.	No, porque en la expresión *cuya abscisa y ordenada tienen el mismo signo*, las unidades semánticas significantes (abscisa, ordenada, mismo orden)	No se satisface por la expresión el *mismo signo*, puesto que es una globalización descriptiva de que el producto de la abscisa y la ordenada es mayor que cero.

Tabla 4. Las tres condiciones que determinan la congruencia o no congruencia entre los registros de representación semiótica.

De acuerdo con la clasificación que se ha hecho de los registros de representación, existen cinco posibles transformaciones entre tratamientos y conversiones, ellas son:

1. *Tratamientos entre registros monofuncionales*, en este caso los tratamientos son algoritmizables.

2. *Tratamientos entre registros plurifuncionales*, en cuyo caso las transformaciones no son algoritmizables.

3. Conversión entre registros plurifuncionales

4. Conversión entre registros monofuncionales

5. Conversión siendo un registro plurifuncional y el otro monofuncional

El esquema presentado en la Figura 4, sintetiza el análisis de los conocimientos matemáticos en términos de registros, y cómo ello nos lleva a distinguir diferentes tipos de actividad cognitiva.

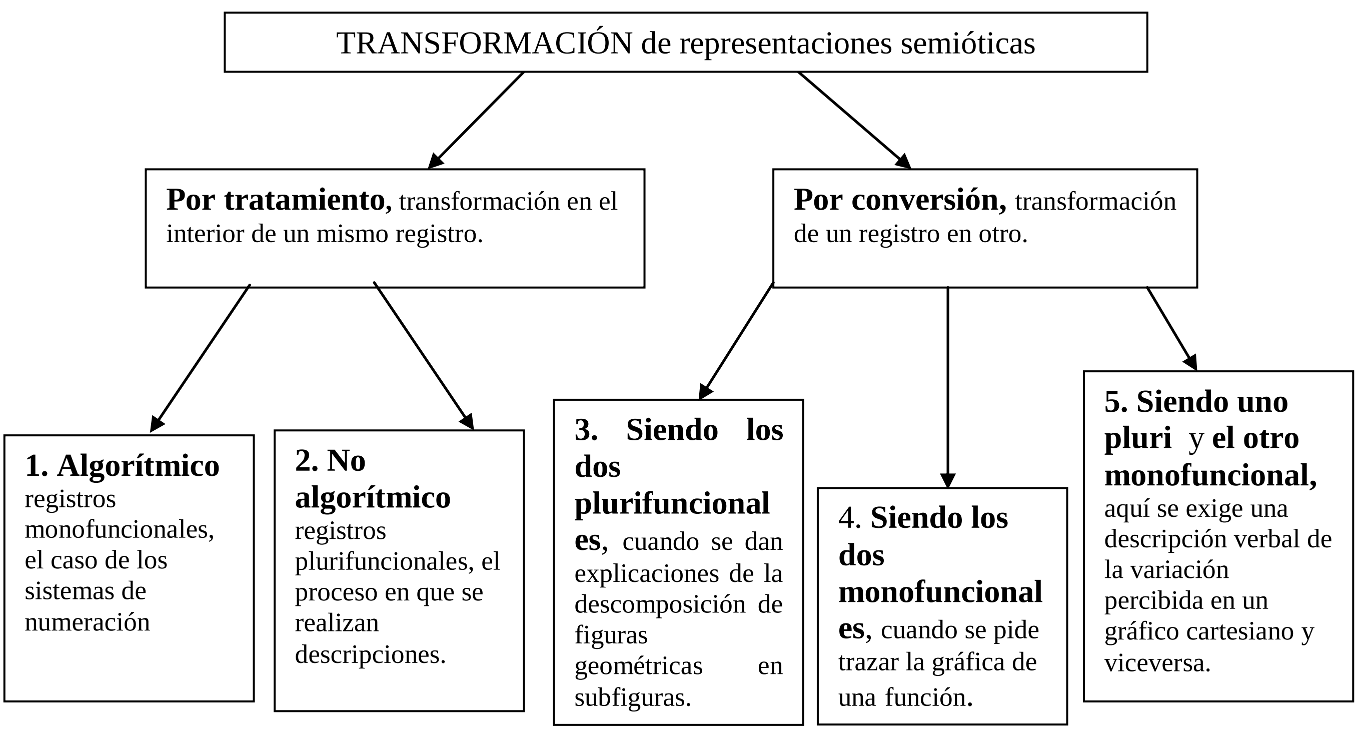


Figura 4. Diferentes tipos de actividad cognitiva requerida en matemáticas

Si se analizan cuáles son las transformaciones que ofrecen un mayor grado de dificultad desde el punto de vista cognitivo, se notará que, son las transformaciones que involucran un registro plurifuncional más complejas, en tanto los tratamientos y conversiones no son algoritmizables, pues, su empleo o campo de acción es bastante amplio, lo cual genera en los estudiantes mucha confusión.

En este orden de ideas, diremos que las transformaciones 2, 3 y 5 son las que generan mayor dificultad. Mientras que las transformaciones 1 y 4 resultan ser de menor conflicto, porque involucran el empleo de registros monofuncionales. Al respecto Duval (1999, p.53) afirma:

> *"…las dificultades más importantes y las más decisivas de cambio de registro no se dan entre dos registros de tipo monofuncional, sino entre un registro de tipo monofuncional y uno de tipo plurifuncional*."

Este trabajo pues, se centra en el estudio de las transformaciones entre registros monofuncionales, siendo uno *discursivo* (escritura algebraica) y el otro *no discursivo* (representación gráfica en la recta y el plano cartesiano) los cuales, no deberían de generar mayor apuro. Sin embargo, es de gran interés porque *si no se pasa por la coordinación de diferentes registros de representación, no habrá comprensión* y en consecuencia, no se lograría el objetivo propuesto que es la distinción entre el objeto (ILVA1V) y sus diferentes representaciones.

Al respecto Sackur (2004) afirma que, para el caso de las inecuaciones, las diferentes propuestas de enseñanza existentes cambian un problema por otro, debido a que se espera que los estudiantes resuelvan inecuaciones por la vía gráfica, lo cual los lleva a la comparación de dos curvas; esto sugiere el siguiente trabajo: dada la inecuación se crean dos funciones, luego surge la gráfica a partir de la emergencia de y, se comparan los valores de y y por último se regresa a x. Sin embargo, ir de la escritura algebraica a la representación gráfica, y luego a la inversa, presupone la coordinación de los registros. Aunque el paso de la escritura algebraica a la gráfica tiene una tasa de éxito más elevada que a la inversa, no se puede hablar de una coordinación, pues ello implica que los estudiantes saben interpretar los gráficos cartesianos, lo cual no es cierto según lo muestran Dolores & Cuevas (2007) en su documento, *Lectura e interpretación de gráficos socialmente compartidos*.

El interés de Dolores & Cuevas (2007) fue mostrar los diferentes niveles de lectura de los gráficos que pueden reconocerse en los estudiantes y cuál es la ideal, para interpretar gráficas no únicamente en contextos matemáticos, sino en cualquier otro contexto. En este sentido retoman los tres niveles de procesamiento de la información relacionados con la interpretación de gráficas propuesto por Wainer (1992), los cuales son:

- *Nivel elemental*: Implica la extracción de datos o la lectura de puntos aislados.
- *Nivel intermedio*: Concierne a la detección de las tendencias observadas en intervalos determinados de las gráficas.
- *Nivel más alto*: Es una comprensión profunda sobre la estructura de los datos y de su comportamiento.

Una vez presentados los niveles de procesamiento de la información correspondientes a la interpretación de los gráficos cartesianos según Wainer (1992), es urgente definir dentro del marco teórico en el cual se inscribe este trabajo, qué se va a entender por interpretación o lectura de un gráfico cartesiano. Recordemos que este aspecto es realmente importante, por tratarse de un registro de representación sinóptico, es decir, un registro en el cual toda la información aparece de forma simultánea.

2.4 Diferentes aprensiones del registro de representación gráfica

Dado que la mayoría de las investigaciones que hay en álgebra, promueven el aprendizaje de las representaciones gráficas como un elemento potente, para sobre pasar las dificultades en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos y, además, es central en el desarrollo de las capacidades de visualización, luego es pertinente hacer referencia a los diferentes tipos de aprensión que realizan los estudiantes del gráfico cartesiano, y cuál de ellas resulta ser la más útil, en el sentido en que es planteado por Duval (1999).

Existen tres tipos de aprensión de los gráficos cartesianos:

- ***Puntual o local***, *es el caso en que se asocia un par ordenado con un punto en el plano, y por tanto, se da la indicación de un valor en un momento dado.*
- ***Icónica,*** *evoca lo alto y lo bajo, las subidas suaves o abruptas a partir del nivel de base, los crecimientos o decrecimientos; en consecuencia, es una forma de ver los gráficos cartesianos que se enfocan en los cambios de posición, en las tendencias de las relacione.*
- ***Global cualitativa,*** *es la manera útil de ver desde un punto de vista matemático, es decir, que permite visualizar una relación entre dos variables (la variable independiente y la variable dependiente), las cuales pertenecen a dos conjuntos numéricos*[25].

Estas tres formas de ver el plano cartesiano podrían corresponder a un nivel elemental, medio y alto, esto si se hace la comparación con los niveles propuesto por Wainer (1992).

Para los avances teóricos en las investigaciones en Educación Matemática, es esencial tener en cuenta al sujeto que aprende, y sobre todo, el tipo de requerimientos cognitivos necesarios para acceder a la solución de las inecuaciones, y particularmente dotar de significado las inecuaciones lineales con valor absoluto, en una variable desde lo geométrico y lo funcional.

En este sentido, se retoma el trabajo de Duval (1999), en donde afirma que una aprensión global cualitativa de la representación gráfica, permite de un lado, dotar de significado las expresiones y/o relaciones algebraicas, y de otro, reconocer lo que varía y cómo varía.

[25] Por ejemplo, cuando estamos interesados en determinar el signo de la expresión $x + 3$ no siempre es posible para los estudiantes identificar que el valor de la variable dependiente $x + 3$, están ligados a los posibles valores que tome x o la variable independiente. Esta distinción se hace mucho más difícil de asimilar cuando se trabajo con expresiones como $-x$.

> "*La interpretación de las representaciones gráficas cartesianas depende de una identificación precisa de todos los valores de las variables visuales pertinentes y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura algebraica correspondientes. Para la gran mayoría de los alumnos este aprendizaje no se efectúa mediante el solo entrenamiento en ejercicios de construcción en el plano de referencia, ni mediante tareas de lectura que ponen en juego la regla de asociación punto-coordenadas. La mayoría de los alumnos permanece, entonces, en una aproximación sincrética, e inoperante, sin real valor intuitivo, de las representaciones gráficas*."

Para lograr que los estudiantes consigan tener una aprensión útil de los gráficos cartesianos, deben estar en capacidad de establecer una correspondencia entre variables visuales y variables simbólicas, relativas a los registros de representación gráfica y algebraica, respectivamente, de lo cual hablaremos en el siguiente apartado.

2.5 Discriminación de las variables visuales y simbólicas en los registro de representación gráfica y de escritura algebraica

Para que un sujeto logre movilizar un objeto matemático a través de diferentes registros de representación, es necesario identificar cuáles son los registros que intervienen en la transformación y la orientación de la misma, para así, discriminar las unidades significantes[26] pertinentes en la conversión; en este caso, se trata de identificar las variables visuales y sus correspondientes variables simbólicas.

Se inicia el análisis de la conversión que va del registro gráfico (en el plano cartesiano) al registro de escritura algebraica. Como vemos en la Figura 5, se ha trazado la gráfica de las funciones $f(x) = |ax - b|$ y $g(x) = c$. Por tratarse de un registro cuya información

[26] Duval (1988) plantea que las unidades significativas propias a una expresión algebraica son:
Los signos relacionales ($<, >, =, \ldots$)
Los símbolos de operación o de signo (+,-).
Los símbolos de variable.
Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante.

aparece de manera sinóptica, es decir, que toda la información aparece de manera simultánea el vértice de la función, los puntos donde se intersectan las funciones $f(x)$ y $g(x) = c$, los tramos en que la función $f(x)$ es creciente, y los intervalos en que es decreciente entre otros. Es del interés de éste trabajo, determinar cuáles datos pueden ser obtenidos a partir de la gráfica, de modo que el estudiante esté en capacidad de determinar una regla de asignación para la gráfica de valor absoluto ,y la función constante; igualmente hallar la solución de cualquiera de las siguientes inecuaciones: $|ax - b| < c$, $|ax - b| \leq c$, $|ax - b| > c$ o $|ax - b| \geq c$.

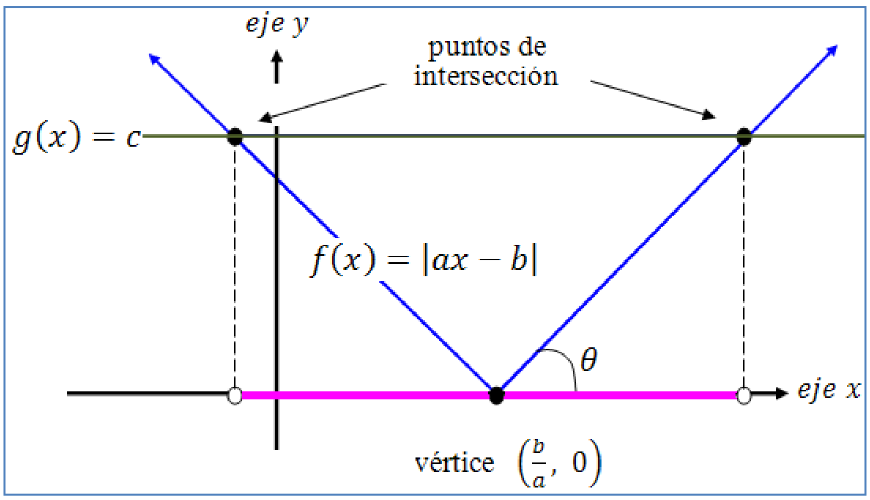


Figura 5. Variables visuales de la representación gráfica en el plano cartesiano.

Seguido de la Figura 5, se identifican y se definen cada una de las variables visuales con sus respectivas unidades simbólicas. Para el caso que nos interesa, determinar la solución de una inecuación de la forma $|ax - b| * c$, donde el registro de partida es el gráfico (en el plano cartesiano) y el de llegada es la escritura algebraica (ver Tabla 5).

VARIABLES VISUALES	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES	UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDIENTES
Ubicación del vértice de la función $f(x)$.	A la izquierda del $eje\ y$.	Se añade una constante (signo +), así: $f(x) = \|ax + b\|$, donde $b \in \mathbb{R}^{+}$.
	En el origen	No se añade nada $f(x) = \|ax\|$
	A la derecha del $eje\ y$.	Se sustrae una constante (signo -). Asimismo $f(x) = \|ax - b\|$, donde $b \in \mathbb{R}^{+}$.
El ángulo θ formado por el trozo creciente de $f(x)$ y el $eje\ x$.	Partición simétrica	Coeficiente igual a 1 ($a = 1$.)
	Ángulo menor a 45°con el $eje\ x$.	Coeficiente menor que 1 ($a < 1$.)
	Ángulo entre 45° y 90° mayor con el $eje\ x$.	Coeficiente mayor que 1 ($a > 1$)
Ubicación de la función constante $g(x) = c$.	Por encima del $eje\ x$	$c > 0$
	Sobre el $eje\ x$	$c = 0$
	Por debajo del $eje\ x$	$c < 0$
La intersección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, siendo $f(x) < g(x)$ o $f(x) > g(x)$	Se intersecta en dos puntos	$c > 0$
	No, se intersecta en algún punto.	$c \leq 0$
Proyección de los puntos de intersección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$	No se incluyen los puntos de intersección (abiertos)	Cuando $f(x) < g(x)$ o $f(x) > g(x)$.
	Se incluyen los puntos de intersección (cerrados)	Cuando $f(x) \leq g(x)$ o $f(x) \geq g(x)$.

Tabla 5.Correspondencia entre las variables visuales y simbólicas en las representaciones bidimensionales (Plano cartesiano)

Ahora consideremos la representación geométrica que aparece en la

Figura **6**, con la finalidad de identificar el centro, la distancia y la región sombreada, las cuales son variables visuales pertinentes que nos han de permitir determinar una expresión analítica (de la forma $|x - A| < B$), cuyo conjunto solución corresponda con la región sombreada. Ello implica determinar las variables visuales y sus correspondientes variables simbólicas, las cuales son identificadas y definidas en la Tabla 6, para el caso de la representación geométrica de ILVA1V de la forma $|ax - b| * c$.

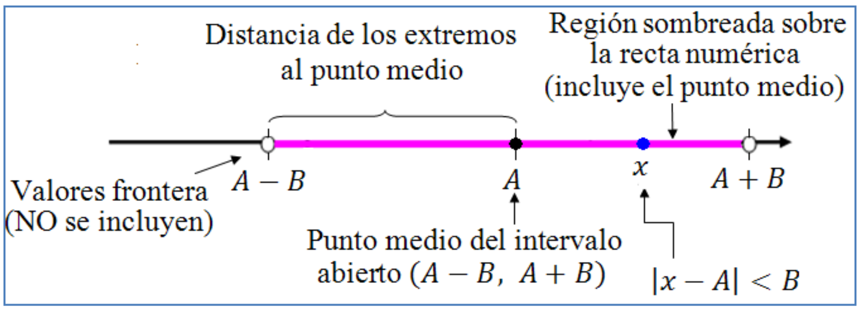


Figura 6. Variables visuales de la representación gráfica en la recta real.

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS CORRESPONDIENTES
Región sombreada sobre la recta	Un solo intervalo	Signos $\leq$ o $<$
	Es la unión de intervalos	Signos $\geq$ o $>$
Los valores frontera	Se incluyen los extremos del intervalo	Signos $\geq$ o $\leq$
	No se incluyen los extremos del intervalo	Signos $>$ o $<$
Punto medio o el centro del intervalo abierto $(A - B,\ A + B)$ o del intervalo cerrado $[A - B,\ A + B]$	A la izquierda del punto medio	Si $A > 0$ entonces se añade una constante (signo $+$), justamente $\lvert x + A \rvert$.
	A la derecha del punto medio	Si $A > 0$, se sustrae una constante (signo $-$), asimismo$\lvert x - A \rvert$.
	En el punto medio	No se añade nada, así $\lvert x \rvert$.
Distancia de los extremos al punto medio (o partición simétrica del intervalo)	Positiva	$B > 0$
	Cero	$B = 0$

Tabla 6. Correspondencia entre las variables visuales y simbólicas en las representaciones unidimensionales (la recta real)

Una vez definidas la correspondencia entre las variables visuales y simbólicas, se observa (ver del Capítulo 4 la sección 3.2 donde los estudiantes identifican las características de las gráficas que involucran ILVA1V) que estas son pertinentes desde el punto de vista cognitivo, es decir, son suficientes para que un estudiante logre coordinar los dos registros de representación.

Finalmente, es importante resaltar que según lo afirman Cantoral & Montiel (2001), hay dos formas clásicas de entender la enseñanza de las representaciones gráficas: la primera, asume que la graficación es una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función o relación, mientras que la segunda, quizá la menos difundida pero de mayor interés para esta investigación, entiende la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de sus propiedades.

En este segundo enfoque, se inscribe este trabajo, por tratarse de una mirada que involucra la compresión de los registros gráficos, es decir, una perspectiva cognitiva centrada el desarrollo de las capacidades de visualización.

Adicional a lo anterior, el resultado más importante de este capítulo es la definición y descripción de las variables visuales o simbólicas (ver las Tablas 5 y 6) que se tomaron en consideración para el diseño de un conjunto de situaciones didácticas, de las cuales se hablará en el Capítulo 4. El análisis matemático fue de vital importancia, por el reconocimiento de las variables asociadas a cada registro de representación semiótica, de igual manera, dicho análisis permitió identificar los diferentes significados particulares que tiene el valor absoluto x.

Estos significados fueron: desde lo geométrico (en la recta real), como la distancia entre los puntos x y 0 o la norma de vector en $\mathbb{R}^1$; desde lo funcional como una función definida a trozos tal que $f(x) = x$ si $x \geq 0$ o $f(x) = -x$ si $x < 0$; desde lo analítico $|x| = máx\{x, -x\}$ o los puntos x vecinos a un punto dado 0 (es decir, $B(0, x) < r$); y desde lo numérico como el número sin signo.

A continuación se muestra una revisión, de corte exploratorio, hecho a los textos escolares que circulan a nivel universitario en el país. En dicho análisis se muestran cuáles de los significados de la noción de valor absoluto identificadas en el Capítulo 2, son utilizadas para la enseñanza de dicha noción. También se ilustran los registros de representación utilizados para representar la noción de valor absoluto y sus propiedades.

CAPÍTULO 3

REVISIÓN DE ALGUNOS TEXTOS UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

Introducción

Inicialmente, se describirá el proceso que se llevó a cabo para la selección de los textos universitarios de matemáticas, que fueron analizados. Después se desarrollarán detenidamente algunos de los capítulos o unidades temáticas, donde aparecen las definiciones de valor absoluto, desigualdad, inecuación e inecuación con valor absoluto, con el fin analizar cómo están relacionadas las nociones antes mencionadas.

Posteriormente, se identifican los contenidos particulares que se privilegian en los textos universitarios de matemáticas, relacionados con la noción de valor absoluto. A su vez, se tendrá en cuenta la profundización en el análisis cuantitativo, apoyado en algunas estadísticas básicas de los ejercicios, aunque también se involucran aspectos, cualitativos, como la discriminación de los requerimientos cognitivos (tratamientos/conversiones), que demandan la solución de los ejercicios. Para ello, se considerará el análisis cognitivo de las representaciones desarrollado en el Capítulo 2.

1. Descripción de la selección de los textos universitarios de matemáticas.

Actualmente en las IES del Valle del Cauca, y quizá a nivel nacional, es común encontrar que el texto escolar de matemáticas es una herramienta central para el estudio de las mismas, porque con base en él se definen los ejes temáticos, las actividades, los ejemplos, los ejercicios a desarrollar, y los propósitos que se deben alcanzar en los cursos.

En este sentido, se afirma que el texto escolar: presenta el saber a enseñar, permite organizar los planes de estudio y, en algunos casos, propone actividades, evaluaciones e incluso, puede llegar a configurar el discurso mismo del docente, así como sus estrategias de enseñanza, tanto particulares como generales. Es por eso, de gran importancia, analizar los textos universitarios que se utilizan en un curso de matemáticas fundamentales.

Por otra parte, si nos detenemos en la metodología[27] presentada por los programas de los cursos de matemáticas fundamentales de las universidades de Cali, veremos que el papel que juega el texto escolar en los procesos de enseñanza y aprendizaje es central, en tanto que se exige de los estudiantes la preparación de las clases por medio de la lectura de las secciones asignadas por el profesor; incluso en algunos casos, se pide la solución de los ejercicios previos que han sido determinados en el programa del curso.

De esta manera, el estudiante tiene su primer contacto con el saber transpuesto por medio de los textos escolares, razón por la cual se considera necesario analizar, cómo ellos recontextualizan los objetos matemáticos.

Aunque son muchas las dimensiones (curricular, didáctica, cultural, social, cognitiva, etc.) que se tienen en cuenta para la transposición, este trabajo se centra fundamentalmente, en la dimensión cognitiva, identificando los registros de representación que más se utilizan, así como el análisis de las operaciones cognitivas (tratamiento/conversión), requeridas para dar solución a las ILVA1V.

En la selección de los textos se evaluaron tres aspectos que se detallan a continuación:

Como es bien sabido, son numerosos los textos que comercializan las editoriales, por ello, fue necesario determinar *los textos universitarios más vendidos a nivel nacional*, y *los más utilizados por las IES del Valle del Cauca*.

Una vez reconocidos los textos universitarios con mayor frecuencia relativa de venta y uso respectivamente, en las principales librerías del país y en las IES del Valle del Cauca,

[27] Aquí nos referimos específicamente a *la metodología* de los programas de los cursos que aparecen en el Anexo A cuyos códigos son: P1U2AF08272-2, P1U3MF300MAG012-3, P1U5FBM131205-6, P5U6MF405049-11, P5U6MF405056M-12 y P5U7PC75010-13.

se procedió a identificar aquellos *textos que tuvieran diferentes enfoques*, bien sea que estaban más próximos a la teoría matemática, que al marco de las aplicaciones de las matemáticas o a la inversa.

El primer criterio de selección, consistió en la identificación de los textos que más se comercializan en las principales librerías del país. Para ello, se hizo una encuesta por vía telefónica en la semana del 20 al 24 de septiembre de 2010, en la cual se realizó la siguiente pregunta: ¿cuál es el texto de matemáticas, álgebra y trigonometría o precálculo, que más compran los estudiantes universitarios, en primer semestre, que les permite estudiar los temas de números reales, ecuaciones, inecuaciones y funciones?

En la Tabla **7** se presentan los resultados de la encuesta realizada a las principales librerías del país. Por razones de anonimato y reserva de información, se ha usado el código L_n (con n variando desde uno hasta cuatro), para referirse a las distintas librerías[28], además la asignación de valores para n es aleatoria.

[28] Dentro de las principales ciudades del país tenemos que las librerías más reconocidas de Cali, Bogotá y Medellín, son: Librería ABC (-antigua Librería Atenas- ubicada en Cali), Librería Nacional (en Cali y Bogotá), Librería Lerner (en Bogotá) y Librería Científica, esta última ubicada en la ciudad de Medellín.

LIBRERÍA	TEXTOS UNIVERSITARIOS
L_1	**Título**: Matemáticas para Administración y Economia **Autor(es)**: Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R **Año**: 2008
	Título: *Precálculo* **Autor(es)**: Sobel, M. & Lerner, N. **Año**: 2006
	Título: Algebra y Trigonometria **Autor(es)**: Zill, D. & Dewar, J **Año**: 1999
L_2	**Título**: *Precálculo* **Autor(es)**: Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. **Año**: 2007
	Título: *Precálculo* **Autor(es)**: Sullivan, M **Año**: 1997
	Título: Algebra y Trigonometria **Autor(es)**: Swokowski, E. & Cole, J. **Año**: 2006
	Título: Matemáticas para Administración y Economia **Autor(es)**: Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R **Año**: 2008
L_3	**Título**: Matemática Educativa: Fundamentos de Matemática TI **Autor(es)**: AA.VV (Editorial: Escuela Colombiana de Ingenieria) **Año**: s.f.
	Título: Precálculo matemáticas para el cálculo
L_4	**Título**: Matemáticas operativas **Autor(es)**: Diaz, L. **Año**: s.f.
	Título: Fundamentos de Matemáticas **Autor(es)**: Dávila. **Año**: s.f.
	Título: *Precálculo* **Autor(es)**: Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. **Año**: 2007

Tabla 7. Resultados de la encuesta telefónica realizada a las principales librerías del país.

Si reorganizamos la información de la Tabla **7**, se puede observar que son diez los textos que reportan las librerías. Los que tienen una mayor frecuencia relativa de venta son: *Precálculo* de Stewart *et al*, con el 23.1% y *Matemáticas para Administración y Economía* de Haeussler *et al*, con 15.4%; el resto sólo son mencionados una vez, es decir, que su frecuencia relativa de venta fue del 7.7% (ver Tabla 8).

#	TEXTOS UNIVERSITARIOS	LIBRERÍA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
1	Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R (2008) Matemáticas para Administración y Economía	L_1 - L_2	2	15.4%
2	Sobel, M. & Lerner, N. (2006) *Precálculo*	L_1	1	7.7%
3	Zill, D. & Dewar, J. (1999) *Álgebra y Trigonometría*	L_1	1	7.7%
4	Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2007) *Precálculo*	L_2 - L_3 - L_4	3	23.1%
5	Sullivan, M. (1997) *Precálculo*	L_2	1	7.7%
6	Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *Álgebra y Trigonometría*	L_2	1	7.7%
7	AA.VV (Editorial: Escuela Colombiana de Ingeniería) (s.f) *Matemática Educativa: Fundamentos de Matemática TI*	L_3	1	7.7%
8	Leithold, L. (2007) *Álgebra y Trigonometría con geometría*	L_3	1	7.7%
9	Díaz, L. (s.f) *Matemáticas operativas*	L_4	1	7.7%
10	Dávila (s.f.) Fundamentos de Matemáticas	L_4	1	7.7%

Tabla 8. Frecuencia de los textos universitarios más vendidos en las principales librerías del país.

Cabe anotar además, que todos los textos universitarios que se incluyen en las referencias bibliográficas, son por naturaleza prescriptivos, en tanto que los autores, tienen como propósito central enseñar; es por ello, que introducen recomendaciones, valoraciones, observaciones, ayudas y comentarios, facilitando el camino que deben seguir los estudiantes (Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E. & Sánchez, G., 1999).

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia a continuación lo que se plantea en el prólogo del texto de Swokowsky, E. & Cole, J. (2006), los autores afirman que: "*El objetivo de Álgebra y trigonometría con geometría analítica, undécima edición, es preparar a los alumnos para cursos posteriores de matemáticas*."

El segundo criterio de la selección, consistió en reconocer cuáles son los textos universitarios más citados en las referencias bibliográficas de los programas de los cursos de matemáticas fundamentales, razón por la cual se construye la Tabla 9 en la que aparecen, tanto la frecuencia de uso, relativa y absoluta, de los textos universitarios de matemáticas.

En la Tabla 9, mostramos pues, que son 26 los textos citados en las referencias bibliográficas de los programas de los cursos que aparecen en el Anexo A; dichas referencias son bastante heterogéneas, lo cual, según esta investigación, se debe a que existen universidades con UANC (unidades académicas no centralizadas), en cuyo caso la selección de los textos no está determinada por un coordinador, sino por el docente que dicta el curso, quien a su buen criterio lo define, generando mayor variabilidad en los textos citados.

#	AUTOR(ES)	TEXTO ESCOLAR	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
1	Aires[29]	Fundamentos de matemáticas superiores	1	2%
2	Allendoerfer, C. & Oakley, C.	Fundamentos de matemáticas universitarias	5	10%
3	Allendoerfer, C. B.	Fundamentos de matemáticas universitarias	1	2%
4	Álvarez, J., Acosta, E. & Marmolejo, M.	Técnicas & conceptos básicos	3	6%
5	Arya, J. & Lardner, R.	Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía	2	4%
6	Barnett, R.	Álgebra y trigonometría	1	2%
7	Britton, J., Kriegh, R. & Rutland, L.	Matemáticas universitarias	1	2%
8	Budnick, F.	Matemáticas aplicadas para la administración, economía y ciencias sociales.	1	2%
9	Eslava, M. & Velasco, J.	Introducción a las matemáticas universitarias	1	2%
10	Faires, J. & Defarza, J.	Precálculo	2	4%
11	Goodman, A. & Hirsch, L.	Álgebra y trigonometría con geometría analítica	1	2%
12	Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R.	Matemáticas para administración y economía.	1	2%
13	Hoel, P.	Matemáticas finitas y cálculo con aplicaciones a negocios	1	2%
14	Hoffmann, L.	Cálculo aplicado para la administración, economía y ciencias sociales.	1	2%
15	Leithold, L.	Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales.	2	4%
16	Recalde, L., Ortíz, G. & Hinestroza, D.	Semillero de matemáticas	2	4%
17	Restrepo, G.	Matemáticas fundamentales	3	6%
18	Silva, L.	Fundamentos de matemática	1	2%
19	Sobel, M. & Lerner, N.	Precálculo	2	4%
20	Stewart *et al.*	Precálculo	3	6%
21	Sullivan, M.	Precálculo	1	2%
22	Swokowski, E. & Cole, J.	Álgebra y trigonometría con geometría analítica.	5	10%
23	Weber, J.	Matemáticas aplicadas para Administración y Economía	1	2%
24	Wisneiwki, P., Antonyan, N. & Medina, L.	Problemario de Precálculo	1	2%
25	Zill, D. & Dejar, J.	Precálculo con avances de cálculo	2	4%
26	Zill, D. & Dejar, J.	Álgebra y trigonometría	3	6%

Tabla 9. Frecuencia de textos universitarios de matemáticas citados en los programas de matemáticas fundamentales

[29] El nombre del autor es Frank Ayres. (Sic)

Como se puede ver en la Tabla 9, los textos con mayor frecuencia relativa de citación en los programas de matemáticas fundamentales son: *Fundamentos de matemáticas universitarias* de Allendoerfer, C & Oakley, C., *Álgebra y trigonometría* de Swokowski, E. & Cole, J., *Técnicas & conceptos básicos* de Álvarez, J., Acosta, E. & Marmolejo, M., *Matemáticas fundamentales* de Restrepo, G., *Precálculo* de Stewart et al., y *Álgebra y trigonometría* de Zill, D. & Dejar, J., los dos primeros textos con 10% y los tres restantes con el 6% de frecuencia relativa de uso.

De acuerdo con la encuesta, y la revisión de los programas de matemáticas fundamentales, se concluye que los textos con mayor frecuencia relativa de uso y venta son aquellos que aparecen en la Tabla 10.

CÓDIGO[30]	**TEXTOS UNIVERSITARIOS**	**FRECUENCIA RELATIVA EN LAS LIBRERÍAS**	**FRECUENCIA RELATIVA EN LOS PROGRAMAS**
TU1L0P6TM	Restrepo, G. (2003) Matemáticas fundamentales.	0%	6%
TU2L15P2A	Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R. (2008) *Matemáticas para administración y economía*.	15.4%	2%
TU3L10P10TIC	Swokowski, E. & Cole, J. (2006) Álgebra y trigonometría con geometría analítica	10%	10%
TU4L23P6TIC	Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2007) *Precálculo*	23.1%	6%
TU5L0P6TM	Álvarez, J., Acosta, E. & Marmolejo, M. (s.f) Técnicas y conceptos básicos.	0%	6%
TU6L0P6A	Zill, D. & Dejar, J. (1999) *Álgebra y trigonometría*	0%	6%
TU7L0P10A	Allendoerfer, C. & Oaklely, C. (1990) Fundamentos de matemáticas universitarias	0%	10%

Tabla 10. Textos universitarios preseleccionados

[30] A cada uno de los textos universitarios se les ha asignado un código que se utilizó en el análisis de los textos. El código ha sido construido de la siguiente manera: TU es la abreviatura de Texto Universitario, el número que va a continuación es la posición del texto en la lista, L es la abreviatura de Librería y el número siguiente tiene que ver con la frecuencia relativa obtenida en la encuesta realizada a las librerías de tal forma que si el texto no aparece en la encuesta entonces su frecuencia relativa es cero (ver Tabla 7), luego tenemos la letra P acompañada de un número para hacer referencia a la frecuencia relativa del texto en los Programas de matemáticas fundamentales de acuerdo con la Tabla 8. Por último tenemos la abreviatura TM, A o TIC corresponde a Teoría Matemática, Aplicaciones o Tecnologías de la Información y la Comunicación, respectivamente, esto es según el enfoque del texto universitario.

El tercer criterio tomado en consideración para la selección el cual tiene como propósito garantizar que los textos elegidos se encuentren en circulación sean representativos, consistió en escoger los textos con enfoques diferentes, es decir, que hacen una presentación distinta de los contenidos, bien sea que demuestren o no, los teoremas utilizados para solucionar ILVA1V, que tengan, en mayor o menor grado, ejercicios que aludan a las aplicaciones matemáticas, y que incluyan o no el uso de tecnologías de la información y de la comunicación como calculadoras, o alguna clase de software [31] utilizado para la enseñanza de las matemáticas.

Los textos seleccionados fueron:

- *Fundamentos de Matemáticas* de Restrepo, G. Es un representante de los textos formalistas que demuestran la mayoría de los teoremas, que permiten encontrar la solución de las ILVA1V de forma analítica, y cuyos ejercicios apuntan a la teoría matemática.
- *Matemáticas para administración y economía* de Haeussler *et al.* A diferencia de los otros dos textos seleccionados incluye aplicaciones dirigidas hacia la economía, la administración, e incluso, hacia otras ciencias como la química, la estadística, etcétera.
- *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* de Swokowski & Cole. Representa los textos que incluyen un enfoque hacia las nuevas tecnologías.

[31] Es importante tener presente que hoy en día se cuenta con cursos completos diseñados por docentes de universidades prestigiosas, por ejemplo encontramos *El portal educativo de las Américas* el cual cuenta con un catálogo de curso diseñados para docentes de matemáticas, especialmente del nivel primario o enseñanza general básica, con el fin de que lleguen a conocer la naturaleza de los conceptos matemáticos, las metáforas subyacentes en las que se apoyan, conocer las limitaciones de esas metáforas y representaciones, entender el origen de las dificultades y, sobre esta base, rediseñar estrategias de enseñanza (disponible en: http://www.itpuebla.edu.mx/Alumnos/Cursos_Tutoriales/Carlos_Garcia_Franchini/Matematicas/index1.html) también existen cursos virtuales de Matemáticas I, como el que se encuentra en la página http://www.itpuebla.edu.mx/Alumnos/Cursos_Tutoriales/Carlos_Garcia_Franchini/Matematicas/index1.html ofrecido por la Universidad de Puebla.
De igual forma algunos textos escolares disponen de páginas Web donde los estudiantes pueden encontrar ejercicios complementarios o evaluaciones que les permita medir el nivel de comprensión o donde se les explique paso a paso cómo se resuelve un ejercicio determinado.

2. Descripción general de los textos universitarios seleccionados

A continuación se hace una presentación de algunas de las características físicas de cada uno de los textos seleccionados; luego se presentan cada una de las tablas de contenido, en las cuales se han resaltado aquellas unidades, donde se abordan las definiciones, al igual que las propiedades de las nociones de desigualdad, valor absoluto e ILVA1V. Se finaliza esta sección, con una síntesis de la propuesta pedagógica de cada uno de los textos que fueron analizados.

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS
EDITORIAL Universidad del Valle – Programa Editorial, Cali., 2003
ISBN: 9586702154
Total de páginas: 224
Carátula: Rústica de $17 \times 24cms$

MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA
EDITORIAL PEARSON EDUCACIÓN, México, D.F., 2008.
ISBN: 9789702611479
Total de páginas: 920
Carátula: Rústica de $21 \times 27cms$

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA
EDITORIAL THOMSON LEARNING, México, D.F., 2006.
ISBN: 9789584434562
Total de páginas: 1017
Carátula: Rústica de $20 \times 26cms$

Ahora se presenta el contenido de cada uno de los textos seleccionados. Para ello, se resalta, escribiendo en ***cursiva y negrilla***, los capítulos en los cuales se aborda la noción de valor absoluto, y el tema correspondiente a la solución de las ILVA1V; adicionalmente, de la Tabla 10, hemos tomado el código asignado a cada texto universitario para la presentación del análisis.

Código de identificación **TU1L0P6TM**
Capítulo 1. Los principios Lógicos
Capítulo 2. Conjuntos
Capítulo 3. Funciones
Capítulo 4. Orden y Equivalencia
Capítulo 5. Los Números Naturales
Capítulo 6. Los Números Enteros
Capítulo 7. Números Reales

Esta es la tabla de contenido del texto escolar Fundamentos de las Matemáticas. Como se puede observar, en el último capítulo, se abordan las nociones que han sido del interés particular de este trabajo.

Código de identificación **TU2L15P2A**	
Capítulo 0.	Repaso de álgebra
Capítulo 1.	***Aplicaciones y más álgebra***
Capítulo 2.	***Funciones y gráficas***
Capítulo 3.	Rectas, parábolas y sistemas de ecuaciones
Capítulo 4.	Funciones exponenciales y logarítmicas
Capítulo 5.	Matemáticas financieras
Capítulo 6.	Álgebra matricial
Capítulo 7.	Programación lineal
Capítulo 8.	Introducción a la probabilidad y la estadística
Capítulo 9.	Temas adicionales en probabilidad
Capítulo 10.	Límites y continuidad
Capítulo 11.	Diferenciación
Capítulo 12.	Temas adicionales de diferenciación
Capítulo 13.	Trazado de curvas
Capítulo 14.	Integración
Capítulo 15.	Métodos y aplicaciones de la integración
Capítulo 16.	Variables aleatorias continuas
Capítulo 17.	Cálculo de varias variables

En cuanto al segundo texto universitario titulado Matemáticas para administración y economía, se observa que las nociones que, son de nuestro interés, están relacionadas con el estudio de álgebra de los números reales, y de las expresiones algebraicas que fueron desarrolladas en los capítulos 1 y 2.

Por último, se presenta la tabla de contenidos correspondiente al texto Álgebra y trigonometría. Como se puede observar, en los primeros tres capítulos, se abordan las nociones de valor absoluto, desigualdades y desigualdades con valor absoluto.

Código de identificación **TU3L10P10TIC**	
Capítulo 1.	***Conceptos fundamentales de álgebra***
Capítulo 2.	***Ecuaciones y desigualdades***
Capítulo 3.	***Funciones y gráficas***
Capítulo 4.	Funciones polinómicas y racionales
Capítulo 5.	Funciones inversa, exponencial y logarítmica
Capítulo 6.	Funciones trigonométricas de números reales.
Capítulo 7.	Trigonometría analítica
Capítulo 8.	Aplicaciones de la trigonometría
Capítulo 9.	Sistemas de ecuaciones y desigualdades
Capítulo 10.	Sucesiones, series y probabilidad
Capítulo 11.	Temas de geometría analítica

La descripción general de los textos finaliza, con la caracterización de la estrategia pedagógica, la identificación de las características del auditorio al cual van dirigidos, el papel de la tecnología, e incluso, dar cuenta de los aspectos más relevantes que un estudiante debería aprender, según los autores.

2.1 Datos de identificación del texto universitario TU1L0P6TM

Este es un texto que va dirigido a estudiantes que han elegido una carrera científica como: matemáticas, matemáticas y física, física, los cuales cursan los primeros semestres universitarios. También, a estudiantes egresados del bachillerato colombiano que tengan una buena fundamentación matemática, y que posean aptitudes normales, sin que ello implique algún tipo de conocimiento especializado sobre temas matemáticos.

El autor hace una presentación formal de los temas, porque así debe hacerse a nivel universitario, y critica el hecho de repetir las matemáticas que se enseñan en el bachillerato:

> *Somos conscientes de las dificultades de un curso de esta naturaleza para estudiantes de un primer semestre de universidad. Pero, ¿qué otras opciones existen? Volver a repetir asistemáticamente las matemáticas del bachillerato, como se hace actualmente, es una opción que debe ser reevaluada, sobre todo si se trata de formar futuros científicos y profesores de secundaria. Seguir en ello sería convertir en un principio pedagógico la superficialidad, la carencia de rigor intelectual y el desprecio por el estudio sistemático*. (Restrepo, 2003)

En la presentación de los principios lógicos omite las tablas de verdad, en la presentación de la teoría de conjuntos y de las funciones, no hace uso de los dibujos, porque según él, ellos son un soporte empírico que sólo podría justificarse en el nivel de preescolar, mas no a nivel universitario.

2.2 Datos de identificación del texto universitario TU2L15P2A

La propuesta pedagógica destaca la importancia que tiene para los estudiantes encontrar un texto con gran cantidad y variedad de aplicaciones, que cubran áreas diversas como administración, economía, biología, psicología, ecología, estadística, etc., estas aplicaciones han sido tomadas de la vida cotidiana y literatura existente, las cuales han sido documentadas, en ocasiones, de la Web.

Los autores proponen al margen izquierdo notas de ADVERTENCIA en las cuales se destacan los errores que con mayor frecuencia cometen los estudiantes.

Los autores sólo presentan aquellas demostraciones que permiten ilustrar cómo hacer cálculos de manera general, esto es porque hay un predominio de argumentos inductivos informales sobre los deductivos formales.

En cuanto al uso del lenguaje natural, los autores afirman emplear un lenguaje coloquial cuando esto puede hacerse sin sacrificar la precisión matemática, además se han optado por suprimir el uso de términos equivalentes, por ejemplo: para un punto (a, b) en el plano, "a se llama abscisa o coordenada x…" la anterior frase se ha sustituido por "a se llama coordenada x…"

Los autores afirman que:

> *En cada serie de ejercicios, los grupos de problemas están organizados en un orden creciente de dificultad. En muchos casos van desde los que sirven para practicar y se resuelven en forma mecánica, hasta los más interesantes que obligan a reflexionar.* (Haeussler *et al*, 2008)

De igual forma, aseveran que han hecho un esfuerzo considerable por alcanzar el equilibrio entre los ejercicios de entrenamiento, y los problemas que requieren de la integración de los conceptos aprendidos, además, el texto también cuenta con gran variedad de problemas de la vida cotidiana con datos reales de la vida cotidiana.

2.3 Datos de identificación del texto universitario TU3L10P10TIC

Dentro de la propuesta pedagógica del texto, se destaca el uso de diferentes registros de representación semiótico (gráfico, tabular, escritura algebraica, lenguaje natural, entre otros). En los ejercicios, se plantean exigencias, con el objetivo de que el estudiante construya modelos matemáticos para un conjunto de datos.

De igual forma, los autores tienen como propósito que el estudiante comprenda la relación conceptual entre ecuación y su gráfica. Se le dan mucha importancia a los ejercicios de aplicación, en tanto que se espera ellos contribuyan al desarrollo de análisis más profundos, y al mejoramiento de la capacidad de síntesis por parte de los estudiantes.

En este sentido, la propuesta pedagógica procura que el estudiante tenga un acercamiento al uso de las tecnologías, por medio de algunos ejemplos o ejercicios que requieren el uso de la calculadora. En los ejercicios se realizan procesos de alfabetización[32] sobre el uso de esta clase de dispositivos tecnológicos, y se exige la interpretación de la información obtenida.

Los autores afirman que:

> *Se ha comprobado que la inclusión en el texto de ejemplos y recuadros sobre la calculadora graficadora, que presentan secuencias específicas de tecleo con códigos de color y pantallas para la TI-83 y TI-86, ha sido de valor agregado para los estudiantes… ofrece a los profesores más flexibilidad en términos de la forma en que pueden hallar una solución*. (Swokowski *et al*, 2006)

Generalmente para el desarrollo de los contenidos, el texto inicia con un problema o una aplicación; posteriormente se da la definición, la terminología y los ejemplos respectivos; estos últimos generalmente están titulados (para una referencia rápida); además se proporcionan soluciones minuciosas de problemas similares a los que están en las secciones de ejercicios. La mayoría de los teoremas no son demostrados, sólo son ilustrados.

El texto cuenta con unas notas de advertencias que alertan a los estudiantes de errores comunes, esto como parte de su estrategia pedagógica.

3. Dimensiones a considerar en el análisis

Los aspectos que aquí se han considerado para el análisis, tienen que ver con la organización de los contenidos y su intencionalidad; los significados ligados a la elección didáctica (ubicación de los contenidos en una sección en particular), además de observar la cantidad y variedad de los registros de representación de un mismo concepto, entre otros aspectos.

[32] Los dispositivos tecnológicos utilizados para la alfabetización son: las calculadoras TI-83 Plus y TI-86. Este proceso consiste en ilustrar, en recuadros, secuencias específicas de tecleo con códigos de color y las pantallas de las calculadoras, de esta manera se muestra cuáles son los comandos empleados en cada uno de los dispositivos para dar solución a una tarea propuesta de manera eficiente.

3.1 La estructura de las unidades temáticas

Ahora se detalla, para cada uno de los textos seleccionados, el contenido y la organización de los capítulos en los cuales se abordan las ILVA1V.

En primer lugar, está *Fundamentos de las Matemáticas* identificado con el código TU1L0P6TM, el cual es un texto expositivo cuyo discurso es bastante formal, razón por la cual se propone un primer capítulo, en donde se estudian los principios lógicos que regulan los procesos deductivos (demostraciones), los cuantificadores y los principios que regulan el uso de las matemáticas. En palabras del autor: "*La lógica en sí no es parte de la matemática. Es algo más general, el fundamento mismo de la coherencia racional del discurso de todas las ciencias, de la matemática, de la filosofía y del discurso de la vida diaria*" (p.1).

Al iniciar cada capítulo el autor presenta los propósitos y da una visión de cómo está estructurado, de igual forma delimita el auditorio para el cual va dirigido el texto.

Los teoremas que se presentan son demostrados por el autor o dejados como ejercicio, para que el lector realice las demostraciones, ya que estas se consideran un elemento fundamental del discurso matemático, al respecto el autor afirma que:

> *La demostración siempre ha sido un elemento esencial de las matemáticas. Durante mucho tiempo la matemática se distinguió de otras ciencias por su carácter deductivo o demostrativo. Es la ciencia que exige que los enunciados sean demostrados mediante razonamientos lógicos, a diferencia de las ciencias empíricas que exigen la comprobación, la falsación de la hipótesis y el experimento para validar lo que se cree verdadero*. (p.2)

Fundamentos de las Matemáticas (TU1L0P6TM)

Capítulo 1. Los principios lógicos
Capítulo 2. Conjuntos
Capítulo 4. Orden y equivalencia
Capítulo 5. Los números naturales
Capítulo 6. Los números enteros
Capítulo 7. Número reales
7.1 Los números racionales ($\mathbb{Q}$)
7.2 Propiedades algebraicas del extremo superior en un campo ordenado
7.3 Subconjuntos mayorados de $\mathbb{Q}$
7.4 Los números reales
7.5 Raíces cuadradas en $\mathbb{R}$
7.6 Decimales
7.7 Valor absoluto
7.8 Coordenadas
7.9 El espacio $\mathbb{R}^n$
7.10 Teoría axiomática de los números reales
Propiedades relativas al orden
Propiedades relativas al extremo superior
Propiedades de $\mathbb{N}$ (números naturales)
Propiedades de $\mathbb{Z}$ (números enteros) y $\mathbb{Q}$ (números fraccionarios)
Algunas propiedades especiales de $\mathbb{R}$
La métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$
7.11 Ejercicios

La organización de los contenidos es tal que son demostrados los conceptos básicos de la teoría de número reales y muestra el procedimiento de las “cortaduras de Dedekind” para construirlos.

En el capítulo 7 se estudian sistemas de campos ordenados $\mathbb{Q}$ (número racionales) y $\mathbb{R}$ (números reales), esto se hace de la siguiente manera: primero se construye $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ por medio de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Además se demuestra que $\mathbb{Q}$ es el menor campo ordenado que contiene a $\mathbb{N}_0$ que no es completo porque ecuaciones como: $x^2 = 2$ no admiten soluciones en $\mathbb{Q}$. Luego se construye a $\mathbb{R}$, es decir, el menor campo ordenado que contiene a $\mathbb{N}_0$.

Los aspectos geométricos de la recta como la identificación de cada número real con un punto en la recta numérica se presentan en uno de los apéndices.

Matemáticas para administración y economía (TU2L15P2A)

Capítulo 0. Repaso de álgebra

Capítulo 1. Aplicaciones y más álgebra

1.1 Aplicaciones de ecuaciones

1.2 Desigualdades lineales

1.3 Aplicaciones de las desigualdades

1.4 Valor absoluto

Definición de valor absoluto

Ecuaciones con valor absoluto

Desigualdades con valor absoluto

Propiedades de valor absoluto

1.5 Notación de sumatoria

1.6 Repaso

Capítulo 2. Funciones y gráficas

2.1 Funciones

2.2 Funciones especiales

Función constante

Funciones polinomiales

Funciones racionales

Funciones definidas por partes

2.3 Combinaciones de funciones

2.4 Funciones inversas

2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares

2.6 Simetría

2.7 Traslaciones y reflexiones

2.8 Repaso

La organización de los contenidos presentados en la descripción física, de los muestra que éste es un texto que puede ser utilizado para dictar los cursos de matemáticas fundamentales, cálculo diferencial y cálculo integral.

Este texto es expositivo porque en su esquema general de presentación, primero da una definición, por lo general nominal, y luego continúa con las propiedades, las cuales son ejemplificadas, y por último presenta una serie de ejercicios con la temática abordada con antelación.

En la sección 1.4 se aborda el tema de las ILVA1V, y en la sección 2.2 se da la definición de función valor absoluto, mencionando, que es un caso particular de una función definida por partes.

En lo referente al primer capítulo, los propósitos presentados por los autores se sintetizan en cuatro:

- Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas y desigualdades.
- Resolver desigualdades lineales con una variable, e introducir notación de intervalos.
- Resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valores absolutos (ver sección 1.4, p. 61 del texto universitario código TU2L15P2A).
- Escribir y evaluar sumas en notación de sumatoria.

Álgebra y trigonometría con geometría analítica (TU3L10P10TIC)

Capítulo 1. Conceptos fundamentales de álgebra

1.1 Números reales

Definición de los diferentes conjuntos numéricos
Propiedades respecto a la adición y el producto
Propiedades de la igualdad
Operaciones con números racionales
Relaciones entre a y $-a$.
Ley de la tricotomía
Ley de los signos
Definición de valor absoluto
Definición de la distancia entre puntos sobre una recta coordenada
Notación científica

1.2 Exponentes y radicales

1.3 Expresiones algebraicas

1.4 Expresiones fraccionarias

Capítulo 2. Ecuaciones y desigualdades

2.1 Ecuaciones

2.2 Problemas aplicados

2.3 Ecuaciones cuadráticas

2.4 Números complejos

2.5 Otros tipos de ecuaciones

2.6 Desigualdades

Definición de desigualdad
Definición de intervalo
Propiedades
Propiedades para valores absolutos

2.7 Más sobre desigualdades

Capítulo 3. Funciones y gráficas

3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares

3.2 Gráficas de ecuaciones

3.3 Rectas

3.4 Definición de función

3.5 Gráficas de funciones

Definición de función par e impar
Transformación de funciones (desplazamientos horizontales y verticales, elongaciones o encogimientos horizontales y verticales, etc.)
Trazado de gráficas definidas por secciones
Trazado de la gráfica de una ecuación que contiene valor absoluto.
Solución gráfica de una desigualdad que contiene valor absoluto

3.6 Funciones cuadráticas

3.7 Operaciones sobre funciones

La organización de los contenidos es tal, que para los autores los Capítulos 1 y 2 se usan para algunas clases como material de repaso, y las secciones siguientes, son utilizadas para preparar a los estudiantes que van a abordar los cursos de cálculo.

Al iniciar cada capítulo aparece algún comentario historiográfico alusivo al título del mismo, y finalizando con una acotación, en la cual se menciona la importancia del tema que se va a estudiar, por ejemplo:

En la presentación del Capítulo 1 los autores afirman que:

> La gran cantidad de fórmulas que se usan en las ciencias y en la industria, pone de manifiesto la naturaleza general del álgebra. A medida que sigas adelante en el estudio de este texto, y pases a cursos más avanzados de matemáticos, o a campos donde éstas se utilizan, estarás cada vez más consciente de la importancia y el poder de las técnicas algebraicas.

Al finalizar la presentación del Capítulo 2 los autores aseveran que:

> Las desigualdades donde aparecen variables han alcanzado ahora el mismo nivel de importancia que las ecuaciones, y se usan con frecuencia en matemáticas aplicadas. En este capítulo estudiaremos diversos métodos para resolver ecuaciones y desigualdades básicas.

Este es un texto expositivo, porque inicia ***sus discursos*** con la presentación de una definición, luego continúa con el ejemplo y rápidamente introduce otra definición, o un conjunto de propiedades que son ejemplificadas hasta finalizar con *una* sección de ejercicios.

3.1.1 Consideraciones finales respecto a la estructura de las unidades temáticas

Al finalizar cada una de las dimensiones del análisis, se muestran las consideraciones finales en las cuales se rescatan los aspectos comunes, o distintivos (en viñetas) de cada uno de los textos escolares analizados.

- El TU1L0P6TM tiene como propósito construir los números reales, para lo cual el punto de llegada, es hacer una presentación axiomática de $\mathbb{R}$, lo cual es el punto de partida de los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, ya que va dirigido para auditorios diferentes, y los fines que se persiguen en la formación, no son los mismos para los estudiantes de las facultades de ingenierías, ciencias administrativas y económicas, que para los estudiantes de las facultades de educación y ciencias exactas.

- El texto TU2L15P2A define para cada sección el objetivo que desea alcanzar, mientras que en el texto TU3L10P10TIC, se presenta el propósito que se desea alcanzar en cada capítulo. Por otra parte, en el textoTU1L0P6TM, no se definen los propósitos, sino que habla de la importancia de los temas que aparecen en el capítulo.

- Los tres textos son expositivos, la diferencia, es el nivel de formalismo. En este sentido, podemos afirmar que el discurso expresado en el TU1L0P6TM es bastante riguroso, a tal punto que cada teorema, o es demostrado por el autor, o es propuesto como ejercicio para el lector, mientras que en los otros textos lo teoremas o propiedades son introducidos de forma inductiva.

3.2 Algunos comentarios sobre las definiciones de desigualdad y valor absoluto.

El estudio de las ILVA1V, involucra las nociones de desigualdad y valor absoluto. Estas dos nociones aparecen en dos contextos: los conjuntos numéricos y las expresiones algebraicas, aunque en algunas ocasiones, el valor absoluto aparece ligado al estudio de las funciones.

En primer lugar, veamos cómo definen los textos la noción de desigualdad, y luego pasemos a las diferentes presentaciones que hacen de la noción de valor absoluto.

3.2.1 La desigualdad en el texto Fundamentos de las Matemáticas

En el texto TU1L0P6TM no se habla de desigualdad, sino de relación de orden. Para el caso de los números reales, esta definición se hace por vía axiomática, lo cual implica que el conjunto de los números reales con la relación de orden total denotada por $\leq$, sea compatible con la suma de adición y multiplicación, cumpliendo con los axiomas que se muestran en la Ilustración 1:

Axioma B. La relación de orden $\leq$ es total y compatible con las operaciones algebraicas. Es decir:

(B.1) $x \leq x$;

(B.2) $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$;

(B.3) $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$;

(B.4) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

Si $x \leq y$ y $x \neq y$ escribiremos $x < y$ (x es menor que y); si $x \geq y$ y $x \neq y$ escribiremos $x > y$ (x es mayor que y).

(B.5) Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ (compatibilidad con la suma).

(B.6) Si $0 \leq x \leq y$ entonces $xz \leq yz$ (compatibilidad con la multiplicación).

Ilustración 1. Texto código TU1L0P6TM, pp. 175-176

La relación de orden presentada de forma axiomática en la Ilustración 1, permite definir términos como conjunto mayorado, conjunto minorado, mayorante, minorante, máximun, mínimum, extremo superior y extremo inferior (ver Ilustración 2); esto con la finalidad de garantizar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, que es mayorado, tiene extremo superior.

Antes de enunciar el último axioma se necesitan unas definiciones. Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es **mayorado** si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in E$; cualquier elemento a con esta propiedad se llama **mayorante** de E. Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es **minorado** si existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$ para todo $x \in E$; cualquier elemento b con esta propiedad se llama **minorante** de E. Un elemento $u \in E$ es un **máximum** de E si $x \leq u$ para todo $x \in E$; si u y u' tienen esta propiedad, entonces $u = u'$ puesto que $u \leq u'$ y $u' \leq u$, así que un conjunto solamente puede tener un máximum, el cual denotamos por $\max E$. Un elemento $v \in E$ es un **mínimum** de E si $v \leq x$ para todo $x \in E$; si v y v' tienen esta propiedad, entonces $v = v'$ puesto que $v \leq v'$ y $v' \leq v$, así que un conjunto solamente puede tener un mínimum, el cual denotaremos por $\min E$. Conviene observar que un conjunto E puede no tener ni mínimum ni máximum (por ejemplo, $E = \{x : 2 < x < 3\}$). Diremos que u es el **extremo superior** de E si u es el menor de todos los mayorantes de E; es decir, $x \leq u$ para todo $x \in E$ y $u \leq a$ para cualquier mayorante a de E. Diremos que v es el extremo inferior de E si u es el mayor de todos los minorantes de E; es decir, $v \leq x$ para todo $x \in E$ y $v \geq b$ para cualquier minorante b de E. Denotaremos por $\sup E$ al extremo superior de E (si existe) y por $\inf E$ al extremo inferior de E (si existe).

Ilustración 2. Texto código TU1L0P6TM, p. 176

Luego el autor afirma que de los axiomas de orden total y de campo, se derivan las propiedades fundamentales del sistema $\mathbb{R}$ de los números reales, las cuales aparecen en la Ilustración 3:

Propiedades Relativas al orden

(7.10.1) $x \leq y$ si y sólo si $y - x \geq 0$

(7.10.2) $x < y$ si y sólo si $y - x > 0$

Un número x es **positivo** si $x > 0$ y **negativo** si $x < 0$. Se suele denotar por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos y por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números reales negativos

(7.10.3) Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \in \mathbb{R}^+$, ó $x \in \mathbb{R}^-$ o $x = 0$

Ilustración 3. Texto código TU1L0P6TM, pp. 176-177

3.2.2 La desigualdad en el texto Matemáticas para Administración y Economía

En la sección 1.2 titulada Desigualdades lineales, se introducen los símbolos <, ≤, > y ≥ después de que han introducido la interpretación geométrica de la expresión $a = b$, de tal forma, que las relaciones de desigualdad sirven dan cuenta de las posiciones relativas que pueden tener un par de puntos sobre la recta numérica, veamos la Ilustración 4:

54 Capítulo 1 Aplicaciones y más álgebra

OBJETIVO

Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

1.2 Desigualdades lineales

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. O bien a y b coinciden, o bien, a se encuentra a la izquierda de b, o a se encuentra a la derecha de b (vea la figura 1.8).

Si a y b coinciden entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$, donde el *símbolo de desigualdad* "<" se lee "es menor que". Por otro lado, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y se escribe $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "≤" se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "≥" está definido como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. En este caso, se dice que a es mayor o igual a b.

Se usarán las palabras *números reales* y *puntos* de manera intercambiable, puesto que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, puede hablarse de los puntos $-5, -2, 0, 7$ y 9, y escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$. (Vea la figura 1.9.) Resulta claro que si $a > 0$, entonces a es positiva; si $a < 0$, entonces a es negativa.

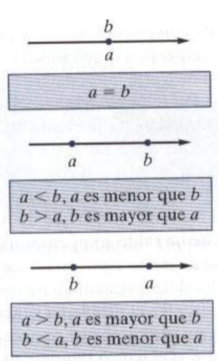


FIGURA 1.8 Posiciones relativas de dos puntos.

Ilustración 4. Texto código TU2L15P2A, p. 54

Una vez definidos los símbolos que permiten ordenar los números reales, se introduce la definición de desigualdad (ver Ilustración 5). Ésta, es pues, un enunciado matemático, el cual puede ser verdadero o falso. Ver las desigualdades desde el punto de vista de la lógica, permite introducir la definición de solución.

Recordemos que los enunciados son proposiciones que pueden ser abiertas o cerradas; para el caso de las proposiciones abiertas, la solución está caracterizada por los valores de las variables que hace el enunciado verdadero.

DEFINICIÓN

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Ilustración 5. Definición de desigualdad en el texto código TU2L15P2A, p. 54

Una vez dada la definición de desigualdad, se mencionan sus propiedades, las cuales sólo son ejemplificadas y no demostradas (ver Ilustración 6).

Reglas para las desigualdades

Recuerde que las reglas también se aplican $\leq$, $>$ y $\geq$.

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b, \quad \text{entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

En forma simbólica

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

ADVERTENCIA

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando ambos lados se multiplican o se dividen por un número negativo.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo***, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido ***contrario*** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{entonces } a(c) > b(c) \text{ y } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ y $-2 < 0$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, y se toma el recíproco de cada lado, entonces resulta otra desigualdad con sentido contrario a la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ o bien } a < b < 0, \text{entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Por ejemplo, $2 < 4$, entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ y $-4 < -2$, entonces $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$.

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se eleva cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ y } n > 0, \text{entonces } a^n < b^n.$$

Para el entero positivo n, esta regla también da

$$\text{si } 0 < a < b, \text{entonces } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

Se dice que un par de *desigualdades* es *equivalente* si cuando cualquiera de ellas es verdadera la otra también lo es. Es fácil mostrar que cuando se aplica cualquiera de las reglas 1 a 6 a una desigualdad, el resultado es una desigualdad equivalente. Ahora se aplicarán las reglas 1 a 4 a una *desigualdad lineal*.

Ilustración 6. Texto código TU2L15P2A, pp. 54-55

3.2.3 La desigualdad en el texto Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica

Los autores del texto TU3L10P10TIC, definen de dos maneras distintas la desigualdad, veamos:

En la sección 1.1 correspondiente a los números reales, la definición de desigualdad emerge en el contexto numérico ligado al estudio de las propiedades topológicas de la recta real (ver Ilustración 7).

En la tabla adjunta definimos las nociones de **mayor que** y **menor que** para números reales a y b. Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad,** y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se conocen como **desigualdades.**

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Si los puntos A y B de una recta coordenada tienen coordenadas a y b, respectivamente, entonces $a > b$ equivale a la expresión "A está a la *derecha* de B", mientras que $a < b$ equivale a "A está a la *izquierda* de B".

Ilustración 7. Texto código TU3L10P10TIC, p. 9

En la sección 2.6 aparece nuevamente la definición de desigualdad en el contexto algebraico; dicha noción es posterior al estudio de las ecuaciones y se define como se muestra en la Ilustración 8:

2.6

Desigualdades

Una **desigualdad** es un enunciado en que dos cantidades o expresiones no son iguales. Puede darse el caso de que una cantidad sea menor que (<), menor o igual que ($\leq$), o mayor que (>) o mayor o igual que ($\geq$) que otra cantidad. Consideremos la desigualdad

$2x + 3 > 11$

en donde x es una variable. Según se expone en la tabla que sigue, determinados números conducen a expresiones verdaderas cuando se sustituyen con x, pero otros llevan a expresiones falsas.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	9>11	Expresión falsa
4	11>11	Expresión falsa
5	13>11	Expresión verdadera
6	15>11	Expresión verdadera

Ilustración 8. Texto código TU3L10P10TIC, p.112

3.2.4 Consideraciones finales respecto a la definición de desigualdad

Por el enfoque del texto TU1L0P6TM (hacia la construcción de una teoría matemática sólida), la desigualdad, es tomada en el contexto más amplio como relación de orden, ingresándola como axioma. Además en este texto, no se hace referencia a la interpretación geométrica de la desigualdad, lo que sí sucede en los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC.

Como se puede ver en ambos textos cuando se menciona la definición de desigualdad, en el conjunto de los número reales, ésta corresponde a la propiedad de poder identificar cuándo dos números sobre la recta numérica coinciden, o cuál está a la derecha del otro; esto se demuestra por medio de expresiones como: "si a está a la derecha de b, decimos que a es mayor que b ,y se escribe $a > b$"[33] .

En los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC definen la desigualdad como un enunciado, con la finalidad de dar la definición de conjunto solución. Sin embargo, esta forma de definir, hace que las desigualdades sean enunciados de la lógica matemática y para calificarlos como verdaderos o falsos, es necesario definir si hacen parte de la lógica proposicional, o de la lógica de predicados.

En el caso de esta última, sabemos que un enunciado tiene infinitas interpretaciones y que ellas dependen del dominio de los cuantificadores (muchas veces implícitos en el enunciado), y de los predicados (en este caso binarios).

En el texto TU1L0P6TM, hay un error en el axioma (B.6) de orden, porque hace falta decir que z es un número positivo, de lo contrario el condicional no es cierto.

A continuación se presenta la manera como los textos definen el valor absoluto.

3.2.5 El valor absoluto en el texto Fundamentos de las Matemáticas

En el caso del texto universitario TU1L0P6TM, la definición emerge en el registro de escritura algebraica, y no hay ninguna interpretación geométrica de ella. Esta forma de definir dicha noción, implica que el valor absoluto es una función, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que está definida por partes (ver Ilustración 9).

[33] Tomado del texto universitario código TU2L15P2A, p.54

Una vez dada la definición, se ejemplifica en el contexto numérico, y se demuestran algunas de sus propiedades. Entre ellas está la desigualdad triangular, y los teoremas que permiten dar solución a las ILVA1V.

7.7 Valor absoluto

El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ es el número $|x| \in \mathbb{R}$ definido de la manera siguiente: $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$. Por ejemplo,

$$|2| = 2 \;,\; |(-2)| = 2 \;,\; |0| = 0$$

Ilustración 9. Texto código TU1L0P6TM, p. 165

Dentro de las propiedades que son demostradas del valor absoluto, resaltamos la que aparece en la Ilustración 10, porque en algunos textos la propiedad 7.7.12, aparece como otra definición de valor absoluto, la cual emerge generalmente en el contexto de las potencias racionales.

(7.7.12) $\sqrt{x^2} = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$

Demostración. Por (7.7.3) $x^2 = |x|^2$

Ilustración 10. Texto código TU1L0P6TM, p. 167

Posterior a la definición de valor absoluto, en la sección 7.8 se da la definición de coordenada en $\mathbb{R}$; en este caso, se dice que a cada punto sobre la recta numérica le corresponde uno y sólo un número real y a la inversa.

Luego el autor define sistema de coordenadas ortogonal, tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$. En la sección 7.9 define el espacio $\mathbb{R}^n$lo cual implica definir la suma con sus propiedades (conmutativa, asociativa, identidad aditiva e inverso aditivo,) y el producto por un escalar con sus propiedades.

Luego se define la norma de un vector en $\mathbb{R}^n$, como se muestra en la Ilustración 11. Para el caso de $\mathbb{R}^1$, la norma del vector y el valor absoluto coinciden, y en consecuencia, las propiedades que se satisfacen para el valor absoluto se pueden generalizar para la norma de vectores en $\mathbb{R}^n$.

La **norma** o longitud de un vector $x = (x_k)_{1 \le k \le w}$ es el número real.

(7.9.14) $$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

Si $x \in \mathrm{IR}^1$ entonces, escribiendo $u^{1/2}$ en vez de $\sqrt{u}$,

$$\|x\| = (x^2)^{1/2} = |x|$$

Ilustración 11. Texto código TU1L0P6TM, p. 170

Al finalizar esta sección 7.9, el autor afirma que la norma en $\mathbb{R}$ se confunde con el valor absoluto, seguido da la interpretación geométrica de suma y de producto por escalar para un vector en $\mathbb{R}^2$. Luego afirma que el número real $\left||x-y|\right| = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(x_j - y_j\right)^2\right)^{1/2}$ es la distancia euclidiana entre dos punto $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entre sus propiedades está el hecho de ser no negativa, conmutativa y la desigualdad triangular.

Posteriormente, el autor presenta la Teoría Axiomática de los Números Reales y en este marco, nuevamente define el valor absoluto y la distancia euclidiana entre dos números reales, para posteriormente presentar sus propiedades (ver la Ilustración 12)

El **valor absoluto** de $x \in \mathrm{IR}$ es el número real denotado por $|x|$ y definido así: $|x| = x$ si $x \ge 0$ y $|x| = -x$ si $x \le 0$. Si $x, y \in \mathrm{IR}$, la **distancia euclidiana** entre x y y es el número real $d(x,y) = |y - x|$

(7.10.4) $|x| \ge 0$, $|x| > 0$ si $x > 0$ y $|(-x)| = |x|$

(7.10.5) $|x + y| \le |x| + |y|$ y la igualdad ocurre si y sólo si ambos números son positivos o negativos.

(7.10.6) $|xy| = |x|\ |y|$

(7.10.7) $||x| - |y|| \le |x - y|$

(7.10.8) $d(x,y) \ge 0$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(7.10.9) $d(x,y) = d(y,x)$

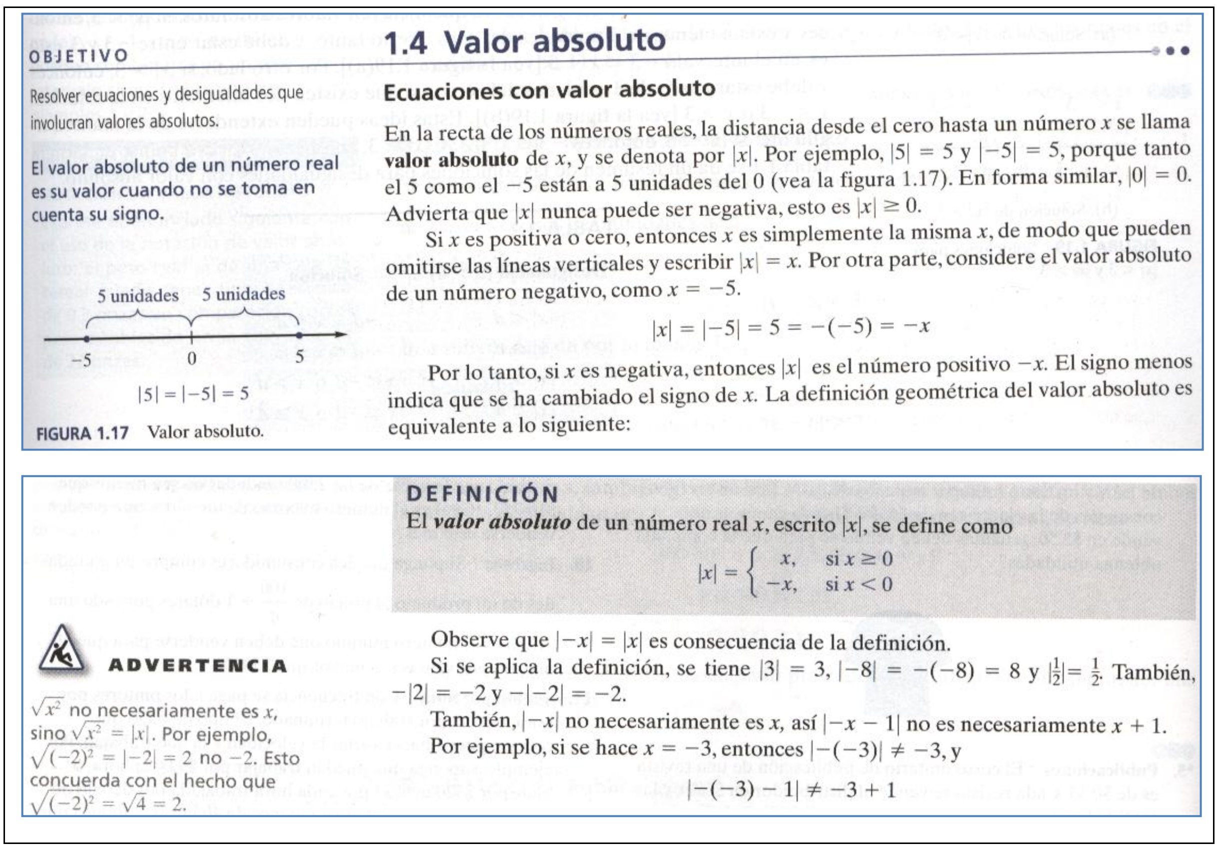
(7.10.10) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

Ilustración 12. Texto código TU1L0P6TM, p. 177

Es importante observar que en ningún momento se ilustra la definición de valor absoluto en la recta numérica, sólo se enuncia en el registro de escritura algebraica y es ejemplificada la definición en el contexto numérico.

3.2.6 El valor absoluto en el texto Matemáticas para Administración y Economía

Para la definición de valor absoluto se involucran dos registros de representación (lenguaje natural y escritura algebraica), y se ejemplifica dicha noción en el contexto numérico y geométrico (en la recta numérica). Las siguientes Ilustraciones 13 y 14 muestran cómo los autores definen el valor absoluto en las secciones 1.4 y 2.2 tituladas Valor absoluto, y Funciones especiales respectivamente.



1.4 Valor absoluto

OBJETIVO

Resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valores absolutos.

El valor absoluto de un número real es su valor cuando no se toma en cuenta su signo.

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, la distancia desde el cero hasta un número x se llama **valor absoluto** de x, y se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, porque tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del 0 (vea la figura 1.17). En forma similar, $|0| = 0$. Advierta que $|x|$ nunca puede ser negativa, esto es $|x| \geq 0$.

Si x es positiva o cero, entonces x es simplemente la misma x, de modo que pueden omitirse las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x$$

Por lo tanto, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que se ha cambiado el signo de x. La definición geométrica del valor absoluto es equivalente a lo siguiente:

FIGURA 1.17 Valor absoluto.

DEFINICIÓN

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observe que $|-x| = |x|$ es consecuencia de la definición.

Si se aplica la definición, se tiene $|3| = 3$, $|-8| = -(-8) = 8$ y $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

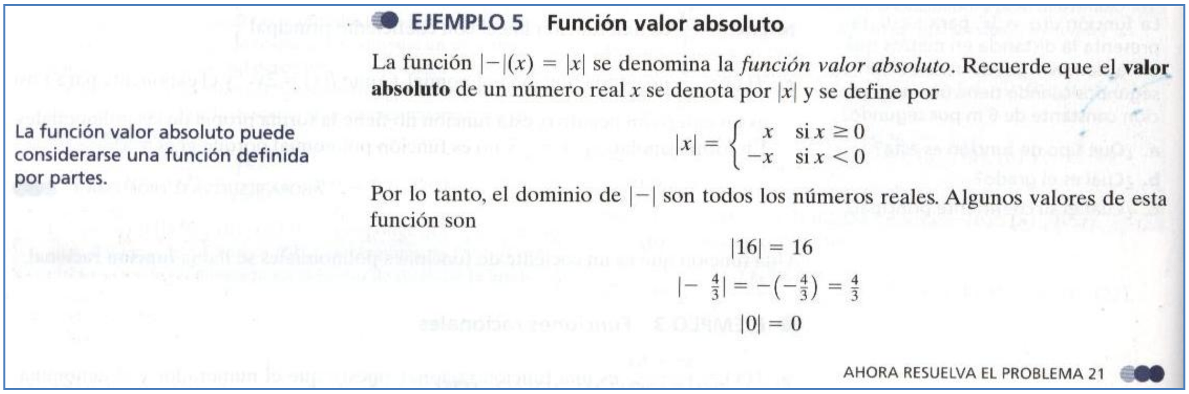
También, $|-x|$ no necesariamente es x, así $|-x-1|$ no es necesariamente $x+1$. Por ejemplo, si se hace $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1$$

ADVERTENCIA

$\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, sino $\sqrt{x^2} = |x|$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no -2. Esto concuerda con el hecho que $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Ilustración 13. Texto código TU2L15P2A, pp. 61–62


EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $|-|(x) = |x|$ se denomina la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

Por lo tanto, el dominio de $|-|$ son todos los números reales. Algunos valores de esta función son

$$|16| = 16$$
$$|-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}$$
$$|0| = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

Ilustración 14. Texto código TU2L15P2A, p. 84

En los tres fragmentos anteriores, se identifican las siguientes definiciones de valor absoluto:

- El valor absoluto de un número real, es su valor cuando no se toma en cuenta su signo.
- El valor absoluto de un número real, es la distancia desde cero hasta el número x y se denota por $|x|$.
- En la nota de advertencia de la página 62, aparece otra de las definiciones de valor absoluto, la cual hace alusión a las propiedades de la potenciación.

  $\sqrt{x^2} = |x|$
- El valor absoluto de un número real x, escrito $|x|$, se define como

  $|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$
- La función $|-|(x) = |x|$ se denomina *función valor absoluto*. En el margen izquierdo de la definición, se dice que dicha función puede considerarse una función definida por partes.

La solución de las ecuaciones o desigualdades con valor absoluto, no se hace a partir de la definición de la página 62, sino que se recurre a la interpretación geométrica –como una distancia– sobre la recta numérica.

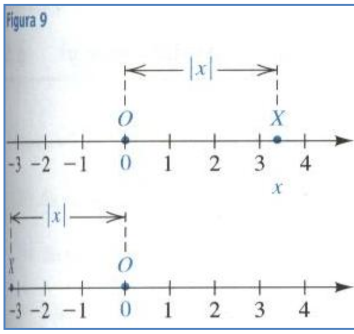
3.2.7 El valor absoluto en el texto Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica

En el texto universitario TU3L10P10TIC, la definición de valor absoluto aparece en tres secciones diferentes ellas son: Sección 1.1 Números reales, Sección 2.6 Desigualdades, y Sección 3.5 Gráficas de funciones. En las Ilustración 15, Ilustración 16 y Ilustración 17 respectivamente, los registros utilizados para la definición de valor absoluto son escritura algebraica, y la representación gráfica, tanto en la recta como en el plano cartesiano. Además, en la definición de valor absoluto, emergen en tres contextos: numérico, algebraico y geométrico.

Definición de valor absoluto	El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $\|a\|$, se define como sigue. **(1)** Si $a \geq 0$, entonces $\|a\| = a$. **(2)** Si $a < 0$, entonces $\|a\| = -a$.

Ilustración 15. Texto código TU3L10P10TIC, p. 12

Figura 9



Si un punto X sobre una recta coordenada tiene una coordenada x, como se describe en la figura 9, entonces X está a la derecha del origen O si $x > 0$ y a la izquierda de O si $x < 0$. Con base en la sección 1.1, la distancia $d(O, X)$ entre O y X es el número real *no negativo* dado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

Ilustración 16. Texto código TU3L10P10TIC, p. 117

En el ejemplo siguiente consideramos la **función valor absoluto** f, definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 Trazado de la gráfica de la función valor absoluto

Sea $f(x) = |x|$.

(a) Indica si f es par o impar.

(b) Grafica f.

(c) Encuentra los intervalos en que f crece o decrece.

SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de x funciona para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por tanto, f es una función par porque $f(-x) = f(x)$.

(b) En vista de que f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; así pues, la parte de la gráfica del primer cuadrante coincide con la recta $y = x$. Trazaremos esta semirrecta, y usando la simetría llegamos a la figura 1.

(c) Al consultar la gráfica vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

Figura 1

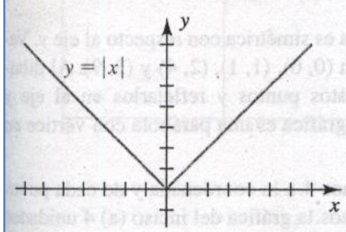


Ilustración 17. Texto código TU3L10P10TIC, p. 197

En los tres fragmentos anteriores identificamos las siguientes definiciones de valor absoluto:

- El valor de un número real a, denotado por $|a|$, se define como se sigue

  (1) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.

  (2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

Después de dar esta definición, se afirma que en la parte (2) de la definición, $-a$ representa un real positivo.

- Desde el punto de vista geométrico (sobre la recta real), el valor absoluto de un número x, es la distancia que hay entre el punto X de coordenada x, y el origen O de coordenada 0, es decir, $d(X, O) = |x - 0| = |x|$ y como toda distancia representa un real no negativo.

Finalmente, se presenta la definición de valor absoluto como una función con dominio en los reales ($\mathbb{R}$), y tiene la particularidad de ser una función par.

3.2.8 Consideraciones finales respecto a la definición de valor absoluto

En el enfoque del TU1L0P6TM, el cual consiste en el desarrollo de teoría matemática, la definición de valor absoluto emerge como la métrica usual de $\mathbb{R}$, y a diferencia de los otros dos textos universitarios, en éste no se incluyen representaciones geométricas del valor absoluto en términos de distancia, entre dos puntos sobre la recta numérica.

La interpretación geométrica del valor absoluto es muy importante en los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, porque a partir de ella, se derivan los teoremas que permiten dar solución a las ecuaciones e inecuaciones lineales con valor absoluto.

Cuando se define el valor absoluto como una función, no se hace énfasis en los tres elementos que son fundamentales en dicha definición como son dominio, rango y regla de asignación; generalmente se enfatiza en la regla de asignación y el dominio, pero se descuida el rango.

En nuestro caso, el rango es fundamental porque es el conjunto que permite determinar los posibles valores de la variable dependiente $|x|$ en comparación con x, dado que esta última variable puede tomar valores positivos, negativos o cero, siendo una variable no negativa.

En el contexto del estudio de la noción de función el valor absoluto, se utiliza para ejemplificar funciones pares o funciones definidas por partes, pero no se retoma el estudio de todas las propiedades que se estudiaron con anterioridad, en las secciones en que se introduce la noción de valor absoluto.

Cuando se da la definición de función en el texto TU2L15P2A, la notación no es convencional ni apropiada, porque resulta ser bastante confusa, ya que en lugar de escribir $f(x) = |x|$, dicen que $| - |(x) = |x|$.

En los tres textos se evidencia que el contexto elegido para ejemplificar la noción de valor absoluto, es el numérico, lo cual es contraproducente, si tenemos presente que a pesar de la larga experiencia que tienen los estudiantes con los números reales, la mayoría de ellos, cuando se enfrentan al estudio del álgebra, toman como conjunto de referencia para las letras el conjunto de los naturales (o en el mejor de los casos los racionales positivos).

En este sentido, el contexto numérico en el que se ejemplifica la noción de valor absoluto, refuerza dicha concepción, como el número sin signo, haciendo que los estudiantes afirmen que $|-x| = x$, puesto que $-x$, tiene signo negativo mientras que x, tiene signo positivo y como el valor absoluto es NO NEGATIVO, entonces es lógico pensar que $|-x| = x$, y de manera análoga $|x| = x$.

El texto universitario TU2L15P2A, define de manera coloquial el valor absoluto *"El valor absoluto de un número real es su valor cuando no se toma en cuenta su signo"* (p. 61).

Esta forma de definir el valor absoluto resulta efectiva, como lo mencionamos anteriormente, si se conoce el valor numérico al cual se le va a determinar el valor absoluto. En situaciones en las cuales el estudiante debe encontrar el valor absoluto de $|-h|$ si $h < 0$, la respuesta más probable es $|-h| = h$, porque aquí h, representa un número al cual se le ha desprovisto del signo.

3.3 Significados particulares del valor absoluto

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007), distinguen cuatro contextos en los cuales aparece la noción de valor absoluto: aritmético (el cual permite caracterizar la noción de valor relativo y valor absoluto, desde lo numérico), analítico (como una función definida a trozos o la función máximo), geométrico (como la distancia entre puntos), y algebraico (como una expresión equivalente a $\sqrt{x^2}$). Cada una de estas definiciones permite conocer parcialmente el objeto matemático, y determina las diversas formas en que un estudiante realiza la solución de ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto.

De las definiciones de valor absoluto presentadas en la sección anterior, encontramos que en los textos universitarios de matemáticas, no aparece la definición de valor absoluto desde el punto de vista analítico, como la función máximo ($|x| = máx\{x, -x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

La definición que más se privilegia es la de distancia entre dos puntos, lo cual tiene sentido porque en el cálculo diferencial e integral de una o varias variables, las ILVA1V representan vecindades sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, no se hace énfasis en los aspectos centrales que deben ser identificados por los estudiantes como son el centro y la distancia del centro a los extremos.

Es de suma importancia identificar para un mismo objeto matemático los significados particulares (o contenido matemático) que están siendo movilizados en los textos universitarios, así como la forma en que ellos están siendo representados, porque esto permite caracterizar el objeto matemático, además determina en cierto sentido, los procesos (o démarches[34]) realizados por los estudiantes cuando se enfrentan a un problema que involucra las inecuaciones lineales con valor absoluto, en una variable (ILVA1V). Esta es la razón por la cual, mencionamos cuáles son los registros utilizados para las definiciones de desigualdad y valor absoluto.

En la sección anterior, vimos que los registros de escritura algebraica, lenguaje natural y representación geométrica (en la recta y el plano), son los más utilizados para las definiciones de desigualdad y valor absoluto. De otro lado, sabemos que la propiedad fundamental de los registros de representación semiótica, es permitir su transformabilidad en otras representaciones que conserven todo, o parte del contenido de la representación inicial, ya sea en el interior de un registro, o en un registro diferente. Es por eso que resulta importante caracterizar los tratamientos y las conversiones, en el caso de los registros de representación antes mencionados, para posteriormente pasar al análisis de las actividades propuestas en los textos escolares de matemáticas.

[34] Los procesos o intentos que realiza un estudiante en la solución de una tarea, sean o no exitosos Duval (1995) les denomina **démarches**.

3.4 Caracterización de las operaciones cognitivas requeridas por los textos universitarios

Tanto en las definiciones, como en los ejemplos y los ejercicios de los textos universitarios, se ha identificado, que las transformaciones que se dan entre los diferentes registros de representación son:

3.4.1 Tratamientos en el Registro de Escritura Algebraica (REA). En este caso, los registros de partida y de llegada coinciden. Esta clase de transformaciones son utilizadas para demostrar que dos expresiones son equivalentes, o para encontrar la solución de una ecuación o inecuación, haciendo uso de las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades. Un ejemplo de las actividades en las cuales los estudiantes realizan la operación cognitiva de tratamiento se observa en la Ilustración 18 .

Ejercicios 71 y 72: resuelve la parte (a) y determina las re- puestas a las partes (b) y (c) con la respuesta.

71 (a) $|x+5|=3$ (b) $|x+5|<3$
(c) $|x+5|>3$

72 (a) $|x-3|<2$ (b) $|x-3|=2$
(c) $|x-3|>2$

Ilustración 18. Tratamientos en el REA, tomado de TU3L10P10TIC, p. 120

3.4.2 Tratamientos en el Registro Numérico (RN). Cuando se realizan tratamientos en este registro, se privilegian las tareas en las cuales se pide reescribir una expresión sin usar el símbolo del valor absoluto, por ejemplo:

Ejercicios 9 al 14: reescribe el número sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado.

9 (a) $|-3-2|$ (b) $|-5|-|2|$ (c) $|7|+|-4|$

10 (a) $|-11+1|$ (b) $|6|-|-3|$ (c) $|8|+|-9|$

11 (a) $(-5)|3-6|$ (b) $|-6|/(-2)$ (c) $|-7|+|4|$

Ilustración 19. Tratamientos en el RN, tomado de TU3L10P10TIC, p.14

3.4.3 Conversión del REA al registro de Representación Gráfica (RG). Este es el caso en que dada una ILVA1V, se pide trazar en la recta numérica los puntos representados por la inecuación (ver Ilustración 20).

2. **Dibuje en la recta numérica los conjuntos siguientes ($r > 0$):**
   i) $\{x : |x| < r\}$;
   ii) $\{x : |x| \leq r\}$;

Ilustración 20. Conversión del REA al RG (en la recta numérica), tomado de TU1L0P6TM, p.188

Además de representar la ILVA1V sobre la recta numérica, también es posible encontrar situaciones en las que se pide trazar la gráfica de la función valor absoluto, en el plano cartesiano (ver Ilustración 21).

3. **Dibuje los subconjuntos siguientes del plano:**
   i) $\{(x,y) : x = y\}$;
   ii) $\{(x,y) : x^2 + y^2 = r\}$;
   iii) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq r\}$;
   iv) $\{(x,y) : x^2 + y^2 < r\}$;
   v) $\{(x,y) : |x| + |y| = r\}$;
   vi) $\{(x,y) : |x| + |y| \leq r\}$;
   vii) $\{(x,y) : |x| + |y| < r\}$

Ilustración 21. Conversión del REA al RG (en el plano cartesiano), tomado de TU1L0P6TM, p.189

Es importante tener en cuenta, que aún cuando en la definición de valor absoluto y de sus propiedades el registro de representación gráfica es importante, porque sirve de soporte intuitivo, para definir las propiedades que se utilizan para encontrar la solución de la ILVA1V, en los ejemplos, y mucho menos en los ejercicios, no hay situaciones en las cuales el registro de partida sea la representación gráfica.

3.4.4 Conversión del REA al Registro del Lenguaje Natural (RLN). Como se muestra en la Ilustración 22, las conversiones que van del REA al RLN, ocurren cuando una expresión simbólica es interpretada geométricamente. En el caso de la ilustración, el registro de la lengua natural es un registro intermediario que nos permite reescribir una expresión sin hacer uso del valor absoluto, para posteriormente, hallar la solución de la ecuación $|x-3|=2$, es este caso.

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resuelva* $|x-3|=2$.

Solución: Esta ecuación establece que $x-3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por lo tanto,

$$x-3=2 \quad \text{o bien} \quad x-3=-2$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene $x=5$ o $x=1$.

Ilustración 22. Conversión del REA al RLN, tomado de TU2L15P2A, p.62

3.4.5 Conversión del RLN al REA. Esta es la conversión en el sentido inverso al mencionado con anterioridad; aquí se pide plantear una desigualdad algebraica, que dé cuenta de un enunciado que está escrito en lenguaje natural (ver Ilustración 23).

Use la notación de valor absoluto para expresar los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades de 5.

Solución:

$$|x-5|<3$$

Ilustración 23. Conversión de RLN al REA, tomado de TU2L15P2A, p.63

3.5 Análisis de los ejercicios propuestos en los textos universitarios seleccionados

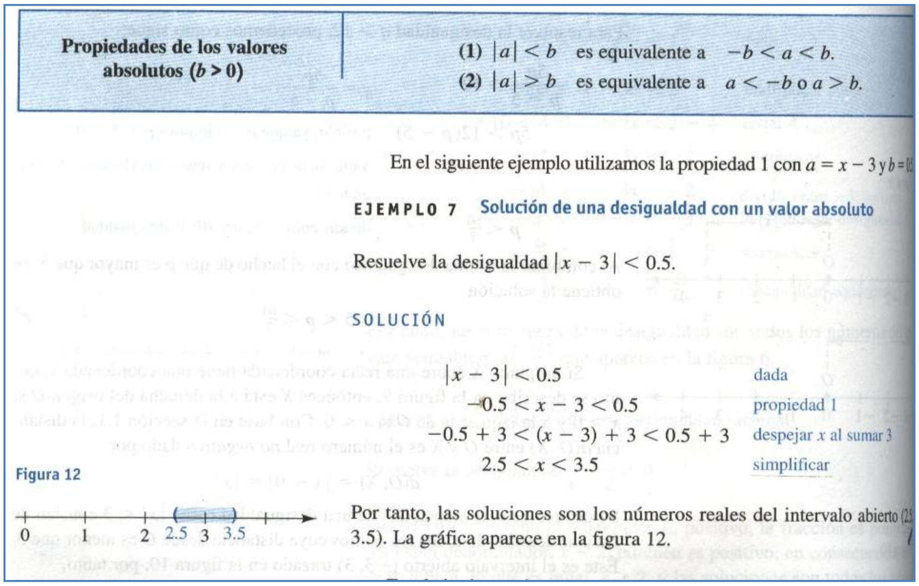
Una vez identificados los textos universitarios de matemáticas, los registros de representación y los tipos de transformaciones cognitivas, sólo queda pendiente mostrar el análisis detallado de las actividades propuestas en las secciones correspondientes, al trabajo con valor absoluto, y las desigualdades con valor absoluto.

Se realiaza únicamente, una clasificación de las actividades, de acuerdo con los procedimientos que debían realizar los estudiantes para resolver las ILVA1V. Las secciones de los textos que fueron tenidas en cuenta para la selección fueron: Secciones 7.7 a 7.8, Sección 1.4 y Sección 2.6 de los textos universitarios TU1L0P6TM, TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, respectivamente. Inicialmente se discriminó cuáles de las tareas corresponden a la tarea cognitiva de tratamiento, y cuántas a conversión, tal y como se presenta en la Tabla **11** .

Textos universitarios /Transformación	**Tratamiento**	**Porcentaje**	**Conversión**	**Porcentaje**
TU1L0P6TM	6	60%	4	40%
TU2L15P2A	24	65%	13	35%
TU3L10P10TIC	28	87.5%	4	12.5%

Tabla 11. Clasificación de las actividades de acuerdo con la operación cognitiva (tratamiento/conversión)

Como se puede observar en la Tabla **11**, la actividad que se privilegia es el tratamiento particularmente del REA, porque en todos los textos se pide encontrar la solución de las desigualdades con valor absoluto. En los ejemplos presentados, el procedimiento que se privilegia para hallar la solución, consiste en aplicar los teoremas o propiedades; esto lo podemos evidenciar en la Ilustración 24, del fragmento del texto universitario TU3L10P10TIC, tomado de la página 118.



Propiedades de los valores absolutos ($b > 0$)

(1) $|a| < b$ es equivalente a $-b < a < b$.

(2) $|a| > b$ es equivalente a $a < -b$ o $a > b$.

En el siguiente ejemplo utilizamos la propiedad 1 con $a = x - 3$ y $b = 0.5$

EJEMPLO 7 Solución de una desigualdad con un valor absoluto

Resuelve la desigualdad $|x - 3| < 0.5$.

SOLUCIÓN

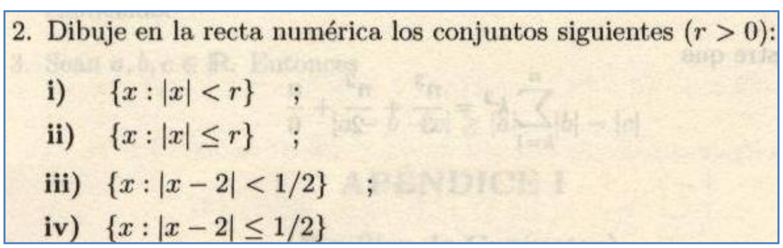
$\lvert x - 3\rvert < 0.5$	dada
$-0.5 < x - 3 < 0.5$	propiedad 1
$-0.5 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.5 + 3$	despejar x al sumar 3
$2.5 < x < 3.5$	simplificar

Figura 12

Por tanto, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica aparece en la figura 12.

Ilustración 24. Tratamientos en el Registros de Escritura Algebraica (REA)

De los ejercicios relacionados con la operación cognitiva de conversión, sólo hay dos tipos de tareas que se promueven: la conversión del REA al RG (sólo aparece en el texto TU1L0P6TM, ver la Ilustración 25), y la conversión del RLN al REA, la cual es una actividad propia de los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC.



2. Dibuje en la recta numérica los conjuntos siguientes ($r > 0$):

i) $\{x : |x| < r\}$;

ii) $\{x : |x| \leq r\}$;

iii) $\{x : |x - 2| < 1/2\}$;

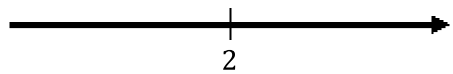
iv) $\{x : |x - 2| \leq 1/2\}$

Ilustración 25. Conversión del REA al RG, tomado de TU1L0P6TM, pp.188-189

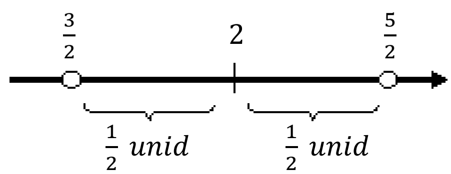
Los ejercicios que aparecen en la Ilustración **25** pueden ser resueltos por dos vías, la primera, consistiría en realizar el mismo procedimiento del ejemplo 7 del texto TU3L10P10TIC de la página 118 (el cual aparece en la Ilustración 24), en donde se resuelven las inecuaciones en el REA, y por último, se grafica el conjunto solución en la recta numérica.

La segunda vía, consiste en utilizar la definición dada en el texto TU1L0P6TM (p. 177), en donde se afirma que el valor absoluto puede ser entendido como la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica, y en tal caso, un estudiante que intente resolver el ejercicio 2(iii) $\{x: |x-2| < 1/2\}$, debería realizar el siguiente procedimiento geométrico:

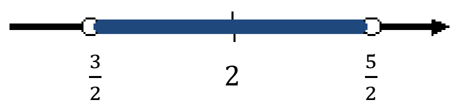
Paso 1. Identificar el centro de $|x-2| < 1/2$ y ubicarlo en la recta numérica



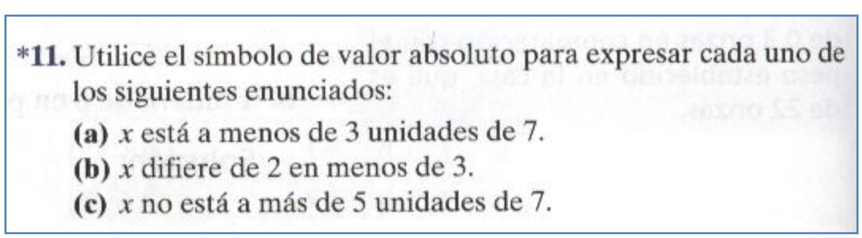
Paso 2. Del centro se ubican los puntos que están $\frac{1}{2}$ de unidad tanto a la derecha como a la izquierda



Paso 3. Por último se marca la región interior correspondiente a todos los números reales cuya distancia a 2 es menor a $\frac{1}{2}unid$.



Cuando se trata de la conversión que va del RLN al REA, se espera que los estudiantes sean capaces de expresar un enunciado en forma simbólica, o resolver un problema de aplicación haciendo uso de una ILVA1V. Por ejemplo:



***11.** Utilice el símbolo de valor absoluto para expresar cada uno de los siguientes enunciados:

(a) x está a menos de 3 unidades de 7.

(b) x difiere de 2 en menos de 3.

(c) x no está a más de 5 unidades de 7.

Ilustración 26. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p.64

Exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto en los problemas 37 y 38.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 35.2 m, con un margen de precisión de ± 20 cm.

38. La diferencia en temperatura entre dos sustancias químicas que se van a mezclar no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

Ilustración 27. Conversión del RLN al REA, tomado de TU2l15P2A, p. 65

Para solucionar el ejercicio 11 que aparece en la Ilustración 26, en el cual se pide pasar de la expresión del RLN al REA, es necesario evocar el significado de valor absoluto en términos de distancia, ya que en el estudiante debe identificar el centro y el radio. A diferencia de esto, en la Ilustración 27, los ejercicios propuestos desean que el estudiante evoque el significado de valor absoluto, como aquel que permite determinar el margen de error en una medición.

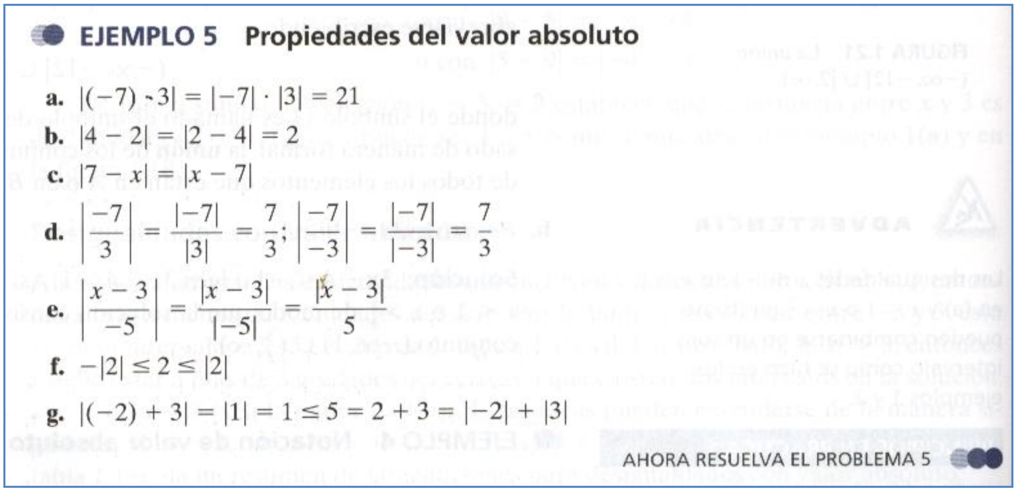
3.5.1 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU1L0P6TM

Todos los ejercicios propuestos en el texto toman como registro de partida el REA. Los primeros cuatro (4) ejercicios, tienen como propósito que los estudiantes encuentren el conjunto solución, en forma de intervalos disjuntos, de las desigualdades. Los dos ejercicios siguientes (2), exigen demostrar propiedades del valor absoluto. Los cuatro (4) ejercicios siguientes, consisten en graficar sobre la recta numérica de conjuntos, cuya restricción corresponde con una desigualdad en una variable que involucra el valor absoluto.

Es importante resaltar que este texto involucra actividades en las cuales los estudiantes deben graficar en el plano cartesiano, subconjuntos que incluyen el valor absoluto, como por ejemplo, el ejercicio 3(vii) $\{(x, y): |x| + |y| < r\}$ donde $r > 0$.

3.5.2 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU2L15P2A

Este texto tiene la particularidad que después de cada ejemplo, sugiere resolver algún ejercicio de la sección, los cuales aparecen en lista con un asterisco (*). Por ejemplo, en la Ilustración 28, el Ejemplo 5 del texto universitario TU2L15P2A, muestra cómo se aplican las propiedades del valor absoluto para encontrar expresiones equivalentes, sin hacer uso del mismo; una vez han terminado los ejemplos, se le dice al lector “ AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5” .



EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$

c. $|7 - x| = |x - 7|$

d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}; \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}$

e. $\left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}$

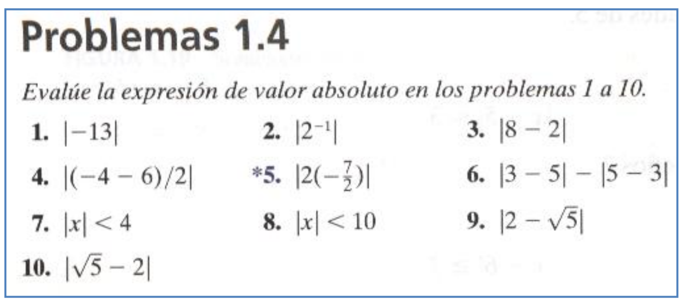
f. $-|2| \leq 2 \leq |2|$

g. $|(-2) + 3| = |1| = 1 \leq 5 = 2 + 3 = |-2| + |3|$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Ilustración 28. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p.63

En la Ilustración 29, se muestra que el ejercicio 5 está acompañado con un asterisco; esto sucede con todos los ejercicios que son propuestos por el autor después de explicar alguno.



Problemas 1.4

Evalúe la expresión de valor absoluto en los problemas 1 a 10.

1. $|-13|$ **2.** $|2^{-1}|$ **3.** $|8 - 2|$

4. $|(-4 - 6)/2|$ ***5.** $|2(-\frac{7}{2})|$ **6.** $|3 - 5| - |5 - 3|$

7. $|x| < 4$ **8.** $|x| < 10$ **9.** $|2 - \sqrt{5}|$

10. $|\sqrt{5} - 2|$

Ilustración 29. Tomado del texto universitario TU2L15P2A, p. 64

En la primera parte de los ejercicios, encontramos que los estudiantes deben hacer uso del registro numérico (RN) para evaluar la expresión, es decir, que interesa saber si los estudiantes pueden hallar el valor absoluto de un número conocido, haciendo uso de las propiedades del valor absoluto, salvo en los ejercicios 8 y 10.

Los ejercicios correspondientes a las ILVA1V, comienzan con la puesta en el REA de enunciados dados en el RLN, en su mayoría, estos ejercicios buscan que el estudiante reconozca diferentes expresiones en lenguaje natura, que pueden ser equivalentes al mismo símbolo en álgebra, así:

EJERCICIO	RESPUESTA
11(a) x **está a menos de** 3 unidades de 7	$\|x-7\| < 3$
11(b) x **difiere de** 2 **en menos de** 3	$\|x-2\| < 3$
11(c) x no está a más de 5 unidades de 7	$\|x-7\| \leq 5$
11(f) x **está entre** -3 y 3, **pero no es igual a** 3 **ni a** -3.	$\|x\| < 3$

En los ejercicios 11a, 11b y 11c se evidencia que la expresiones "… está a menos de…", "difiere de… en menos de…" y "está entre… y… pero no es igual a… ni a…" se denotan con la relación $<$.

Ahora bien, sin que sea el propósito de éste trabajo estudiar la conversión del RLN al REA, es evidente que no hay congruencia en el paso de un registro al otro, dado que no se cumple al menos, uno de los criterios de congruencia, en el cual se afirma que es necesario que haya *igual orden posible de aprensión de estas unidades en las dos representaciones.*

En los trece (13) ejercicios siguientes, se pide resolver la ecuación o desigualdad dada y, aunque no se dice cómo deben ser resueltos, los ejemplos sugieren que se haga de forma analítica y no geométrica.

Finalmente, los cuatro (4) ejercicios siguientes muestran cómo se puede aplicar la noción de ILVA1V, a situaciones en la cuales hay errores en las mediciones.

3.5.3 Seriación de los ejercicios del texto universitario TU3L10P10TIC

En el texto TUL10P10TIC encontramos veintiocho (28) ejercicios, en los cuales se pide resolver la desigualdad, y expresar las soluciones en términos de intervalos, siempre que sea posible. Salvo ejercicios 71 y 72, se espera que los estudiantes resuelvan los ejercicios haciendo uso las propiedades de los valores absolutos.

Ejercicios 71 y 72: resuelve la parte (a) y determina las respuestas a las partes (b) y (c) con la respuesta.

71 (a) $|x + 5| = 3$ (b) $|x + 5| < 3$

(c) $|x + 5| > 3$

72 (a) $|x - 3| < 2$ (b) $|x - 3| = 2$

(c) $|x - 3| > 2$

Ilustración 30. Texto universitario TU3L10P10TIC, p. 120

Los ejercicios 71 y 72 ejemplifican la forma como puede ser empleada la propiedad de la tricotomía para solucionar las desigualdades, a partir de la solución de la ecuación, según como lo comentan los autores en la página 119, veamos:

La ley de la tricotomía de la sección 1.1 expresa que para cualesquiera números reales a y b, una y sólo una, de las siguientes expresiones es verdadera:

$$a > b, \qquad a < b, \qquad \text{o} \qquad a = b.$$

Así, luego de resolver $|2x + 3| > 9$ en el ejemplo 8, fácilmente obtenemos las soluciones $|2x + 3| < 9$ y $|2x + 3| = 9$, es decir, $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Notarás que la unión de estos tres conjuntos de soluciones es, necesariamente, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Ilustración 31. Texto universitario TU3L10P10TIC, p. 119

Este texto, al igual que el anterior, involucra cuatro (4) ejercicios en los cuales se trabaja la noción de ILVA1V, para la medición de errores; en esta clase de ejercicios se exige la conversión del RLN al REA. Sin embargo, en el contenido desarrollado en el texto, no hay un ejemplo resuelto previamente, en el cual se haga alusión a este significado particular de las ILVA1V.

4. Resultados encontrados

En cuanto a la estructura de las unidades temáticas, como podemos ver en los análisis precedentes, no son las mismas, porque los propósitos en la formación de los estudiantes que tienen el texto TU1L0P6TM, en comparación con los demás, TU1L0P6TM se enfatiza en la construcción axiomática de los número reales, mientras que en los demás textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, se asumen como ciertos estos conocimientos, y se avanza en el desarrollo de las habilidades, sobre los procedimientos que involucran, solucionar ecuaciones e inecuaciones, y analizar funciones.

En esta misma dirección, vemos que el uso que se hace de los registros de representación es completamente diferente, en el texto TU1L0P6TM. Todos los teoremas deben ser demostrados o son propuestos como ejercicios para demostrar, es decir, que el desarrollo de los razonamientos de corte deductivo, son fundamentales en la formación de los estudiantes que abordan este curso.

Los registros de representación que se privilegian, en TU1L0P6TM, son REA y LN (especializado), mientras que para el caso de los textos TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, los registros más utilizados son: REA, RG y LN (especializado); este último tiene la finalidad de mediar en los procesos de aprendizaje, y el registro gráfico es utilizado para brindar un soporte intuitivo que permita a los estudiantes comprender mejor las definiciones o, simplemente hacer evidente algunas propiedades de tal manera, que no sea necesario demostrar la propiedad.

TU2L15P2A (*Matemáticas para administración y economía* de Haeussler *et al*). Es el único de los textos universitarios analizados, que puede ser utilizado para dictar los tres cursos de matemáticas que, tradicionalmente deben tomar los estudiantes de las facultades de administración y economía, ingenierías, licenciaturas y ciencias (naturales y exactas), como son: matemáticas fundamentales, cálculo diferencial e integral y algunos temas de probabilidad.

Para el caso del texto universitario TU2L15P2A, el estudio de las desigualdades es posterior al de las ecuaciones (al cual se le dedican 4 secciones); en este sentido es importante retomar el trabajo realizado por Bagni, T. G. (2004), en el cual dice que tradicionalmente se consagra mucho tiempo al trabajo con las ecuaciones, lo cual hace que el estudiante piense que todos las propiedades que aplican a la ecuaciones son transferibles o aplicables, provocando errores en la aplicación de la propiedad de la monotonía para el producto.

Al respecto Bagni propone que es importante, trabajar de manera simultánea actividades en las cuales los estudiantes resuelvan, tanto ecuaciones como inecuaciones. Por eso es importante resaltar los ejercicios 71 y 72 de la página 119 del texto TU3L10P10TIC (*Álgebra y Trigonometría* de Swokowsi *et al*), porque en ellos se evidencia la importancia de trabajar de manera simultánea las ecuaciones e inecuaciones, para así poder caracterizar la naturaleza de las soluciones que pueden ser obtenidas, según sea el símbolo relacional utilizado ($=, <$ o $>$).

En los ejercicios 71 y 72, del texto TU3L10P10TIC, se pide al lector resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto de manera simultánea, mediante enunciados de la forma:

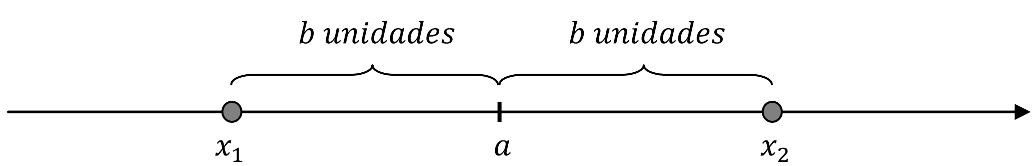
Resuelve la parte (a) y determina las respuestas de las partes (b) y (c).

(a) $|x-a|=b$

(b) $|x-a|<b$

(c) $|x-a|>b$

Esta clase de ejercicios sugiere que solucionar la expresión $|x-a|=b$, con $b \in \mathbb{R}_0^+$, es el punto de partida para hallar la solución de las inecuaciones $|x-a|<b$ y $|x-a|>b$. Esto exige que el estudiante identifique los puntos $x_1=a-b$ y $x_2=a+b$, los cuales hacen que la recta real se divida en tres partes, tal y como se ilustra a continuación:



Como podemos observar, los puntos x_1 y x_2 permiten clasificar los puntos x que pertenecen a la recta real en: los puntos interiores a x_1 y x_2, es decir aquellos que pertenecen al intervalo abierto $(a-b, a+b)$ o los puntos exteriores a x_1 y x_2, o simplemente los $x \in (-\infty, a-b) \cup (a+b, \infty)$, los cuales corresponden a las soluciones de las inecuaciones: $|x-a| < b$ y $|x-a| > b$.

De esta manera, vemos que la solución de la ecuación $|x-a| = b$, con $b \in \mathbb{R}_0^+$, permite determinar los puntos frontera del conjunto solución de cada una de las inecuaciones $|x-a| < b$ y $|x-a| > b$, además la unión de la solución de la ecuación con las dos inecuaciones, siempre va a dar como resultado el conjunto de los números reales.

Observemos que esta forma de solucionar las inecuaciones, puede ser muy potente si estamos interesados en trabajar la conversión del REA al RG y a la inversa, porque exige el establecimiento de la correspondencia entre las variables visuales y las simbólicas.

La noción de valor absoluto, aparece en TU2L15P2A como el número sin signo. Esta definición funciona bien, en la solución de problemas aritméticos. Sin embargo, en el contexto algebraico lo vemos problemático, porque para la mayoría de los estudiantes las letras representan cantidades positivas, y en consecuencia cuando se les pide reescribir expresiones como $|-x|$ sin hacer uso del valor absoluto, ellos generalmente responden que $|-x| = x$, sin tener en cuenta que las variables x y $|x|$, no toman los mismos valores, cuando se aplica la propiedad de la tricotomía x, porque puede ser un número positivo, negativo o cero, mientras que el operador valor absoluto, hace que $|x|$ sea no negativo para todo x.

El valor absoluto también es sinónimo de norma, para el caso en que se trabaja en el espacio métrico de $\mathbb{R}^1$. En suma, otro de los significados de las ILVA1V, tiene que ver con el cálculo aproximado de errores, sin embargo, este significado particular no es abordado en el desarrollo teórico del tema.

Finalmente, la noción de valor absoluto es abordada en los textos, como una función especial que permite ejemplificar funciones que están definidas por partes, o funciones que son pares, y por tanto simétricas al $eje\ y$.

En algunos textos se analiza desde lo analítico y desde lo gráfico los valores de x para los cuales $f(x) = 0,\ f(x) > 0$ o $f(x) < 0$, con la finalidad de determinar los intersectos de $f(x)$ con el $eje\ x$, o mirar bajo qué condiciones de la variable x la función es positiva o negativa. Sin embargo, esta información no es utilizada para resolver de manera gráfica las ecuaciones e inecuaciones tal y como lo proponen Valdez & De las Fuentes (s.f.)

El discurso utilizado en los textos universitarios elegidos para el análisis es **expositivo,** en tanto que hacen una pequeña introducción del tema, y luego enuncian la definición o conjunto de definiciones y propiedades (o teoremas), ponen los ejemplos, los cuales hacen referencia al contexto conceptual expuesto con anterioridad, y finalizan con una sección de ejercicios que aluden a los contenidos vistos con anterioridad.

Los teoremas que aparecen en TU2L15P2A y TU3L10P10TIC, en su mayoría, no son demostrados. Se privilegian los argumentos inductivos informales y las representaciones gráficas en la recta numérica para deducir, de forma inductiva, los teoremas o propiedades.

Si bien el registro gráfico es importante para ilustrar las propiedades geométricas de las ILVA1V, en la parte correspondiente a los ejercicios, brilla por su ausencia.

Por lo general, los autores traen a colación la interpretación geométrica del valor absoluto como distancia entre puntos, porque ello permite introducir de manera inductiva las propiedades de las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, esto se considera problemático con relación al desarrollo de PMA (pensamiento matemático avanzado), en este sentido es posible afirmar que algunos de los recursos pedagógicos con que se cuenta, en la actualidad, van en contravía de un discurso formal, más estructurado en una teoría matemática que en la intuición.

Por ahora, se han explicitado los aspectos de orden matemático, cognitivo y didáctico que se tuvieron en cuenta para el diseño y análisis de un conjunto de situaciones didácticas, que tienen como propósito el aprendizaje plurirregistro de las ILVA1V. Cabe notar que en el análisis de los textos la nomenclatura para denotar el valor absoluto, las desigualdades es homogénea, aspecto que se tomó en consideración en las consignas presentadas a los estudiantes que realizaron una prueba de contrastación de dos grupos pertenecientes al curso de iniciación al álgebra y la cual se detalla en el siguiente capítulo.

Se pasa ahora al Capítulo 4 en el cual se describe la manera como los estudiantes reconocen la variables que cognitivamente son pertinentes en la correspondencia entre los registros de RG y REA.

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LAS VARIABLES COGNITIVAS PERTINENTES

Introducción

En este capítulo, se abordará el diseño de una secuencia de situaciones didácticas, e implementación de las mismas, las cuales están enmarcadas en una perspectiva semiótica, y cuyo interés central está en la movilización de las ILVA1V, sobre el registro gráfico y el registro de escritura algebraica. Para el desarrollo de dicha intervención, fue primordial la noción de *función*, es decir, que las actividades se centraron, no sólo en reconocer la relación de dependencia (valor absoluto), sino en caracterizar el par de conjuntos numéricos sobre los cuales se define la función.

También es importante resaltar que el carácter de esta investigación fue exploratorio, en tanto que se buscó indagar si las unidades significantes identificadas en el Capítulo 2 eran pertinentes o no en la coordinación del RG y el REA utilizando dos materiales las situaciones diseñadas (Ver anexo C) y una prueba de contraste (ver Anexo D).

Igualmente presentamos los resultados de una prueba de contrastación que se aplicó a dos grupos de estudiantes pertenecientes al curso iniciación al álgebra, y que debían resolver ejercicios que demandas las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, que exigen además identificar por los menos cuatro significados particulares de las ILVA1V. Los resultados de dicha prueba se hicieron teniendo en cuenta la importancia que tiene para la Educación Matemática la complementariedad de los análisis cualitativos y los cuantitativos.

Primero, se expondrá el modelo metodológico que se siguió en el diseño de la secuencia; luego se presentará la manera como se ha organizado cada una de las situaciones que la componen, sus correspondientes análisis y conclusiones. Además, describiremos de manera general, los aspectos relacionados con la aplicación (tiempo, número de estudiantes, forma de trabajo, etc.,) la intervención del docente frente a las actividades, y su interacción con los estudiantes.

El capítulo finaliza con la presentación y análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de una prueba de contraste, resuelta por dos grupos, uno denominado monorregistro [35] (GM) y el otro plurirregistro (GP), que estuvieron conformados por estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, que tomaron el curso "Iniciación al álgebra", en el primer semestre del año 2009.

La prueba de contraste tiene como finalidad, medir el impacto propuesto por la secuencia didáctica aplicada al GP, en comparación con el GM, a través de tareas no convencionales que exigen, por una parte, el dominio de los tratamientos del REA y el RG (en la recta y el plano cartesiano), y las conversiones del RG al REA, de REA al RG y del RG al RLN, y por otra, la identificación de al menos tres significados particulares de valor absoluto.

1 Aspectos metodológicos

Los aspectos metodológicos están compuestos por tres elementos:

- La caracterización de la población seleccionada para el estudio.
- Presentar los argumentos con los cuales se destacan las razones que se tuvieron para trabajar con el curso de Iniciación al álgebra, para hacer la intervención.
- Mostrar la estructura que se llevó a cabo, para evidenciar los resultados, respecto a las intervenciones de aula, y una prueba de contraste aplicadas al GP y al GM.

[35] Es importante aclarar que el grupo denominado monorregistro está caracterizado por una enseñanza en la cual se hace uso de diferentes registros de representación como son: el registro numérico, el registro de escritura algebraica, el registro gráfico, el registro de lenguaje natural (especializado), sólo que la enseñanza de éstos se ha enfocado en la operación cognitiva de tratamiento más que en la operación de conversión.

1.1 La población seleccionada

Se eligieron estudiantes de la Universidad del Valle, pertenecientes a Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, matriculados en el curso iniciación al álgebra, grupos 01 y 02, durante el período académico Febrero–Junio de 2009. El grupo 01 (o **grupo plurirregistro**) estuvo conformado por 22 estudiantes mientras que en el grupo 02 (o **grupo monorregistro**) tuvo 16 estudiantes matriculados. Las características de la población fueron las siguientes:

- Los estudiantes de los grupos 01 y 02 pertenece al segundo semestre. El 70% de ellos matriculó Iniciación al álgebra por primera vez.
- Asistieron, por lo menos, al 90% de las clases, esencialmente las que estaban relacionadas con los temas que fueron fundamentales para el análisis de las actividades de aula, como fueron: funciones, sus propiedades, gráficas y sus transformaciones.
- Del grupo plurirregistro el 50% de los estudiantes realizaron la secuencia didáctica completa.
- Las edades de los estudiantes oscilaban entre los 17 y 19 años de edad.

En algunos casos, se han tomado algunos fragmentos de las situaciones que los estudiantes realizaron, para ejemplificar o ampliar los análisis. Conviene subrayar que en este caso, se han adoptado convenciones, para guardar la identidad de los estudiantes que participaron en la investigación: las tres primeras letras corresponden a las iniciales del nombre, luego se continúa con los dos primeros números del código estudiantil, y finalmente, se indica la correspondencia del fragmento, con alguna de las situaciones ó pruebas de contraste. De acuerdo a lo anterior, se presentan dos situaciones que ejemplifican el manejo de las convenciones:

Supongamos que tenemos al estudiante **S**antiago **J**osé **P**az cuyo código estudiantil es **94**10851, y que ha realizado de la **S**ituación **1** la parte **A** pregunta **II**, entonces le correspondería la siguiente asignación: **SJP94S1AII.**

Otra situación sería la siguiente: la referencia **CAP08PCGP,** corresponde al estudiante **C**arlos **A**ndrés **P**az, cuyo código inicia con los números **0** y **8**; las últimas cuatro letras significan que presentó la **P**rueba de **C**ontraste, y que pertenecía al **G**rupo **P**lurirregistro.

1.2 ¿Por qué se escogió el curso de Iniciación al álgebra?

La selección del curso, obedece a dos razones en particular: el tiempo y los resultados de la investigación.

- Respecto a la primera razón es importante resaltar que este es uno de los pocos cursos que no está cargado de contenido[36], como es lo usual en los cursos de matemáticas fundamentales, en primer semestre. En consecuencia, el estudiante tiene tiempo para construir la correspondencia entre las variables ligadas a cada uno de los registros de representación, que hemos elegido para nuestro análisis, sin que el docente, y los estudiantes se sientan presionados, por no cumplir con los propósitos del curso.

- La segunda razón está relacionada con los resultados de este trabajo de investigación, porque se espera que éstos, ayuden a comprender un poco más la manera como se debe hacer el análisis de la congruencia entre dos registros de representación, y sobre todo, cuáles son las implicaciones, alcances y limitaciones cuando se desea trabajar en el aula desde la perspectiva semiótica, propuesta por Duval.

En este sentido, se espera que estos resultados puedan se abordados en cursos como didáctica de las matemáticas, o problemas en educación matemática, que actualmente son ofrecidos para estudiantes de las licenciatura en Matemáticas, en la Universidad del Valle.

[36] El problema sobre los contenidos se mencionó en el segundo párrafo de la página 10, Capítulo 1.

1.3 Sobre el análisis de la información y la presentación de los resultados

Es del interés de éste trabajo, aclarar la forma como se presentarán los resultados. En primera instancia, se mostrarán las situaciones didácticas que se han diseñado, y el análisis puntual de las conclusiones a las cuales llegaron los estudiantes al finalizar la actividad; esto con la finalidad de resaltar cuáles de los aspectos o propósitos propuestos se lograron, y cuáles no.

Seguidamente, se realiza un análisis tanto cualitativo como cuantitativo de una prueba de contraste que fue implementada a los grupos plurirregistro y monorregistro. Para el análisis se han definido tres tipologías, ellas están en concordancia con los propósitos que tiene cada una de las preguntas. Dichas tipologías descritas de manera global fueron:

Nivel Alto: En este nivel se encuentran los estudiantes que desarrollan la actividad de acuerdo con el propósito e intencionalidad de la misma.

Nivel Básico: Este es un nivel intermedio, en el cual se encuentran los estudiantes que a pesar de no resolver los ejercicios de la manera esperada, realizan un razonamiento correcto, que les permite demostrar que tienen un dominio de los tratamientos propios a un registro de representación semiótica específico.

Nivel Bajo: En este nivel se encuentran los estudiantes que tienen un acercamiento exploratorio a los ejercicios, tantean, evalúan algunos valores, o simplemente, dejan el espacio en blanco.

Al finalizar el análisis de cada una de las preguntas, se hace una síntesis de los aspectos comunes y no comunes a las poblaciones (plurirregistro y monorregistro), y en algunos casos, se exhiben los procedimientos que realizan los estudiantes para dar mayor claridad.

2 El desarrollo de las clases con el grupo plurirregistro

Como se lo menciona en el Capítulo 2, hay dos tipos de transformaciones posibles entre los registros de representación, ellas son las conversiones y los tratamientos. Este trabajo se centró, en el hecho de que los estudiantes dominaran los tratamientos sobre el REA y el RG (en el plano cartesiano), para posteriormente, ocuparse de la conversión entre estos dos registros.

Respecto a la conversión del REA al RG y viceversa, se realizaron varios talleres y tareas en clase, los cuales tuvieron como propósito que los estudiantes establecieran la correspondencia entre las variables visuales en la representación gráfica de una función, y sus respectivas variables simbólicas (o categoriales), para el caso de las funciones lineales.

En la primera parte del curso, el énfasis estuvo en los tratamientos sobre el REA, porque el trabajo con los estudiantes se centró en el estudio de las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones de forma analítica.

Posteriormente, se lleva al aula de clases, la propuesta que hace Duval (1988) en su documento *Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros*. Es así como una de las primeras actividades de clase fue enfocada en la realización un taller en el cual, se les presentaron a los estudiantes las gráficas (en papel milimetrado) de expresiones de la forma $y = mx + b$. Cada gráfica estaba acompañada de su respectiva ecuación; en la Figura **7** 8, podemos ver algunas de las gráficas presentadas en clase:

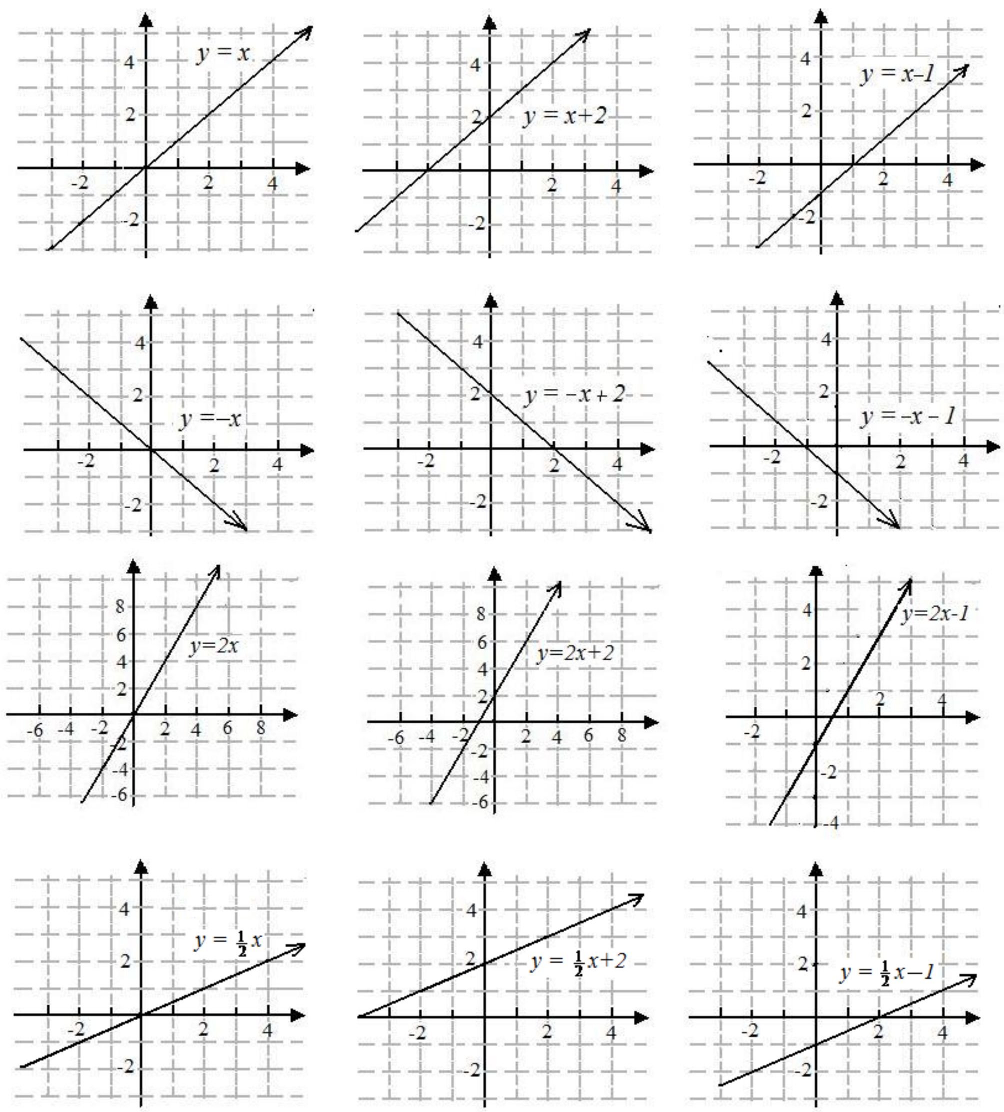


Figura 7. Graficas de líneas rectas y sus correspondientes ecuaciones

Se les solicitó a los estudiantes, hacer un análisis comparativo[37] (por filas y columnas), identificando los elementos comunes en las representaciones gráficas y de escritura algebraica, con la finalidad de que lograran establecer correspondencias entre las variables visuales y sus respectivas variables categoriales. Por ejemplo, la *inclinación de la recta*

[37] Esta actividad de comparación se llevó a cabo primero de manera individual, ahí los estudiantes sacaron sus primeras conjeturas las cuales posteriormente fueron discutidas en grupos de cuatro personas y finalmente se concretaron las observaciones en la puesta en común, en donde la intervención de la docente (investigadora) consistió en el proceso de institucionalización tal que los estudiantes asignaran un nombre tanto a las variables visuales y simbólicas, para lograr establecer su correspondencia, esto se hizo tomando como referente el trabajo de Duval (1988). En este sentido hicimos notar que un solo cambio en la variable visual inclinación de la recta puede traer consigo dos cambios en la variable categorial (o simbólica) correspondiente, lo cual permitió concluir que no hay una correspondencia biunívoca entre las variables visuales y simbólicas.

respecto al eje x (variable visual), y sus dos variables categoriales o simbólicas correspondientes: *valor absoluto de la pendiente comparado con* 1 (bien sea mayor, menor o igual a uno), y *el signo de la pendiente* (positivo o negativo). A continuación se exhiben algunas de las conclusiones presentadas por los estudiantes en la socialización de la actividad:

- Si el ángulo que forma la gráfica de la recta $y = mx + b$ con el *eje* x, es de $45°$, entonces la pendiente de la recta está dada por $m = 1$.
- Si el ángulo que forma la gráfica de la recta $y = mx + b$ con el *eje* x, está entre $0°$ y $45°$, entonces la pendiente $y = mx + b$ toma valores entre 0 y 1.
- Si el ángulo que forma la gráfica de la recta $y = mx + b$ con el *eje* x, está entre $45°$ y $90°$, entonces la pendiente $y = mx + b$ toma valores mayores a 1.
- De hecho, si el ángulo que forma la gráfica de la recta $y = mx + b$ con el *eje* x, está entre $0°$ y $90°$, entonces la pendiente siempre es positiva.
- Si el ángulo que forma la gráfica de la recta $y = mx + b$ con el *eje* x, es de $135°$ o $-45°$, entonces la pendiente de la recta está dada por $m = -1$.
- $|b|$ o intersecto con el *eje* y no aparece (o es cero) si la recta pasa por el origen.
- $|b|$ o intersecto con el *eje* y se suma, si la recta está por encima del *eje* x, y se resta, en caso contrario.

Otro aspecto fundamental tuvo que ver, con el estudio de las transformaciones de las funciones, como son los desplazamientos, las elongaciones o los encogimientos tanto horizontales como verticales, así:

Dada la función $y = f(x)$ y las constantes $a, c > 0$:

- c en la ecuación $y = f(x) + c$ ($y = f(x) - c$) hace que la gráfica de $y = f(x)$ se desplace hacia arriba (hacia abajo) c unidades.

- Cuando se trata de una desplazamiento horizontal entonces la función $y = f(x)$ se transforma en $y = f(x-c)$ ($y = f(x+c)$), lo cual sugiere un desplazamiento a la derecha (izquierda) de c unidades.
- Si $a > 1$ ($0 < a < 1$) entonces $y = a\,f(x)$, representa un alargamiento (encogimiento) vertical de $y = f(x)$ por una factor igual a a.
- Cuando $a > 1$ ($0 < a < 1$) entonces $y = f(a\,x)$, representa un encogimiento (alargamiento) horizontal de $y = f(x)$ por una factor igual a $\frac{1}{a}$.

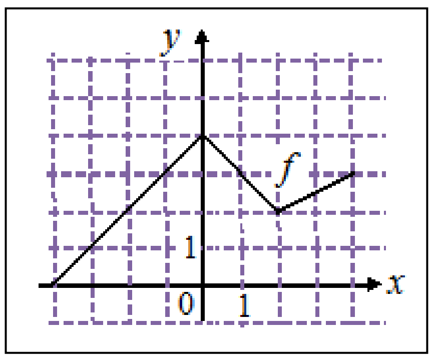
Una vez estudiadas las transformaciones que puede sufrir una función $y = f(x)$, se hizo énfasis en las actividades del texto guía[38], del curso Iniciación al álgebra, el cual demandaba de los estudiantes la coordinación de registros gráficos y de escritura algebraica. A continuación, se presentan los ejercicios 9, 10 y 37 de la sección 2.4, correspondientes a la transformación de funciones. Éstos, fueron realizados por los estudiantes de manera individual en papel milimetrado.

9. Se da la gráfica de f. Trace la gráfica de cada una de las funciones siguientes:

(a) $y = f(x-2)$ (b) $y = f(x)-2$

(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -f(x)+3$

(e) $y = f(-x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x-1)$



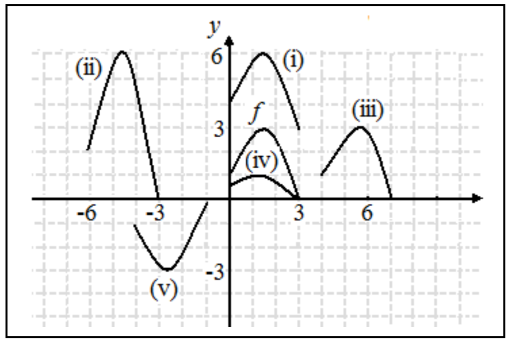
[38] Hacemos referencia al texto *Precálculo* de Stewart et al. Tercera Edición. International Thomson Editores S.A. (2001) pp. 172-174.

10. Se da la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada una de las ecuaciones con su gráfica.

(a) $y = f(x-4)$ (b) $y = f(x)-2$

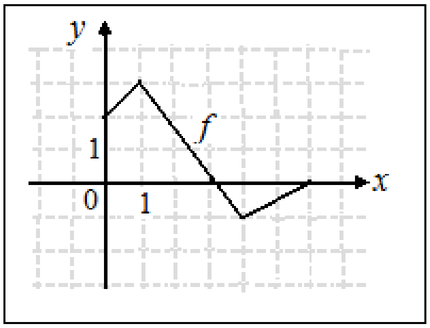
(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -f(x)+3$

(e) $y = f(-x)$ (f) $y = \frac{1}{2}f(x-1)$



37. Se da la gráfica f. Utilícela para trazar cada una de las funciones siguientes

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$



Luego de dar una descripción del trabajo, realizado previamente a la intervención de aula, se presentan las situaciones desarrolladas en clase, que tuvieron como propósito, que los estudiantes establecieran la correspondencia entre las variables visuales y categoriales correspondientes a los registros de representación gráfica y de escritura algebraica, respectivamente.

3. Una situación didáctica entorno al aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable

Para el diseño de actividades realizadas con el grupo plurirregistro, se distinguen fundamentalmente tres perspectivas: cognitiva, matemática y didáctica. Cada una de ellas propone o expone un aspecto entorno a las ILVA1V, así:

- *Desde la perspectiva cognitiva*, interesaba abordar el problema del encapsulamiento o confusión entre un objeto y su representación, razón por la cual las actividades involucraron varios registros de representación semiótico, como: REA, RG, RN incluso el RLN. Se esperaba además, que los estudiantes lograran establecer la correspondencia entre las unidades significantes visuales y simbólicas pertinentes, principalmente, en los procesos de conversión del REA al RG y a la inversa.

- *Desde el punto de vista matemático,* se esperaba que los estudiantes caracterizaran la solución de las ILVA1V, como el entorno o vecindad (abierto o cerrado), alrededor de un punto en la recta de coordenadas, ó como el conjunto de puntos exteriores a una vecindad (esto dependía del símbolo relacional utilizado: $<, \leq, >$ o $\geq$).

También era de gran interés, que los estudiantes identificaran bajo qué condiciones, los parámetros las ILVA1V, tienen un número finito de soluciones, infinitas soluciones o simplemente no tienen solución. Otro aspecto importante, era la caracterización de la función valor absoluto, como una relación con dominio real y rango, formado por los reales no negativos, cuya regla de asignación se puede ver como un operador unario, o una función definida por partes.

- Por último, *desde lo didáctico*, se esperaba que los estudiantes sobrepasaran al menos, dos de las dificultades de orden didáctico que se presentan en el aprendizaje de las inecuaciones. La primera tiene que ver con el hecho de transferir las propiedades de la igualdad a la desigualdad, y la segunda, tomar en cuenta que las letras *a, b, c, y, z w* entre otras que utilizamos para denotar números reales, no representan únicamente valores positivos, sino que ésta pueden tomar o representar valores positivos, negativos o cero.

La actividad realizada en clase constó de dos situaciones. En la primera de ellas, denominada Situación 1, se toma como registro de partida, la representación gráfica en el plano cartesiano y como registro de llegada, el de escritura algebraica. El cambio de registro fue mediado por el registro de la lengua natural; mientras que en la Situación 2, se consideró la conversión que va del registro gráfico, en la recta real, al registro de escritura algebraica.

Como se puede observar en el Anexo C, la diferencia entre las Situaciones 1 y 2, tiene que ver con la dimensión del espacio tomado como referencia, en el cambio de la representación gráfica a la escritura algebraica.

Se privilegia la orientación del RG al REA en la conversión, porque como se menciona en el Capítulo 2 (p. 49, párrafo 1), ésta dirección exhibe mayor dificultad, en tanto que una misma gráfica, puede provenir de variadas expresiones analíticas. Sin embargo, en la conversión del sentido inverso (es decir, del REA a la RG), contamos un procedimiento algorítmico.

Para el desarrollo de las diferentes actividades, las inecuaciones se clasificaron en tres grupos:

Familia de inecuaciones simples

Son aquellas inecuaciones con valor absoluto en una variable, cuya expresión simbólica es ó puede ser llevada a la forma: $|x-b| \leq c,$ $|x-b| \geq c,$ $|x-b| < c$ ó $|x-b| > c$, con $b, c \in \mathbb{R}$.

Familia de los coeficientes

Es decir, inecuaciones de la forma: $|ax+b|*c$ donde $b, c \in \mathbb{R}$ y *, representan cualquiera de las siguientes relaciones: >, <, $\leq$ ó $\geq$.

Familias de contrastes

Los contrastes consisten en comparar la solución de ILVA1V, cuando se realiza en la dimensión 1 (la recta numérica) y la dimensión 2 (el plano cartesiano), es decir, que se comparan las soluciones, para determinar lo que tienen en común y lo que las diferencia. Por ejemplo, sobre la recta numérica, la solución de la inecuación $|x-5| < 3$, lleva a los estudiantes a evocar la noción de vecindad, mientras que en el plano, exige comparar los valores de las imágenes de las funciones $f(x) = |x-5|$ y $g(x) = 3$, dado que se evocan diferentes significados. Sin embargo, cuando se mira su solución, vemos que los valores de x, que satisfacen la desigualdad, tanto en la recta como en el plano son los mismos. Los estudiantes explicaron en las socializaciones la razón de este aspecto.

En las Situaciones 1 y 2, se pusieron en juego las reglas de correspondencia que permiten movilizar las inecuaciones lineales con valor absoluto, tanto desde el punto de vista de la noción de distancia, como la de función. La Tabla **12** sintetiza la estructura de las situaciones y sus propósitos. Si se desea profundizar más sobre la estructura de cada una de las situaciones, ver el Anexo C.

DESCRIPCIÓN DE LAS SITUACIONES	LAS ACTIVIDADES EN LAS QUE SE DIVIDEN LAS SITUACIONES	PROPÓSITO DE CADA ACTIVIDAD O PARTE DE LA SITUACIÒN
SITUACIÓN 1 Aquí se trabaja la conversión que va de la RG en el plano cartesiano al REA	PARTE A El vértice de la función valor absoluto	• Identificar las escrituras algebraicas correspondientes a la representación gráfica, de dos funciones, en el plano cartesiano. • Plantear la solución de inecuaciones de la forma $\lvert x-b\rvert \leq c$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, a partir de la representación gráfica. • Relacionar el vértice con el centro del intervalo solución de la inecuación.
	PARTE B Valores frontera del conjunto solución	• Identificar las escrituras algebraicas correspondientes a la representación gráfica, de dos funciones, en el plano cartesiano. • Plantear la solución de inecuaciones de la forma $\lvert x-b\rvert > c$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, a partir de la representación gráfica. • Dar una interpretación geométrica de inecuaciones de la forma $\lvert x-b\rvert > c$.
	PARTE C Caracterización del conjunto solución de la ILVA1V	• Plantear la solución de inecuaciones de la forma $\lvert x-b\rvert * c$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, donde * puede ser sustituido por $>, <, \geq$ o $\leq$, tomando como registro de partida la representación gráfica. • Caracterizar el conjunto solución de las inecuaciones con valor absoluto en una variable.
	PARTE D Familia de contrastes	• Encontrar la solución de ILVA1V de la forma $\lvert ax-b\rvert \leq c$, (donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 1$) de manera gráfica. • Revisar la noción de inecuaciones equivalentes. • Condicionar los parámetros a, b y c de modo que las inecuaciones de la forma $\lvert ax-b\rvert \leq c$ o $\lvert ax-b\rvert \geq c$ tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución.
SITUACIÓN 2 conversión de la RG en la recta real al REA	PARTE A Inecuaciones lineales como una vecindad sobre la recta numérica.	• Identificar las escrituras algebraicas de ILVA1V correspondientes a la representación gráfica de un intervalo o unión de intervalos, en la recta real. • Solucionar ILVA1V a partir de su interpretación geométrica en la recta real.

Tabla 12. Propósitos de las situaciones didácticas propuestas en juego el curso de Iniciación al álgebra.

3.1 Sobre la gestión de las Situaciones

Para la aplicación de las situaciones diseñadas, fueron necesarias cinco sesiones de clase con una intensidad horaria[39] de tres horas aproximadamente, los días 2, 4, 9, 11 y 16 de junio de 2009. La dinámica fue la siguiente:

- Lectura, en voz alta, por parte de la docente (investigadora), de cada una de las situaciones.
- Los estudiantes hicieron preguntas sobre los enunciados que para ellos no estaban claros, y la docente dio la instrucción u orientación correspondiente sobre lo que debían hacer en cada una de las preguntas.
- Los estudiantes se tomaron entre dos (2h), a dos horas y media (2½h) para solucionar cada una de las partes de las Situaciones 1 y 2.
- Las situaciones fueron resueltas de forma individual.
- Los estudiantes contaban con el cuaderno del curso y el texto guía.
- Se realizaron dos socializaciones al finalizar cada una de las situaciones.

3.2 Las características de las gráficas identificadas por los estudiantes

Una vez delimitados los aspectos metodológicos, se comentarán algunos de los procedimientos realizados por los estudiantes, para encontrar las soluciones de las actividades propuestas en las Situaciones 1 y 2.

Como ya se mencionó anteriormente, todas las actividades de la Situación 1, tienen como registro de partida la representación gráfica en el plano cartesiano, y como registro de llegada, el de escritura algebraica (ver Anexo C). El propósito de las partes A, B y C, es aprender a solucionar e interpretar de manera gráfica, las inecuaciones simples.

En la Situación 1, parte A, todas las gráficas $1a$ a $5a$ constan de dos funciones en el plano cartesiano; una de ellas es *la función constante* $g(x) = 2$ (la cual es invariante para

[39] Es importante aclarar que la intensidad horaria del curso de iniciación al álgebra, es de cuatro horas semanales, distribuidas en dos horas los martes y dos horas los jueves. Sin embargo, durante el período académico febrero-junio de 2009, se presentaron algunos hechos de fuerza mayor que provocaron la pérdida de algunas horas de clase. Para recuperar las horas perdidas, se acordó con los estudiantes, que las últimas sesiones de clase, tuvieran una duración de dos horas y media o tres horas.

las partes A y B de la Situación 1), y la otra es una función con valor absoluto que está desplazada sobre el $eje\ x$.

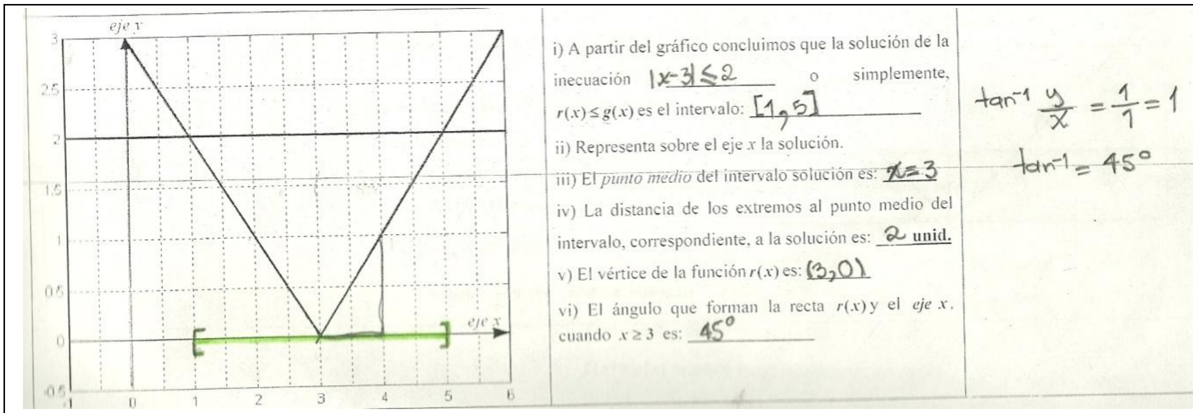
Para todos los estudiantes que resolvieron las actividades 1 y 2 fue muy sencillo encontrar la ecuación de la función constante, y a pesar de que para el 78% de ellos era evidente que otra gráfica correspondía a una función con valor absoluto, sólo el 45% de la población total, determinó que las funciones con valor absoluto estaban desplazadas sobre el $eje\ x$ (es decir que escribieron expresiones de la forma $|x - b| \leq c$), mientras que el 33% restante, respondieron $|x| - b \leq c$, como si la función estuviera desplazada sobre el $eje\ y$.

Todos los estudiantes encontraron el conjunto solución correspondiente a las inecuaciones de la forma $|x - b| \leq c$, y hallaron el punto medio del conjunto solución, esto para el análisis de las gráficas *1a – 5a*. En su mayoría (el 78%) encontró que la distancia entre el punto medio y los extremos, era un valor constante igual a 2. El 89% del grupo plurirregistro encontró las coordenadas del vértice para cada una de las funciones con valor absoluto.

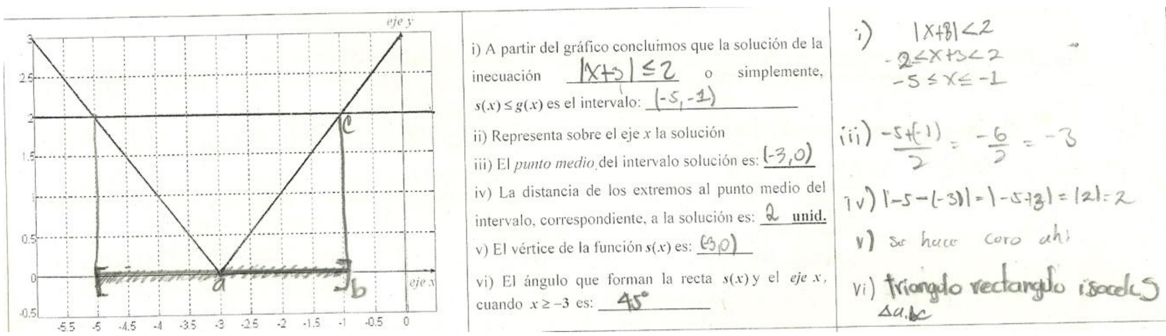
Los procedimientos que utilizaron los estudiantes para hallar el ángulo que forman el tramo creciente de cada una de las funciones con valor absoluto y el ,$eje\ x$ fueron los siguientes:

- Haciendo uso de la función trigonométrica arcotangente.
- Viendo que el segmento de recta (o trozo donde la función valor absoluto es creciente), hacía una partición simétrica del fondo rectangular.
- Reconociendo el triángulo isósceles rectángulo, que se forma con el $eje\ x$, el trazo ascendente de la función valor absoluto, y la recta $x = a$ (donde a es la abscisa de la intersección entre la función constante y la función valor absoluto)

Para tener mayor claridad sobre la manera como los estudiantes hallan la medida del ángulo requerido, quizá sea útil mostrar la Ilustración **32**, en la cual se ven algunos procedimientos realizados por los estudiantes:



En este ejemplo el estudiante RLQ08S1AI utiliza la función arcotangente.



En este caso el estudiante CFV08S1AI, argumenta que el triángulo rectángulo ABC es rectángulo e isósceles, de tal forma que la medida del ángulo A es de 45°.

Ilustración 32.Procedimientos empleados para determinar el ángulo que forma el segmento de recta ascendente de una función con valor absoluto (de la forma $|x-b| \leq c$), con el $eje\ x$ es de 45°.

Aunque las respuestas dadas a los análisis de las gráficas *2a – 5a* en su mayoría son correctas, es importante resaltar que en algunos casos hay errores en la escritura de los intervalos (pregunta **i** del análisis gráfico). Si bien ello puede deberse a un descuido, también pueden corresponder a los obstáculos que señalan González *et al*. (1990), en cuanto a la conceptualización de cantidades enteras, o de los propios enteros negativos en su ordenación y en su uso, para representar posiciones y movimientos. González *et al*., señalan que en muchas ocasiones, los estudiantes cometen errores en el orden de los enteros negativos, puesto que asumen que se ordenan de la misma manera que los números naturales, es decir, que entre más distante esté el número de cero, entonces es mayor, y por esta razón, quizá el 11% de los estudiantes, afirman que el conjunto solución de la inecuación $|x-3| \leq 2$, es el intervalo $[-1,-5]$.

Veamos ahora (en la Tabla **13**), algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta (**ii**) de la parte A (Situación 1), en tanto que ella nos permite determinar cuáles son las semejanzas y diferencias encontradas, tanto en las gráficas $1a - 5a$, como en las expresiones algebraicas correspondientes a las inecuaciones que se desean solucionar.

Es prudente advertir que los estudiantes tuvieron dificultades para separar las semejanzas y diferencias correspondientes al registro de escritura algebraica (REA), en comparación con el registro gráfico (RG). Por tal motivo, no se han separado sino que son presentadas en una sola tabla, tal y como ellos las han escrito.

SEMEJANZAS ($\mathbf{1a - 5a}$)	**DIFERENCIAS ($\mathbf{1a - 5a}$)**
• Las inecuaciones graficadas conservan el mismo sentido (es decir que abren hacia arriba) • El punto medio siempre está a la misma distancia de los extremos. • En todas las gráficas $g(x)$ era constante, nunca variaba su valor en y. • Todas las inecuaciones tienen valor absoluto. • El dominio de las gráficas se encuentra entre -5 y 5. • Que el vértice era $(x,0)$. • El conjunto solución es cerrado.	• Los vértices son diferentes a pesar de que $y = 0$. • Los puntos medios no son los mismos. • La gráfica no siempre está al lado positivo del $eje\ x$. • Unas gráficas se desplazan a la derecha y otras a la izquierda. • Las gráficas tienen punto de corte diferente en cada una de las gráficas.

Tabla 13. Respuestas dadas por el grupo plurirregistro a la pregunta II de la Situación 1, parte A.

Las diferencias presentadas en la Tabla **13**, permiten afirmar que tal como está diseñada la parte A de la Situación 1, los estudiantes lograron identificar la variable visual vértice de la función, y a dicha variable le asignaron correctamente la variable simbólica en el 47% de los casos. Cuando se dice que la correspondencia o asignación es correcta, se debe a que hay dos variables simbólicas que le corresponden a un solo cambio visual, es decir, que un desplazamiento de la gráfica de valor absoluto a la derecha o la izquierda, simbólicamente implica la identificación del signo y del valor numérico.

Es importante dejar aclarar, además, que la pregunta sobre la medida del ángulo que forma el segmento de recta creciente de cada una de las funciones con valor absoluto y el $eje\ x$, fue una pregunta cuya intencionalidad sólo fue clara hasta que llegamos al enunciado II, de la parte D en la Situación 1.

Ahora, se presenta una breve exposición de los resultados de la parte B (Situación 1), haciendo énfasis en los aspectos que la diferencian de la parte A. En primer lugar, tenemos que las inecuaciones que deben identificar y resolver los estudiantes, son de la forma $|x - b| > c$; la diferencia inicial de las inecuaciones de la parte A tiene que ver con la relación de orden, la cual ha cambiado de menor o igual que ($\leq$) a mayor que ($>$), esto obviamente tiene repercusiones en términos del conjunto solución y de su interpretación.

Observemos algunas de las semejanzas y diferencias identificadas por los estudiantes en el REA y la RG de los ejercicios $1b - 5b$ (ver Tabla 14). Posteriormente, pasemos a la comparación realizada por los estudiantes de la parte A y la parte B, de la Situación 1.

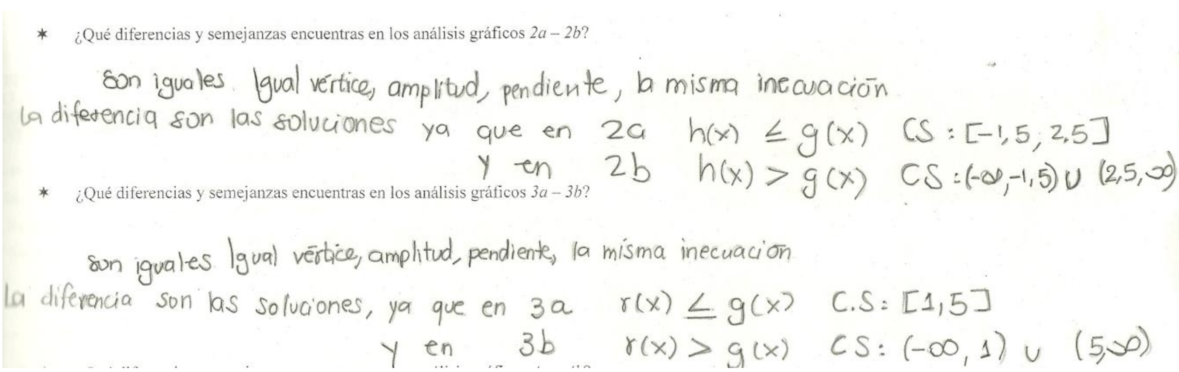
SEMEJANZAS ($\mathbf{1b - 5b}$)	**DIFERENCIAS ($\mathbf{1b - 5b}$)**
• Las inecuaciones graficadas conservan el mismo sentido (es decir que abren hacia arriba) • Uno de los puntos del vértice siempre es cero. • Los signos tienen igual signo de desigualdad > (mayor que) • Que $g(x)$ siempre es mayor. • La solución siempre va hacer la unión de dos intervalos. • La solución está dada por intervalos abiertos.	• Los vértices son diferentes. • Su posición respecto al $eje\ x$ son diferentes. • Los extremos son diferentes • Las soluciones cambian

Tabla 14. Respuestas dadas por el grupo plurirregistro a la pregunta II de la Situación 1, parte B.

Ahora es oportuno presentar la comparación hecha, por los estudiantes, de los pares de gráficas ($1a$, $1b$); ($2a$, $2b$);…; ($5a$, $5b$). En primer lugar, encontramos que la mayoría sólo mencionan las semejanzas y no encuentran diferencias. Entre las semejanzas que ellos mencionan tenemos que:

- Las gráficas tienen los mismos vértices
- El ángulo que forma con el $eje\ x$ el trozo ascendente de la función con valor absoluto, es el mismo y mide 45°.
- Tienen los mismos extremos.
- La función $g(x)$ es constante.
- Siempre se compara con 2.

En segundo lugar tenemos que las diferencias a las cuales algunos de ellos aluden corresponden al REA, en tanto que todos coinciden en afirmar que la diferencia está en el conjunto solución, lo cual expresan de la siguiente manera:



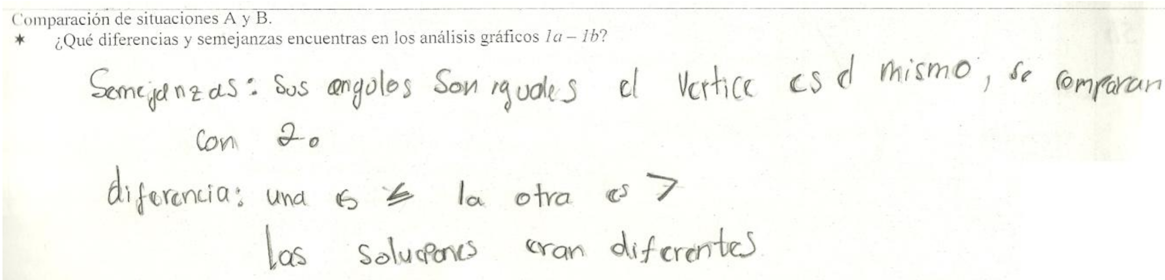
∗ ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras en los análisis gráficos $2a - 2b$?

Son iguales. Igual vértice, amplitud, pendiente, la misma inecuación
la diferencia son las soluciones ya que en 2a h(x) ≤ g(x) CS: [−1,5, 2,5]
y en 2b h(x) > g(x) CS: (−∞,−1,5) ∪ (2,5,∞)

∗ ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras en los análisis gráficos $3a - 3b$?

son iguales Igual vértice, amplitud, pendiente, la misma inecuación
la diferencia son las soluciones, ya que en 3a r(x) ≤ g(x) C.S: [1,5]
y en 3b r(x) > g(x) CS: (−∞, 1) ∪ (5,∞)

El estudiante CHC08S1BIII, dice que son iguales las gráficas, lo mismo que la amplitud, la pendiente, las mismas inecuaciones (esto es refiriéndose a las expresiones algebraicas que la componen a cada una de ellas), pero que la diferencia está en las soluciones, debido al símbolo ($\leq$ y $>$), ya que en $2a$ tenemos $h(x) \leq g(x)$, y en este caso el conjunto solución es $[-1.5,\ 2.5]$, mientras que en $2b$ la inecuación $h(x) > g(x)$, tiene como conjunto solución $(-\infty, -1.5) \cup (2.5, \infty)$



Comparación de situaciones A y B.

* ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras en los análisis gráficos *1a – 1b*?

Semejanzas: Sus angulos Son iguales el Vertice es el mismo, se comparan con 2.

diferencia: una es ≤ la otra es >

las soluciones eran diferentes

Tomado de CFV08S1BIII. Este estudiante dice que las semejanzas, son que los ángulos son iguales, el vértice es el mismo, se comparan con 2. En cuanto a las diferencias, dice que una es ≤ y que la otra es >, por tanto las soluciones eran diferentes.

Ilustración 33. Respuesta de dos estudiantes del grupo plurirregistro a la pregunta III, de la Situación 1, parte B.

Es decir, que las diferencias que más sobresalen, tienen que ver con el símbolo de desigualdad utilizado para establecer la comparación de las funciones (≤ para la parte A y > para la parte B), de igual forma, reconocen que el conjunto solución es diferente por esta razón. De esta manera vemos que el segundo propósito ha sido alcanzado, porque se establece la correspondencia entre los símbolos ≤ y>, con la representación gráfica de la solución, y el hecho de saber si los valores frontera se incluyen o no.

A continuación se presentan las respuestas dadas a las preguntas que aparecen en la parte C de la Situación 1, concernientes a la Figura **8**. Antes de proseguir, es importante notar que las funciones $g(x), r(x), h(x)$ y $s(x)$, que aparecen en la Figura **8** son constantes, y se le asignaron valores positivos, negativos y cero.

El análisis se centró, de manera individual, en las funciones $r(x)$ y $h(x)$, por medio de las preguntas 2*c* a 6*c*; las demás funciones fueron utilizadas en la socialización para hacer referencia a los posibles valores de las funciones constantes, que hacen que las inecuaciones tengan un número finito de soluciones, no tenga solución, o tenga infinitas soluciones.

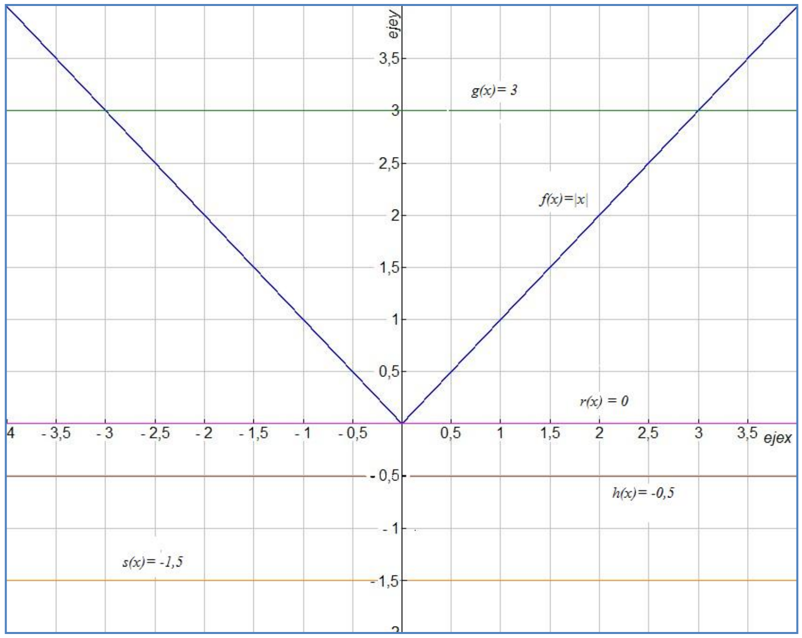


Figura 8. Gráfica de la Situación 1, parte C

En la Tabla **15** se muestra la frecuencia relativa de éxito y fracaso de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas 2*c* a 6*c*, de los enunciados que deben completar, puesto que es del interés de éste trabajo, ver en qué casos lograron determinar el conjunto solución de las inecuaciones $|x| < -0.5$, $|x| > -0.5$, $|x| < 0$, $|x| > 0$, $|x| \geq 0$.

PREGUNTA	ÉXITO	FRACASO
2c. El conjunto solución de $|x| < -0.5$ es: ...	62%	38%
3c. El conjunto solución de $|x| > -0.5$ es: …	15%	85%
4c. El conjunto solución de $|x| < 0$ es: …	38%	63%
5c. El conjunto solución de $|x| > 0$ es: …	54%	46%
6c. El conjunto solución de $|x| \geq 0$ es: …	46%	54%

Tabla 15. Frecuencia relativa de éxitos y fracasos del enunciado I correspondiente a la Situación 1, parte C.

Básicamente, el problema que tienen los estudiantes al momento de encontrar el conjunto solución de las inecuaciones, consiste en que ellos sólo cuentan con una forma de solución (la algebraica), y no la contrastan con la interpretación geométrica de la inecuación en el plano cartesiano.

De acuerdo con lo anterior, tenemos que para los estudiantes, el conjunto solución de las ILVA1V $|x| < -0.5$ y $|x| > -0.5$, es $(-0.5, 0.5)$ y $(-\infty, -0.5) \cup (0.5, \infty)$, respectivamente. La Tabla 16 muestra la manera como ellos resuelven la inecuación $|x| < -0.5$; esto es sin tomar en consideración, las condiciones que debe cumplir el número r de la Propiedad 7 de valor absoluto[40].

PASOS	JUSTIFICACIÓN
$\|x\| < -0.5$	Inecuación inicial
$-(-0.5) < x < -0.5$	Propiedad 7 de valor absoluto
$0.5 < x < -0.5$	Por propiedades de los signos

Tabla 16. Solución de la inecuación, $|x| < -0.5$ propuesta por algunos estudiantes del grupo plurirregistro.

Desde el punto de vista gráfico, cuando se pide hallar la solución de la expresión, se deben identificar inicialmente dos funciones, una $f(x) = |x|$ y la otra $h(x) = -0.5$. Posteriormente se interpreta el símbolo $<$, de modo que lo que interesa es determinar los valores de para los cuales $f(x)$ está por *debajo* de la función $h(x)$, (o de manera equivalente), $h(x)$ está por *encima* de $f(x)$).

Una vez dotada de significado la expresión $|x| < -0.5$ (o su equivalente $f(x) < h(x)$), los estudiantes ven que esto no es posible. Por tal razón, definen que el conjunto solución de la inecuación es vacío, y en consecuencia, entran en conflicto con la solución algebraica, obligándolos a fijarse en la condiciones que debe cumplir la función $h(x)$, para que la inecuación tenga sentido o solución en $\mathbb{R}$.

Cabe notar, que en la pregunta 2*c* la tasa de éxito es mucho más alta que la pregunta 3*c*, porque los estudiantes dicen que es imposible que el valor absoluto de un número sea menor que un número negativo; esto se debe a que para ellos está muy claro que el valor absoluto de un número no puede ser negativo.

[40] Esta propiedad de valor absoluto que presentamos en el Capítulo 2 afirma que: $|x| < r$ si y sólo si $x < r$ y $-x < r$, para todo $r > 0$, es decir que, $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r, \forall r > 0$.

De las preguntas 4c a la 6c, la tasa de éxito es un poco mayor a las dos anteriores, porque los estudiantes comparan el valor absoluto con cero y no con una cantidad negativa, lo cual hace que sea más sencillo dar la respuesta, porque en tal caso, hacen uso de la definición de valor absoluto y de sus propiedades.

A continuación se mencionan, cuáles fueron las repuestas que dieron los estudiantes al enunciado II de la Situación 1 parte C, en la cual se esperaba que lograran exponer de manera general las condiciones que debe cumplir el parámetro c, de tal manera que las inecuaciones de la forma $|x| * c$, tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución.

Sólo el 31% de los estudiantes lograron escribir las condiciones del parámetro c, cuando era posible, responder de forma correcta las preguntas del enunciado II, sin embargo, cuando se hizo la socialización, el 54% de los estudiantes logró expresar de manera verbal (en el RLN) la respuesta correcta al ejercicio.

Para cerrar el análisis de la Situación 1, se presentan los resultados de la parte D, en la cual se trabajó la noción de equivalencia de inecuaciones para el caso de las ILVA1V, de la forma $|ax - b| * c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 1$ (éstas son las que hemos denominado familia de contrastes).

En el enunciado I de la parte D, se les pidió a los estudiantes que encontraran la solución de las inecuaciones de manera gráfica. Los dos procedimientos que ellos utilizaron fueron el algebraico (esto incluye el uso de las propiedades o la definición de valor absoluto), y el gráfico. No obstante, tan sólo el 54% de los estudiantes trazaron las gráficas de las funciones $f(x) = |ax - b|$ y $g(x) = c$ (esta la construyeron por la vía del punteo y no haciendo uso de las transformaciones de las funciones estudiadas en clase). Cabe anotar que los estudiantes privilegian los procedimientos algebraicos sobre los gráficos para solucionar las ILVA1V, además sólo el 38% de los estudiantes lograron encontrar la solución, por alguno de los métodos antes mencionados.

En el enunciado II de la parte D, tan sólo el 23% de los estudiantes afirmaron que los pares de inecuaciones $1a$ y $1d$ (cuyas ecuaciones son respectivamente $|x| < 2$ y $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$), $2a$ y $2d$, $5a$ y $3d$ son equivalentes, lo cual argumentaron diciendo que tienen la misma solución (hallaron la solución de manera gráfica), pero en ninguno de los casos, se utilizaron las propiedades del valor absoluto para hacer una prueba formal.

Finalmente, los enunciados IV y V de la parte D, se les dificultaron a los estudiantes, porque para ellos es dificultoso poner restricciones a los parámetros a, b y c tales que:

- El conjunto solución de la inecuación $f(x) < g(x)$ [41] sea el intervalo abierto $(-1, 4)$
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) < g(x)$ [42] sea un intervalo abierto de la forma $(x_0,\ x_1)$, $x_0,\ x_1\ \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 < x_1$.
- El trazo ascendente de la función $f(x)$, forme un ángulo de 45° con el $eje\ x$, etcétera.

De lo anterior, se puede afirmar que dichos parámetros constituyen un nivel de abstracción muy alto, ya que el conjunto de actividades, tal y como están diseñadas, no dan la posibilidad de que los estudiantes logren obtener la respuesta correcta. Estas generalizaciones sólo emergen en la discusión orientada por la docente, quien hace énfasis en los elementos que son pertinentes o relevantes en la comparación.

Una vez presentados los resultados de la Situación 1, se pasa al análisis de la Situación 2, la cual consta únicamente de la parte A. En el enunciado I, se pide completar una tabla en la cual aparecen cinco regiones sombreadas sobre la recta numérica (ver Anexo C), que pueden ser descritas por una desigualdad simultánea ($a \le x \le b$ donde a y b son números reales arbitrarios).

[41] Donde $f(x) = |ax + b|$ y $g(x) = c$.
[42] Donde $f(x) = |ax + b|$ y $g(x) = c$.

De la región sombreada sobre la recta numérica, los estudiantes deben identificar el punto medio, la distancia del punto medio a los extremos y la inecuación con valor absoluto, cuya solución está dada por el intervalo cerrado $[a, b]$.

En el enunciado II se pide hallar las diferencias y semejanzas[43] de los ejercicios 1 a 5; al respecto los estudiantes construyeron una tabla como la que se presenta a continuación (ver Tabla 17):

SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
• La constante en las inecuaciones es 2. • En todas la constante es mayor o igual que el valor absoluto $(\lvert x + \cdots) \leq 2$ • Los conjuntos solución se encuentran entre -4 y 3. • Que el punto medio siempre es la mitad de cuatro unidades. • Todos los intervalos son cerrados • Todas tienen soluciones reales. • Que el número que pertenece al punto medio siempre va sumado a x en valor absoluto.	• Los puntos medios son diferentes • Las inecuaciones son diferentes • Que todas las soluciones tienen intervalos distintos.

Tabla 17. Semejanzas y diferencias encontradas en el análisis de los gráficos 1 a 5 de la Situación 2, parte A.

Se puede observar en la Tabla **17**, que en la última semejanza "Que el número que pertenece al punto medio siempre va sumado a x en valor absoluto" hay un error, pues se asume que para hallar la inecuación con valor absoluto, que describe la región sombreada, se debe <u>sumar</u> x con el punto medio de la región sombreada, cuando en realidad, lo que se debe realizar es una resta, porque se está haciendo referencia a la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica (es decir, que los estudiantes escriben $|x + punto\ medio|$, en lugar de $|x - punto\ medio|$); esta observación sobre el signo fue objeto de discusión en la socialización.

[43] Las semejanzas y diferencias que registramos en la Tabla 17 han sido tomadas de manera textual.

Continuando con el enunciado III de la Situación 2 parte A, los estudiantes debían describir la región sombreada en forma de intervalo y dar la ILVA1V, cuya solución coincide con la región sombreada; en este caso, la estrategia empleada por la mayoría (69%), consistió en hallar el punto medio de la región no sombreada y contar las unidades que habían hacia los extremos. Después de completar la tabla, se le pidió a los estudiantes (en el enunciado IV), que mencionaran las semejanzas y diferencias encontradas en los ejercicios 6 a 10; veamos lo dicho por los estudiantes en la Tabla **18**:

SEMEJANZAS	**DIFERENCIAS**
• La constante en las inecuaciones es 2. • En todas la constante es mayor o igual que el valor absoluto $(\|x+\cdots)>2$ • Los conjuntos solución son uniones. • El punto medio del intervalo que no está dentro de la solución siempre se lo resto (le antepongo un menos) • Intervalos solución abiertos. • Que el intervalo que no pertenece al conjunto solución siempre es de 4 unidades.	• Las inecuaciones son diferentes

Tabla 18. Semejanzas y diferencias encontradas en el análisis de los gráficos 6 a 10 de la Situación 2, parte A

La parte B de la Situación 2, consistió en la socialización de la parte A, y de la discusión, sobre cómo la modificación de la distancia, el valor numérico, el signo del centro o punto medio, y el símbolo de desigualdad entre otros factores, influyen al momento de determinar la inecuación correspondiente a la región sombreada o, a la inversa, en el sentido de identificar cuáles son los factores determinantes para encontrar la solución de una ILVA1V, por medio de la representación gráfica en la recta numérica.

4 Prueba de Contraste

Una vez finalizada la intervención de aula con el grupo plurirregistro, se realizó una Prueba de Contraste que permitió caracterizar los *démarches* de solución de ILVA1V, efectuados por dos poblaciones: el grupo plurirregistro (GP),con el cual se realizó de manera intencional una enseñanza que involucra la coordinación dos o más registros de representación semiótica, y el grupo monorregistro (GM), con quien no se hizo énfasis en los tratamientos propios a cada representación, y se trabajó la conversión que va del REA al RG por la vía del punteo, como usualmente se propone en los libros de texto.

A continuación se hace referencia a los elementos que se tuvieron en cuenta, para el diseño de la Prueba de Contraste, es decir, desde cómo está organizada, hasta todos los elementos que consideraron pertinentes para, posteriormente, presentar los resultados y el análisis de la prueba realizada, tanto al grupo plurirregistro como en el monorregistro.

4.1 Estructura de una Prueba de Contraste

La Tabla 19 sintetiza los elementos tenidos en cuenta para el diseño de la prueba (ver Anexo D). Las columnas, denotadas con las letras mayúsculas A, B y C, corresponden al nivel de dificultad o profundidad en la indagación, siendo A el nivel bajo con un 10% de las preguntas, B el nivel intermedio con el 50%, y C el nivel alto con el 40%; las filas aluden a los tópicos que se han tomado en consideración durante la evaluación: las generalidades, las transformaciones entre los registros (tratamientos y conversiones), los significados particulares de las ILVA1V, y su porcentaje de aparición corresponde al 10%, 60% y 30%, respectivamente. Es razonable que el mayor porcentaje de preguntas esté relacionado con el tema de las transformaciones entre las representaciones, pues es ahí, es donde se espera tener un mayor impacto, es decir, donde se esperaría tener diferencias relativas a las *démarches* de solución entre las dos poblaciones (plurirregistro y monorregistro).

ASPECTOS A EVALUAR	**NIVELES DE PROFUNDIDAD**			**TOTAL**
	A	**B**	**C**	
Generalidades		*1*		1
TRASFORMACIONES				
Tratamiento		*2, 5b*		6
Conversión	*5a*		*6a, 6b, 7*	
Dupla (forma/contenido)		*3, 4*	*5c*	3
TOTAL	1	5	4	10

Tabla 19. Clasificación de las preguntas en la Prueba de Contraste, según la temática y el nivel de dificultad.

La primera pregunta que corresponde a las generalidades, fue muy importante para la investigación, pues permitió consultar la definición que tienen los estudiantes sobre el valor absoluto y así, ver cómo pusieron en juego dicho concepto en los diferentes procesos que realizaron para solucionar las ILVA1V.

Las preguntas 2 y 5b, tenían como propósito evaluar los tratamientos en el registro de escritura algebraica que realizan los estudiantes para la solución de las ILVA1V; estos son los ejercicios típicos sobre los cuales la enseñanza tradicional se enfoca, como se puede evidenciar en los textos escolares. Ambas preguntas corresponden a la familia de inecuaciones con coeficientes, es decir, a inecuaciones de la forma $|ax+b| * c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, * representa cualquiera de las siguientes relaciones: $<, \leq, >$, ó $\geq$ y a, es diferente de 1($a \neq 1$).

Las preguntas 6a, 6b y 7, exigen el cambio de registro de representación, es decir, aluden a la transformación de conversión, razón por la cual tienen un mayor grado de dificultad. En estas preguntas se ha elegido como registro de partida, la representación gráfica en la recta o en el plano cartesiano, y el registro de llegada es la escritura algebraica, la cual no es una tarea convencional o usualmente propuesta en los textos escolares de matemáticas.

Otra de las tareas relacionadas con la operación cognitiva de conversión es el enunciado 5a, el cual clasificamos en un nivel bajo de dificultad, porque los estudiantes tienen varias alternativas de solución, lo cual hace que la dificultad disminuya, además por lo general, los estudiantes han construido la correspondencia entre regiones de la recta e intervalos, y a la inversa.

Antes de presentar los resultados, recordemos que para realizar el contraste se tomaron dos grupos de iniciación al álgebra con las siguientes características:

- El grupo 01 denominado grupo plurirregistro. El curso fue atendido por la investigadora, y en éste curso se realizó una intervención plurirregistro.
- El grupo 02 denominado grupo monorregistro. No fue atendido por la investigadora, y no tuvo de manera intencional una enseñanza plurirregistro.
- El texto guía y los contenidos para ambos grupos fueron los mismos.

4.2 Presentación y análisis de los resultados obtenidos

Para la exposición de los resultados, se presenta el enunciado de cada una de las preguntas del cuestionario (este aparece en un recuadro) junto con el propósito del mismo; seguidamente, se lleva a cabo la descripción[44] de los niveles (de acuerdo con la pregunta), al igual que las frecuencias relativas correspondientes a cada nivel según la población, bien sea que se trate del grupo plurirregistro (GP), o del monorregistro (GM). Finalmente se muestran algunas de las repuestas dadas por los estudiantes[45], cuando se considere necesario o pertinente.

1. Expresa con tus propias palabras el significado de la expresión: $\lvert x-a\rvert \leq b$, donde a y b representan constantes tales que $a, b \in \mathbb{R}$ y x, es una cantidad desconocida que también pertenece a los reales.

<u>*Lo esperado*</u>: Como ya se puso de manifiesto en la estructura de la Prueba de Contraste, esta pregunta tiene la intención de identificar cuáles son los significados particulares que tiene una expresión general como $\lvert x-a\rvert \leq b$. En la Tabla 20 se muestra la clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes.

[44] En la descripción hemos escrito en letra *cursiva* la(s) característica(s) fundamental(es) de cada nivel.
[45] Las respuestas de los estudiantes aparecerán “entre comillas”, además serán tomadas de manera textual.

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	En esta categoría están los estudiantes que dan una *interpretación geométrica de la inecuación, como una distancia* o *como la comparación de dos funciones, una con valor absoluto y otra constante*.	37.5%	23%
BÁSICO	En esta categoría están los estudiantes que, aunque *intentan evocar el significado particular de la ILVA1V en términos de una distancia*, no tienen clara cuál es la distancia o cuál es el centro.	25%	23%
BAJO	En esta categoría están los estudiantes que hicieron una *lectura de la expresión simbólica, resolvieron* [46] *la inecuación* o simplemente *no respondieron*.	37.5%	54%

Tabla 20. Clasificación de respuestas, pregunta 1 de la Prueba de Contraste

En términos generales, ninguno de los estudiantes del GM, y sólo el 6% (aproximadamente) del GP, escribieron o pusieron restricciones sobre alguno de los parámetros para que la desigualdad tuviese sentido.

El significado particular que privilegian los estudiantes de los grupos pluriregistro y monoregistro sobre que el valor absoluto es el de distancia, y lo expresan de la siguiente manera (ver Ilustración 34):

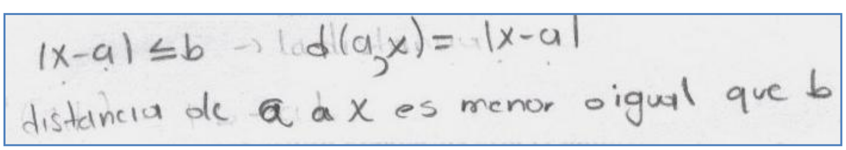
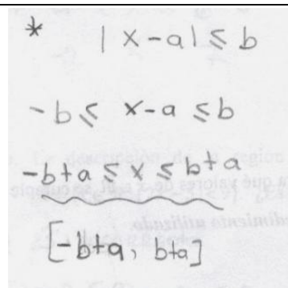


Ilustración 34. Descripción dada por el estudiante LFS07PCGP a la expresión $|x - a| \leq b$ como una distancia entre dos puntos sobre la recta numérica.

[46] La solución planteada por los estudiantes no era correcta necesariamente.

Se observa que el 19% del GP y el 38% del GM, al ver la expresión $|x-a| \leq b$, se sienten en la obligación de resolverla. Los estudiantes que resuelven la ILVA1V en su mayoría, no ponen restricciones sobre los valores de b, para los cuales la inecuación $|x-a| \leq b$, tiene solución en los reales. Para ejemplificar lo dicho con anterioridad, se muestran[47] las respuestas de dos estudiantes, las cuales aparecen en la Ilustración 35.



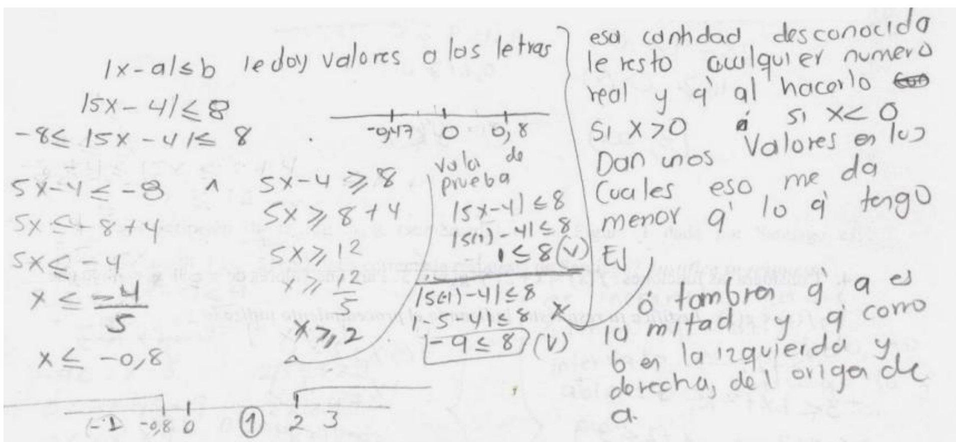
$$|x-a| \leq b$$

$$-b \leq x-a \leq b$$

$$-b+a \leq x \leq b+a$$

$$[-b+a, b+a]$$

Procedimiento realizado por el estudiante DMC08PCGP



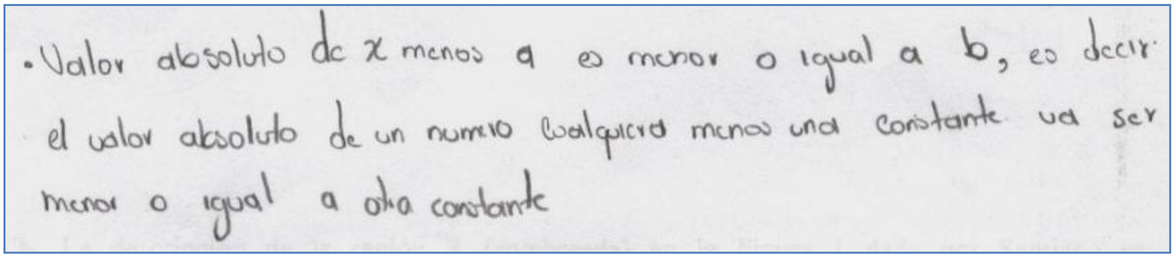
Procedimiento realizado por el estudiante AKT08PCGM

Ilustración 35. Respuestas de la primera pregunta, correspondientes a dos estudiantes clasificados en el nivel bajo.

Como se puede observar en la Ilustración 35, el estudiante AKT08PCGM representa a los estudiantes que asignan valores numéricos a la expresión $|x-a| \leq b$ resolviéndola, pero no logran expresar con sus propias palabras lo que significa dicha expresión. Otros estudiantes sólo hacen una lectura de la notación simbólica, por ejemplo, el estudiante RLQ08PCGE dice "Valor absoluto de x menos a es menor o igual a b, es decir, el valor

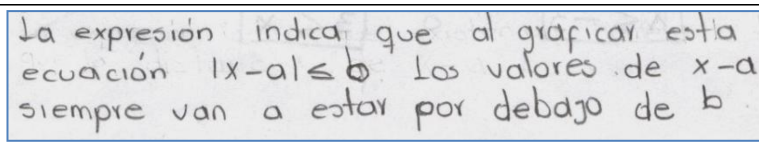
[47] El procedimiento realizado por los estudiantes está acompañado de la transcripción del documento para una mejor lectura de la información.

absoluto de un número cualquiera, menos una constante va a ser menor o igual a otra constante":



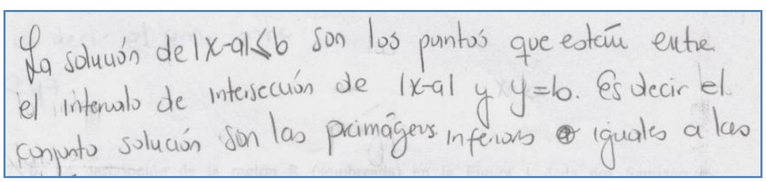
• Valor absoluto de x menos a es menor o igual a b, es decir: el valor absoluto de un numero cualquiera menos una constante va a ser menor o igual a otra constante

De otro lado, se nota que sólo en el grupo plurirregistro emerge la interpretación funcional del valor absoluto (ver Ilustración 36) aunque, una frecuencia relativa muy pequeña (12.5%). Este porcentaje es significativo, en tanto que es un primer indicio de generalización del trabajo desarrollado en la Situación 1; las interpretaciones van acompañadas de su transcripción para una mejor lectura de las ilustraciones.



La expresión indica que al graficar esta ecuación $|x-a|\leq b$ Los valores de $x-a$ siempre van a estar por debajo de b

Transcripción: "La expresión indica que al graficar esta ecuación $|x-a| \leq b$, los valores de $x-a$ siempre van a esta por debajo de b"



La solución de $|x-a|\leq b$ son los puntos que están entre el intervalo de intersección de $|x-a|$ y $y=b$. Es decir el conjunto solución son las preimágenes inferiores o iguales a las

Transcripción: "La solución de $|x-a| \leq b$, son puntos que están entre el intervalo de intersección de $|x-a|$ y $y=b$. Es decir, el conjunto solución son las preimágenes inferiores o iguales a las $y=b$"

Ilustración 36. Interpretación funcional de las ILVA1V dada por dos estudiantes del GP.

Como se observar en la Ilustración anterior, los enunciados empleados por los estudiantes para dar una interpretación funcional de la expresión $|x-a| \leq b$, no son precisos y mucho menos correctos. Podría decirse que ésta, es una fase inicial de formalización de los resultados obtenidos de las situaciones didácticas realizadas en clase.

Un nivel alto de formalización se alcanza cuando el estudiante puede verbalizar (haciendo uso del lenguaje natural especializado) y simbolizar (haciendo uso del REA) la diferencia entre dos conjuntos numéricos, como son el conjunto de las imágenes (o rango de la funciones $f(x) = |x - a|$ y $g(x) = 3$), y las preimágenes (o dominio de $f(x)$ y $g(x)$), además de identificar cómo los valores de x, influyen en los valores del rango de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si bien pareciera que el estudiante YB98PCGP estuviese confundido entre el conjunto de las preimágenes y de la imágenes, sabemos que desde el punto de vista operatorio tal confusión no existe, porque si se observa la respuesta que da a la pregunta 4 de la Prueba de Contraste, veremos que su forma de razonar es correcta (ver en la Ilustración 41 el procedimiento empleado por el estudiante YB98PCGP para hallar la solución del enunciado 4 de la prueba de contraste).

2. Una inecuación equivalente a $|3x - 6| < 9$ es:
a. $|x - 6| \leq 3$ b. $|x - 2| \leq 3$ c. $|2 - x| < 3$ d. $3x - 6 \leq 9$
Justifica tu respuesta.

<u>*Lo esperado*</u>: Con esta pregunta se evaluó el conocimiento que tienen los estudiantes de los tratamientos en el registro de escritura algebraica (ver Tabla 3, de la página 33), los cuales están determinados por las propiedades estudiadas en el Capítulo 2, páginas 23 a 32.

De acuerdo con el esquema de presentación, vemos la Tabla 21, en la cual se han clasificado las respuestas de los estudiantes en tres niveles: alto, básico y bajo.

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	En esta categoría están los estudiantes que tienen pleno dominio de las propiedades de las desigualdades y del valor absoluto (*dominan los tratamientos del REA*), para encontrar la inecuación equivalente a $|3x - 6| < 9$.	44%	39%

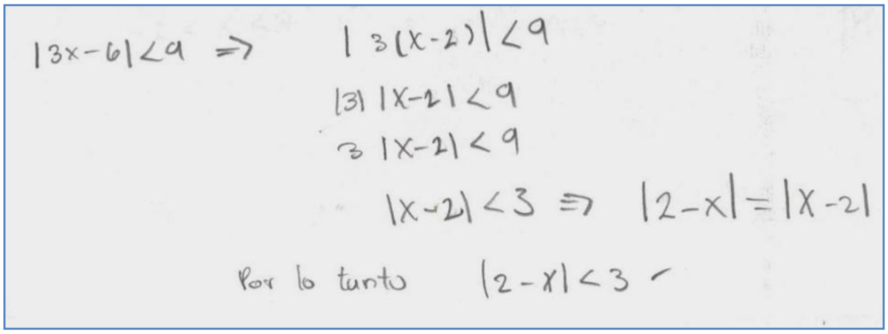
BÁSICO	En este nivel se encuentran los estudiantes que resolvieron todas las inecuaciones, pero que *cometieron errores relacionados con el empleo de los signos,* o *con la conceptualización de variable*.	50%	46%
BAJO	Los estudiantes ubicados en este nivel *recurren al tanteo de algunos valores,* para ver cuáles de ellos satisfacen tanto la inecuación inicial, como la opción elegida o simplemente *dejan el espacio en blanco*.	6%	15%

Tabla 21. Clasificación de respuestas, pregunta 2 de la Prueba de Contraste

Aunque lo altamente deseable en este punto, es que los estudiantes muestren cierto dominio de las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades, de tal manera que traten de transformar la inecuación inicial en cualquiera de las dadas en las opciones a–d. Encontramos que la mayoría de ellos (el 81% y el 77% del grupo plurirregistro y de monorregistro, respectivamente), resuelven las inecuaciones para determinar la equivalencia por medio de la comparación de los conjuntos soluciones.

Sólo el 13% de los estudiantes del grupo plurirregistro y el 8% del monorregistro, utilizaron un procedimiento similar al que aparece en la

Ilustración 37 para hallar la inecuación equivalente. Éstos, muestran que no es necesario encontrar la solución de cada una de las inecuaciones para determinar cuál es la inecuación equivalente a $|3x - 6| < 9$.



Transcripción

$$|3x-6|<9 \Longrightarrow |3(x-2)|<9$$
$$|3||x-2|<9$$
$$3|x-2|<9$$
$$|x-2|<3 \Longrightarrow |x-2|=|2-x|$$

Por lo tanto $|2-x|<3$

Ilustración 37. Un procedimiento alternativo de la pregunta 2, el cual muestra el dominio que tienen algunos estudiantes de los tratamientos propios del registro de escritura algebraica (REA)

Definitivamente, el registro que se privilegia para hallar la solución de las ILVA1V, es el REA. El RG se utiliza como registro auxiliar[48] cuya función cognitiva es ilustrar, porque corresponde a un cambio de registro particular: de un texto hacia una imagen, y no a la inversa. Generalmente, esta función de ilustración interviene por la preocupación de conectar, o de suplir una deficiencia en la capacidad de descifrar o interpretar del estudiante (Duval, 1999); se piensa que la representación gráfica sobre la recta real es utilizada por los estudiantes para poder dar la respuesta correcta, o comprobar lo hecho de manera algebraica.

En el REA encontramos que los principales causales de dificultad en la solución de las inecuaciones fueron:

- Las operaciones con números enteros negativos.

[48] Son aquellas representaciones que se producen para ser puestas en paralelo o para asociarlas a otras representaciones producidas por otro sistema, como por ejemplo, una leyenda en una caricatura, o las hipótesis en una figura geométrica, o incluso como una foto que se exhibe en un texto descriptivo o narrativo.

- No tuvieron en cuenta que la relación de la inecuación $|3x - 6| < 9$ es diferente de la que aparece en la opción b ($|3x - 6| \leq 9$).
- La conceptualización de la noción de variable también generó obstáculos, porque se asume que expresiones como $3x - 6$ representan una cantidad positiva, razón por la cual marcaron en algunas ocasiones la opción d.
- Otra dificultad relacionada con la conceptualización de la variable, tiene que ver con el dominio que se toma como referencia para hallar la solución de las ILVA1V, el cual se asume en muchas ocasiones como el conjunto de los enteros positivos.

3. Considera el siguiente procedimiento realizado por Juanita para hallar la solución de la inecuación$x^2 \geq 9$, en los reales: Paso 1: $x^2 \geq 9$ Paso 2: $\sqrt{x^2} \geq 9$ Paso 3: $x \geq \pm 3$ Juanita ha cometido por lo menos un error, identifica uno y di cuál fue.

<u>*Lo esperado*</u>: El objetivo de este ejercicio, es saber si los estudiantes identifican que $\sqrt{x^2} = |x|$, es uno de los significados de valor absoluto.

Las respuestas que dieron los estudiantes se han clasificado de la siguiente manera (ver Tabla 22):

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	*Reconocen el significado particular de $|x|$ como $\sqrt[2]{x}$.*	81%	0%
BÁSICO	Estos estudiantes afirman que el error está en el paso 2 porque *para resolver el ejercicio, es necesario plantear una diferencia de cuadrados*.	13%	77%
BAJO	Los estudiantes en este nivel *recurren al tanteo de algunos valores*, para ver cuáles de ellos satisfacen tanto, la inecuación inicial, como la opción elegida, *o* simplemente *dejan el espacio en blanco*.	6%	23%

Tabla 22. Clasificación de respuestas, pregunta 3 de la Prueba de Contraste

Los procedimientos presentados por los textos universitarios para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = a^2$, donde $a \in \mathbb{R}$ son típicamente dos. Uno en donde se privilegia la factorización, y el otro donde se utilizan las propiedades de las exponentes racionales, estos procedimientos se han detallado a continuación:

Procedimiento 1. Factorizando

$x^2 = a^2$

$x^2 - a^2 = 0$

$(x - a)(x + a) = 0$

$$x - a = 0 \quad \text{o} \quad x + a = 0$$

$$x = a \quad \text{o} \quad x = -a$$

Procedimiento 2. Utilizando la noción de valor absoluto

$x^2 = a^2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2}$

$|x| = a$

Caso 1. Si $x \geq 0$, entonces $x = a$

Caso 2. Si $x < 0$, entonces $-x = a$. Esta última expresión equivale a $x = -a$

De los casos 1 y 2 se concluye que la ecuación $x^2 = a^2$ tiene dos soluciones dadas por $x = a$ o $x = -a$.

Cabe notar que el Procedimiento 2 en muchas ocasiones se simplifica así:

$x^2 = a^2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2}$

$x = \pm a$

Esta simplificación provoca en los estudiantes confusión, dado que ellos creen que $\sqrt{x^2} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entre otros errores[49] posibles que induce esta simplificación, en

[49] Con esto se pretende puntualizar, sobre la confusión que presentan muchos estudiantes cuando se les pregunta por el valor numérico de una raíz exacta, por ejemplo, al preguntar a un estudiante cualquiera ¿cuál

consecuencia no logran identificar el significado particular del valor absoluto que está siendo movilizado en la tercera pregunta de la prueba. Por esta razón, fue muy difícil para el grupo monorregistro determinar, al menos, uno de los errores de la tercera pregunta.

Otra cuestión que generalmente sucede, tiene que ver con la organización de los contenidos en los textos universitarios, y en los programas de los cursos, puesto que usualmente se estudia en primera instancia las ecuaciones y después la inecuaciones; esto hace que los estudiantes transfieran las propiedades de las ecuaciones a las inecuaciones tal y como lo muestra el estudiante DFV08PCGM, cuando afirma que el error que tuvo Juanita fue que en vez de colocar el signo igual, puso “mayor o igual que” (ver Ilustración 38).

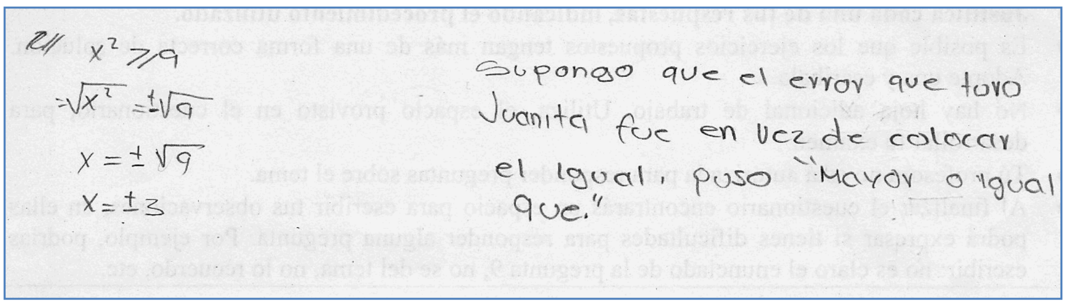


Ilustración 38. Un procedimiento en el cual se muestra que las inecuaciones están subordinadas a las ecuaciones

Esta forma de proceder, sugiere que éste procedimiento sólo es aplicable cuando la relación que hay es una igualdad, pero para las desigualdades no aplica.

Los estudiantes en el nivel básico, ante la imposibilidad de encontrar el error en el razonamiento, resuelven la inecuación cuadrática haciendo un procedimiento análogo al procedimiento 1 (ver Ilustración 39).

es la raíz cuadrada de 9? Hay dos tipos de respuestas posibles, los que afirman que la respuesta es tres (3) y los que dicen que es más o menos tres (± 3)

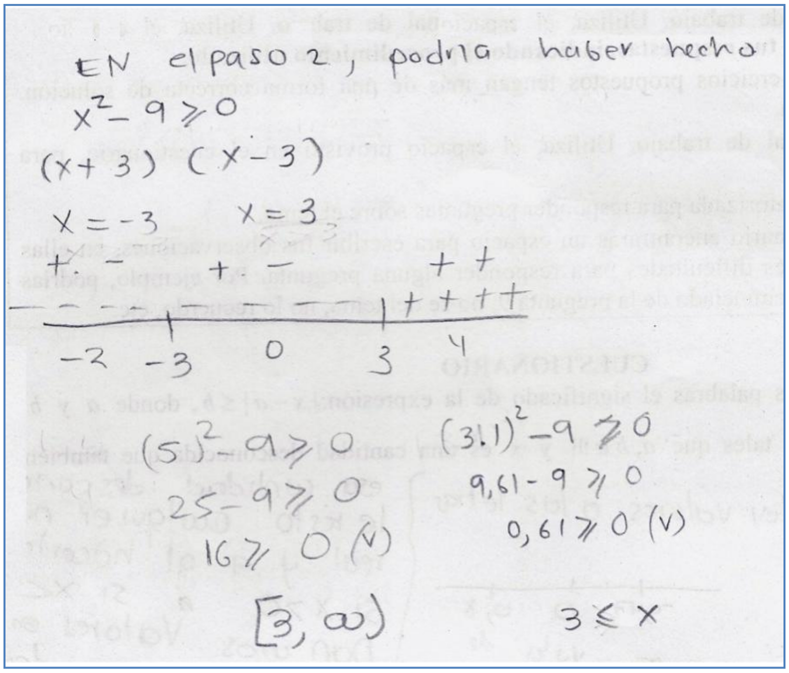
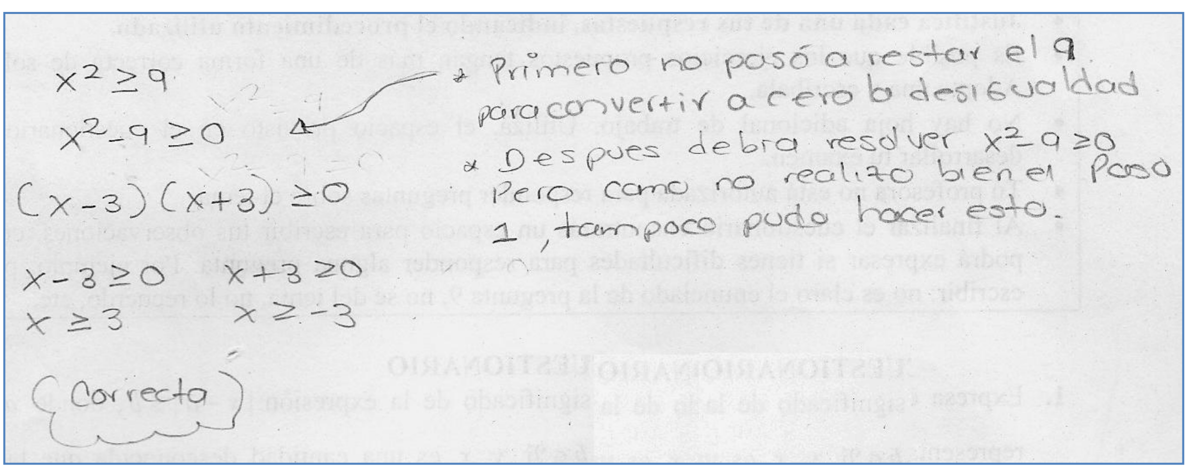


Ilustración 39. Solución de la pregunta 3 de la Prueba de Contraste de un estudiante en el nivel básico.

Sin embargo, es importante notar que aún cuando factoricen correctamente, no todos los estudiantes logran solucionar de manera correcta la inecuación, porque no toman en consideración todos los casos, es decir, que $(x-3)(x+3) \geq 0$ cuando x tome valores para los cuales los números $x-3$ y $x+3$ sean, simultáneamente, no negativos o no positivos, este fue el error cometido por el estudiante LFS08PCGM, el cual se presenta a continuación:



Pasemos ahora a presentar y analizar la cuarta pregunta de la Prueba de Contraste.

4. Considera las funciones $f(x) = |x + 2|$ y $g(x) = 3$. Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) < g(x)$. *Justifica tu respuesta, indicando el procedimiento utilizado.*

Lo esperado:

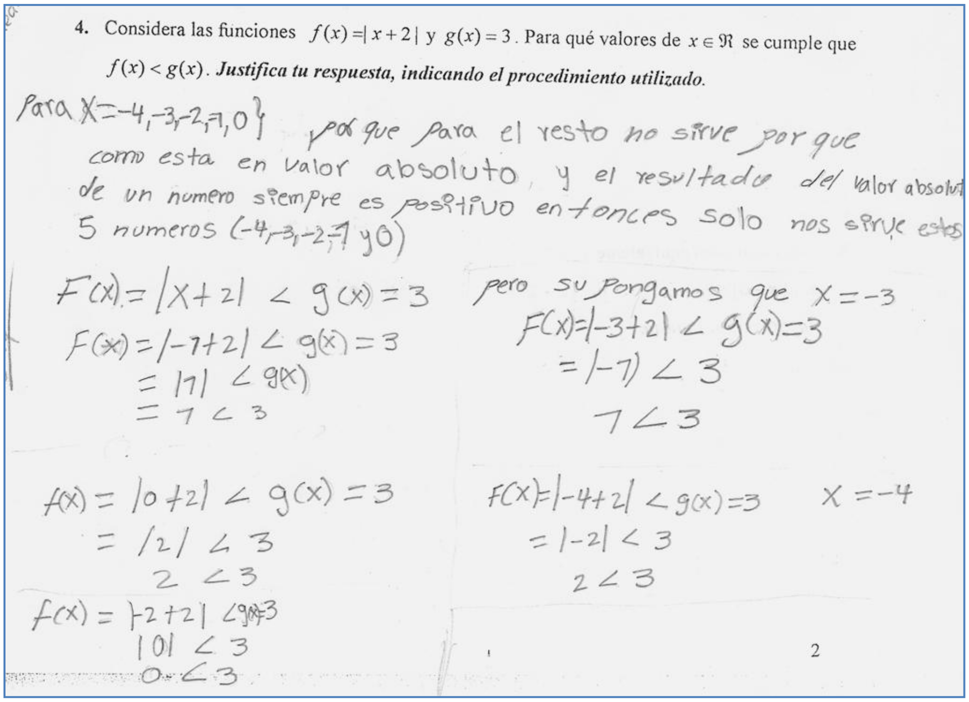
Por la manera como se han enunciado el ejercicio, se pretendía saber si basta con afirma que $f(x) = |x + 2|$ y $g(x) = 3$ son funciones, para que los estudiantes organicen sus acciones de tal manera que busquen una solución gráfica en el plano cartesiano, y no una solución algebraica por medio del REA.

En la Tabla 23 ilustramos la descripción de cada uno de los niveles encontrados en las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta número 4:

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	*Utilizan la representación gráfica de las funciones* para solucionar correctamente la desigualdad.	50%	8%
BÁSICO	*Utilizan el registro de escritura algebraica* para solucionar la inecuación.	37.5%	61%
BAJO	*Realizaron procedimientos exploratorios*, pero no lograron encontrar la solución.	12.5%	31%

Tabla 23. Clasificación de respuestas, pregunta 4 de la Prueba de Contraste.

Las respuestas dadas por los estudiantes a este interrogante fueron variadas, puesto que evocaron diferentes significados de las inecuaciones como: una distancia, la comparación entre dos funciones, o las que se remiten a lo operatorio (es decir, que consisten en aplicar la propiedad de valor absoluto más apropiada), entre otras. Dentro de la variedad de respuestas posibles, se encontraron estudiantes para los cuales, el conjunto solución de $f(x) < g(x)$ es $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$, porque el dominio de la variable es el conjunto de los enteros.


4. Considera las funciones $f(x)=|x+2|$ y $g(x)=3$. Para qué valores de $x \in \Re$ se cumple que $f(x)<g(x)$. ***Justifica tu respuesta, indicando el procedimiento utilizado.***

Para X = -4, -3, -2, -1, 0} por que para el resto no sirve por que como esta en valor absoluto, y el resultado del valor absolut de un numero siempre es positivo entonces solo nos sirve estos 5 numeros (-4, -3, -2, -1 y 0)

$F(x)=|x+2| < g(x)=3$
$F(x)=|-1+2| < g(x)=3$
$=|1| < g(x)$
$=1<3$

pero supongamos que $x=-3$
$F(x)=|-3+2| < g(x)=3$
$=|-1| < 3$
$1<3$

$f(x)=|0+2| < g(x)=3$
$=|2| < 3$
$2<3$

$F(x)=|-4+2| < g(x)=3$ $x=-4$
$=|-2| < 3$
$2<3$

$f(x)=|-2+2| < g(x)=3$
$|0| < 3$
$0<3$

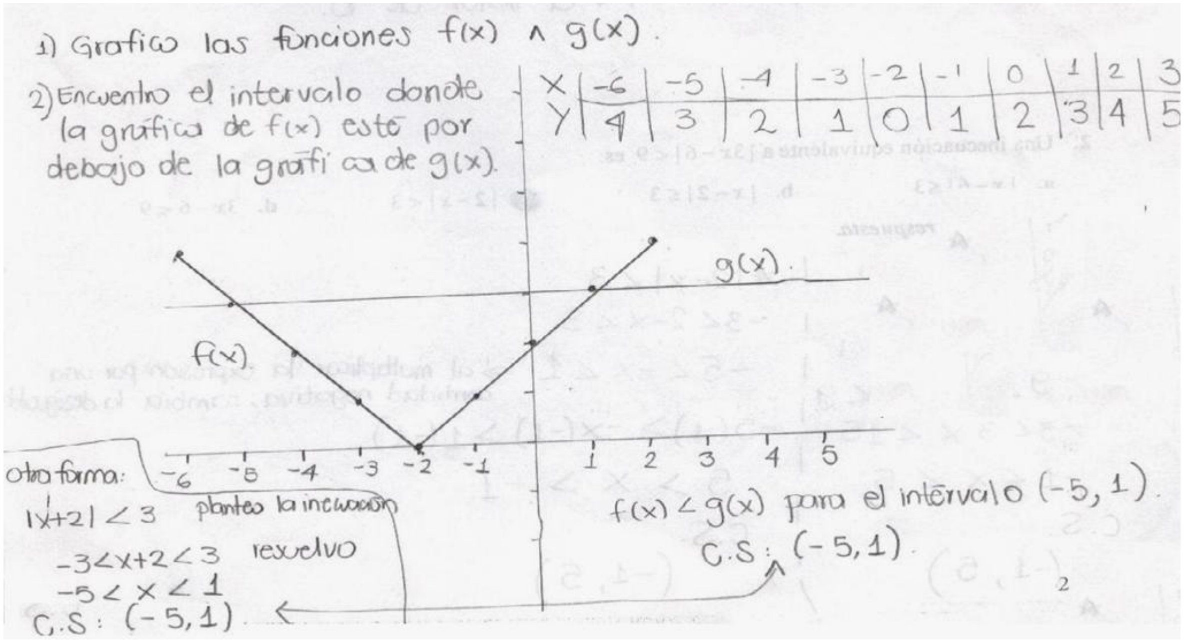
2

Ilustración 40. La influencia del dominio de la variable en el procedimiento de solución elegido por el estudiante AFG08PCGP.

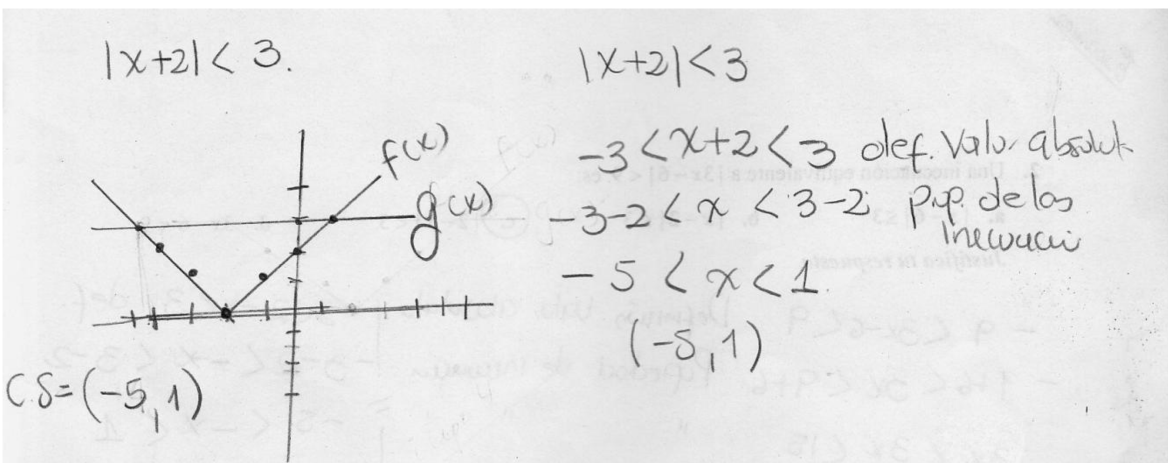
En muchos casos el dominio de la variable determina la manera como los estudiantes determinan el conjunto solución, tal y como lo hizo el estudiante AFG08PCGP en la Ilustración 40.

Algunos estudiantes resuelven el ejercicio de manera gráfica, haciendo uso de lo visto a través de la Situación 1; generalmente este método gráfico viene acompañado del REA, porque, según lo afirman ellos, resolver una misma inecuación de dos maneras diferentes, les da la certeza de que la solución encontrada es la correcta.

Como se puede observar en la Ilustración 41, el estudiante CHC08PCGP enumera los pasos a seguir en la solución del ejercicio, de tal forma que primero grafica las funciones $f(x)$ y $g(x)$, luego determina para qué valores de x la gráfica de la función $f(x)$ está por debajo de la gráfica de la función $g(x)$, y por último verifica su respuesta utilizando otro método como es el analítico.



Estudiante CHC08PCGP.



Estudiante YCB98PCGP.

Ilustración 41. Dos propuestas de solución de la pregunta 4 de la Prueba de Contraste

Por la forma como han trazado la gráfica de valor absoluto tanto, CHC08PCGE como YCB98PCGE, es claro que privilegian la vía del punteo y no una que involucre la aprensión global cualitativa de la función valor absoluto.

5a. Considera la Figura 1

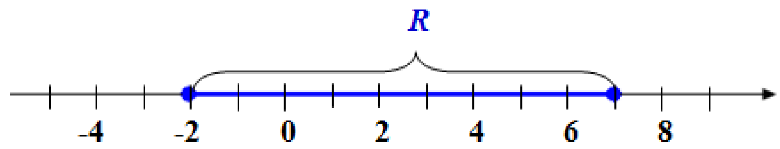


Figura 1

Da una descripción de la región R (sombreada) en la Figura 1 (aunque pueden haber múltiples respuestas correctas, *plantea una sola*).

Lo esperado: Con esta pregunta se pretendió ver cuál es el significado particular que es evocado por los estudiantes, a partir de la representación gráfica, así como el tipo de registro de representación que ellos privilegian.

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	En este nivel se encuentran *los estudiantes que asociaron la región R con una inecuación con valor absoluto, cuadrática o simplemente describen la región en términos de distancia.*	62.5%	31%
BÁSICO	Los estudiantes en el nivel básico dieron *la descripción de la región como una inecuación simultánea, o como un intervalo cerrado*.	25%	46%
BAJO	No dan ninguna descripción (*espacio en blanco*) *o* lo que se menciona *no es coherente*.	12.5%	23%

Tabla 24. Clasificación de respuestas, pregunta 5*a* de la Prueba de Contraste

En la mayoría de los casos los estudiantes de los dos grupos preguntaron sobre cómo debía responderse la pregunta, pues para ellos no era muy claro, el procedimiento que debían seguir. Después de continuar leyendo los literales *b* y *c* de la quinta pregunta, en algunos casos (44% para el GP y 23% para el GM), sugirieron descripciones similares a las de los literales antes mencionados.

Para la clasificación de los estudiantes en un nivel determinado, se tomó en consideración la primera descripción dada, porque en algunos casos, los estudiantes plantean dos o tres descripciones diferentes. Por ejemplo, el estudiante LMQ08PCGM, cuya respuesta aparece en la Ilustración 42, reconoce que la región R es una inecuación simultánea, $\boldsymbol{x \geq -2 \ \wedge \ x \leq 7}$, (primera descripción), y a partir de esta información construye una inecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{(x+2)(-x+7) \geq 0}$ (segunda descripción), cuya solución corresponde con el intervalo cerrado $[\boldsymbol{-2,\ 7}]$ (tercera descripción).

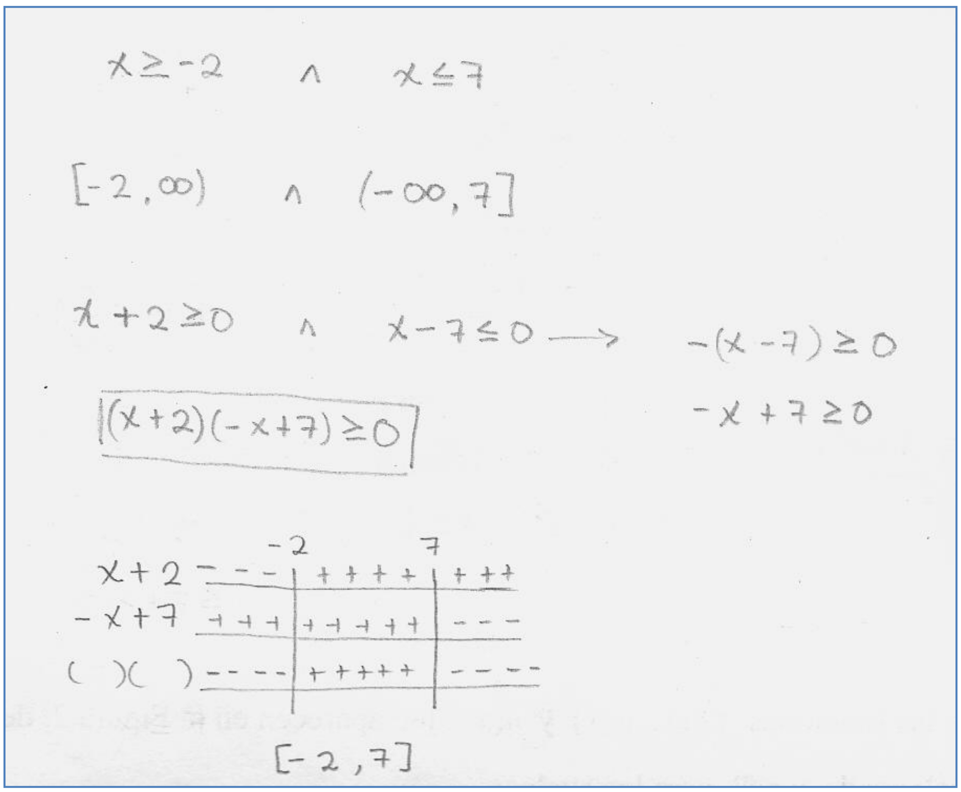
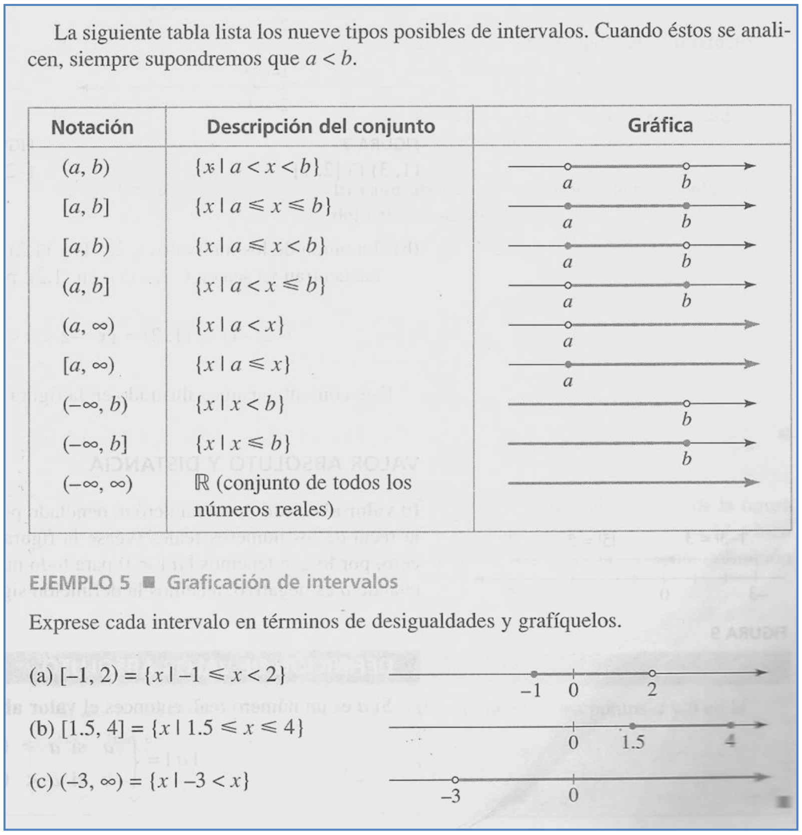


Ilustración 42. Diferentes formas de describir una región sombreada en la recta numérica.

Indiscutiblemente el registro que prefieren los estudiantes para dar la descripción de la región sombreada, es el de la escritura algebraica, en algunas ocasiones, acompañado del registro de la lengua natural.

Es importante notar que no hay una correspondencia biunívoca entre la representación gráfica y la escritura algebraica, porque los estudiantes pueden encontrar varias formas para describir la región R; pero esto no generó mayor inconveniente para la mayoría de ellos. Esto se debe, a que en un gran número de los textos escolares, la definición de intervalo va acompañada de su representación gráfica sobre la recta real (ver Ilustración 43, tomada de la página 9 del texto universitario Precálculo de Stewart *et al*).



La siguiente tabla lista los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando éstos se analicen, siempre supondremos que $a < b$.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

EJEMPLO 5 ■ Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y grafíquelos.

(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ — -1 0 2

(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$ — 0 1.5 4

(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$ — -3 0

Ilustración 43. Tomado del texto Precálculo de Stewart *et al* (2001)

Como se puede ver en la Ilustración 43, tanto el REA como el RG son congruentes, razón por la cual, la descripción de la región dada por los estudiantes se reduce a sólo dos posibilidades como: una desigualdad simultánea $-2 \leq x \leq 7$ o, su equivalente, el intervalo cerrado $[-2, 7]$.

Como no surgieron otras clases de descripciones diferentes a las dos mencionadas con anterioridad (inecuación simultánea e intervalo de la recta real), la evaluación se basó en el reconocimiento de otras opciones asociadas a lo operatorio (pregunta 5*b*, y a la noción de distancia (pregunta 5*c*).

5b. La descripción de la región R (sombreada) en la Figura 1 dada por Santiago es: $\mathrm{R} = \{x \in \mathbb{R}:\ \lvert 2x - 5 \rvert < 9\}$. ¿Es correcta la respuesta de Santiago? *Justifica tu respuesta.*

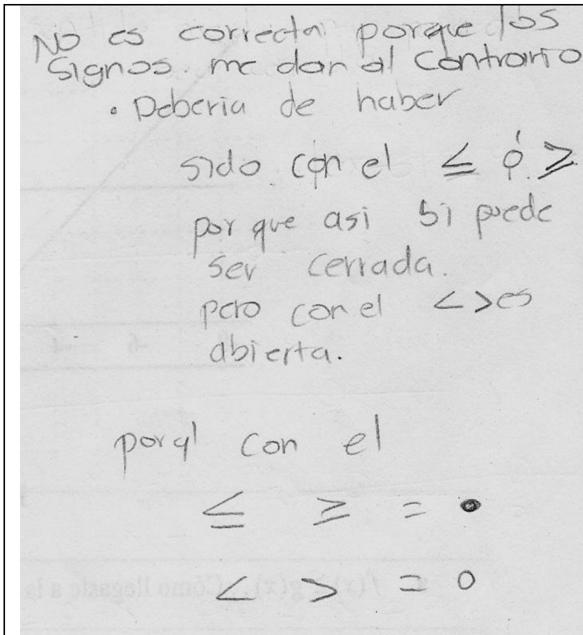
Lo esperado: Ver si los estudiantes han construido una correspondencia entre el registro de escritura algebraica y el registro gráfico, o si por el contrario, predominan los tratamientos sobre el registro de escritura algebraica.

A continuación (ver Tabla 25) presentamos los resultados obtenidos a la quinta pregunta, parte b.

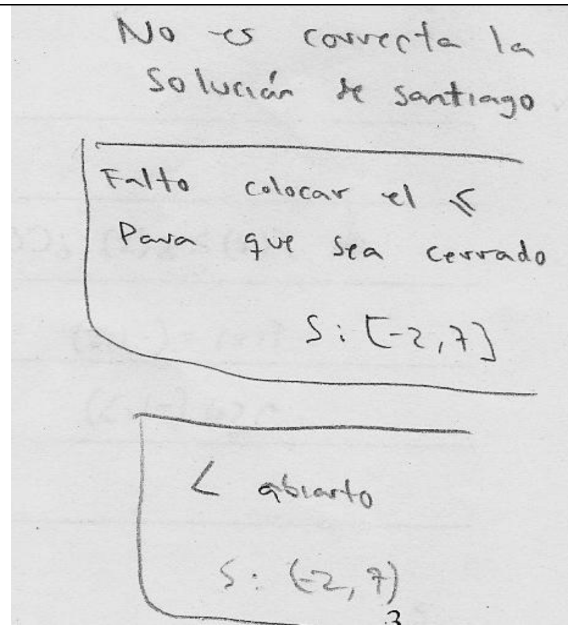
NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	Los estudiantes *explicaron que el problema en la descripción dada por Santiago, tiene que ver con el hecho de que la relación debería ser menor o igual* (≤), para poder incluir los extremos (-2 y 7).	68.7%	46%
BÁSICO	Aún cuando *resolvieron la inecuación, no reconocen que los extremos (-2 y 7) no están incluidos en la respuesta dada por Santiago*, o plantean que la solución está dada por: $(-\infty, -2) \cup (7, \infty)$.	18.7%	31%
BAJO	*Realizaron procedimientos exploratorios* y no lograron encontrar la solución, o *resolvieron incorrectamente la inecuación*.	12.6%	23%

Tabla 25. Clasificación de respuestas, pregunta 5b de la Prueba de Contraste

Los estudiantes que se han clasificado en el nivel alto, lograron establecer la correspondencia entre el registro de escritura algebraica, y la representación gráfica sobre la recta real, teniendo en cuenta que la relación de orden sea menor o igual que, o mayor o igual que, para que los valores extremos estén incluidos en el conjunto solución, lo cual se evidencia por medio de respuestas como las que aparecen en la Ilustración 44 :



Estudiante DYM08PCGM

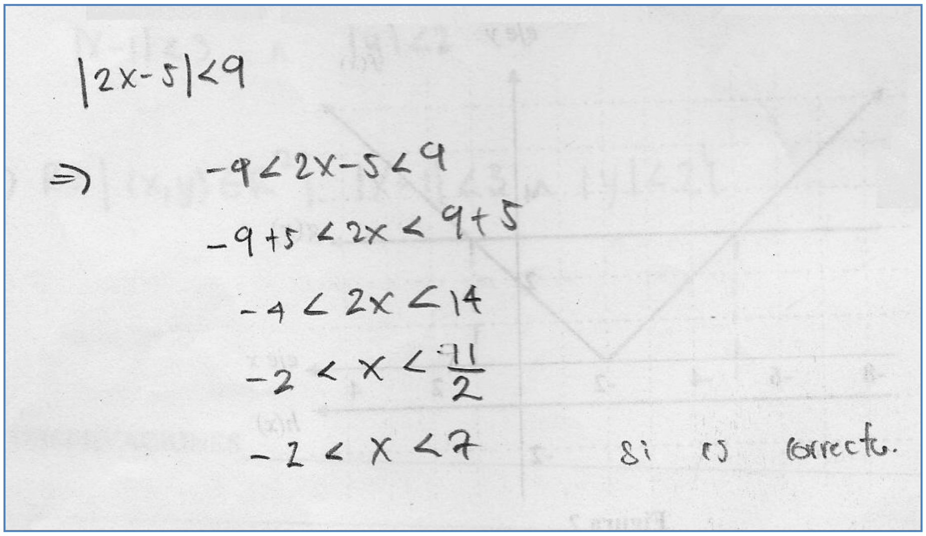


Estudiante AJS07PCGM

Ilustración 44. Esquema de solución representativa de la pregunta 5b, de la Prueba de Contraste.

Además, se encuentra que para determinar que el error corresponde a que el signo de desigualdad empleado no es el correcto, los estudiantes tuvieron la necesidad de resolver la inecuación; posiblemente porque no tienen otro criterio alternativo para determinar si el conjunto solución, corresponde o no con la región R.

Los estudiantes que han sido clasificados en el nivel básico, tienen el dominio sobre el REA, pero no logran determinar por qué la solución obtenida es incorrecta, es decir, que no logran leer e interpretar toda la información provista en la representación gráfica. Uno de los estudiantes que pertenecen a esta categoría es CFV08PCGP, cuyo procedimiento realizado para responder la pregunta 5b aparece en la siguiente Ilustración 45:



$|2x-5|<9$

$\Rightarrow -9 < 2x-5 < 9$

$-9+5 < 2x < 9+5$

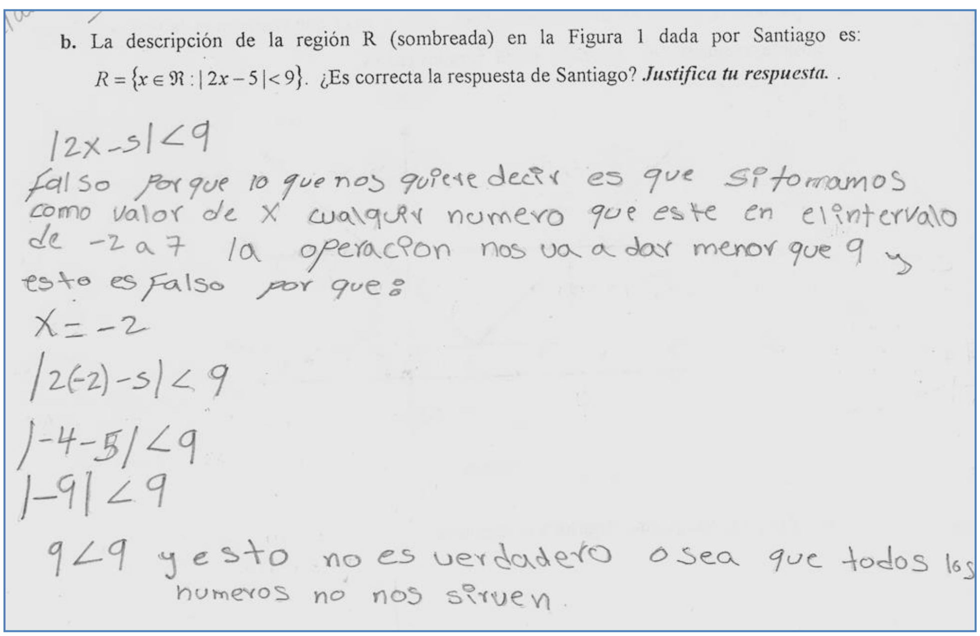
$-4 < 2x < 14$

$-2 < x < \frac{14}{2}$

$-2 < x < 7$ Si es correcta.

Ilustración 45. Procedimiento realizado por un estudiante en el nivel básico para responder la pregunta 5b de la Prueba de Contraste.

Por último, tenemos que un 6% de la población total en estudio, no logra desarrollar un procedimiento exploratorio efectivo que le permita definir si la respuesta dada por Santiago es correcta e incorrecta. Sólo encontramos un estudiante (AFG08PCGP), que sin necesidad de resolver la inecuación argumentó que la respuesta de Santiago era incorrecta, y para ello utilizó un contraejemplo, veamos:



b. La descripción de la región R (sombreada) en la Figura 1 dada por Santiago es: $R = \{x \in \Re : |2x-5| < 9\}$. ¿Es correcta la respuesta de Santiago? *Justifica tu respuesta.*

$|2x-5|<9$

falso porque lo que nos quiere decir es que si tomamos como valor de x cualquier numero que este en el intervalo de -2 a 7 la operacion nos va a dar menor que 9 y esto es falso por que:

$x=-2$

$|2(-2)-5|<9$

$|-4-5|<9$

$|-9|<9$

$9<9$ y esto no es verdadero o sea que todos los numeros no nos sirven.

Este estudiante (AFG08PCGP), aunque tiene muchas fortalezas en el desarrollo del pensamiento numérico, más que el variacional[50], su respuesta fue mucho más efectiva que la de aquellos estudiantes que muestran dominio en los tratamientos del REA, es decir, que a pesar de encontrar el conjunto solución de la inecuación, no logran concluir que la descripción es incorrecta.

5*c*. Juanita respondió: "R *representa todos puntos sobre la recta real cuya distancia a* $\frac{5}{2}$ *es a lo sumo 9 unidades*" ¿Es correcta la descripción de la región R (sombreada) en la Figura 1 dada por Juanita? *Justifica tu respuesta.*

<u>*Lo esperado*</u>: Identificar si los estudiantes han establecido la correspondencia entre el registro de la lengua natural y la representación geométrica de las ILVA1V, en términos de distancia, pues este es uno de los significados que privilegian en los textos universitarios, y que son fundamentales en el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

Al respecto se encuentra lo siguiente (Ver Tabla 26):

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	Aquí se encuentran los estudiantes que tienen un argumento correcto y convincente, del por qué la respuesta dada por Juanita es incorrecta. Además los estudiantes en esta categoría *tienen claro el significado particular de las ILVA1V como una distancia*.	53%	38%
BÁSICO	Los estudiantes de esta categoría, aún cuando saben determinar el punto medio y hallar la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica, argumentan que la respuesta de Juanita es correcta porque la longitud total del intervalo es efectivamente de nueve unidades, y el punto medio es $5/2$.	20%	0%

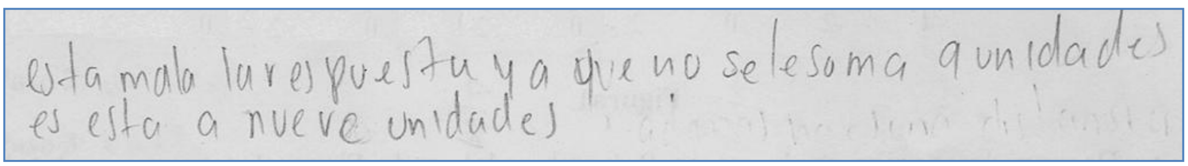
[50] Este es el mismo estudiante que aparece en la Ilustración 40.

BAJO	Los estudiantes han dejado el espacio en blanco ó se confunden con la expresión; *a lo sumo,* no logran interpretarla de manera apropiada.	27%	62%

Tabla 26. Clasificación de respuestas, pregunta 5*c* de la Prueba de Contraste.

Para calificar la respuesta dada por Juanita como correcta o incorrecta, la mayoría de los estudiantes plantearon la inecuación correspondiente a la descripción en lenguaje natural, y luego la resolvieron. Pareciera que este fuese el único criterio fuerte y confiable, para responder de manera correcta el ejercicio.

Algunos estudiantes piensan que la expresión, *a lo sumo,* significa que deben sumar nueve, veamos la Ilustración 46:



Transcripción: "Está mala la respuesta ya que no se le suma 9 unidades, es esta a nueve unidades"

Ilustración 46. Interpretación incorrecta de la expresión *a lo sumo,* por la no congruencia entre el RLN y REA.

En otras ocasiones, la expresión *a lo sumo,* es interpretada como la relación mayor o igual que, lo cual nos permite evidenciar que algunos estudiantes tienen la creencia que es posible hacer corresponder uno y sólo un símbolo con una "frase o palabra clave"[51], de modo que el problema con la ecuación, queda reducido a la mera traducción de palabras o frases en símbolos, lo cual no es cierto de ninguna manera.

[51] Recordemos que desde el punto de vista de la perspectiva semiótica, en la cual se inscribe este trabajo, no existe una correspondencia biunívoca entre expresiones en lenguaje natural y expresiones algebraicas, porque en general, no se satisface una de las reglas necesarias para la congruencia. La regla a la cual se alude, consiste en la posibilidad de convertir una unidad significante de la representación de partida (es este caso en el RLN), en una sola unidad significante en la representación de llegada (REA).

Dentro de las observaciones registradas al finalizar la Prueba de Contraste, se observará que esta pregunta les generó dificultad, ya que el 21% de los estudiantes, dejaron en blanco ésta pregunta.

6. A partir de la gráfica de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que aparecen en la Figura 2, de ser posible, encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales:

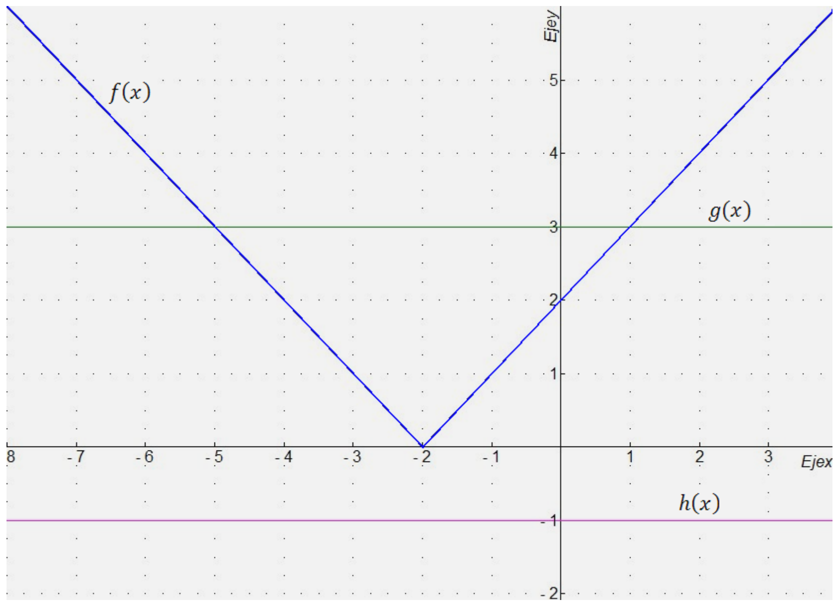


Figura 2

a. $f(x) \geq h(x)$¿Cómo llegaste a la respuesta?

b. $f(x) < h(x)$ ¿Cómo llegaste a la respuesta?

<u>*Lo que se espera*</u>: Identificar los tratamientos propios de las gráficas cartesianas que realizan los estudiantes, para dar solución a los enunciados a y b de la sexta pregunta.

En este punto es importante que recordar las tres formas de ver los gráficos cartesianos, las cuales mencionamos en el Capítulo 2 (p.50, primer párrafo) como son: Puntual, Icónica y Global Cualitativa. (Ver Tabla 27*)*

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	Aquí se encuentran *los estudiantes que lograron identificar la solución a partir de la representación gráfica*, interpretando correctamente la relación de orden.	87.5%	23%
BÁSICO	Están los *estudiantes que hicieron alusión a propiedades de la gráfica respecto a los trazos ascendentes o descendentes, pero que no lograron obtener una respuesta asertiva*.	0%	31%
BAJO	Los estudiantes que *dejaron el espacio en blanco* o que *identificaron puntos de la gráfic,a pero que no los relacionaron de manera efectiva para obtener la solución*.	12.5%	46%

Tabla 27. Clasificación de respuestas, preguntas 6a y 6b de la Prueba de Contraste

Es importante resaltar que sólo los estudiantes clasificados en el nivel alto fueron capaces de resolver correctamente los ejercicios, de hecho, quienes resolvían la parte *a* también lograban resolver la parte *b*. Además utilizaron al menos dos formas de llegar a la respuesta: el análisis gráfico y el método algebraico. Éste último, consistió en plantear las expresiones analíticas de cada una de las funciones, y resolver las inecuaciones para posteriormente, hallar el conjunto solución.

Para el caso del enunciado 6b, al llegar a la inecuación $|x+2| < -1$, afirmaron que ésta no tenía solución porque el valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.

Los estudiantes en el GP, a diferencia de los estudiantes en el GM, lograron determinar las expresiones analíticas de las funciones, es decir, que muestran cierto dominio en la coordinación del RG y el REA, algebraica para el caso de las funciones constantes ($g(x)$ y $h(x)$), y la función con valor absoluto ($f(x)$); un ejemplo de ello es el procedimiento realizado por el estudiante LVG08PCGE que aparece en la Ilustración 47:

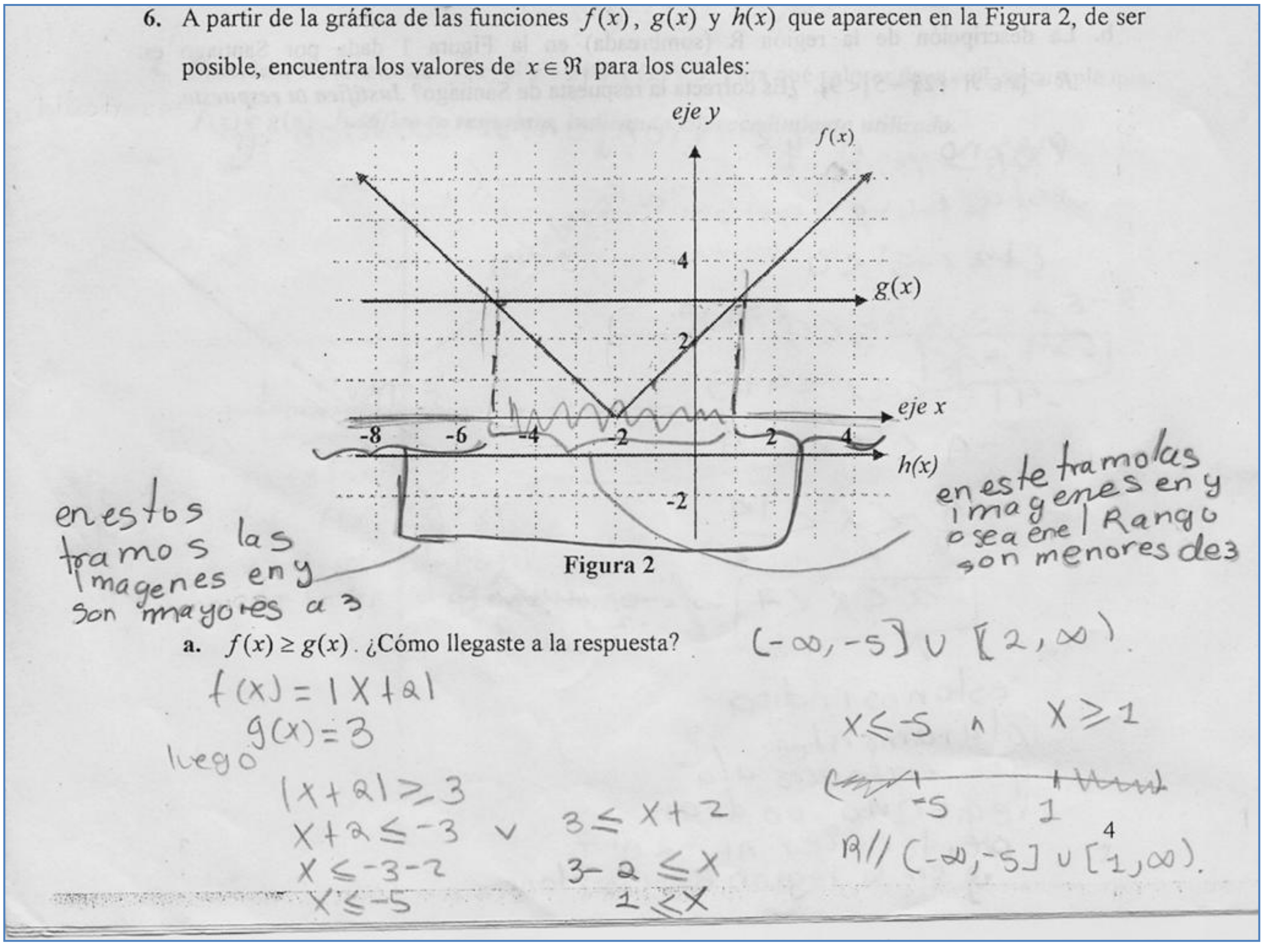


Ilustración 47. Solución de la pregunta 6*a*, de la Prueba de Contraste, de un estudiante en el nivel alto.

Los estudiantes en el GM, que se encuentran en el nivel básico, afirman que la función valor absoluto es creciente entre otras características[52] de la gráfica función valor absoluto, pero no logran obtener el conjunto solución, incluso, en algunos casos, los estudiantes determinan las coordenadas de algunos puntos como los intersectos con los ejes, el vértice y los intersectos entre las gráficas. A este último grupo de estudiantes que sólo se enfocan en lo puntual, pero no de una manera coherente, se les ha denominado estudiantes que han logrado una aprensión puntual de las gráficas, como lo podemos evidenciar en la Ilustración 48 :

[52] Estos estudiantes muestran una aprensión icónica del RG.

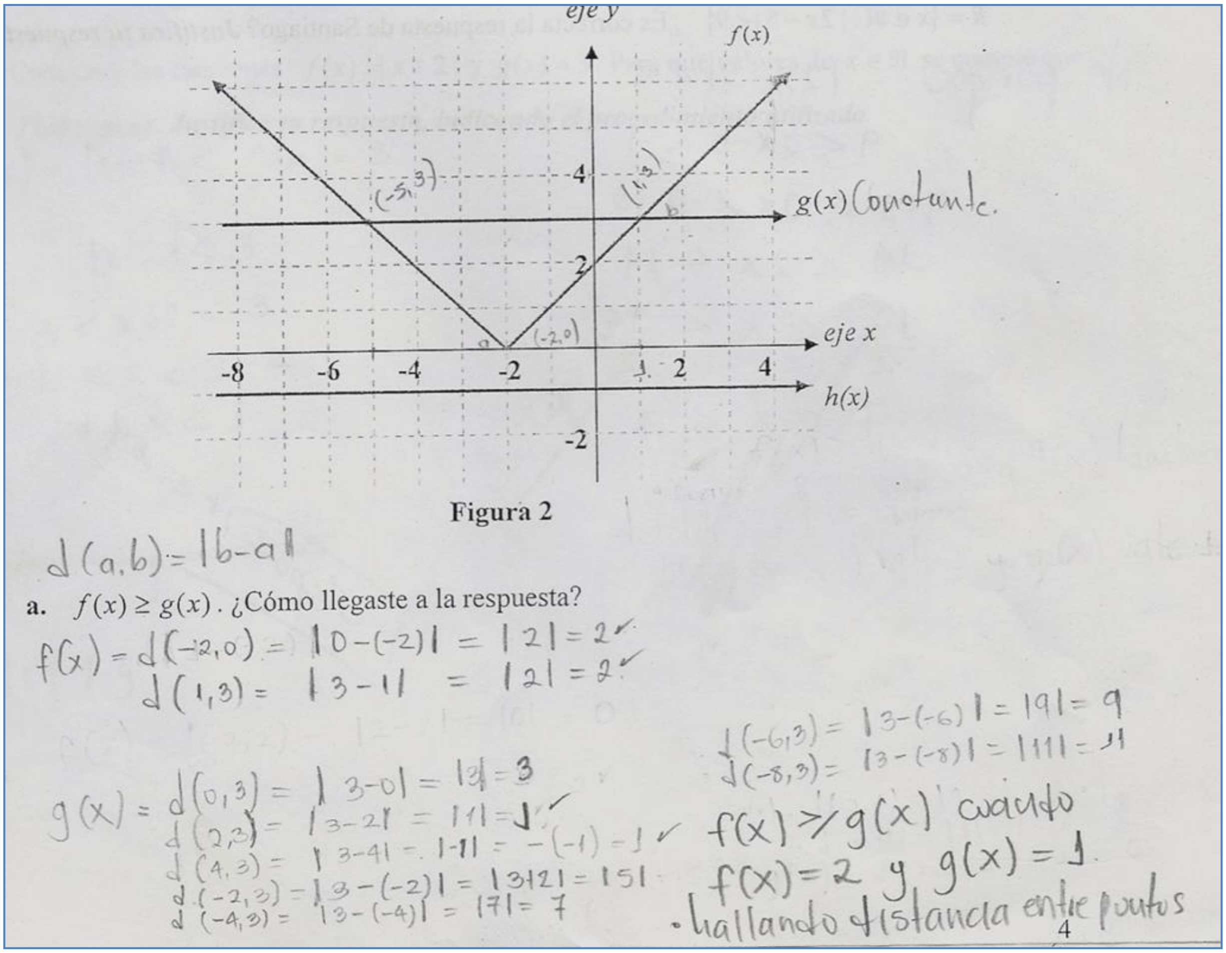


Ilustración 48. Procedimiento realizado por un estudiante del nivel bajo para resolver la pregunta 6*a* de la Prueba de Contraste.

Ahora bien, pasemos al análisis de la pregunta 6*b*, la cual generó variadas formas de interpretación de la noción de valor absoluto, porque para argumentar que el conjunto solución de la inecuación $f(x) < h(x)$ es vacío, los estudiantes afirmaron que:

- El valor absoluto de un número nunca va a ser negativo, y es por eso que $f(x)$ nunca va a poder ser menor que $h(x)$ (estudiante RLQ08PCGP).
- No existe ningún valor de $h(x)$ por encima de los valores de $f(x)$, (estudiante AMC08PCGP).
- No hay números cuya distancia a -2 sea menor que -1 (estudiante LFS08PCGP)
- La gráfica de $f(x)$ posee valores de $y \geq 0$, y en $h(x)$ todos los valores de $y = -1$ (estudiante LMQ08PCGM).

Para el caso de esta pregunta en particular, ningún estudiante realizó un procedimiento algebraico.

Pasando a la pregunta de la Prueba de Contraste que se clasificó en el nivel más alto de dificultad por tratarse de una tarea que no es usual, y que implica haber construido la noción de vecindad sobre el plano cartesiano, por medio de la noción de vecindad sobre la recta real, y que resulta ser muy importante para las nociones que estudiamos en el cálculo diferencial e integral. A continuación, se presentan los resultados obtenidos de acuerdo con nuestras expectativas.

7. Describa el conjunto de puntos que están en la región rectangular (sombreada) de la Figura 3, mediante la utilización del valor absoluto. Dar el significado como distancia entre puntos.

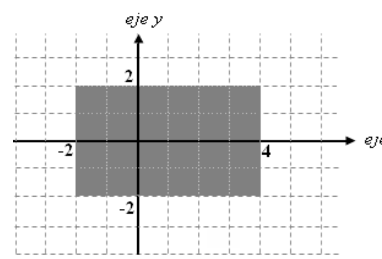


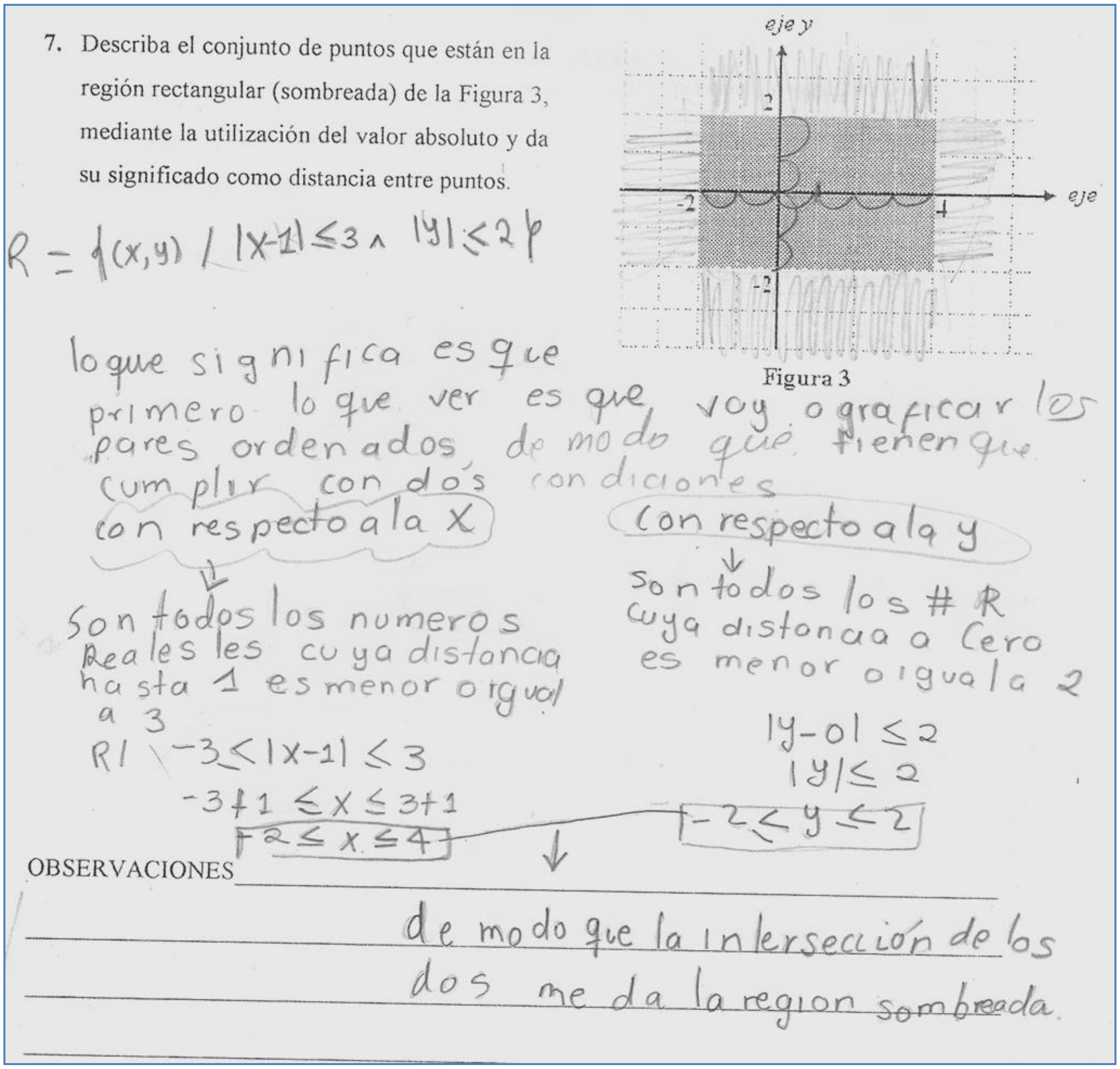
Figura 3

<u>Lo esperado</u>: Ver si el trabajo que se llevó a cabo intencionalmente con el grupo plurirregistro, les permite desarrollar tareas como las propuesta en la séptima pregunta, donde los estudiantes, al leer el enunciado, discriminan la información pertinente de la misma para encontrar la solución. Esto permitirá evidenciar, si han construido o no, la correspondencia entre las variables significantes de los registros de representación gráfica y de escritura algebraica.

NIVEL	DESCRIPCIÓN DEL NIVEL	GP	GM
ALTO	Los estudiantes que son capaces de dar la descripción de la región sombreada, para lo cual recurren a la interpretación geométrica de valor absoluto como una distancia.	31%	8%
BÁSICO	En esta categoría están los estudiantes que logran describir parcialmente la región sombreada, haciendo uso del valor absoluto, o describiéndolas con inecuaciones simultáneas.	31%	15%
BAJO	En este nivel se ubican los estudiantes que dan cuenta de los vértices de la región, encuentran la distancia entre los vértices, o simplemente no contestan la pregunta.	38%	77%

Tabla 28. Clasificación de respuestas, pregunta 7 de la Prueba de Contraste

Como se puede observar en la Tabla 28, los estudiantes del GP tuvieron una tasa de éxito relativamente más alta en comparación con GM. Esto permite evidenciar que los estudiantes del grupo GP lograron establecer la correspondencia entre las variables visuales y categoriales, como se puede observar en la Ilustración 49**,** con el procedimiento realizado por el estudiante LVG08PCGP.



7. Describa el conjunto de puntos que están en la región rectangular (sombreada) de la Figura 3, mediante la utilización del valor absoluto y da su significado como distancia entre puntos.

$R = \{(x,y) / |x-1| \leq 3 \wedge |y| \leq 2\}$

lo que significa es que primero lo que ver es que, voy a graficar los pares ordenados de modo que tienen que cumplir con dos condiciones

con respecto a la x

Son todos los numeros Reales les cuya distancia hasta 1 es menor o igual a 3

$R / -3 \leq |x-1| \leq 3$

$-3+1 \leq x \leq 3+1$

$\boxed{-2 \leq x \leq 4}$

con respecto a la y

Son todos los # R cuya distancia a Cero es menor o igual a 2

$|y-0| \leq 2$

$|y| \leq 2$

$\boxed{-2 \leq y \leq 2}$

OBSERVACIONES

de modo que la intersección de los dos me da la region sombreada.

Ilustración 49. Un procedimiento en el cual se evidencia que el estudiante ha establecido la correspondencia entre las variables visuales y categoriales.

Por otro lado, se puede evidenciar, que en los estudiantes predomina una mirada puntual de los gráficos cartesianos, puesto que lo señalado en primera instancia por ellos, son puntos como: los vértices, los intersectos con los ejes, o los puntos donde dos o más gráficas se intersectan; si bien esto hace parte de los tratamientos propios de los gráficos cartesianos, no es el único tratamiento que deben desarrollar los estudiantes.

A continuación, se presentan las observaciones hechas por algunos de los estudiantes (de los grupos plurirregistro y monorregistro), al finalizar la Prueba de Contraste. Estas observaciones han sido presentadas por grupo, en viñetas; cada una de ellas son independientes, es decir, que corresponden a afirmaciones hechas por diferentes estudiantes.

Grupo plurirregistro

- *“No fue claro el enunciado de la pregunta 2, ya que ninguna me dio respuesta equivalente a la expresión inicial. No pude esclarecer el valor absoluto de x, no supe cómo hacerlo si $4 \neq 2$”.*
- *“Para mí no es clara la 5.c”*
- *“Muy buena la actividad.”*
- *“La c del punto quinto no la comprendo, no sé que me preguntan”*
- *“No me acuerdo muy bien de la séptima”*
- *“Para mí, el punto 7 estaba un poco complicado, no entendía exactamente la pregunta o el enunciado. Tampoco estuve muy segura del punto 5c, porque me pareció enredado”.*
- *“Tal vez no comprendí bien el enunciado del punto 7, e hice lo que pensé que se pedía.”*
- *“Después de todas las actividades realizadas con inecuaciones y gráficas de inecuaciones con valor absoluto, no fue difícil la prueba. Gracias.”*
- *“No estoy seguro con la pregunta 5c, porque no entendí bien la pregunta.”*
- *“Los ejercicios son un poco complicados, pero ya lo hemos trabajado en clase aunque el tema de inecuaciones lo vimos hace un meses casi no me acuerdo.”*

Grupo monorregistro

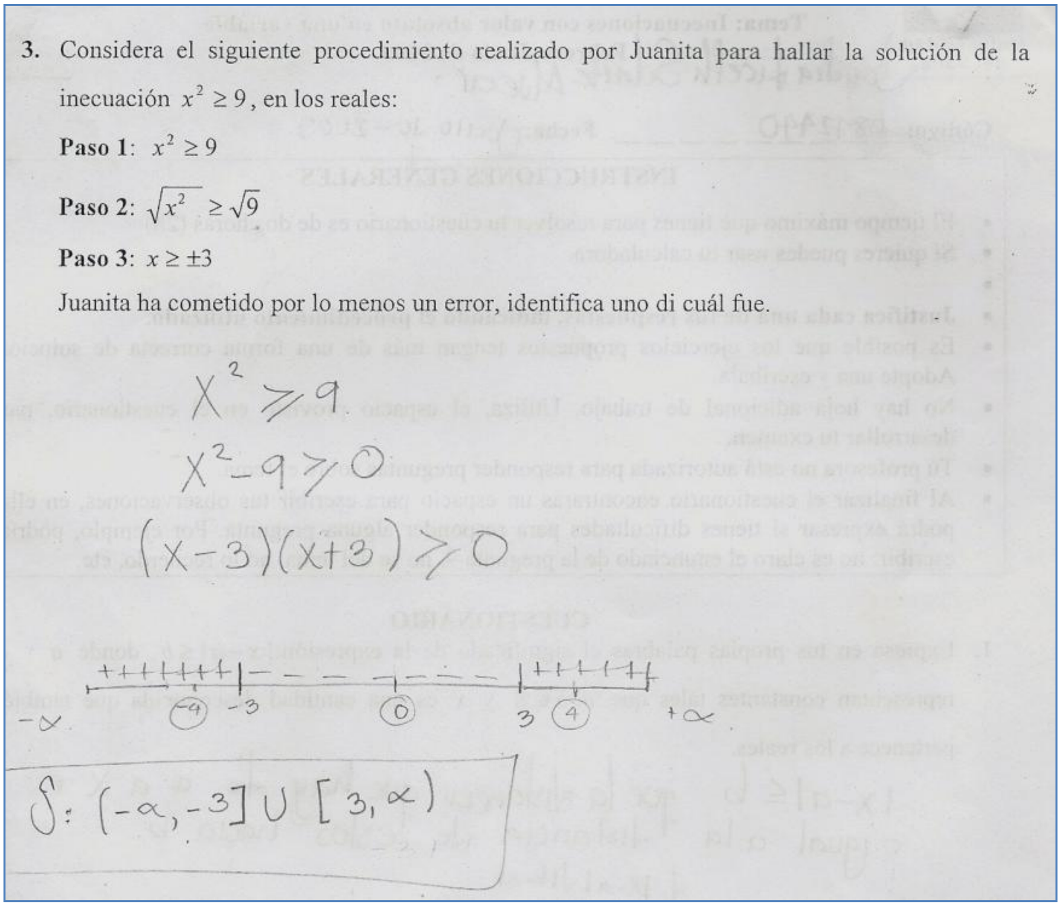
- *“No es muy claro cuando se usa el término “descripción” en la pregunta N°5.”*
- *“No me parece claro el enunciado 5(c).”*
- *“1) en este punto tengo dificultad porque puedo resolver algo que tenga expresiones pero explicarla ya no. Y por esto tengo dificultad en la 5c). Para mí es más fácil, casi siempre, hacer cálculos que analizar o definir algo.”*
- *“La pregunta 6 no está muy clara, no la entiendo y la 7 no me acuerdo.”*
- *“No me fue clara la pregunta 5 del ítem c”*

- *"La parte de funciones aún no la he estudiado bien aunque hayamos desarrollado ejercicios no domino muy bien el tema."*
- *"Tuve dificultades en encontrar una manera de expresar un área con valor absoluto sólo en x en el punto 7"*[53]

De las anteriores observaciones y comentarios hechos en algunas de las pruebas de contraste, se puede notar que la preguntas que presentaron mayor nivel de dificultad fueron los numerales 5c y 7, esto porque los estudiantes no comprendían lo que debían hacer, o simplemente, no son ejercicios que usualmente realizaban en clase y que requieren la coordinación de dos registros de representación no congruentes.

Una vez analizadas las preguntas de la Prueba de Contraste, de acuerdo con su intencionalidad, se observa cuál de los dos grupos tuvo mayor porcentaje de éxito en cada una de las preguntas propuestas (ver Tabla 29). Cuando se habla de éxito, nos referimos a aquellos estudiantes que resolvieron correctamente el ejercicio y cuya respuesta estaba acompañada de una explicación coherente, porque en ocasiones podemos tener estudiantes que realizan algún tipo de procedimiento algebraico o numérico que no les permite tomar postura alguna, como por ejemplo, el estudiante SLS08PCGM, aún cuando encuentra el conjunto solución de la inecuación inicial, no menciona qué error cometió Juanita en el procedimiento; por tal motivo fue clasificado en el porcentaje de fracaso[54]. Para mayor claridad, ver la Ilustración **50**:

[53] Sin embargo este estudiante logró encontrar la respuesta correcta.
[54] En este sentido afirmamos que el fracaso está dado por el hecho de no responder correctamente una pregunta determinada.



3. Considera el siguiente procedimiento realizado por Juanita para hallar la solución de la inecuación $x^2 \geq 9$, en los reales:

Paso 1: $x^2 \geq 9$

Paso 2: $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$

Paso 3: $x \geq \pm 3$

Juanita ha cometido por lo menos un error, identifica uno di cuál fue.

$x^2 \geq 9$

$x^2 - 9 \geq 0$

$(x-3)(x+3) \geq 0$

$-\infty \quad -4 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \quad 4 \quad +\infty$

$S: (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

Ilustración 50.

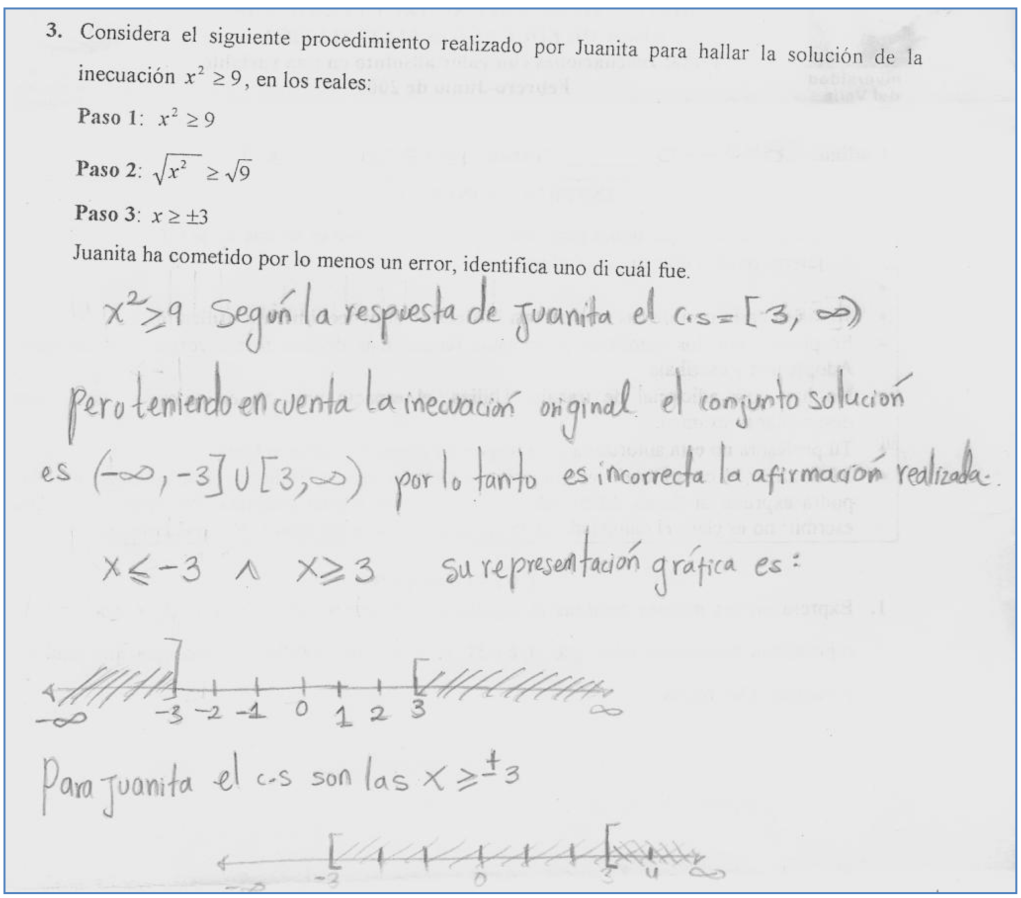
Se presentan casos en los que el procedimiento está correcto, pero el estudiante no toma postura alguna cuando se le pide hacerlo. A continuación, se presenta la tabla donde se han ubicado, de acuerdo al porcentaje correspondiente de fracasos.

PREGUNTA N°	PORCENTAJE DE ÉXITO	
	GP	GM
1	56%	38%
2	56%	38%
3	88%	19%
4	69%	38%
5ª	75%	54%
5b	75%	46%
5c	44%	46%
6ª	63%	15%
6b	81%	15%
7	31%	8%

Tabla 29. Porcentaje de éxito en una prueba de contraste aplicada a los estudiantes del grupo plurirregistro (GP) y monorregistro (GM).

Los porcentajes que aparecen en la Tabla 29, no necesariamente coinciden con los del nivel alto en los análisis anteriores que se hacen por pregunta, porque la primera parte del análisis está relacionado con las expectativas de desempeño de los estudiantes, por pregunta, de acuerdo con los que se estaban evaluando (ver Tabla 19), respecto a los conocimientos sobre las transformaciones posibles entre los registros de representación semiótica, o sobre los diferentes significados de la ILVA1V, que son evocados por los estudiantes.

Sin embargo, ahora se está analizando, cuáles estudiantes dieron la respuesta correcta independientemente de que el procedimiento elegido corresponda con la manera como se esperaba o no que lo hicieran. Por ejemplo, en la tercera pregunta se pedía encontrar *al menos uno* de los errores que había cometido Juanita, a lo que el estudiante ZPT08PCGP respondió:



3. Considera el siguiente procedimiento realizado por Juanita para hallar la solución de la inecuación $x^2 \geq 9$, en los reales:

Paso 1: $x^2 \geq 9$

Paso 2: $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$

Paso 3: $x \geq \pm 3$

Juanita ha cometido por lo menos un error, identifica uno di cuál fue.

$x^2 \geq 9$ Según la respuesta de Juanita el c.s $= [3, \infty)$

pero teniendo en cuenta la inecuación original el conjunto solución

es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ por lo tanto es incorrecta la afirmación realizada.

$x \leq -3 \wedge x \geq 3$ su representación gráfica es:

$-\infty$ -3 -2 -1 0 1 2 3 ∞

Para Juanita el c.s son las $x \geq \pm 3$

-3 0 3 4 ∞

Ilustración 51. Solución exitosa de la pregunta 3 de la prueba de contraste, realizada por el estudiante ZPT08PCGP.

Como se puede observar en la Ilustración 51, el estudiante ZPT08PCGP utilizó un procedimiento diferente al esperado para determinar al menos un error cometido por Juanita, por tal motivo la respuesta fue calificada como exitosa.

De la octava observación registrada por uno de los estudiantes del GP "*Después de todas las actividades realizadas con inecuaciones y gráficas de inecuaciones con valor absoluto, no fue difícil la prueba. Gracias.*", y de los porcentajes de éxito obtenidos por el mismo grupo en comparación con el GM, concluimos que el cambio de registro es una actividad que debe ser objeto de enseñanza, lo cual implica por parte del docente identificar aquellas variables cognitivas pertinentes, que le permitan al estudiante hacer la conversión.

Como parte importante del proceso de identificación de las variables, se considera fundamental la socialización de las actividades que intencionalmente se han diseñado, con el fin de que los estudiantes logren tomar conciencia de los elementos que deben ser tenidos en cuenta (unidades significantes) en la transformación cognitiva de conversión.

Dado que el porcentaje de éxito en la solución de las preguntas, en su mayoría no convencionales, fue superior para el GP para los numerales *6a* y *6b, se* concluye que posiblemente la forma de aprensión de los gráficos cartesianos enfocada en la aprensión puntual o la icónica, no permite a los estudiantes del GM tener más formas de solución que les permitan ver la consistencia de su respuesta con los resultados obtenidos de forma analítica.

Por otro lado, esta investigación no pretende darle tanto protagonismo al RG, sino resaltar que para un estudiante es importante tener varios caminos para llegar a la misma solución, puesto les genera confianza.

Lo positivo de todo este análisis, es que hay características de la función Valor absoluto que son apreciables o perceptibles a través de la gráfica pero no son apreciables desde el REA (a menos que se haya establecido la coordinación de los registros que han sido de nuestro interés). Sin embargo, a medida que se avanza en los cursos de cálculo con el estudio de la derivada y los límites, entre otras nociones, existen propiedades (extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc.) de las funciones que pueden ser analizados desde el registro de escritura algebraica, aunque no exclusivamente desde este registro.

4.3Algunas reflexiones finales

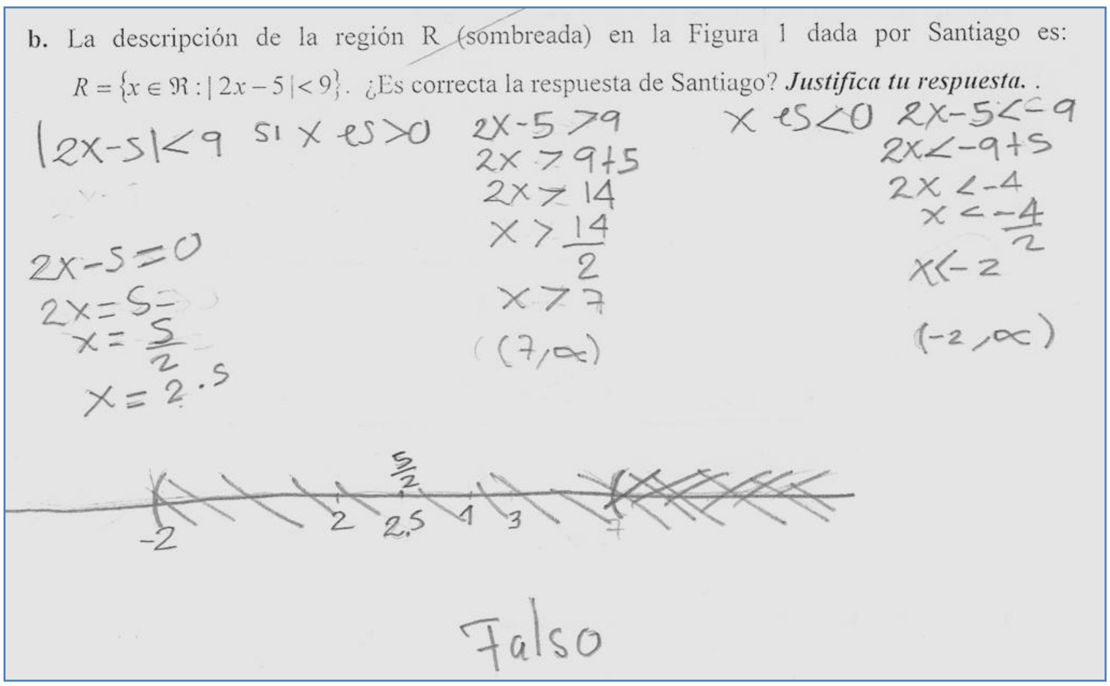
- Con las respuestas dadas por los estudiantes, tanto del GP como del GM a la primera pregunta, vemos que les cuesta mucho trabajo explicar una expresión general, máxime cuando la relación directa que tienen los éstos con las ecuaciones o inecuaciones, consisten en determinar el conjunto solución, producto del énfasis que les dan tanto los textos universitarios como los docentes a estos temas, es decir, que se convierte en algo muy instrumental. La única diferencia que se puede rescatar de las respuestas dadas por los estudiantes del GP en comparación con el GM, radica en que algunos estudiantes del GP, dan una explicación que involucra la noción de función (ver Ilustración 36).

- Aún cuando los enunciados de los numerales 2 y 4 no dicen cuál es el método o la manera como los estudiantes deben encontrar la respuesta, se evidencia que el registro que privilegian es el de la escritura algebraica, sin que ello implique que sea el camino más rápido y sencillo o el único.

- Para la mayoría de los estudiantes, representar en la recta numérica la solución de una ILVA1V, no es más que un paso en el proceso de solución, el cual permite ilustrar lo que se obtuvo en el registro de escritura algebraica; sin embargo hay ocasiones en las cuales los estudiantes no han logrado establecer la correspondencia entre estas dos formas de representación.

- Si se observan los análisis presentados de las preguntas 2 y 5b, es de notarse que cuando se trata de trabajar en el mismo registro de representación (pregunta 2), los estudiantes no logran identificar que lo problemático en la opción b es que el símbolo de desigualdad empleado es incorrecto; sin embargo, en la pregunta 5b vemos que los estudiantes definen que la respuesta dada por Santiago, al enunciado, es incorrecta en tanto que no se incluyen los extremos tal y como lo muestra el gráfico, es decir, que ellos buscan la coherencia (o congruencia) entre los dos registros de representación diferentes, pero en el mismo registro se les dificulta dar la respuesta correcta.

- La imposibilidad que tienen los estudiantes de resolver inecuaciones[55] como: $|2x - 5| < 9$ o $|x + 2| < -1$, de manera exitosa, se debe a muchos factores, entre los cuales se debe a una *limitada definición de valor absoluto*. Como se puede ver en la siguiente ilustración, el estudiante VLM08PCGM pone condiciones sobre la variable independiente x, y no sobre la expresión $2x - 5$, esto produce el siguiente razonamiento erróneo:



- En muchas ocasiones, las preguntas se pueden resolver fácilmente realizando un análisis gráfico (el caso de la sexta pregunta literales *a* y *b*), sin embargo lo que predomina en los estudiantes es el cálculo algebraico. De hecho, si observamos detenidamente las respuestas dadas por los estudiantes a la primera pregunta, el 46% de

[55] Las inecuaciones que aparecen a continuación están en la prueba de contraste y corresponden a las preguntas 5b y 6b.

la población (entre GP y GM), resuelven la inecuación o realizan una lectura de la misma, lo cual sugiere que independiente del enunciado, dada una inecuación tienden a resolverla.

- De los significados particulares de las ILVA1V abordados en la Prueba de Contraste, se evidencia que el menos conocido por los estudiantes de GM es: $|x| = \sqrt[2]{x^2}$, esto hizo que los estudiantes no fuesen capaces de encontrar, al menos uno de los errores en el procedimiento empleado por Juanita para resolver el ejercicio.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

Introducción

En primer lugar se presenta la respuesta a nuestra pregunta de investigación, y posteriormente, se muestran los resultados más importantes de los diferentes capítulos en que se ha dividido este trabajo de investigación. Para la presentación de los resultados por capítulo, se considera como primera instancia, lo relativo a los programas de matemáticas fundamentales que se han tomado como referencia para el estudio de casos, luego los aspectos relevantes respecto al diseño e implementación de las situaciones, con la finalidad de identificar y describir las variables visuales y simbólicas identificadas por los estudiantes en la intervención plurirregistro.

La identificación de las *unidades significantes* asociadas a la coordinación de dos registros de representación, consiste en la determinación y puesta en correspondencia de las variables del registro de partida con el de llegada, en este caso, la conversión que va RG al REA.

Es oportuno mencionar que para la identificación de las variables visuales y simbólicas, fue necesario tomar la representación gráfica o Forma 1(F_1) de las ILVA1V (inicialmente en el plano –Situación 1– y posteriormente en la recta numérica –Situación 2–). A dicha representación (F_1) se le sometió a variaciones sistemáticas o estructurales, para posteriormente asociar estas variaciones con los cambios producidos en el registro de llegada (REA) Forma 2 (F_2), de acuerdo con lo propuesto por Duval (1999, p.73)

El cambio sistemático en el registro de partida, permitió identificar las variables visuales y las categoriales (o simbólicas), asociadas a cada registro de representación. *Las variables visuales* se son de diferentes tipos; las que están ligadas al número de dimensiones 0, 1 o 2, y las cualitativas, las cuales pueden ser variaciones de forma (línea recta o línea curva, fronteras abiertas o cerradas de un intervalo o contornos abiertos (los ángulos) y cerrados (como el triángulo).

También puede haber variables asociadas al tamaño, a la orientación, a la graduación de los ejes coordenados, o de la recta numérica. *Las variables categoriales o simbólicas,* están asociadas a los posibles valores de los símbolos de relación ($>, \geq, <, \leq$ o $=$), los parámetros o símbolos de constante ($a, b, c, \ldots$), los literales que representan variables ($x, y, z, \ldots$), y los símbolos de operación u operadores (unarios o binarios).

Cuando se trabajó en el plano cartesiano (espacio de dimensión 2) se encontró que la ubicación del vértice[56] de la función con valor absoluto, estaba asociado con el signo que precede al parámetro b, por tanto si el vértice de la función está a $b\ unidades$ a la derecha (o a la izquierda) del $eje\ y$, entonces la función con valor absoluto es: $f(x) = |ax - b|$ (o es $f(x) = |ax + b|$), siempre que $b \in \mathbb{R}_0^+$. Pero si el vértice está sobre el $eje\ y$ (o el *origen*), la función es: $f(x) = |ax|$ donde $b = 0$.

Otra variable visual pertinente[57] fue la ubicación de la función constante, la cual está por encima del $eje\ x$ a $c\ unidades$, por debajo del $eje\ x$ a $c\ unidades$ o sobre el $eje\ x$, en cuyo caso los valores de la variable simbólica o categorial son $g(x) = c$, $g(x) = -c$ y $g(x) = 0$, respectivamente, siempre que $c \in \mathbb{R}_0^+$.

Para reconocer la relación entre la variable visual ángulo θ formado por el trazo ascendente de funciones de la forma $f(x) = |ax - b|$, $f(x) = |ax + b|$ o $f(x) = |ax|$

[56] Esta es una unidad de dimensión 0.

[57] Se dice que una variable **no** es pertinente cuando una variación estructural en el registro de partida no produce cambio alguno en el registro de llegada, por ejemplo, una variable visual que cognitivamente no es pertinente es la graduación de los ejes, porque esta no afecta las expresión algebraica del valor absoluto. Sin embargo, sí es un factor de visibilidad que puede generar confusión al estudiante en el momento en que está analizando el parámetro a de la ecuación $|ax \pm b|$ o $|ax|$.

(ver Figura 5 del Capítulo 2), con el $eje\ x$ y los posibles valores del parámetro[58] a, fue necesario trabajar en un mismo plano las gráficas $1a, 1d, 2d$ y $3d$ de la Situación 1, esto con la finalidad de establecer la relación entre el ángulo y la variable simbólica a.

Las variables visuales que están asociadas al símbolo de relación entre las funciones $f(x) = |ax - b|$ y $g(x) = c$ esto exige en primer lugar, la identificación de los puntos de intersección entre dichas funciones, para posteriormente compararlas, y poder dar cuenta de los valores[59] de x, para las cuales o un tramo de la función $f(x)$, está por encima (o por debajo) de $g(x)$, lo cual se asocia con la relación $>$ (o $<$) según sea el caso.

Ahora bien, cuando se trabajó la recta numérica (espacio de dimensión 1), las variables visuales fueron: valores frontera se incluyen (o no se incluyen), región sombreada de la recta numérica es un solo intervalo (o es la unión de dos intervalos)[60] , el punto medio de los valores frontera y partición simétrica del intervalo; a dichas variables visuales les corresponden, respectivamente, las siguientes variables simbólicas: $\geq, \leq$ o $>, <$.

Nótese pues, que cualquiera de los símbolos de relación de orden ($\leq, <, \geq, >$), provienen de la asociación de dos valores visuales diferentes. Por ejemplo, el símbolo $\leq$ se ha originado por dos variables visuales, una consiste en el hecho de que la región sombreada sobre la recta numérica es un intervalo, y la otra radica en el hecho de que se incluyen valores frontera del mismo. Esto es importante cuando se analiza la congruencia entre los registros, porque muestra que *no es posible convertir una unidad significante en la representación de partida, en una sola unidad significante en la representación de llegada;* esto ocurre esencialmente cuando dos registros de representación no son congruentes.

Este trabajo de identificación y puesta en correspondencia con las variables visuales y categoriales, es fundamental porque permite que el estudiante explicite y evidencie, que

[58] Sólo se analizaron casos en los que la variable simbólica a tomaba valores racionales positivos como: $\frac{1}{2}$, 1 y 2.
[59] Esto exige proyectar los puntos de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$ sobre el $eje x$, lo cual hace que el $eje x$ quede dividido en tres segmentos de recta sobre los cuales se define el conjunto solución de la ILVA1V dada.
[60] Esta variable en otras ocasiones fue descrita por los estudiantes de la siguiente manera: el punto medio está contenido (no está contenido) en la región sombreada.

toda expresión algebraica comporta, por lo menos, dos variables. En este caso fue muy importante lograr evidenciar, que la variable x puede tomar cualquier valor real, mientras que la variable y, tal que $y = |ax \pm b|$ donde $b \in \mathbb{R}_0^+$, siempre va a ser un número real no negativo.

Sin embargo, no podemos dejar de lado otra variable importante como lo es, $ax \pm b$ que a diferencia de la anterior, puede tomar valores positivos, negativos o cero, es decir, que $ax \pm b$ puede ser cualquier número real, mientras que $|ax \pm b| \in \mathbb{R}_0^+$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

El reconocimiento de lo que varía, y cómo lo hacen las diferentes variables (dependientes e independientes) que conforman las expresiones algebraicas, son aspectos centrales que han de permitir a los estudiantes avanzar hacia el desarrollo de un pensamiento variacional mucho más sólido, de tal manera que tengan un mejor desempeño matemático.

Cuando los estudiantes se enfrentan con la noción de valor absoluto desde el punto de vista numérico, no presentan mayor conflicto, pues para ellos es muy sencillo determinar el valor absoluto de una cantidad conocida, porque lo ven como *el número sin signo o el número con signo positivo*. Aunque, este significado particular del valor absoluto es muy limitado, cuando se pasa al terreno de lo algebraico, donde se utilizan letras para denotar los valores numéricos y el signo del número ya no se hace visible, es importante trabajar las expresiones algebraicas en el plano cartesiano, porque es ahí donde se puede distinguir por los menos dos tipos de variables relacionadas una explícita (variable dependiente) y otra implícita y poco reconocida (el resultado de la expresión algebraica).

En definitiva, es relevante hacer énfasis en dos ideas planteadas en el Capítulo 1. La primera, es que aún cuando se ha mostrado que el registro de representación gráfico tiene ciertas bondades, el propósito de ésta investigación *no consiste en privilegiar un registro sobre otro*, porque desde el punto de vista de la formación de licenciados en matemáticas, matemáticos, físicos y otras ciencias, el registro gráfico puede convertirse en un obstáculo para el desarrollo de un discurso matemático riguroso, en el cual no tiene lugar los aspectos físicos, geométricos o metafísicos. De hecho en la formación de matemáticos, el registro de escritura algebraica, es más potente en tanto que recoge cuestiones muchos más generales que las representaciones gráficas, además el REA permite hacer expansiones discursivas a fin de avanzar en la construcción de conocimiento. Por tanto queda abierta la posibilidad de realizar estudios posteriores en los cuales la atención se concentre en potenciar el desarrollo del pensamiento lógico deductivo con estudiantes universitarios fundamentalmente de carreras como matemáticas, física, licenciaturas en matemáticas, etc. Esto obligaría a centrar la atención en los procesos de conversión entre dos registros, uno monofuncional (el REA) y otro plurifuncional (el RLN).

El segundo planteamiento tiene que ver, con que *el reconocimiento de las unidades significantes asociados a la coordinación de dos registros de representación semiótica, es válido a cualquier nivel escolar*. En este sentido se considera que el reconocimiento de dichas unidades significantes debe hacer parte del quehacer[61] docente, esto debido a la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos, y por tanto para acceder a los objetos matemáticos es necesario que el estudiante domine las diferentes transformaciones cognitivas de tratamiento y conversión (es decir las transformaciones que pueden ocurrir intrarregistro o interregistro).

En cuanto a la revisión de los programas de los cursos, es importante resaltar que la manera como están diseñados, no se da oportunidad a los estudiantes de conceptualizar la noción de variable, por medio de la noción de función, tal y como lo han propuesto diferentes investigadores en educación matemática. Esto ocurre porque existe la creencia de que los estudiantes van a la universidad a recordar o repasar los temas vistos a lo largo de su escolaridad, cuando en muchos casos, ellos están viendo los temas por primera vez. La preocupación por abarcar gran cantidad de contenido matemático, no permite desarrollar en

[61] Una vez identificas las unidades significantes el docente debe realizar actividades que permitan al estudiantes dominar las transformaciones no sólo de tratamiento sino de conversión, es decir que la unidades significantes deben ser objeto de enseñanza y no suponer que el uso de los diferentes registro de representación trae de forma implícita que los estudiantes hayan construido la correspondencia.

los estudiantes, las capacidades necesarias para enfrentarse con éxito a una matemática avanzada.

Quizá sería pertinente reevaluar el enfoque metodológico, y los contenidos que típicamente se le da a los cursos de matemáticas fundamentales, con la finalidad de poder identificar aquellas competencias y capacidades de orden superior, que son indispensables en la formación matemática básica de los estudiantes universitarios. Esto con el fin, de que las directivas de las diferentes IES no sigan cuestionando la pertinencia de dicho curso, de tal manera que la discusión se proyecte más, como un problema de fondo que de forma.

Del análisis de los libros de texto universitarios presentado en el Capítulo 3, se observa que es muy variada la bibliografía que circula a nivel escolar. Hay textos que están más próximos al desarrollo de una teoría matemática rigurosa y sólida; otros en los cuales el papel de los recursos tecnológicos que se disponen en la actualidad, que consecuencias en el desarrollo de argumentos mucho más intuitivos que formales. Por otra parte, están aquellos textos en los cuales, el desarrollo teórico en lugar de las aplicaciones, es más importante.

De manera local se tiene que en lo concerniente a las nociones de desigualdades, valor absoluto e inecuaciones lineales con valor absoluto, emergen diferentes registros de representación semiótico con la finalidad de hacer comprender a los estudiantes desde los registros numéricos de escritura algebraica, hasta el lenguaje natural (especializado) y gráfico (en la recta real). Sin embargo, el énfasis que usualmente se da en los ejercicios consiste en la operatividad de procedimientos, es decir, en la operación cognitiva de tratamiento del REA.

Esta clase de énfasis hace que los estudiantes no logren dar significado a las expresiones algebraicas, sino que dada una expresión la simplifican, efectuando las operaciones indicadas. Se cree es una de las razones por las cuales a la primera pregunta[62] de la Prueba de Contraste, algunos estudiantes de los grupos plurirregistro y monorregistro, decidieron resolver la inecuación $|x-a| \leq b$; esto fue sin tomar en consideración los valores de b, para los cuales la inecuación tiene solución no vacía.

Pero ¿por qué podría ser importante tener claro al menos uno de los significados geométricos de la expresión $|x-a| \leq b$, a caso no basta el registro de escritura algebraica? Quizá sea suficiente para un estudiante conocer las propiedades del valor absoluto que le permiten solucionar una expresión de las forma $|x-a| \leq b$, donde $b \in \mathbb{R}_0^+$. Sin embargo, es pertinente que cuando un estudiante se enfrenta a *un problema*, éste *debe ser resuelto desde el registro de representación que le sea más confortable o más económico*. Por ejemplo, para el caso de los registros que se han tomado en consideración, RG y REA, pueden usarse alternativamente efectuando transformaciones por separado. Por ejemplo, para solucionar la ecuación lineal con valor absoluto $|x+2| = |x-3|$, haciendo uso de la interpretación geométrica del valor absoluto sobre la recta numérica, tendíamos que x representa los números reales equidistantes a dos puntos fijos cuyas coordenadas son -2 y 3. Visto de esta manera, para los estudiantes la respuesta es casi inmediata, pero cuando deben resolver el ejercicio de forma analítica usando la definición de valor absoluto, surgen muchas de las dificultades que tienen para aplicar la noción de valor absoluto, sobre expresiones que involucran literales.

No se trata de evadir el camino (ruta algebraica), sino de tener rutas alternativas que les permitan llegar a la solución de un problema o ejercicio determinado, o simplemente determinar si un paso en el razonamiento es correcto o no.

Otra de las cuestiones estudiadas en el análisis de los textos, es que el registro de representación gráfica en los ejercicios sobre el valor absoluto, las ecuaciones o inecuaciones es casi nulo, cuando su poder intuitivo en importantísimo en el desarrollo del

[62] En esta pregunta se le pidió a los estudiantes lo siguiente: “Expresa con tus propias palabras el significado de la expresión $|x-a| \leq b$, donde a y b representan constantes tales que $a, b \in \mathbb{R}$ y x es una cantidad desconocida que también pertenece a los reales”

cálculo diferencial, máxime al ser interpretado como la vecindad de un punto sobre la recta real.

Si bien la noción de valor absoluto es aparentemente sencilla cuando se aborda desde los numérico, se sabe que cuando emerge en otros contextos, en particular, cuando se abordan las propiedades de la potenciación (como $\sqrt[2]{x^2} = |x|$), no siempre es reconocida por los estudiantes; muestra de ello fueron los resultados obtenidos en la pregunta 3 de la Prueba de Contraste, en la cual se evidencia que el 0% de los estudiantes en el grupo monorregistro reconocen dicho significado.

Adicional a lo anterior, uno de los significados que comúnmente asocian los estudiantes a la expresión $|x - a| \leq b$, está relacionada con la interpretación geométrica de la inecuación como una distancia sobre la recta numérica (esto es según los resultados obtenidos en la primera pregunta de la Prueba de Contraste), sin embargo, esta interpretación no es la que se privilegia al momento de determinar la equivalencia entre inecuaciones o solucionarlas. Los estudiantes se sienten más seguros, o simplemente prefieren utilizar REA, es decir, que descontextualizan la expresión, lo cual les impide ver por qué inecuaciones de la forma $|x - a| \leq b$ con $b \in \Re^-$ no tienen solución.

El afrontar la solución de las ILVA1V desde la recta numérica, permite caracterizar las vecindades o entornos alrededor de un punto ubicado sobre la recta numérica, y con ello caracterizar los punto cercanos (vecinos o próximos) a un valor de referencia (denominado el centro o punto medio del intervalo), de los puntos distantes a dicho valor. Esta manera de significar las ILVA1V es la que resulta ser pertinente en la construcción de los conocimientos, que posteriormente serán abordados en cálculo, como son: límite, continuidad, convergencia de sucesiones, entre otros. Sin embargo, no hay que perder de vista que ésta no es la única alternativa, que existen otros referentes de análisis, con los cuales puedan verificar la coherencia de sus respuestas; por tal motivo la solución de ILVA1V, también debe hacerse desde el plano cartesiano, con la finalidad de mejorar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos, incluso el de función.

En general los textos no exploran estas posibilidades, razón por la cual los estudiantes no están acostumbrados al análisis gráfico. Sin embargo, en muchas ocasiones estos procedimientos permiten optimizar el tiempo, y mejoran la capacidad de análisis, razón por la cual es necesario involucrarlos. Además, es importante notar que el enfoque de las gráficas ha permitido explorar el valor absoluto como una distancia y como una función, pero hace falta explorarlo como aquel que permite analizar y estimar errores, la cual es una aplicación muy importante e interesante para los estudiantes de ingenierías y física entre otros.

Desde la perspectiva funcional, las expresiones algebraicas se adquieren como modelos que describen relaciones funcionales en donde las letras se conciben como variables, y las inecuaciones como relaciones de orden entre funciones, lo cual no quiere decir que se obvie el tratamiento sobre las expresiones mismas a nivel operacional, sólo que cognitivamente, no exigen mayor dificultad en comparación con la operación de conversión.

Como docentes, pensar en un diseño apropiado de tareas que permita abordar los conocimientos de manera integral es mucho más apropiado, en tanto que permite que el estudiante no fragmente el conocimiento, es decir, que aunque la enseñanza de cualquier conocimiento es secuencial, los estudiantes necesitan establecer los nexos pertinentes entre los conceptos, con la finalidad de tener más estrategias de análisis en las tareas propuestas en clase, o en su desarrollo profesional.

No todos los textos involucran en el desarrollo de los temas la sugerencia realizada por Bazzini, L & Tsamir, P. (2004), en relación a la simultaneidad de la enseñanza, tanto de ecuaciones como inecuaciones; es decir, que en algunos textos se presentan las inecuaciones (o desigualdades algebraicas) posteriormente al estudio de las ecuaciones. Esto se debe quizá al hecho de que las relaciones de orden[63], se definen sobre estructuras algébricas.

[63] No siempre es posible definir una estructura de orden total sobre una estructura algebraica, este es el caso del conjunto de números complejos con las operaciones suma y producto.

El problema que se evidencia fuertemente en los libros de texto, es que dedican muchas secciones al tema de las ecuaciones, en comparación con el terma de las desigualdades (o inecuaciones), y además los textos e incluso los docentes, introducen ideas erróneas o que generan obstáculos en términos de los procesos de solución de las inecuaciones.

De acuerdo a lo anterior, el problema radica en las analogías que se establecen entre ecuaciones e inecuaciones, cuando se les hace creer a los estudiantes, que las propiedades que permiten solucionar las ecuaciones son aplicables o transferibles a las inecuaciones; esto se manifiesta por medio de expresiones como: "*Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se utilizan en la solución de ecuaciones. A menudo usamos las propiedades de desigualdades a fin de sustituir una desigualdad con una lista de desigualdades equivalente, hasta terminar con una desigualdad que permite obtener soluciones con facilidad…"* (Swokowsky, E & Cole, J. p. 113).

La propuesta de este trabajo de investigación es que al momento de estudiar las inecuaciones, se aborde también el estudio de las ecuaciones en los reales de manera simultánea. Por ejemplo, la solución de $|x+2|=5$, son los puntos de coordenadas -7 y 3, una vez identificados éstos valores, es mucho más sencillo encontrar la solución de la expresión $|x+2|<5$ (o de la inecuación $|x+2|>|x-3|$), porque son los números que están entre -7 y 3 (o los números que pertenecen a $(-\infty,-7)\cup(3,\infty)$).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLENDOERFER, C. & OAKLEY C. (1990) *Matemáticas Universitarias*. Cuarta edición. Santa Fé de Bogotá: McGraw-Hill. Adaptación realizada por Eslava. M *et al*

ALVARENGA, K. (2003). *La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE.* En: Revista latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa, 6 (3), 199-219.

APOSTOL, T. (1985). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. (Segunda edición, Vol. I). Bogotá, Colombia: Reverté, S. A.

ARBELÁEZ, G., ARCE, J., GUACANEME, E. & SÁNCHEZ, G. (1999) *Análisis de textos escolares de matemáticas.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali.

AZCÁRATE, C., & CAMACHO, M. (2003) *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N°. 2.

BAGNI, T. G. (2004). *Inequalities and equations: history and didactics.* En: Proceedings of CERME-4, Bosch, M (Ed.) (2005, pp.652-662). Disponible en: http://www.syllogismos.it/history/BagniCERME4.pdf [versión electrónica consultada en noviembre 3 de 2010]

BAZZINI, L., & TSAMIR, P. (2004). *Algebraic equation and inequalities: issues for research and teaching,* PME 28th, Proceedings of the conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1, pp. 137 – 166.

CANTOR, C. (1872) *Extensión del teorema de la teoría de las series geométricas.* Math. Annalen de Leipzig, T. V, p 123. Traducción realizada por: Bares, J. y Climent, J. p.5

CANTORAL, R *et al.* (2003) *Un estudio de funciones pretextando la resolución de las desigualdades.* En: Desarrollo del pensamiento matemático. Pate II Estudios sobre didáctica y cognición en el campo de la matemática escolar. Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. México: Trillas, pp. 89-144.

CANTORAL, R., & MONTIEL, (2001) *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* Pearson Educación México.

DOLORES, C., & CUEVAS, I. (2007) *Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas*. En: Relime Vol. 10, Núm. 1, pp.69-96.

DUVAL, R. (1988). *Graphique et Equations : l'articulation de deux registres.* En: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, N° 1, pp. 235-255. Taducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. (E. Sanchez, Trad.) Ed. Antología en Educación Matemática. Mexico: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 1992, pp. 125-139

__________. (1995). *Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang, collection Exploration. Taducción : Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (M. Vega, Trad.) Cali, Valle: Peter Lang y Universidad del Valle, Insituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática (1999).

__________. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Traducción: Myriam Vega Restrepo, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali. Primera Edición al castellano, 2004.

Encyclopedic Dictionary of Mathematics (1977) Realizado por: The Mathematical Society of Japan. Editado por Shôkichi Iyanaga & Yukiyosi Kawada. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts and London, England. Numeral 305, pp. 958-959.

GAGATSIS, A., & THOMAIDIS, I. (1994) *Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue*. Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France. Ed. La Pensée Sauvage. pp.343-348.

GONZÁLEZ, J., IRIARTE, M., JIMENO, M., ORTÍZ, A., ORTÍZ, A., SANZ, E., & VARGAS-MACHUCA, I. (1990) *Números Enteros*. En: Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 6 Madrid: Ed. Síntesis.

HAEUSSLER, E., PAUL, R., & WOOD, R. (2008) *Matemáticas para administración y economía.* Decimosegunda edición. Pearson Educación, México.

LARSON, R,. HOSTETLER, R., & EDWARDS, B. (2006) *Calculo.* Mc Graw Hill / Interamericana Editores. México D.F., p. 52.

RESTREPO, G. (2003) *Matemáticas Fundamentales*. Segunda Edición. Cali: Programa Editorial de la Universidad del Valle.

SACKUR, C. (2004) *Problems related to the use of graphs in solving inequalities*. En: PME 28, Vol I, pp. 148- 151.

SOCIEDAD MATEMÁTICA DEL JAPÓN. (1977) *Diccionario enciclopédico de matemáticas.* Numeral 305, pp. 958-959.

STEWART, J., REDLIN, L. & WATSON, S. (2001) *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* Tercera Edición. México*:* International Thomson Editores. ISBN: 9706860304.

SWOKOWSKY, E. & COLE, J. (2006) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Undécima edición. México: International Thomson Editores. ISBN-10: 9706865403, ISBN-13: 9789706865403.

TRIGUEROS, M. (2005) *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior* En: Educación Matemática Vol. 17, Nº 001, México: Santillana. pp. 5-31.

URSINI, S & TRIGUEROS, M. (2006) *¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?* En: Educación Matemática Vol. 18, Nº 003, México: Santillana. pp. 5-38.

VALDEZ, C & DE LAS FUENTES, M. (s.f.) *Una alternativa gráfica para la resolución de desigualdades.* pp.59-67. [Consultado en: Noviembre 14 de 2007] http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias%20XIII/de%20las%20Fuentes%20Lara.pdf

VILLA, A. (2001) *Identificar funciones polinómicas: una tarea no siempre realizable*. En: revista EMA. Reflexiones Didácticas desde y para el aula. Vol. 6. Nº3. pp. 290-307.

WAINER, H. (1992) *Understanding graphs and tables.* Educational Researche 21, pp. 14-23.

WILHELMI, M., GODINO, J & LACASTA, E. (Julio de 2007) *Didactic effectiveness of Mathematical definitions the case of the absolute value.* En: International Electronic Journal of Mathematics Education Vol. 2. Nº3. pp. 72-90. [Versión electrónica] Disponible en: www.iejme.com [Consultado 10 de junio, 2008] ISSN: 1306-3030

ZILL, D. & DEJAR, J. (1993) *Álgebra y trigonometría*. Segunda edición. Mc Graw Hill. México.

ANEXOS

Anexo A

Programas de los cursos de matemáticas fundamentales de siete universidades del Valle del Cauca

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA:	Fundamentos de matemáticas
CLAVE:	P1U1FM23154-1
PRERREQUISITOS:	Educación media
PROGRAMAS:	Ingeniería de Sistemas, Administración de Empresas, Contaduría Pública, Mercadeo, Centro de Productividad y Competitividad Empresarial.
PERÍODO ACADÉMICO:	Enero-mayo de 2009
CRÉDITOS:	4 [64]
HORAS POR SEMANA:	4 horas de trabajo con el profesor.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL
Proporcionar al estudiantes los elementos básicos y necesarios de las matemáticas aplicable al análisis y solución de situaciones, administrativas, económicas, contables y afines, ayudándoles a facilitar su desempeño en el campo estudiantil, ocupacional y profesional.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Operar y simplificar potencias, empleando exponentes enteros.
2.2.2 Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas en una y dos variables, aplicables a problemas de las ciencias económicas administrativas y contables.
2.2.3 Analizar el comportamiento de las funciones desde su representación numérica, verbal, gráfica y algebraica, identificando e interpretando el dominio y el rango de ellas.
2.2.4 Usar las funciones polinómicas para modelar y resolver problemas relacionados con la oferta, demanda, utilidad, costo, ingreso y punto de equilibrio.
2.2.5 Manejar las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas para aplicarlas a la solución de problemas referentes a modelos de crecimiento y decrecimiento, de capitalización financiera.

3. METODOLOGÍA
El alumno trabajará en equipo para analizar los diferentes puntos de vista al suyo y seleccionar las relaciones y operaciones que conlleve a la solución del problema.
Para alcanzar lo anterior se tendrá en cuenta:

[64] El número de créditos para la universidad U1 depende de la carrera, por ejemplo para el caso de Administración de Empresas, Economía y Contaduría es de 4 créditos mientras que para el caso de Mercadeo y Centro de Productividad y Competitividad Empresarial son 3 créditos.

Grupo clase, tutorías, talleres dirigidos a grupos de estudio, trabajo individual y en grupos. Los temas serán desarrollados mediante clases magistrales, con explicaciones teóricas y prácticas, desarrollo de talleres en clase, solución a talleres propuestos, participación de los estudiantes en la solución de ejercicios.
Elaboración de guías de trabajo por el profesor.
Actividades previas (al iniciar cada capítulo, se hace una lectura de los logros propuestos, igualmente se formula un problema de aplicación de la vida diaria.)
Actividades presenciales, clases, talleres dirigidos. Grupos de estudio para el desarrollo de talleres.
Actividades independientes, talleres para resolver (80 horas)
Actividades previas (16 horas)
Talleres: permitirán integrar la teoría y la práctica, analizar alternativas de solución a situaciones problemáticas, desarrollar creatividad, avanzar en la conceptualización, procedimientos y solución de problemas.
El trabajo de estudio independiente en lo relativo a talleres, consultas, se puede realizar individual o en grupo según necesidad y estrategias pertinentes pero sin desfavorecer el aprendizaje individual.

4. DESCRIPCIÓN DEL CURSO O CONTENIDO
Unidad temática 0: FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA
Logros
Maneja operaciones con expresiones algebraicas
Factoriza un polinomio dado
Simplifica expresiones racionales
Contenido temático
Números reales. Polinomios. Factorización de polinomios. Expresiones racionales. Exponentes enteros. Resolución de ecuaciones.

Unidad Temática I: CONJUNTOS
Logros
Determina por comprensión y por extensión las partes del universo de un conjunto.
Realiza operaciones de unión, intersección y complementación para aplicarlas en la solución de problemas.
Contenido temático
Conceptos básicos. Determinación de un conjunto por extensión y por comprensión. Conjuntos especiales. Diagramas. Subconjuntos. Operaciones entre conjuntos. Aplicación.

Unidad Temática II: NÚMEROS REALES
Logros
Representa la solución de una inecuación en notación de intervalo y gráficamente.
Interpreta y aplica propiedades de valor absoluto.
Encuentra la solución de una inecuación.
Contenido temático
Desigualdades. Propiedades. Solución de inecuaciones lineales y cuadráticas. Inecuaciones con valor absoluto.

Unidad Temática III: RELACIONES Y FUNCIONES
Logros
Diferencia las funciones de las relaciones.
Determina relaciones entre los individuos de un conjunto A, y los elementos de otro conjunto B, o entre elementos del mismo conjunto. Halla el conjunto que conforma el dominio de la función.
Elabora gráficas de funciones.
Halla la inversa de una función.
Contenido temático
Relación, concepto y gráficos. Función, concepto. Dominio y codominio. Función inversa. Función compuesta.

Unidad Temática IV: OTRAS FUNCIONES
Logros
Identifica y diferencia las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas de los números reales en los números reales.
Halla la ecuación de recta.
Halla la solución de sistema de ecuaciones lineales.
Maximiza y minimiza funciones cuadráticas.
Resuelve correctamente problemas sobre ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.
Contenido temático
Función lineal. Forma general de la ecuación de la recta.
Problemas de aplicación de la función lineal. Función de segundo grado, gráfica. Ecuación de segundo grado. Problemas de aplicación de la función y la ecuación de segundo grado.
Función exponencial, gráfica. Aplicaciones. Función logarítmica, gráfica. Aplicaciones.

5. EVALUACIÓN
De acuerdo con el reglamento estudiantil se tendrá en cuenta: Dos (2) evaluaciones parciales con un valor de 30% cada una. Una (1) evaluación final con un valor del 40%. La ponderación de las notas parciales: participación, talleres, quices, 40%, evaluación escrita 60%.

6. COMPETENCIAS LABORALES[65]

- Seleccionar, relacionar, interpretar datos e informaciones representados en diferentes formas, para enfrentar situaciones y problemas conforme a una visión crítica y orientada hacia la toma de decisiones. (SIC)

- Analizo una situación para identificar alternativas de acción o solución.

[65] Este es uno de los pocos programas de matemáticas, en primer semestre, que posee competencias laborales. Consideramos que este es un indicador del momento inicial del planteamiento a nivel universitario de las competencias.

- Identifico los compromisos adecuados para cada situación.
- Establezco nuevas formas de interacción con los miembros del equipo para mejorar los resultados.
- Realiza actividades que conduzcan a la solución de un problema trabajando en equipo, que le permitan liderazgo, la opinión, la tolerancia de los participantes.
- Evalúo las alternativas viables para solucionar problemas.
- Manifiesto mis ideas y puntos de vista de forma que los otros me comprendan.
- Construir e interpretar gráficos de diferente tipo.
- Recurrir a los conocimientos desarrollados en el colegio para el trabajo en equipo y la elaboración de propuestas de intervención solidaria en la realidad, considerando la diversidad sociocultural.
- Organizar informaciones y conocimientos disponibles en situaciones concretas, para la construcción de argumentos consistentes.

6. BIBLIOGRAFÍA[66]

Hoffmann, L. (2006) CÁLCULO APLICADO. Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Mcgraw-Hill / Interamericana De México

Leithold, L. (1999) CÁLCULO. Para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR.

Budnick, F. (s.f.) MATEMÁTICAS APLICADAS. Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Mcgraw-Hill, México.

Haeussler, E., Paul, R. & Wood, R. (2008) *MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA.* Duodécima edición. Pearson Educación, México.

Arya, J. & Lardner, R. (2002) *MATEMÁTICAS APLICADAS. A la Administración y a la Economía*. Cuarta Edición. Pearson. Prentice Hall.

Weber, J. (1990) *MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA.* Cuarta edición. Harla, México.

Hoel, P. (1977) MATEMÁTICAS FINITAS Y CÁLCULO CON APLICACIONES A LOS NEGOCIOS. Limusa, México.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA: Álgebra y Funciones

[66] En el documento no se hace explícito cuál es el texto guía y cuáles los de consulta.

CLAVE: P1U2AF08272-2
PRERREQUISITO: Ninguno
PROGRAMAS: Administración de Empresas, Antropología, Ciencias Políticas, Contaduría y Finanzas Internacionales, Economía (ENI), Economía (EPP), Diseño Industrial, Ingenierías, Psicología, Sociología.
PERÍODO ACADÉMICO: 091 (primer semestre de 2009)
CRÉDITOS: 4
HORAS POR SEMANA: 5 Horas de trabajo presencial.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL (no tiene)

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Lograr el manejo adecuado de los elementos básicos del álgebra, necesarios para estudiar temas de nivel matemático superior.

2.2.2 Entender el concepto de función como eje central del curso, y su uso en la explicación gráfica y matemática de algunos fenómenos naturales y sociales.
2.2.3 Manejar adecuadamente las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas e identificar algunas situaciones que se modelan mediante ellas.

2.2.4 Entender el concepto de modelo matemático, y de su planteamiento y solución como los elementos determinantes en la solución de problemas.

3. METODOLOGÍA
3.1 El enfoque: En concordancia con los propósitos de la universidad, en el desarrollo de este curso se considera que el aprendizaje es el resultado de un proceso de construcción del conocimiento, que tiene como centro al estudiante y como guía al profesor. Este enfoque se concretará en la práctica con el aprovechamiento de los resultados del estudio previo hecho por los estudiantes, como elemento generador de preguntas, discusiones y conclusiones.

3.2 La discusión en clase: La discusión, orientada por el profesor es el elemento central en la metodología del curso. Se fundamenta en el estudio preliminar de las secciones asignadas, en las preguntas de los estudiantes y en sus respuestas a sus preguntas y a las del profesor, que alimenten el proceso de aprendizaje activo. El profesor interviene esencialmente como guía y moderador de las discusiones, y se encarga de hacer la síntesis final para socializar el conocimiento consolidado en clase.

4. DESCRIPCIÓN DEL CURSO O CONTENIDO

CAPÍTULO 1. Conceptos fundamentales de álgebra
1.1 Números reales
1.2 Exponentes y radicales

1.3 Expresiones algebraicas
1.4 Expresiones fraccionarias

CAPÍTULO 2. Ecuaciones y desigualdades
2.1 Ecuaciones
2.2 Problemas aplicados
2.3 Ecuaciones cuadráticas
2.4 Números complejos
2.5 Otros tipos de ecuaciones
2.6 Desigualdades

CAPÍTULO 3. Funciones y gráficas
3.1 Sistemas de coordenadas rectangulares
3.2 Gráficas de ecuaciones
3.3 Rectas
3.4 Definición de función. Gráficas de funciones
3.5 Funciones cuadráticas
3.6 Operaciones sobre funciones

CAPÍTULO 4. Funciones Polinomiales y racionales
4.1 Funciones Polinomiales de grado mayor que 2
4.2 Propiedades de la división
4.3 Ceros de polinomios. Ceros complejos y racionales de polinomios
4.4 Funciones racionales. Variación

CAPÍTULO 5. Funciones inversa, exponencial y logarítmica
5.1 Funciones inversas
5.2 Funciones exponenciales. Función exponencial natural
5.3 Funciones logarítmicas. Propiedades de los logaritmos
5.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

CAPÍTULO 6. Trigonometría
6.1 Ángulos. Funciones trigonométricas de ángulos y de números reales
6.2 Valores de las funciones trigonométricas
6.3 Gráficas trigonométricas
6.4 Problemas de aplicación
6.5 Verificación de identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas
6.6 Fórmulas de suma y resta. Fórmulas de ángulos múltiples
6.7 Funciones trigonométricas inversas
6.8 Ley de los senos. Ley de los cosenos
6.9 Forma trigonométrica para números complejos. Teorema de De Moivre y raíces enésimas.

CAPÍTULO 7. Sistemas de Ecuaciones y temas de Geometría analítica
7.1 Sistemas de ecuaciones

7.2 Parábolas y Elipses
7.3 Hipérbolas

5. EVALUACIÓN.

Control de estudio previo	10%
Primer Parcial	20%
Segundo Parcial	20%
Examen Final	30% Todo el contenido del curso
Pruebas cortas	20% Por lo menos seis; se elimina la de menor calificación. NO HAY supletorio de pruebas cortas.

FECHAS:
EXAMEN FINAL: Julio 18 9:30 a.m. a 12m.
EXÁMEN SUPLETORIO: Julio 21 9:30 a.m. a 12m. (Un sólo examen que cubrirá todo el curso)
OBSERVACIÓN IMPORTANTE: Si un estudiante obtiene una nota mayor o igual a 3.3 en el examen final y la nota así acumulada está entre 2.8 y 3.0, la nota final del curso será de 3.0

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto Guía: Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Undécima edición. International Thomson Editores.

Texto de consulta: Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2001) *PRECALCULO*, Tercera Edición. International Thomson Editores.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA
ASIGNATURA: Matemática Fundamental [67]
CLAVE: P1U3MF300MAG012-3
PRERREQUISITOS: Ninguno
PROGRAMAS: Ingeniería Civil, Ing. Electrónica, Ing. Industrial, Ing. de Sistemas y Computación, Administración de Empresas, Contaduría Pública y Economía.
PERÍODO ACADÉMICO: Enero-Junio de 2009
CRÉDITOS: 3
HORAS POR SEMANA: 4 horas de trabajo con el profesor, 5 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL (no tiene)

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

[67] Este curso pertenece al núcleo de formación fundamental de los estudiantes de la Facultad de Ingenierías y de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas desde al año 2003.

A través del planteamiento de situaciones problemas, del trabajo individual del estudiante y de la interacción entre profesor–estudiante y estudiante– estudiante, se pretende desarrollar en los estudiantes habilidades y destrezas que les permita:

2.2.1 Identificar las diferentes representaciones simbólicas de los números reales, realizar cambios de una forma de representación a otra, si es posible, y realizar las distintas operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) de los números reales combinando sus formas de representación. Caracterizar los diferentes conjuntos numéricos y establecer la diferencia entre ellos. Identificar la estructura algebraica de los números reales.

2.2.2 Realizar diversos procesos de simplificación de expresiones algebraicas. Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales, cuadráticas, con radicales, con valor absoluto y polinómicas.

2.2.3 Conceptualizar la noción de función desde dos perspectivas, una matemática y otra como una noción que permite modelar y resolver problemas.

3. METODOLOGÍA

La metodología de trabajo tiene tres momentos: Antes de clase, Durante la clase y Posterior a la clase.

Antes de cada clase el estudiante debe leer el tema que se va a abordar en ella y debe realizar los ejercicios previos propuestos en el programa.

Durante la clase, el profesor responderá a las preguntas que propongan los estudiantes, planteará ejemplos, ejercicios o cuestionamientos que ayuden al estudiante a apropiarse de los conceptos, procedimientos, técnicas y estrategias de las matemáticas fundamentales

Posterior a la clase, el estudiante debe resolver los restantes ejercicios impares de cada sección trabajada en la clase; la solución de estos ejercicios podrá ser discutida en las horas de consulta asignadas al curso de cálculo I, o con el profesor en la clase siguiente. Por lo tanto, se requiere de la participación activa del estudiante, condición sin la cual no es posible desarrollar las clases como un diálogo entre profesor–estudiante y estudiante–estudiante.

Para asegurar un ambiente de trabajo, colaboración e intercambio de ideas, el estudiante se compromete a asumir las siguientes actitudes:

Pensar libremente.

Involucrarse en el proceso social de confrontar y clarificar su comprensión de los temas de estudio.

Desarrollar la habilidad de trabajar efectiva e intensamente.

Efectuar preguntas.

Considerar de manera cuidadosa y respetuosa las ideas de los otros.

Aprender a pensar independientemente y tomar responsabilidad por sus propias acciones.

Valorar a los compañeros, profesores y monitores como colegas útiles en su propio proceso de aprendizaje y formación.

Evaluar su propio progreso de manera efectiva.

Juzgar la calidad de su trabajo tanto por su esfuerzo como por logros mostrados.

4. DESCRIPCIÓN DEL CURSO O CONTENIDO

Sesión	Contenido Programático	Ejercicios previos
1	Presentación del programa, normas disciplinarias	
2	Los números reales y sus propiedades	1.1: 7, 16, 17, 25, 57, 63 y Redacción 1.
3	Introducción a la resolución de ecuaciones	1.2: 16, 25, 32 y 33
4	Desigualdades	1.3: 1, 3, 4, 31, 57.
5	Valor Absoluto	1.4: 4, 21, 35. Redacción 2. Razonamiento C. 4
6	Exponentes enteros	1.5: 11, 17, 19, 29, 57, 65, 77
7	Radicales y exponentes racionales	1.6: 11, 13, 15, 17, 59, 69
8	Operaciones con polinomios	1.7: 28, 39, 42, 47, 55, 58, 69, 75
9	Factorización de Polinomios	1.8: 2, 9, 11, 19, 23, 37, 81 y 84.
10	Operaciones con expresiones racionales	1.9: 5, 14, 20, 26, 47, 54, 73, 80 y 87. Razonamiento C. 1.
11	PRIMER PARCIAL 25%	
12	Números Complejos	1.10: 1, 3, 5, 8, 42, 45, 53, 66 y 68.
13	Concepto de Función: Contextos tabular, por fórmula, por ecuación, a trozos y aplicaciones.	2.1: 3, 7, 8, 28, 30, 33, 38, 42, 46, 55, 57 y Reto 1.
14	Rectas y Funciones lineales	2.2: 37, 43, 51; 2.3: 29, 41, 45 2.4: 13, 17, 37
15	Función cuadrática y Ecuación cuadrática	2.6: 3, 23, 36, 57; 2.7: 26, 56, 77 (Ver ejemplo 5), 87.
16	Aplicaciones de las Funciones Cuadráticas	2.8: 3, 9, 15, 29, 37.
17	Gráfica de funciones particulares	3.1: 19, 21, 27.
18	Más acerca de gráficas de funciones	3.2: 13, 25, 33.
19	Funciones Polinomiales y Racionales	3.3: 12, 15, 18, 25, 29, 43.
20	Ecuaciones e inecuaciones con fracciones.	3.4: 19, 20, 23, 32, 42, 45, 52, 53.
21	SEGUNDO PARCIAL 25%	
22	Teoremas del residuo, del Factor	3.6: 3, 21, 27, 43, 49.
23	Resolución de ecuaciones polinómicas	3.7: 13, 15, 27.
24	Descomposición de Funciones Racionales	3.8: 3, 11, 13, 17, 21.
25	Círculos y gráfica de funciones con radicales	4.1: 2d, 7, 37, 41; 4.5: 5, 26, 31.
26	Ecuaciones con radicales y sus gráficas	4.6: 5, 10, 21, 37, 47, 49, 57, 69,

		77.
27	Composición de Funciones	4.7: 4, 5, 8, 16, 27, 37, 51, 54.
28	Funciones Inversas	4.8: 4, 19, 22, 32, 36, 45.
29	Funciones Exponenciales y Logarítmicas	5.1: 4, 17, 19, 27, 39. Redacción 1. 5.2: 5, 15, 22, 27, 58.
30	Leyes de los logaritmos	5.3: 3, 6, 16, 27, 45, 49, 57, 69.
31	Funciones Exponencial y logarítmica naturales	5.4: 6, 13, 23, 27, 49, 52, 56, 77.
32	Aplicaciones	5.5: 9, 15, 17, 25, 31, 33, 45.
	TERCER PARCIAL 30%	

5. EVALUACIÓN

TIPO DE EVALUACIÓN	PORCENTAJE ASIGNADO	OBSERVACIÓN
PRIMER PARCIAL	25%	La secretaria de Facultad fijará las fechas de parciales oportunamente, estar pendientes de las carteleras de la carrera
SEGUNDO PARCIAL	25%	
TERCER PARCIAL	30%	
QUICES	20%	En la programación del curso se encuentra especificado el momento de cada examen corto, se recordará la fecha de realización del examen corto. El total de exámenes cortos durante el semestre es de cuatro (4).

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía: Sobel, M. & Lerner, N. (2006) *PRECÁLCULO*. Sexta Edición. Pearson Educación.

Textos de Consulta: Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Undécima edición. International Thomson Editores.

Faires, J & DeFranza, J. (2001) *PRECÁLCULO*. Segunda edición. Internacional Thomson Editores, S.A.

Silva, L. (1994) *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA*. Noriega Limusa. Sexta Edición

Sullivan, M. (1997) *PRECÁLCULO*. Cuarta edición. Prentice Hall.

Consulta por medio de Red a través de la plataforma Blackboard:

Herramienta computacional de apoyo al proceso de enseñanza y de aprendizaje de los temas de Matemática fundamental.
Elementos teóricos sobre Números Reales.
Elementos teóricos sobre Expresiones Algebraicas
Elementos teóricos sobre Funciones

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA
ASIGNATURA: Matemáticas Fundamentales
CLAVE: P1U4MF-4
PRERREQUISITOS: Ninguno
PROGRAMAS: Ing. Comercial, Ing. Electrónica, Ing. Industrial, Ing. de Sistemas y Bioingeniería.
PERÍODO ACADÉMICO: 091 (primer semestre de 2009)
CRÉDITOS: 4
HORAS POR SEMANA: 4 horas de trabajo con el profesor, 8 horas de trabajo independiente.

2. COMPETENCIAS GENERALES [68]
Al finalizar el curso el participante estará en capacidad de:
Identificar, modelar y resolver problemas que emplean sistemas numéricos.
Identificar, modelar y resolver problemas que emplean estructuras algebraicas.
Identificar, modelar y resolver problemas que emplean relaciones.
Identificar, modelar y resolver problemas que emplean polinomios.
Identificar, modelar y resolver problemas que emplean funciones y gráficos.
Resolver problemas donde interviene la inducción matemática.
Participar en los cursos que hagan uso de los fundamentos básicos de las matemáticas.

3. METODOLOGÍA
La metodología general será inicialmente la presentación de conceptos y la demostración de algunos teoremas por parte del profesor, posterior a este trabajo se ejecutaran talleres que aborden los temas vistos, algunos serán resueltos por el grupo en clase y otros por los estudiantes como parte de su trabajo independiente.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

MÓDULO 1. NOCIÓN DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA Y LOS SISTEMAS NUMÉRICOS. (16 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA: Resolver problemas que emplean sistemas numéricos y estructuras algebraicas.
Introducción. Ley de composición interna. Sistemas axiomáticos. Estructura algebraica o sistema matemático. El sistema de los reales. Igualdad de reales. Relación de equivalencia.

---

[68] Este programa no tiene objetivos generales ni específicos. Las competencias específicas son presentadas por módulo y aparecen en la descripción o contenido del curso.

Ecuaciones de primer grado. La expansión decimal de los reales. El orden en los reales. Inecuaciones. Valor absoluto de un real. Inecuaciones con valor absoluto. Potenciación de reales. Logaritmación de reales.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES (36 horas)
Lectura sobre el desarrollo investigativo de los sistemas numéricos. Manejo y notación de los sistemas numéricos en los sistemas computacionales. Importancia de los números binarios en los sistemas computacionales. Taller sobre sistemas numéricos.

MÓDULO 2. TEORÍA BÁSICA DE FUNCIONES. (8 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA: Resolver problemas básicos que emplean relaciones y funciones.
Introducción. Relaciones. Funciones. Dominio y Rango. Gráficas de funciones. Clasificación de funciones. Definición de funciones. Funciones inversas. Gráficas de funciones inversas. Solución de sistemas lineales aplicando determinantes.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES (12 horas)
El uso de los conceptos relación y función en la modelación de sistemas reales. El uso de los conceptos relación y función en los lenguajes de programación. Taller sobre funciones.

MÓDULO 3: FUNCIONES NATURALES Y TRIGONOMÉTRICAS (12 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA. Resolver problemas que emplean funciones matemáticas.
La función exponencial y su gráfica. La función logarítmica y su gráfica. Introducción a la trigonometría plana. Definición de las funciones trigonométricas. Gráficas. Identidades básicas. Ecuaciones. Inversas. Leyes del seno y del coseno. Funciones hiperbólicas. Función hiperbólica y su inversa. Propiedades. Gráficas de funciones hiperbólicas.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES (24 horas)
Investigar sobre el círculo trigonométrico y la representación de las funciones trigonométricas por líneas. Demostrar las identidades básicas trigonométricas. Investigar sobre el uso del Software para la graficación de funciones trigonométricas. Taller sobre funciones.

MÓDULO 4. FUNCIONES POLINÓMICAS. (12 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA. Resolver problemas que emplean funciones polinómicas.
Función polinomio real. Propiedades. Algoritmo de la división. División sintética. Ceros racionales de polinomios enteros. Ceros complejos de polinomios reales. Funciones de fracciones polinómicas. Reconocimiento gráfico de las raíces.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES (12 horas)
Investigar sobre el uso de Software para la búsqueda de raíces de polinomios. Investigar sobre el uso de Software para la graficación de polinomios. Taller sobre polinomios.

MÓDULO 5. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA. (8 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA. Identificar y resolver problemas que asocian los conceptos derivados de la ecuación de la recta.

Distancia entre dos puntos. División de segmentos según razones dadas. Pendiente de una recta, ángulo entre dos rectas. Diferentes formas de ecuaciones de rectas. Intersección de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Definición de las cónicas y sus correspondientes ecuaciones.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES (16 horas)
Investigar sobre las rectas tangente y normal a la curva de una función. Desarrollo de un algoritmo para encontrar el punto de corte entre dos rectas. Taller sobre rectas.

MÓDULO 6. INDUCCIÓN MATEMÁTICA. SUMATORIA. TEOREMA DEL BINOMIO. (12 horas de trabajo presencial)
COMPETENCIA ESPECÍFICA. Disposición para interpretar temas que hagan uso de la inducción, la sumatoria y el binomio de Newton.
Teorema de inducción. Principio de inducción. Demostraciones por inducción matemática. El operador sumatoria. Propiedades. Usos. La potencia de un binomio. Estudio y análisis del desarrollo del binomio de Newton.
ACTIVIDADES PROPIAS DE LOS ESTUDIANTES
Investigar sobre teoría combinatoria. Desarrollo de un algoritmo para encontrar alguna sumatoria en especial. Taller sobre sumatorias y binomios.

RECURSOS DIDÁCTICOS
Tablero, Retroproyector, Video Beam.

5. EVALUACIÓN

Módulos	Especificación	Subtotal	Total	
Primer Parcial	1 y 2	Talleres Examen	30% 70%	9% 21%
Segundo parcial	2, 3 y 4	Talleres Examen	30% 70%	9% 21%
Examen final	5 y 6	Talleres Examen	30% 70%	9% 21%
Total	100%			

6. BIBLIOGRAFÍA[69]

Aires, (1995) *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES*. Mc Graw Hill. México.
Allendoerfer, C. & Oakley, C. (1998) *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIA.* Mc Graw Hill. México.
Barnett, R. (1988) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA.* Mc Graw Hill.
Britton, J., Kriegh, R. & Rutland, L. (1972) *MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.* Continental.
Sullivan, M. (1997) *PRECÁLCULO.* Cuarta edición. Prentice Hall. México.
Zill, D. & Dejar, J. (1993) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA*. Mc Graw Hill. México.

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

[69] No se hace una distinción entre el texto guía y los textos de consulta.

ASIGNATURA: Matemáticas I
CLAVE: P2U4M1-5
PRERREQUISITOS: Ninguno
PROGRAMAS: Finanzas y negocios internacionales, Economía, Contaduría pública, Mercadeo y Administración de empresas.
PERÍODO ACADÉMICO: Enero – Junio de 2009
CRÉDITOS: 3
HORAS POR SEMANA: 6 horas de trabajo con el profesor, 6 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVOS GENERALES
Fomentar el buen manejo del razonamiento matemático mediante el uso de la argumentación para sustentar la solución a las diferentes situaciones que se presentan en la vida diaria.
Identificar diferentes clases de funciones y aplicarlas a las ciencias económicas, administrativas y financieras.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Desarrollar las diferentes competencias en los alumnos como condición necesaria para mejorar los procesos de análisis, síntesis, inducción, deducción y formulación de hipótesis.

Inducir a los alumnos a que investiguen y apliquen sus conocimientos en la realización de sus trabajos.

Desarrollar habilidades y destrezas haciendo uso de los conocimientos matemáticos para resolver problemas de la vida diaria.

3. METODOLOGÍA
Presencial
Se desarrollarán clases empleando en cada sección el módulo guía de trabajo y se utilizarán clases magistrales, el trabajo en grupo, la participación activa de los estudiantes a través de exposiciones y la solución de los talleres propuestos en el desarrollo de la clase.

Trabajo independiente
Realización de lecturas introductorias del libro guía de la clase, investigación de temas anexos y realización de los talleres propuestos no desarrollados en clase.

Soportes pedagógicos
La coherencia entre lo que se piensa, se dice y se hace es uno de los ejes fundamentales de un proceso pedagógico.

Estar en el mundo, exige al sujeto-educando asumir y elaborar una toma de postura, como decisión de vida. A la vez requiere objetivarse; en esencia, se busca un ser que se abra al mundo, a la cultura, al saber, desde un punto de vista crítico y dialogante.
La participación potencializa una pedagogía grupal y comunitaria de autogestión –frente a los problemas del saber– en procura del conocimiento.
La participación es también un valor fundamental y uno de los ejes que componen la formación de un espíritu crítico, reflexivo, de compromiso ético con el pensamiento y con saber científico.
El maestro debe generar una pedagogía que desarrolle una actitud que conlleve a una práctica investigativa en la que se permita la reflexividad del pensamiento y la creatividad.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

UNIDAD TEMÁTICA No. 1: FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA
Expresiones algebraicas. Polinomios. Operaciones con polinomios. Métodos de factorización de polinomios. Fracciones algebraicas. Racionalización de denominadores y numeradores.
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS Operar adecuadamente expresiones algebraicas y factorizar expresiones algebraicas de acuerdo a sus características.

UNIDAD TEMÁTICA No. 2: ECUACIONES E INECUACIONES
Solución de ecuaciones en una variable, lineales y cuadráticas. Sistemas de ecuaciones 2x2 y métodos de solución. Inecuaciones lineales y cuadráticas.
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS Identificar las principales características de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Además de resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, en una variable utilizando diferentes métodos.

UNIDAD TEMÁTICA No. 3: FUNCIONES
Conceptos: función, función compuesta, función inversa. Funciones lineales, pendiente de una línea recta, gráfica y problemas de aplicación. Función cuadrática y problemas de aplicación. Función exponencial y función logarítmica, gráficas y taller sobre aplicaciones.
COMPETENCIAS ESPECÍFICAS Identificar las características de una función. Definir, clasificar y graficar las funciones elementales y determinar su comportamiento. Operar eficientemente sobre procesos con base en teoría de funciones. Identificar funciones logarítmicas como funciones compuestas e inversas. Aplicar adecuadamente las propiedades de los logaritmos en la solución de problemas afines. Implementar algoritmos para la solución de problemas en diferentes áreas. Plantear adecuadamente ecuaciones en la solución de problemas.

5. EVALUACIÓN

Aspectos a evaluar	Estrategia	Puntos
Análisis y síntesis	Capacidad para apropiarse de la temática y socializarla en el curso	30
Gestión del tiempo	Planificar el tiempo disponible según	10

	prioridades y actuar de acuerdo con ese plan. Esto supone no confundir lo urgente con lo importante, calculando el tiempo necesario para cada tarea.	
Interpretar y argumentar adecuadamente enunciados problemáticos matemáticos	Discernir cuál es la información relevante en el momento de ir a resolver un problema matemático. Ser capaz de explicar con claridad el resultado.	40
Comunicación	Saber transmitir la información de manera eficaz, exponiendo las cuestiones con claridad, concisión y precisión. Intervenir en las discusiones con elegancia, sabiendo escuchar empleando argumentos coherentes.	20

6. BIBLIOGRAFÍA

Arya, J. & Lardner, R. (2002) *MATEMÁTICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA.* Cuarta Edición. Pearson. Prentice Hall.
Eslava, M. & Velasco, J. (1997) *INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.* McGraw-Hill/Interamericana.
Allendoerfer, C. & Oakley, C. (1985) *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.* Mc Graw-Hill. México.
Módulo construído por profesores del área.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA:	Formación básica en matemáticas [70]
CLAVE:	P1U5FBM131205-6
PRERREQUISITOS:	Puntaje ICFES
PROGRAMAS:	Ingeniería y ciencias económicas.
PERÍODO ACADÉMICO:	Enero – Junio de 2009
CRÉDITOS:	3
HORAS POR SEMANA:	4 horas de trabajo con el profesor, 5 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Reconocer y analizar elementos básicos de la estructura de los números reales, de la representación de los datos numéricos, de las operaciones en el campo de los números

[70] No todos los estudiantes que ingresan a la universidad U_5 están obligados a tomar este curso, sólo aquellos cuyo puntaje ICFES esté por debajo de la cota que fija la universidad, incluso pueden presentar un examen de validación de modo tal que quien aprueba el curso puede ver en primer semestre el curso matemáticas I, el cual inicia con el estudio de los límites y finaliza con aplicaciones de la derivada en una variable.

reales, del álgebra de funciones para aplicarlos en la interpretación, argumentación y solución de algunos problemas matemáticos que contribuyen a crear capacidades de: crear, emprender, generar conocimiento y solución de problemas en contexto.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Identificar propiedades de los números reales para resolver problemas.

2.2.2 Usar las propiedades de los números reales para resolver problemas.

2.2.3 Representar ecuaciones y desigualdades en el plano cartesiano.

2.2.4 Identificar una función en una variable de valor real.

2.2.5 Describir el domino de una función en una variable de valor real.

2.2.6 Realizar operaciones con funciones en una variable de valor real, como: suma, diferencia, producto, cociente y composición.
2.2.7 Clasificar una función respecto a sus propiedades en: lineal, polinómica, exponencial, logarítmica o trigonométrica.

2.2.8 Determinar la inversa de una función y representarla geométricamente.

2.2.9 Modelar situaciones cotidianas usando funciones en una variable de valor real.

3. METODOLOGÍA
La metodología de enseñanza será una combinación de diversas estrategias didácticas. Se promoverá el trabajo individual y por equipo, así como la participación activa y la reflexión conjunta dentro del aula y cobrarán importancia la correcta aplicación de los principios de la modelación, la interpretación razonable del análisis y la comunicación de los resultados utilizando terminología apropiada al contexto y su interpretación práctica.
Los objetivos del curso se alcanzarán a través de la presentación de los temas por parte del profesor y fundamentalmente en el trabajo dirigido dentro y fuera del aula, la participación activa y el auto aprendizaje por parte de los estudiantes, así como la asistencia continua y obligatoria a las actividades del curso.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO
El curso de Formación Básica en Matemáticas está concebido para proporcionar los elementos necesarios para que el estudiante pueda asumir con solvencia los cursos de matemáticas de su formación universitaria y promover el desarrollo de competencias que le permitan aprender a aprender permanentemente.
Posee un diseño instruccional con miras al logro de un aprendizaje significativo y autónomo en el marco de un modelo constructivista. Esto implica el reconocimiento del protagonismo del estudiante en sus propios procesos de aprendizaje, a través del desarrollo de la propuesta del curso. En éste, se exploran de manera amena el fascinante mundo de las

matemáticas, por lo menos en sus elementos básicos y de aplicación en el campo de las ingenierías, ciencias económicas, administrativas y sociales.

MÓDULO 1: ÁLGEBRA (8 semanas)
Estructura algebraica de los números reales (5 semanas)
Axiomas de la suma
Axiomas del producto
Exponenciación y radicación en los números reales
Expresiones algebraicas
Simplificación de expresiones algebraicas
Factorización de expresiones algebraicas. (Factor común, factorización de trinomios cuadrados perfectos, factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c = 0$ y de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, productos notables, etc.)
Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.
Estructuras de orden en los números reales (3 semanas)
Axiomas y propiedades de estructura de orden de los números reales.
Representación geométrica de los números reales.
Intervalos y Valor Absoluto.
Desigualdades. (Definición, propiedades y conjunto solución).
Solución de desigualdades (lineales, cuadráticas, racionales, con valor absoluto).
Método gráfico para la solución de desigualdades.

MÓDULO 2: FUNCIONES REALES EN UNA VARIABLE DE VALOR REAL (8 semanas)
Plano cartesiano (1 semana)
Pares ordenados, ubicación de puntos, distancia entre puntos.
Gráfica de ecuaciones e inecuaciones (identificar algunas curvas: recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, etc.)
Relaciones
Conceptos básicos de funciones (3 semanas)
Definición de función, dominio, rango y gráfica.
Formas de representar una función.
Análisis de la gráfica de una función.
Aplicaciones (problemas que conducen a formular una función)
Caracterización de algunas funciones (2 semanas)
Función valor absoluto
Función lineal
Funciones polinómicas
Función exponencial
Función logarítmica
Función seno
Función coseno
Álgebra de funciones (2 semanas)
Suma, resta, producto y cociente de funciones.

Composición de funciones.
Función inversa.

5. EVALUACIÓN
La evaluación del desempeño del estudiante se hará con base en:

Evaluación	Descripción	Semana	Porcentaje
Evaluación 1	Evalúa todo lo visto hasta la quinta semana.	6	20%
Evaluación 2	Evalúa todo lo visto hasta la décima semana.	11	25%
Evaluación 3	Evalúa todo el contenido del curso.	Fijada por registro académico	35%
Actividades de aprendizaje	Exámenes cortos, tareas, talleres, proyectos, consultas, etc.		20%

La nota definitiva del curso será el promedio ponderado de las cuatro notas anteriores: evaluación 1, evaluación 2, evaluación 3 e y actividades de aprendizaje.

6. BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA
MÓDULO 1: Documentos preparados por el departamento de matemáticas: "*Estructura algebraica y de orden de los números reales*"
MÓDULO 2: Documentos preparados por el departamento de matemáticas: "*Funciones de una variable de valor real*"

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA
Goodman, A. & Hirsch, L. (1996) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2001) *PRECÁLCULO*, International Thomson Editores. Tercera Edición.
Sobel, M. & Lerner, N. (2006) *PRECÁLCULO*. Sexta Edición. Pearson Educación.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA:	Matemáticas Fundamentales
CLAVE:	P1U6MF405036M-7
PRERREQUISITOS:	Ninguno
PROGRAMAS:	Licenciatura en matemáticas y física.
PERÍODO ACADÉMICO:	Agosto – Diciembre de 2009[71]

[71] Este es un curso que se dicta cada año razón por la cual no se tiene el programa del curso para el período académico Enero – Junio de 2009.

CRÉDITOS:	5
HORAS POR SEMANA:	4 horas de trabajo con el profesor, 8 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL (no tiene)

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Establecer un puente teórico entre la formación matemática adquirida en la formación básica y media y la formación matemática universitaria.

Cimentar teóricamente los conceptos fundamentales requeridos para afrontar los cursos de matemáticas posteriores.

Promover el estudio formal de las matemáticas sin olvidar que ellas son el resultado del razonamiento humano en el marco de contextos socioculturales propios.

3. METODOLOGÍA

El curso se llevará a cabo en dos sesiones semanales de dos horas cada sesión, en las cuales el profesor presentará ideas principales del tema a tratar sobre la base de una lectura previa del material recomendado por parte del docente. En la parte final de la segunda sesión se realizará una guía se trabajo de manera individual o grupal, alrededor de la temática trabajada y la socialización de los interrogantes que hayan surgido a lo largo de la presentación y lectura asignada.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

Unidad 1: INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Proposiciones y argumentos
El lenguaje de la lógica proposicional
Conectivos lógicos y tablas de verdad
Tautologías
Equivalencias importantes del cálculo proposicional.
Proposiciones abiertas
Cuantificadores
Negación de Cuantificadores
Conjuntos
Definición de conjuntos
Operaciones entre conjuntos y cálculo proposicional
Los Conjuntos Numéricos

Métodos de demostración

Unidad 2: LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Los Números Naturales
Los Números Enteros
Los Números Racionales e Irracionales
Los Números Reales
Los números reales como sistema matemático. Su estructura algebraica.
Propiedades, teoremas, ecuaciones
Potencias enteras
Los números reales como sistema matemático: El orden
Intervalos
Propiedades relacionadas con el orden: desigualdades
Valor Absoluto
Exponenciación y Logaritmación
Radicales
Exponentes Racionales y reales
Números Complejos

Unidad 3: ÁLGEBRA
Expresiones matemáticas variables
Polinomios
Productos notables y Factorización
Expresiones Racionales y Simplificación
Ecuaciones e Inecuaciones

Unidad 4: FUNCIONES
El concepto de Función
Dominio y Rango
Gráfica de una función
Clasificación de las funciones
Funciones biyectivas
Operaciones con funciones
Función Inversa
Funciones Polinómicas
Funciones Exponenciales y Logarítmicas
Funciones Trigonométricas

5. EVALUACIÓN

La evaluación del curso se dividirá en cuatro partes a saber:
Un 25% de un primer parcial, sin opcional.
Un 25% de un segundo parcial, con opcional.
Un 25% de un tercer examen parcial, con opcional.
Un 25% correspondiente a un promedio de quices, se harán seis y se eliminan las dos notas más bajas. Las cuatro resultantes darán el promedio.

6. BIBLIOGRAFÍA

ZILL, D. & DEJAR, J. (2008) Précalculo, con avances de Cálculo. Cuarta edición. Cuarta edición. Mc Graw-Hill.

WISNIEWSKI, P., ANTONYAN, N. & MEDINA, L. (2001) Problemario de Precálculo. Thamson. México.

RESTREPO, G. (1995) Matemáticas fundamentales. Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle.

HINESTROZA, D., ORTIZ, G. & RECALDE, L. (2003) Semilleros de Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle.

ALLENDOFER, C.B. (1998) Fundamentos de Matemáticas Universitarias. 3ªEdición Mc. Graw-Hill Editores.

FAIRES, D. & DEFRANZA J. (1998) Precálculo Internacional Thomson Editores, México.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA: Matemática Fundamental
CLAVE: P2U6MF111007M-8
PRERREQUISITOS: (no tiene)
PROGRAMAS: Científico--Tecnológica.
PERÍODO ACADÉMICO: Agosto – Diciembre de 2008
CRÉDITOS: 3
HORAS POR SEMANA: (no tiene)

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL
Complementar y nivelar la formación matemática que el estudiante trae del bachillerato para afrontar con éxito los cursos universitarios de matemáticas y la argumentación matemática de ayuda en otras disciplinas

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS (no tiene)

3. METODOLOGÍA (no tiene)

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO
Breve introducción a las convenciones de la argumentación matemática: afirmaciones matemáticas; formalización de "raciocinio"; propiedades y cuantificación; conjuntos de soluciones de propiedades. (SIC)

Los sistemas numéricos y sus principales características: los naturales y el principio de inducción; el dominio ordenado de los enteros y el algoritmo de la división; el campo ordenado de los racionales y su caracterización como subcampo de $\Re$; el campo ordenado y completo $\Re$ y las ecuaciones e inecuaciones en $\Re$; el campo no ordenado $\Re$, las representaciones de sus elementos, el Teorema de De Moivre.

El álgebra de las funciones de valor real (complejo) y varias variables reales (complejas): formalización de las llamadas "expresiones matemáticas variables"; su estructura de álgebra.

Funciones polinómicas complejas: propiedad de dominio–álgebra, algoritmo de la división, división sintética, ceros racionales de polinomios "enteros", ceros complejos de polinomios "reales". Funciones de fracciones polinómicas.

Funciones de valor y variable real: construcción de funciones (dominio y rango) a partir de fórmulas; composición; funciones inversas; gráficas.

Funciones trigonométricas y sus aplicaciones: el círculo trigonométrico y las funciones de él derivadas; funciones inversas; identidades de las funciones trigonométricas; aplicaciones a solución de triángulos. (SIC)

5. EVALUACIÓN (no tiene)

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía: Restrepo, G. (2003) *MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES*, Cali: Programa Editorial de la Universidad del Valle.

Textos de consulta: Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA*. Undécima edición. International Thomson Editores.
Allendoerfer, C & Oakley, C. (1985) *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS*. Mc Graw-Hill. México.
Álvarez, J., Acosta, E. & Marmolejo, M. (s.f.) *TÉCNICAS Y CONCEPTOS BÁSICOS EN MATEMÁTICAS*. Publicaciones Facultad de Ciencias.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA:	Matemática Fundamental
CLAVE:	P3U6MF111061-9
PRERREQUISITOS:	Admisión a la Universidad
PROGRAMAS:	Tecnología Química.
PERÍODO ACADÉMICO:	Agosto – Diciembre de 2008

CRÉDITOS: 4
HORAS POR SEMANA: 5 horas de trabajo con el profesor, 10 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL
Completar y nivelar la formación matemática básica que el estudiante trae del bachillerato requerida para afrontar con éxito los cursos universitarios de matemáticas y los primeros cursos de otras disciplinas científicas y técnicas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS (no tiene)

3. METODOLOGÍA (no tiene)

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO
4.1 Sistemas Numéricos
Tipos de números, expresiones y argumentos matemáticos: Descripción de los diferentes tipos de números y sus formas de representación. Tipos de demostración. Conjuntos y elementos de cálculo proposicional. **Mediciones y números reales:** Interpretación geométrica de los números reales. Recta numérica. Sistemas de numeración. Mediciones empíricas y cifras significativas. Cálculo aproximado. **Estructura algebraica de los números reales:** Principales propiedades algebraicas de los números reales. **El orden de los números reales:** Principales propiedades del orden. Subsistemas numéricos. Inducción. Sumatorias y sumas infinitas. Progresiones. Exponenciación y logaritmación: Radicales. Exponentes racionales y reales. Logaritmos. **Números complejos:** Representación cartesiana. Operaciones básicas.

Álgebra
Operaciones con expresiones matemáticas variables: Definición y operaciones con expresiones matemáticas variables. Productos notables y factorización. Teorema del Binomio. **División de polinomios:** División y división sintética. Teoremas del resto y del factor. Teorema fundamental del álgebra. Ceros de un polinomio. **Ecuaciones e inecuaciones:** Reglas y conceptos básicos en la solución de ecuaciones e inecuaciones.

Funciones Numéricas
Tipos de funciones y operaciones con funciones: Concepto general de función. operaciones con funciones. Composición. Función numérica. Gráfica. Funciones inversas. Funciones monótonas. **Funciones elementales:** Funciones: Polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas. Aplicaciones.

Trigonometría
Relaciones trigonométricas: Círculo trigonométrico. Definición y propiedades fundamentales de las relaciones trigonométricas. Relaciones inversas. **Resolución de triángulos, identidades, ecuaciones y aplicaciones:** Teorema de los senos y cosenos.

Identidades. Aplicaciones. Representación polar del número complejo. Teorema de De Moivre.

5. EVALUACIÓN (no tiene)

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía: Restrepo, G. (2003) *MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES*, Cali: Programa Editorial de la Universidad del Valle.

Textos de consulta: Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Undécima edición. International Thomson Editores.
Allendoerfer, C. & Oakley, C. (1985) *Fundamentos de Matemáticas Universitarias*. Mc Graw-Hill. México.
Álvarez, J; Acosta, E. & Marmolejo, M. (s.f.) *TÉCNICAS Y CONCEPTOS BÁSICOS EN MATEMÁTICAS*. Publicaciones Facultad de Ciencias.

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA:	Matemáticas Fundamentales
CLAVE:	P4U6MF111067M-10
PRERREQUISITOS:	(No tiene)
PROGRAMAS:	Matemáticas.
PERÍODO ACADÉMICO:	Agosto – Diciembre de 2008
CRÉDITOS:	5
HORAS POR SEMANA:	6 horas de trabajo con el profesor, 12 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL (no tiene)

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

2.2.1 Sentar las primeras bases en el lenguaje matemático que la carrera de Matemáticas exige, formalizando algunas de las ideas que en esta área ha explorado el bachiller moderno en sus estudios de secundaria.
2.2.2 Consolidar la formación matemática básica requerida para afrontar los cursos posteriores.
Fomentar en el estudiante la escritura rigurosa mediante el desarrollo de problemas que involucren definiciones y teoremas.

3. METODOLOGÍA (no tiene)

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

Unidad 1. Introducción a la lógica y a los conjuntos. (2 semanas).
Proposiciones. Conectivos lógicos. Tautologías, contradicciones. Razonamientos, razonamientos válidos. Reglas básicas de inferencia. Métodos de demostración. Conjuntos. Cuantificadores. Negación de proposiciones condicionales cuantificadas.

Unidad 2. Los números reales (7 semanas)
Descripción axiomática de los números reales. Propiedades algebraicas de los números reales. Potencias enteras, progresiones. Axiomas de orden. Propiedades deducibles de los axiomas de orden. La función valor absoluto y sus propiedades. Intervalos. Solución de inecuaciones con una variable real. Conjuntos inductivos. El conjunto de los números naturales. Principio de inducción. Números enteros y números racionales.

Cotas superiores e inferiores. Axioma del extremo superior. Existencia de números irracionales. Densidad de los racionales y de los irracionales en los reales. Radicales, exponentes racionales y reales. Propiedades.

Expresiones matemáticas variables, definición y operaciones. Productos notables, factorización. Factorial, números combinatorios y teorema del Binomio de Newton. Polinomios. División de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del residuo. Teorema del factor. Teorema fundamental del álgebra. Ceros de un polinomio.

Sucesiones, límite de una sucesión, sucesiones monótonas. Las series de términos positivos, la serie geométrica, los decimales infinitos. Existencia de la raíz enésima. El número e como el límite de la sucesión $(1+1/n)^n$ y el número π como el límite del perímetro de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio uno.

Unidad 3. Funciones. (3 semanas)
Definición. Igualdad de funciones. Ejemplos de funciones en diferentes contextos. Problemas cuya solución conlleva a encontrar una función. Funciones inyectivas y sobreyectivas. Funciones monótonas. Operaciones con funciones. Conjunto de funciones con dominio y valor real. Composición de funciones. Función inversa. Parte positiva y negativa de una función, valor absoluto de una función de valor real. Funciones acotadas superiormente e inferiormente. Función par e impar. Gráfica de una función, traslaciones y estiramientos. Funciones polinomiales (lineal y cuadrática). Funciones exponencial y logarítmica. Propiedades.

Unidad 4. Transformaciones de Laplace. (3 semanas)
Funciones trigonométricas y sus inversas. Coordenadas polares. Números complejos. Representación polar, fórmula de Moivre. Raíz enésima de un número complejo.

5. EVALUACIÓN (no tiene)

6. BIBLIOGRAFÍA
Texto guía: Álvarez, J., Acosta, E. & Marmolejo, M. (s.f.) *TÉCNICAS Y CONCEPTOS BÁSICOS EN MATEMÁTICAS*. Notas de clase. Publicaciones Facultad de Ciencias

Textos de consulta: Swokowski, E. & Cole, J. (2006) *ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA.* Undécima edición. International Thomson Editores. Allendoerfer, C. B. *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS*, 3ª. Edición, McGraw-Hill, 1996. *Universitarias*.

---

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA: Número y operaciones
CLAVE: P5U6MF405049M-11
PRERREQUISITOS: Ninguno
PROGRAMAS: Licenciatura en Educación básica, énfasis en educación matemática.
PERÍODO ACADÉMICO: Agosto – Diciembre de 2008[72]
CRÉDITOS: 4
HORAS POR SEMANA: 4 horas de trabajo con el profesor, 8 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL (no tiene)

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS
A través del curso se pretende:

Adquirir competencias conceptuales, procedimentales, de razonamiento matemático, de comunicación y resolución de problemas a través del estudio de los sistemas numéricos, sus definiciones, operaciones, relaciones e interrelaciones entre estos sistemas.
Analizar la construcción formal y didáctica de los distintos sistemas numéricos a partir de la coordinación de sus sistemas de representación.
Reconocer las características del lenguaje aritmético y los problemas propios de su construcción.
Reconocer la importancia de estos conceptos y procedimientos numéricos en la formación de nuevos objetos matemáticos de la geometría, el álgebra, el cálculo y la estadística.

3. METODOLOGÍA

La metodología de trabajo es la de seminario taller, es decir que hay un trabajo previo a la clase en el cual los estudiantes deben realizar la lectura de la(s) sección(es) que el profesor asigne, dicha lectura estará acompañada de un control de lectura y un examen parcial que se encuentran en la compilación del curso. Durante la clase se revisarán los conceptos estudiados previamente a la luz de las inquietudes que les surgen a los estudiantes en la lectura y/o realización de los ejercicios propuestos. Por último hay un trabajo posterior a la

[72] Este es un curso que se dicta cada año razón por la cual no se tiene el programa del curso para el período académico Enero – Junio de 2009.

clase, en la cual los estudiantes deben realizar los ejercicios del texto guía relacionados con los conceptos abordados en clase.

Recuerde que este curso tiene cuatro créditos lo cual implica que por cada hora clase de clase presencial debe dedicar dos horas por fuera de clase.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

4.1 Sistema de números reales: Sus elementos
Se trata de introducir elementos fundamentales de la teoría de conjuntos en tanto es necesario reconocer los conjuntos numéricos y las propiedades determinadas por esta naturaleza. Como también, reconocer los elementos propios de los naturales, enteros, racionales e irracionales, sus múltiples representaciones y privilegiando la representación en la recta numérica.

4.2 Sistema de números reales: Sus relaciones y la recta de números reales
La relaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos (menor que y mayor que) determinan desigualdades que se potencian en la representación en la recta real posibilitándose la relación entre valor absoluto, distancia entre punto y coordenadas del punto medio, entre otros aspectos.

Bibliografía: Secciones 1.1 y 1.2 del texto Álgebra y trigonometría. Zill, Dennis G. Dewar, J. 1993. McGraw-Hill.
Capítulo 2 del texto Semillero de matemáticas. Matemáticas básicas. Recalde L, Ortiz G, Hinostroza D. 2004. Universidad del Valle.
Guías de estudio. PNU-Univalle. Castillo H., Castro W., Guacaneme E., Torres L.1997.

4.3 Sistema de números reales: Sus operaciones y propiedades
Exponentes enteros, radicales y exponentes racionales
En este apartado se trata de estudiar la relación entre las operaciones de potenciación, logaritmación y radicación, reconociendo sus definiciones y propiedades, las cuales determinan las posibilidades de tratamientos entre éstas y nuevos conceptos como los de Notación Científica, racionalización de radicales y simplificación de expresiones con exponentes racionales.

Bibliografía: Secciones 1.3, 1.4, 1.5 del texto Álgebra y trigonometría. Zill, Dennis G. Dewar, J. 1993. McGraw-Hill.
Guías de estudio. PNU-Univalle. Castillo H., Castro W., Guacaneme E., Torres L.1997.

Números complejos
Los números complejos se abordan de igual forma que los reales, es decir definiendo sus elementos, sus representaciones, operaciones y relaciones. Se reconocen las relaciones entre los reales y este nuevo conjunto numérico, desde su estructura algebraica, las extensiones de sus operaciones y propiedades. El sistema cartesiano se reconoce como

importante en relación a la representación geométrica de los complejos y sus relaciones con la teoría de vectores.

5. EVALUACIÓN

Primer examen parcial	30%
Evaluación final	35%
Exámenes cortos	20%
Talleres y/o tareas	15%

Un quiz es una evaluación corta de una temática específica y puede evaluar aspectos de una unidad en particular, después de que se haya realizado un taller. Un examen parcial corresponde a una evaluación de procesos correspondiente a temáticas de dos o tres unidades, por lo tanto es más extensa que un quiz. El examen final evalúa un proceso más complejo, pues tiene el carácter de cierre de ese proceso, en este caso involucra las últimas temáticas tratadas en el curso.

Es importante señalar que las evaluaciones escritas pretenden recoger desarrollos de la formación en números y operaciones referente a la resolución de problemas, uso de conocimientos y procedimientos, procesos argumentativos y de razonamiento numérico que se han movilizado en el curso; por lo tanto se espera la participación comprometida de los estudiantes en la actividad matemática de clase y extraclase.

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía: Zill, D. & Dewar, J. (1993) Álgebra y trigonometría. McGraw-Hill.

Textos complementarios: Castillo H., Castro W., Guacaneme E. & Torres L. (1997) Guías de estudio. PNU-Univalle.
Recalde, L., Ortiz, G. & Hinestroza, D. (2004) Semillero de matemáticas. Matemáticas básicas. Universidad del Valle.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2001) *PRECÁLCULO. Matemáticas para el cálculo.* Tercera Edición. México*:* International Thomson Editores.

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA

ASIGNATURA: Iniciación al álgebra
CLAVE: P6U6MF405056M-12
PRERREQUISITOS: Números y operaciones
PROGRAMAS: Licenciatura en Educación básica, énfasis en educación matemática.
PERÍODO ACADÉMICO: Agosto – Diciembre de 2008[73]
CRÉDITOS:
HORAS POR SEMANA: 4 horas de trabajo con el profesor, 8 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS
2.1 OBJETIVO GENERAL (no tiene)

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A través del curso se pretende:
Reelaborar de manera significativa los conceptos básicos del álgebra escolar como son: expresión algebraica, polinomio y función, de la misma manera, sus operaciones y relaciones.
Desarrollar competencias conceptuales, procedimentales, de resolución de problemas, comunicación y razonamiento algebraico que potencien la autonomía intelectual.
Reconocer las características del lenguaje algebraico y los problemas propios de su construcción.
Aprender los tratamientos propios al registro de representación gráfica tanto en la recta como en el plano cartesiano, al igual que las reglas de conversión al registro de representación simbólica, con la finalidad de que los estudiantes constituyan en un método alternativo de solución de ecuaciones e inecuaciones.

3. METODOLOGÍA
La metodología de trabajo es la de seminario taller, para lo cual los estudiantes deben ser concientes de que el resultado de su proceso de aprendizaje dependerá de la calidad de su estudio previo y del aprovechamiento de las discusiones desarrolladas en la clase. Es decir, que es parte fundamental de este proceso traer todas aquellas inquietudes que se la han generado a partir de la preparación de la clase, la solución de los talleres y tareas, etc.
El papel del profesor será el de orientar la discusión que se genera de las inquietudes de los estudiantes, además de guiar el trabajo que deben desarrollar dentro y fuera del salón, y se encarga de hacer la síntesis final que da cuenta del conocimiento consolidado durante el desarrollo de la clase.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO DEL CURSO

Este curso se organiza curricularmente a través de tres ejes temáticos:

[73] Este es un curso que se dicta cada año razón por la cual no se tiene el programa del curso para el período académico Enero – Junio de 2009.

4.1 Expresiones algebraicas y sus operaciones Repaso (trabajo independiente)
Expresiones algebraicas, dominio de la variable, operaciones. Factorización.
Tiempo: 2 sesiones

4.2 Ecuaciones, fórmulas e inecuaciones
Clasificación de ecuaciones según dominio y conjunto solución, ecuaciones lineales, y cuadráticas, fórmulas, ecuaciones con valor absoluto, radicales y racionales.
Tiempo: 10 sesiones-

4.3 Funciones de variable real
Relaciones y gráficas, fórmula de distancia, ecuaciones de la recta, funciones polinómicas y sus gráficas, teorema fundamental del álgebra, operaciones con funciones.
Tiempo: 20 sesiones

5. EVALUACIÓN

Primer Parcial……………………………………………………………………………30%
Evaluación Final…………………………………………………………………………40%
Pruebas Cortas…………………………………………………………………………. 20%
Talleres, controles de estudio previo (oral o escrito)……………………………………10%

Se elimina la prueba corta de menor calificación, pues no hay opcionales para ellas.
Es importante señalar que las evaluaciones escritas pretenden recoger desarrollos de la formación en álgebra referente a la resolución de problemas, uso de conocimientos y procedimientos, procesos argumentativos y de razonamiento algebraico que se han movilizado en el curso; por lo tanto se espera la participación comprometida de los estudiantes en la actividad matemática de clase, y extraclase.

6. BIBLIOGRAFÍA

Texto guía: Zill, Dennis G. Dewar, J. 1993. *Álgebra y trigonometría*. McGraw-Hill
Textos de consulta: Castillo H., Castro W., Guacaneme E., Torres L.1997. *Guías de estudio*. PNU – UniValle.

1. INFORMACIÓN BÁSICA DE LA ASIGNATURA
ASIGNATURA: Precálculo
CLAVE: P5U7PC75010-13
PRERREQUISITOS: Ninguno
PROGRAMAS: Ing. Industrial, Ing. de materiales, Ing. electrónica, Ing. de sistemas, Ing. de multimedia.
PERÍODO ACADÉMICO: 091

CRÉDITOS:	3
HORAS POR SEMANA:	5 horas de trabajo con el profesor, 6 horas de trabajo independiente.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GENERALES

2.1.1 DEL PROGRAMA ACADÉMICO

Formar ingenieros con una sólida preparación interdisciplinaria que permita la toma de decisiones efectivas en los procesos de producción de bienes, servicios y cadenas de valor agregado.

Formar profesionales integrales, con una visión global que considere las interacciones socioeconómicas, tecnológicas y del hombre mismo, a través de la optimización de los métodos de trabajo; poseedor de una cultura acorde con el actual modelo de globalización de la economía y proyectado hacia lo regional, lo nacional y lo internacional, sin olvidar su compromiso frente a la familia y la sociedad.

Cimentar un conjunto de conocimientos científicos, tecnológicos y sociales que lo capaciten para optimizar recursos, para desarrollar procesos de solución lógicos y creativos y proporcionar herramientas para resolver situaciones complejas a las cuales se enfrentan las organizaciones.

Fomentar el espíritu investigativo en los estudiantes con el propósito de generar conocimiento, permitiendo el desarrollo de nuevas tecnologías que mejoren y enriquezcan los procesos ingenieriles en la producción de bienes y servicios de calidad y alta competitividad en el mercado local, regional nacional e internacional.

2.1.2 DEL COMPONENTE

El Área de Ciencias Básicas de Ingeniería: integrada por componentes derivados de las matemáticas y las ciencias naturales, tiene como objetivo estructurar el pensamiento del estudiante de ingeniería en los procesos mentales de la lógica, el análisis, la intuición, la abstracción y la deducción, permitiendo el desarrollo de habilidades matemáticas y descubriendo las leyes físicas mediante el continuo ejercicio de la resolución de problemas y la realización de prácticas de laboratorio, logrando despertar en el estudiante la curiosidad por el conocimiento fomentando su creatividad a través de los proyectos de curso y de iniciación en la investigación.

2.1.3 DEL CURSO

Este curso permite al estudiante recordar los conceptos del álgebra básica aprendidos en la educación media y aplicarlos en la solución de problemas reales que surgen en los diferentes campos de la ingeniería. Con este curso se pretende que el estudiante se apropie de las matemáticas y las utilice como una de las principales herramientas para la toma de decisiones.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Al finalizar el curso el alumno estará en capacidad de analizar y calcular argumentando los conceptos matemáticos que ha tomado como base al:
Resolver problemas mediante diversos modelos matemáticos: conjuntos, ecuaciones de primer y segundo grado y relaciones trigonométricas.
Manejar funciones en una variable.

3. METODOLOGÍA
Con la guía del docente, a lo largo del semestre académico, el alumno irá elaborando un proyecto escrito, a través del cual va construyendo las herramientas necesarias para llegar a lograr el propósito general propuesto. Cada estudiante deberá participar en el desarrollo de la clase, para ir elaborando un proyecto de texto con la dirección y supervisión del profesor y que es manejado por cada estudiante.
La clase será el espacio de discusión y refuerzo de las consultas, lecturas y trabajos previos que el alumno deberá hacer de los contenidos propuestos a medida que estos se vayan desarrollando, mediante la guía del profesor. Las clases se desarrollarán mediante talleres dirigidos, ejercicios, trabajos en grupos, exposiciones y todo tipo de actividades que a juicio del grupo y del profesor contribuyan a un mejor logro de los propósitos.

4. DESCRIPCIÓN Y CONTENIDO DEL CURSO

4.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES
Objetivo: Manejar y aplicar las estructuras algebraicas básicas en la construcción y solución de los modelos matemáticos.
Contenido:
4.1.1. **El campo de los números reales**. Propiedades de los números reales. Fracciones: adición y sustracción de fracciones. Multiplicación de fracciones. División de fracciones. Exponentes: definición de potenciación con exponente natural. Propiedades de los exponentes. El exponente entero. La radicación. El exponente racional.

4.1.2. **Expresiones algebraicas**. Definición de polinomio. Operaciones con expresiones algebraicas (polinomios): adición, sustracción, multiplicación, y división. Teorema fundamental del álgebra (algoritmo de Euclides de la división).

4.1.3. **Factorización**. Factor común. Factorización por agrupación de términos. Factorización de polinomios de segundo grado con coeficientes enteros. Factorización de polinomios de grado mayor con dos coeficientes enteros. División sintética. Factorización de polinomios con coeficientes racionales. Regla de signos de descartes.

4.1.4. **Expresiones racionales**. Simplificación de expresiones racionales. Operaciones con expresiones racionales: adición, sustracción, multiplicación y división. Fracciones parciales (estudio de casos).

4.1.5. **Ecuaciones lineales**. Solución de ecuaciones de primer grado con una variable. Fórmulas y aplicaciones. Solución de problemas que se resuelven con ecuaciones de primer grado de una variable. Ecuación de segundo grado en una variable (ecuación cuadrática) y métodos de solución. Relaciones entre soluciones y coeficientes de una ecuación cuadrática. Ecuaciones con radicales y de forma cuadrática. Problemas de aplicación con ecuaciones cuadráticas.

4.1.6. **Inecuaciones lineales y cuadráticas**. Soluciones de ecuaciones e inecuaciones lineales y cuadráticas. Valor absoluto como métrica en $\Re$. Intervalos. Concepto de entorno o vecindad. Igualdades y desigualdades con valor absoluto.

4.1.7. **Conjuntos**. Idea intuitiva. Axiomatización: Axiomas de separación y extensión. Relaciones de igualdad y contenencia de conjuntos. Operaciones con conjuntos. Álgebra de conjuntos. Conjuntos finitos y principio del conteo. Problemas de conteo. Producto cartesiano y gráficas.

4.2. CONCEPTOS DE RELACIÓN Y FUNCIÓN

Objetivo: Identificar el dominio y el rango de una función.

Contenido: Definición de relación: dominio, codominio y gráficas. Construcción del concepto de función como un caso particular de relación. Dominio y rango de una función. Gráficos de funciones.

4.3. ALGUNAS CLASES DE FUNCIONES

Objetivo 1: Identificar algunas funciones básicas: constante, idéntica, lineal, cuadrática, cúbica, polinómicas, valor absoluto, a trozos y escalonadas.

Objetivo 2: Efectuar operaciones entre funciones y hallar la inversa de una función.

Contenido: Función inyectiva. Función sobreyectiva. Función biyectiva. Función creciente y decreciente, par e impar. Funciones: constante, idéntica, lineal (la línea recta), cuadrática, cúbica, polinómicas en general. Función valor absoluto, funciones a trozos y escalonadas. Operaciones con funciones. Composición de funciones. Función inversa.

4.4. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Objetivo: Manejar las funciones exponencial y logarítmica al aplicar sus propiedades en la solución de ecuaciones.

Contenido: Gráficas de la función exponencial, propiedades y ecuaciones. Función logarítmica, propiedades y ecuaciones. Problemas de aplicación.

4.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivo: Manejar las funciones trigonométricas al aplicar sus propiedades en la solución de ecuaciones y en la demostración de identidades.

Contenido: Funciones trigonométricas. Funciones circulares y sus gráficas: Gráficas de las funciones seno y coseno, amplitud, período y desfase. Gráficas de las funciones: tangente y cotangente. Gráficas de las funciones secante y cosecante.

4.6. SECCIONES CÓNICAS

Objetivo: Identificar y manejar las diferentes secciones cónicas: parábola, elipse e hipérbola y reconocer la importancia de estas en las comunicaciones, trayectorias de proyectiles, construcciones, etc.
Contenido: Ecuaciones canónicas de la parábola, elipse e hipérbola. Problemas de aplicación.

5. EVALUACIÓN
Se entiende la evaluación educativa como un proceso permanente, integral, gradual y conjunto que generalizado dentro del ámbito académico, permite formular juicios cuantitativos y cualitativos acerca de los docentes, los estudiantes, los programas, los procesos, los resultados y el currículo.
En el curso, la evaluación será un instrumento de aprendizaje que permita suministrar la realimentación adecuada a los alumnos y al docente, con el propósito de mejorar la enseñanza y potenciar el aprendizaje. Por tanto se dividirá en:
Evaluación cuantitativa cuyo instrumento principal lo constituye la llamada prueba objetiva. En esta forma de evaluación se realizarán pruebas cortas, talleres y exámenes parciales y finales.
Evaluación cualitativa a través de espacios para la opinión crítica del estudiante, y para la valoración de sus propios aprendizajes se favorecerá la autoevaluación y la coevaluación.

6. COMPETENCIAS A DESARROLLAR
Las competencias que se pretenden desarrollar en el curso, las cuales están en directa relación con las que debe desarrollar un estudiante de la Facultad de Ingeniería son:

Competencias Cognitivas:
Capacidad de análisis y síntesis.
Capacidad en el planeamiento e problemas propios del ámbito de la ingeniería de sus posibles soluciones.
Capacidad para el manejo de la información y su acertado uso en la solución de problemas.

Competencias Laborales:
Capacidad para planear y manejar los recursos disponibles a su alcance en procura de hacer un trabajo de calidad.
Mostrar compromiso con la calidad en su trabajo académico en el componente de matemáticas continuas.

7. BIBLIOGRAFÍA
Zill, D. & Dewar, J. (2008) *PRECÁLCULO CON AVANCES DE CÁLCULO*. Cuarta edición. Editorial McGraw-hill. México.

Leithold, L. (1999) *PRECÁLCULO.* Sexta edición. Oxford University Press. México.

Anexo B

El cuerpo ordenado de los números reales[74]

1 Axiomas de cuerpo

Junto con el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones llamadas *adición y multiplicación* tales que para cada par de números reales x e y se puede formar la *suma* de x e y, que es otro número real designado por $x+y$ y el *producto* de x e y designado por xy o $x \cdot y$ La suma $x+y$ y el producto de xy están unívocamente determinados por x e y. A los signos + y · no se les asigna otro significado especial que el precisado en los axiomas.

Axioma 1. Propiedad Conmutativa. $x+y=y+x, \quad x\cdot y=y\cdot x$

Axioma 2. **Propiedad Asociativa**. $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

Axioma 3. Propiedad Distributiva. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

Axioma 4. **Existencia de Elementos Neutros**. Existen dos números reales distintos, que se indican por 0 y 1 tales que para cada número real x se tiene: $0+x=x+0=x$ y $1\cdot x=x\cdot 1=x$.

Axioma 5. **Existencia del Elementos Neutros**. Para cada número real x existe un número real y tal que $x+y=y+x=0$.

Axioma 6. **Existencia del Recíproco** Para cada número real $x\neq 0$ existe un número real y tal que $x\cdot y=y\cdot x=1$

Nota: los números 0 y 1 de los axiomas 5 y 6 son los mismos que los del axioma 4.

De los axiomas anteriores se puede deducir todas las leyes usuales del álgebra elemental

[74] Las definiciones y teoremas que presentamos a continuación han sido tomados de manera textual del texto *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, del autor Tomas Apostol (1985).

Teorema 5.1. **Ley de simplificación de la suma**. Si $a+b=a+c$ entonces $b=c$. (En particular esto prueba que el número 0 del axioma 4 es único.)

<u>*Demostración de 5.1*</u>

Sea y un número real con la siguiente propiedad: $y+a=0$, además sea $a+b=a+c$ por hipótesis, entonces $y+(a+b)$ equivale a $y+(a+c)$, es decir $y+(a+b)=y+(a+c)$, luego $y+(a+b)=y+(a+c)$ por propiedad asociativa. De acuerdo con la elección de y, tenemos que $0+b=0+c$, es decir que $b=c$ en virtud del axioma 4.

Observe además que si 0 tiene dos recíprocos denotados por 0 y $0'$ entonces $0+0=0+0'$, por la ley de simplificación $0=0'$.

Teorema 5.2. **Posibilidad de sustracción**. Dados a y b existe uno y sólo un x tal que $a+x=b$. Este x se designa por $b-a$. En particular $0-a$ se escribe simplemente $-a$ y se denomina el negativo de a.

<u>*Demostración de 5.2*</u>

Argumentemos, por contradicción, suponiendo que existen dos números diferentes denotados por x y y tales que $a+x=b$ y $a+y=b$, es decir que $a+x=a+y$, de la ley de simplificación de la suma se tiene que $x=y$, lo cual contradice nuestro supuesta. En consecuencia dados a y b existe uno y sólo un x tal que $a+x=b$.

Teorema 5.3. $b-a=b+(-a)$

<u>*Demostración de 5.3*</u>

Sea $x=b-a$ y sea $y=b+(-a)$. Por definición de $x=b-a$, es decir $x+a=b$ y $y+a=[b+(-a)]+a=b+[(-a)+a]=b+0=b$, luego $x+a=y+a$, por la ley de simplificación de la suma concluimos que $x=y$.

Teorema 5.4. $-(-a)=a$

<u>*Demostración de 5.4*</u>

Por el axioma 5 tenemos que existe un x para todo a tal que $x+a=a+x=0$, a este lo denominaremos $x=-a$, esto es por la posibilidad de sustracción. Dado $-a$ existe un único y

tal que $y + (-a) = 0$, el cual está dado por $y = -(-a)$por la posibilidad de sustracción. De modo que $a + (-a) = 0$ y $-(-a) + (-a) = 0$, por la ley de simplificación de la suma concluimos que $a = -(-a)$.

Teorema 5.5. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

<u>*Demostración de 5.5*</u>

En virtud del axioma 4 tenemos que $0+0=0$. Al multiplicar por a a ambos lados de la igualdad tenemos que $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$, luego $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$ por axioma 3. Sea y un número tal que $y + a \cdot 0 = 0$ $y+a\cdot 0=0$, si sustituimos $a \cdot 0$ por $a \cdot 0 + a \cdot 0$ tenemos que $0 = y + a \cdot 0 = y + [a \cdot 0 + a \cdot 0] = [y + a \cdot 0] + a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = a$, por tanto $a \cdot 0 = 0$.

Teorema 5.6. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

<u>*Demostración de 5.6*</u>

Primero demostraremos que: , $a \cdot (-c) = (-a) \cdot c = -(a \cdot c)$. Esto equivale a mostrar que $a \cdot (-c)$ es el opuesto de , $a \cdot c$ al igual que $(-a) \cdot c$ y $-(a \cdot c)$.

Del axioma 5 obtenemos $-(a \cdot c) + a \cdot c = 0$. De otro lado,

$$a \cdot (-c) + a \cdot c = a \cdot (-c + c) = a \cdot 0 = 0$$

por axiomas 3, 5 y teorema 5.5. De la misma forma se demuestra que $\left(-a\right) \cdot c + a \cdot c = (-a + a) \cdot c = 0 \cdot c = 0$. Hemos demostrado que $a \cdot (-c) + a \cdot c = \left(-a\right) \cdot c + a \cdot c$ y por la ley de simplificación de la suma concluimos que $a \cdot (-c) = \left(-a\right) \cdot c$, de manera análoga demostramos $(-a) \cdot c = -(a \cdot c)$.

Del teorema 5.3 tenemos $a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c))$ $a\cdot(b-c)=a\cdot(b+(-c))$, luego aplicamos el axioma 3 $a \cdot (b - c) = a \cdot b + a \cdot (-c)$, esta última expresión equivale a $a \cdot (b - c) = a \cdot b + (-(a \cdot c))$. Por lo tanto $a \cdot (b - c) = a \cdot b - (a \cdot c)$.

Teorema 5.7. **Ley de simplificación para la multiplicación**. Si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$. (En particular esto prueba que el número 1 del axioma 4 es único.)

<u>*Demostración de 5.7.*</u>

Si $a \cdot b = a \cdot c$ entonces $a \cdot b - a \cdot c = 0$ es decir $a \cdot (b - c) = 0$, como $a \neq 0$ existe $y \neq 0$ tal que $a \cdot y = y \cdot a = 1$. Luego

$$0 = y \cdot 0 = y \cdot \big(a \cdot (b - c)\big) = (y \cdot a)(b - c) = 1 \cdot (b - c) = b - c,$$

de lo anterior concluimos que $0 = b - c$, o de forma equivalente $b = c$.

Teorema 5.8. **Posibilidad de la división**. Dados a y b con $a \neq 0$, existe uno y sólo un x tal que $a \cdot x = b$. La x se designa por b/a o $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular $1/a$ se escribe también a^{-1}y se designa recíproco de a.

2 Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a un concepto por el que se establece una *ordenación* entre los números reales. Según esta ordenación puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden, como un conjunto de axiomas referentes al nuevo concepto primitivo de positivo, para definir después los conceptos de mayor que y menor que a partir del de positivo.

Supondremos que existe un cierto subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de los números positivos, que satisfacen los tres axiomas de orden siguientes:

Axioma 7. Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre a $x + y$ y $x \cdot y$.
Axioma 8. Para todo real $x = 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.
Axioma 9. $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Ahora puede definir los símbolos $<, >, \leq$ y $\geq$ llamados respectivamente *menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que*, de la manera siguiente:

$x < y$ significa que $y - x$ es positivo.
$y > x$ significa que $x < y$.
$x \leq y$ significa que $x < y$ o $x = y$.
$y \geq x$ significa que $x \leq y$.

Por lo tanto, se tiene que $x > 0$ si y sólo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es negativo; si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo; si $x \leq 0$ se dice que x es no positivo. El par de desigualdades $x < y$, $y < z$ simultáneas se escriben frecuentemente en la forma más breve $y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas $x \leq y < z,\ x < y \leq z$, $x \leq y \leq z$.

De los axiomas de orden se puede deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes de las cuales se dan a continuación como teoremas.

Teorema 5.9 Propiedad de la tricotomía Para a y b números reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b, b < a, a = b$.

<u>*Demostración de 5.9*</u>

Sea $x = b - a$. Si $x = 0$, entonces $b - a = a - b = 0$ y, por tanto, en virtud del axioma 9 no puede ser ni $a < b$ ni $b > a$, es decir que $a = b$ Si $x \neq 0$, el axioma 8 afirma que o $x > 0$ o $x < 0$ pero no ambos; consiguiente, o es $a < b$ o es $b < a$, pero no ambos. Por tanto se verifica una y solo una de las tres relaciones $a < b, b < a, a = b$.

Teorema 5.10 Propiedad transitiva Si $a < b$ y $b < c$, es $a < c$.

<u>*Demostración de 5.10*</u>

Si $a < b$ y $b < c$ entones $b - a > 0$ y $c - d > 0$ En virtud del axioma 7 se puede sumar obteniéndose $(b-a)+(c-b) > 0$. Es decir, $c - a > 0$ y por tanto, $a < c$.

Teorema 5.11 Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$.

<u>*Demostración de 5.11*</u>

Sea $x = a + c$, $y = b + c$ Entonces $y - x = b - a$ pero $b - a > 0$ por hipótesis, de donde $y - x > 0$, lo que significa $x < y$.

Teorema 5.12 Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

Demostración de 5.12

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$ Si $c > 0$ en virtud del axioma 7, se puede multiplicar c por $b - a$ obteniéndose $(b - a) \cdot c > 0$ Pero $(b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c$ por tanto $b \cdot c - a \cdot c > 0$ y esto significa $b \cdot c > a \cdot c$ como se quería demostrar.

Teorema 5.13 Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

Demostración de 5.13

Si $a > 0$ en virtud del axioma 7 $a \cdot a > 0$ Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y, por tanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$ en virtud del axioma 7. En ambos casos se tiene $a^2 > 0$

Teorema 5.14 $1 > 0$

Demostración de 5.14

Argumentemos por contradicción suponiendo que $a = 1 < 0$. De acuerdo con el teorema anterior (5.13) $a^2 > 0$, esto equivale a decir que $a^2 = 1 > 0$ por axioma 4, lo cual genera una contradicción, es decir que lo supuesto es falso, por tanto concluimos que $1 > 0$.

Teorema 5.15 Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Demostración de 5.15

Si $a < b$ entonces $b - a > 0$. Si $c < 0$, entonces $-c > 0$ en virtud del axioma 7, se puede multiplicar $-c$ por $(b - a)$ obteniéndose $(b - a) \cdot (-c) > 0$ Pero $(b - a) \cdot (-c) = -(b \cdot c) + (a \cdot c)$ por tanto $a \cdot c - b \cdot c > 0$ y esto significa $a \cdot c > b \cdot c$ como se quería demostrar.

Teorema 5.16 Si $a < b$ entonces $-a > -b$. En particular si $a > 0$, entonces $-a < 0$.

Demostración de 5.16

Por teorema 5.14 hemos probado que $1 > 0$, luego $-1 < 0$ por el axioma 7. De modo que $a < b$ por hipótesis y $-1 < 0$, de acuerdo con el teorema 5.15, $a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$,

Teorema 5.17 Si $a \cdot b > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Demostración de 5.17

Sea $a \cdot b > 0$, y supongamos que $a > 0$. Debemos demostrar que $b > 0$. Argumentemos por contradicción suponiendo que $b \leq 0$, del axioma 8 tendríamos $-b > 0$. En virtud del axioma 7 concluimos $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) \geq 0$, de lo anterior se deriva la siguiente afirmación $a \cdot b \leq 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis sobre $a \cdot b$, en consecuencia $b > 0$.

Ahora asumamos $a < 0$, en virtud del axioma 8, $-a > 0$. Procediendo como antes, supongamos $b \geq 0$, entonces $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \geq 0$ $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \geq 0$, de lo anterior se deriva $a \cdot b \leq 0$, lo cual contradice nuestra hipótesis sobre $a \cdot b$, en consecuencia $b < 0$.

Finalmente observemos que si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $a \cdot b = 0$ por teorema 5.5, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Teorema 5.18 Si $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$.

Demostración de 5.18

Si $a < c$ y $b < d$ entones $c - a > 0$ y $d - b > 0$ En virtud del axioma 7 se puede sumar obteniéndose $(c - a) + (d - b) > 0$ Por la aplicación de los axiomas 1, 2 y 3

$$(c - a) + (d - b) = (c + d) - (a + d) > 0,$$

de la definición de menor que concluimos $a + b < c + d$.

Anexo C

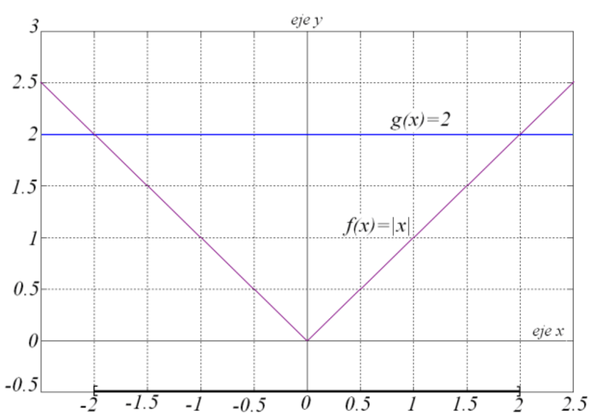
Una Situación Didáctica

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
CURSO: Iniciación al álgebra
TEMÁTICA: Inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable
Código: ________________________ Junio 2 de 2009

Situación 1. Parte A (El vértice)

1. Identificar las escrituras algebraicas correspondientes a la representación gráfica, de dos funciones, en el plano cartesiano.
2. Plantear la solución de las inecuaciones de la forma $|x-b|\leq c$ (donde $b, c \in \mathbb{R}$), a partir de la representación gráfica.
3. Relacionar el vértice con el centro del intervalo.

I. Complete el análisis *2a* – 5*a* (siga el modelo del primer ejercicio ***1a***)

<table>
<tr><th>Representación gráfica en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.</th><th>Análisis gráfico (1a)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación $|x|\leq 2$ o simplemente, $f(x)\leq g(x)$ es el intervalo: <u>[–2, 2]</u>

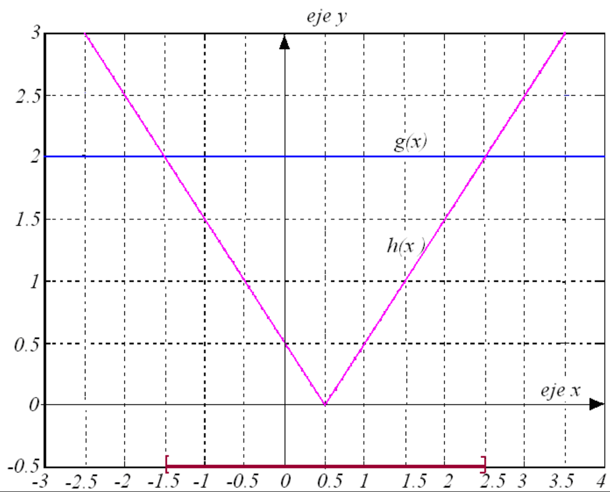
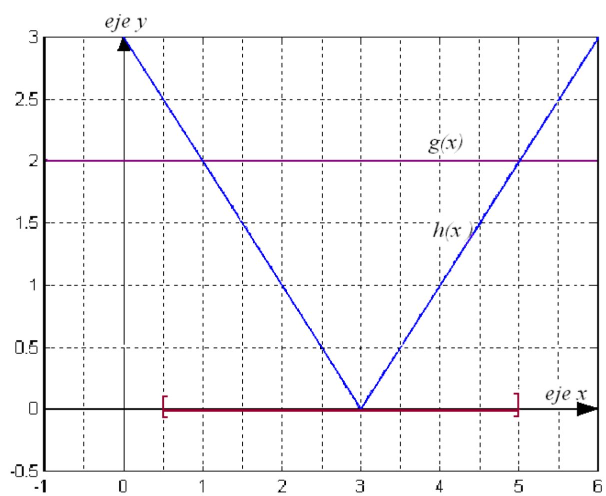
ii) Representa sobre el eje x la solución, de la inecuación

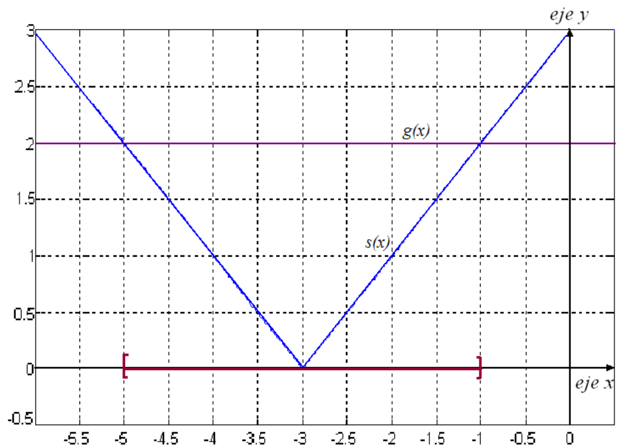
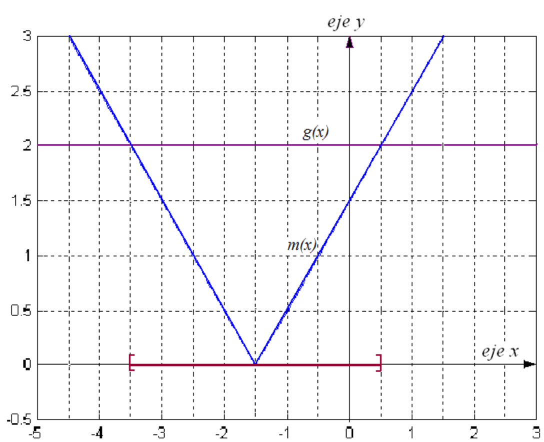
iii) El punto medio del intervalo solución es: <u>$x=0$</u>

iv) La distancia de los extremos al punto medio del intervalo, correspondiente, a la solución es: <u>2 unid.</u>

v) El vértice de la función $f(x)$ es: <u>$(0,0)$</u>

vi) El ángulo que forman la recta $f(x)$ y el eje x, cuando $x\geq 0$ es: 45° o $\frac{\pi}{4}$ radianes.</td></tr>
</table>

Representación gráfica **en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.**	**Análisis gráfico**
2a 	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación ___________ o simplemente, $h(x) \le g(x)$ es el intervalo: ______________ ii) Representa sobre el eje *x* la solución. iii) El *punto medio* del intervalo solución es______. iv) La distancia de los extremos al punto medio del intervalo, correspondiente, a la solución es: ___**unid.** v) El vértice de la función $h(x)$ es: _______ vi) El ángulo que forman la recta $h(x)$ y el ***eje x***, cuando $x \ge 0.5$ es: ______________
3ª 	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación ___________ o simplemente, $h(x) \le g(x)$ es el intervalo: ______________ ii) Representa sobre el eje *x* la solución. iii) El *punto medio* del intervalo solución es______. iv) La distancia de los extremos al punto medio del intervalo, correspondiente, a la solución es: ___**unid.** v) El vértice de la función $h(x)$ es: _______ vi) El ángulo que forman la recta $h(x)$ y el ***eje x***, cuando $x \ge 3$ es: ______________

Representación gráfica **en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.**	**Análisis gráfico**
4a  	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación ____________ o simplemente, $s(x) \leq g(x)$ es el intervalo: ____________ ii) Representa sobre el eje *x* la solución iii) El *punto medio* del intervalo solución es: ______ iv) La distancia de los extremos al punto medio del intervalo, correspondiente, a la solución es: ____**unid.** v) El vértice de la función $s(x)$ es: _______ vi) El ángulo que forman la recta $s(x)$ y el ***eje x***, cuando $x \geq -3$ es: ______________
5a  	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación __________ o simplemente, $m(x) \leq g(x)$ es el intervalo: ______________ ii) Representa sobre el eje *x* la solución iii) El *punto medio* del intervalo solución es: ______ iv) La distancia de los extremos al punto medio del intervalo, correspondiente, a la solución es: ___**unid**. v) El vértice de la función $m(x)$ es: _______ vi) El ángulo que forman la recta $m(x)$ y el ***eje x***, cuando $x \geq -1.5$ es: ______________

II. Para las representaciones gráficas y su respectivo análisis gráfico *1a - 4a* conteste los siguientes interrogantes

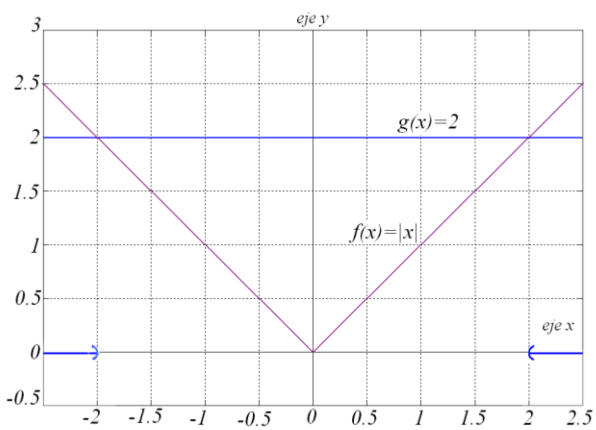
¿Qué **semejanzas** encontraste en las gráficas *1a* a *5a*?	¿Qué **diferencias** encontraste en las gráficas *1a* a *5a*?

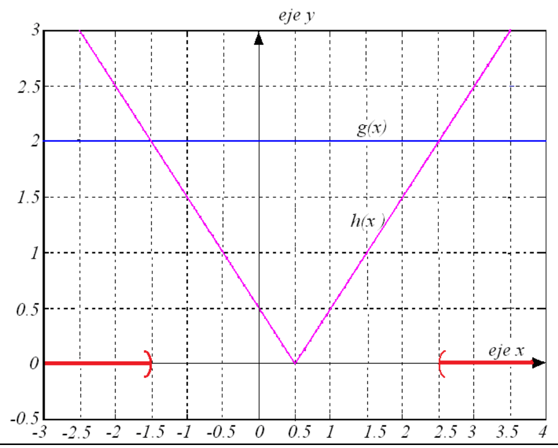
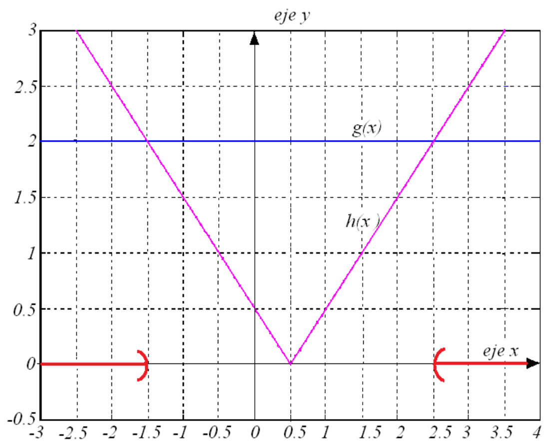
¿Qué **semejanzas** encontraste en la escritura algebraica de las inecuaciones *1a* a *5a*?	¿Qué **diferencias** hay en la escritura algebraica de las inecuaciones *1a* a *5a*?

Situación 1. Parte B (valores frontera)

1. Identificar las expresiones simbólicas que aparecen en la representación gráfica en el plano cartesiano.
2. Plantear la solución de las inecuaciones de la forma $|x-b|>c$ (donde $b, c \in \mathbb{R}$), a partir de la representación gráfica.
3. Interpretación gráfica de inecuaciones de la forma $|x-b|>c$.

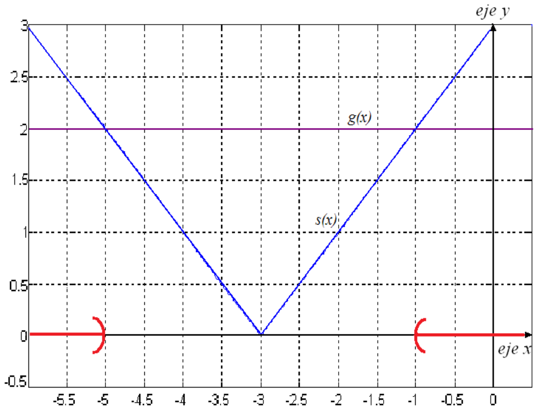
I. Complete el análisis 2b a 5b (siga el modelo del primer ejercicio *1b*)

Representación gráfica **en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.**	**Análisis gráfico (*1b*)**
1b 	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación $\|x\|>2$ o simplemente, $f(x)>g(x)$ es la unión de los intervalos: $\underline{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)}$. La solución corresponde a todos los números reales x tales que las imágenes de *f(x)* son **mayores** a las imágenes de *g(x).* ii) Representa gráficamente el conjunto solución, sobre el eje *x.* iii) El vértice de la función $f(x)$ es: $\underline{(0,0)}$ iv) El ángulo que forman la recta $f(x)=\|x\|$ (cuando $x\geq 0$) y el eje *x:* 45° o $\frac{\pi}{4}$.

Representación gráfica **en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.**	**Análisis gráfico**
2b 	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación _________ o simplemente, $h(x)>g(x)$ es la unión de los intervalos: _____________. La solución corresponde a todos los números reales x tales que las imágenes de ____ están por **encima** de las imágenes de ____. ii) Representa gráficamente el conjunto solución, sobre el eje x. iii) El vértice de la función $h(x)$ es: _______. iv) El ángulo que forman la recta $h(x)$ (cuando $x \geq 0.5$) y el eje x es: ___________________.
3b 	i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación __________ o simplemente, $r(x)>g(x)$ es la unión de los intervalos: _____________. La solución corresponde a todos los números reales x tales que las imágenes de ____ están por **debajo** de las imágenes de _____. ii) Representa gráficamente el conjunto solución, sobre el eje x. iii) El vértice de la función $r(x)$ es: _______ iv) El ángulo que forman la recta $r(x)$ (cuando $x \geq 3$) y el eje x es: ___________________.

<table>
<tr><th>Representación gráfica en el plano cartesiano, todos los ejes tienen la misma graduación.</th><th>Análisis gráfico</th></tr>
<tr><td>

4b



</td><td>

i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación ______________ o simplemente, $s(x) > g(x)$ es la unión de intervalos: ___________________**.** La solución corresponde a todos los números reales x tales que las imágenes de _____ están por **encima** de las imágenes de _____.

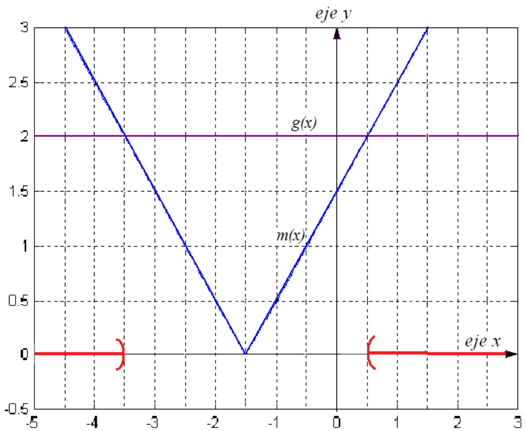
ii) Representa gráficamente el conjunto solución, sobre el eje *x*.

iii) El vértice de la función $s(x)$ es: _______

iv) El ángulo que forman la recta $s(x)$ (cuando $x \geq -3$) y el eje x es: __________________.

</td></tr>
<tr><td>

5b



</td><td>

i) A partir del gráfico concluimos que la solución de la inecuación ______________ o simplemente, $m(x) > g(x)$ es la unión de intervalos: ___________________**.** La solución corresponde a todos los números reales x tales que las imágenes de _______ son **menores** a las imágenes de ______.

ii) Representa gráficamente el conjunto solución, sobre el eje *x*.

iii) El vértice de la función $m(x)$ es: ______

iv) El ángulo que forman la recta $m(x)$ (cuando $x \geq -1.5$) y el eje x es: __________________.

</td></tr>
</table>

II. Para las representaciones gráficas y su respectivo análisis gráfico *1b – 5b* conteste los siguientes interrogantes

¿Qué **semejanzas** encontraste en las gráficas *1b* a *5b*?	¿Qué **diferencias** encontraste en las gráficas *1b* a *5b*?

¿Qué **semejanzas** encontraste en las inecuaciones *1b* a *4b*?	¿Qué **diferencias** entre las inecuaciones *1b* a *4b*?

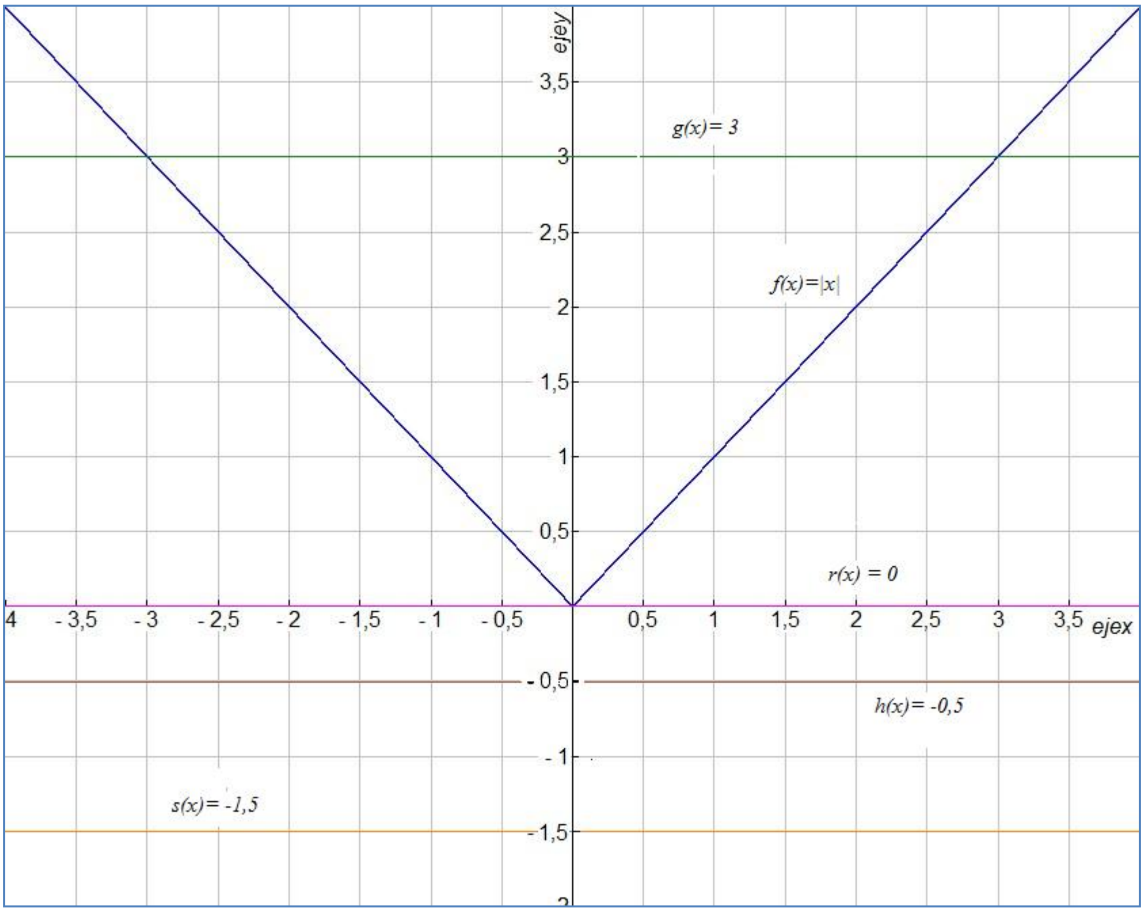
III. Comparación de las partes A y B de la situación 1.

- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en los análisis de los gráficos *1a* y *1b*?
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en los análisis de los gráficos *2a* y *2b*?
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en los análisis de los gráficos *3a* y *3b*?
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en los análisis de los gráficos *4a* y *4b*?
- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras en los análisis de los gráficos *5a* y *5b*?

Situación 1. Parte C (Caracterización del conjunto solución)

1. Plantear la solución de las inecuaciones de la forma $|ax + b| * c$ (donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $*$ puede ser sustituido por <, >, $\leq$ ó $\geq$), a partir de la representación gráfica.
2. Caracterizar el conjunto solución de inecuaciones lineales con valor absoluto en una variable.

I. Tome en consideración el siguiente gráfico para responder las preguntas *2c* - *6c*. Sigue el ejemplo 1c.



EJEMPLO ***1c.*** A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación $\mid x \mid < 3$ (o simplemente $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$) es: $\underline{(-3,3)}$. La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de *f(x)* son **menores** a las imágenes de *g(x)*.

2c. A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación **_________** (o simplemente $f(x) < h(x)$) es: **_______________.** La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de ______ están por **encima** de las imágenes de _____.

3c. A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación $|x| > -0.5$ **(**o simplemente, ___________) es: **_____________.** La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de ______ están por **debajo** de las imágenes de _______.

4c. A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación **__________ (**o simplemente, $f(x) < r(x)$) es el intervalo (o la unión de los intervalos): **_____________.** La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de **____** están por **debajo** de las imágenes de **_____**.

5c. A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación **__________ (**o simplemente, $f(x) > r(x)$) es el intervalo (o la unión de los intervalos): **_____________.** La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de **____** están por **debajo** de las imágenes de **_____**.

6c. A partir del gráfico concluimos que el conjunto solución de la inecuación **__________ (**o simplemente, $f(x) \geq r(x)$) es el intervalo (o la unión de los intervalos): **_____________.** La solución corresponde a todos los números reales *x* tales que las imágenes de **____** son **menores o iguales** a las imágenes de **_____**.

Situación 1. Parte D (Familia de contrastes)

I. Encuentre una solución gráfica, en el plano cartesiano, de las siguientes inecuaciones.

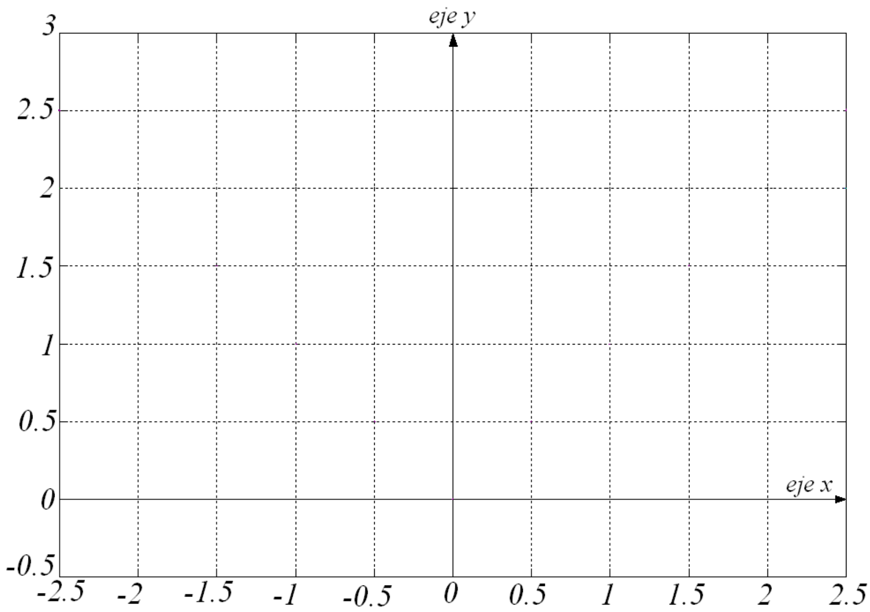
1d. $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$

2d. $|2x-1| \leq 4$

3d. $|2x+3| \leq 4$

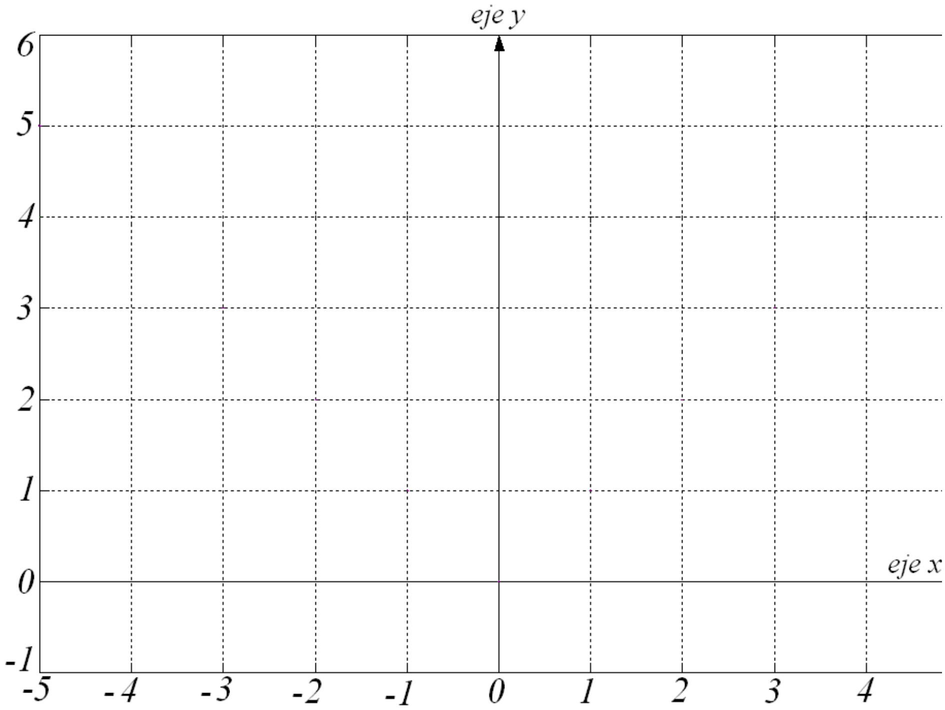
Utiliza cada uno de los planos que aparecen a continuación para solucionar los ejercicios anteriores.

1d. $\left|\frac{1}{2}x\right| < 1$

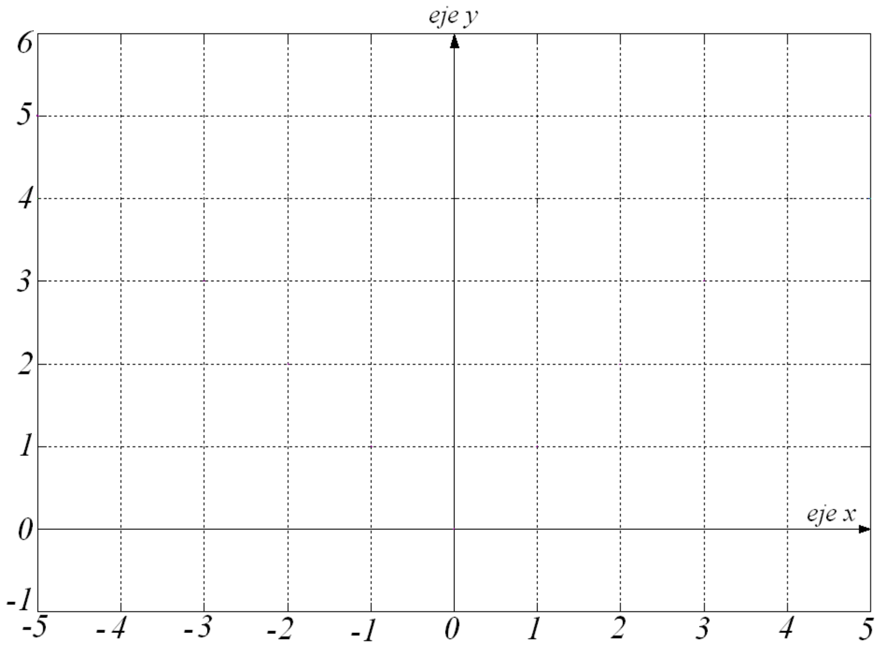


¿Qué ángulo forma $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ con el ***eje x*** (cuando $x \geq 0$)?

2d. $|2x-1| \leq 4$



3d. $|2x+3| \leq 4$



¿Qué ángulo forma $|2x+3|$ con el ***eje x*** (cuando $x \geq -\frac{3}{2}$)?

II. Compare la solución de los siguientes pares de inecuaciones: *1d* y *1a*, *2a* y *2d*, *5a* y *3d*, ¿son iguales ó diferentes?

i. El conjunto solución de $\left|\frac{1}{2}x\right|<1$ es: ___________ y el conjunto solución de $|x|\leq 2$ es: _________________. La dos inecuaciones tienen soluciones ☐ iguales / ☐ diferentes.

ii. El conjunto solución de $|2x-1|\leq 4$ es: ______________ y el conjunto solución de ______________________ es: ____________. La dos inecuaciones tienen soluciones ☐ iguales / ☐ diferentes.

iii. El conjunto solución de $|2x+3|\leq 4$ es: _______________ y el conjunto solución de ______________________ es: ____________. La dos inecuaciones tienen soluciones ☐ iguales / ☐ diferentes.

III. ¿Cuáles de los pares de inecuaciones *1d* y *1a* (*2a* y *2d*, *5a* y *3d*) son equivalentes? ***Justifica tu respuesta***

IV. ¿Es posible encontrar dos funciones, una $f(x)=|ax+b|$ con ($a, b \in \mathbb{R}$) y otra $g(x)=c$ (donde c es una constante), tales que el conjunto solución de la inecuación $f(x)<g(x)$ es el intervalo $(-1, 4)$? ***Explique su respuesta.***

V. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas de la siguiente manera: $f(x)=|ax+b|$ y $g(x)=c$. Dé condiciones sobre los parámetros a,b,c de modo que:

i. $f(x)<g(x)$ siempre tenga solución en los reales.

ii. $f(x)\geq g(x)$ siempre tenga solución en los reales.

iii. El ángulo que forma $f(x)$ con el eje *x*, sea de 45°, para todo $x\geq\frac{-b}{a}$, con $a\neq 0$.

iv. El ángulo que forma $f(x)$ con el eje *x*, sea mayor a 45°, para todo $x\geq\frac{-b}{a}$, con $a\neq 0$.

v. El ángulo que forma $f(x)$ con el eje *x*, sea menor a 45°, para todo $x\geq\frac{-b}{a}$, con $a\neq 0$.

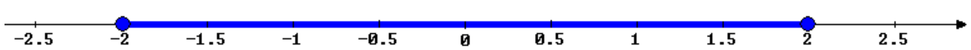
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
CURSO: Iniciación al álgebra
TEMÁTICA: Inecuaciones lineales con valora absoluto en una variable
Código: ________________________

Junio 11 de 2009

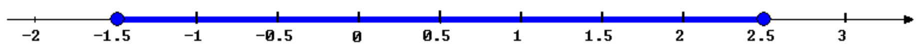
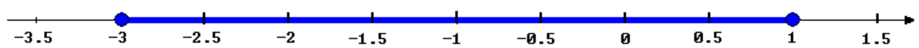
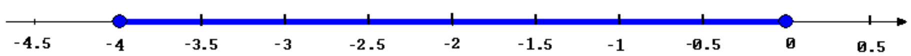
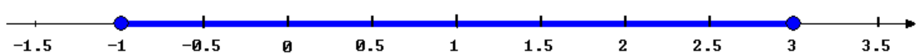
Situación 2. Parte A (Inecuaciones vs. vecindad)

1. Identificar las escrituras algebraicas correspondientes a la representación gráfica, en la recta real, del conjunto solución de inecuaciones lineales con valora absoluto en una variable.
2. Solucionar inecuaciones lineales con valor absoluto a partir de su interpretación geométrica en la recta real. .

I. Completa la tabla

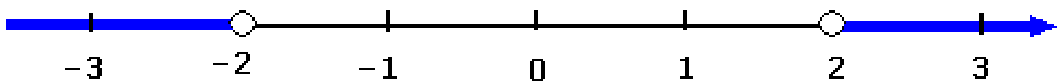
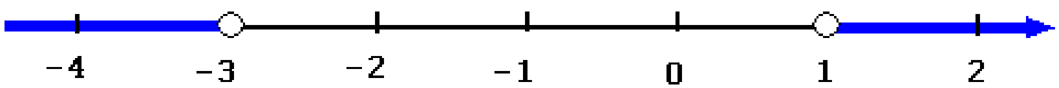
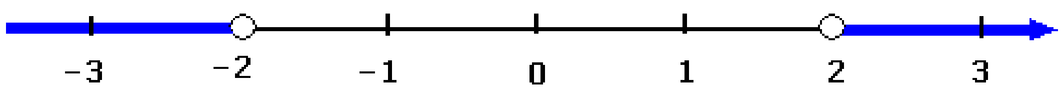
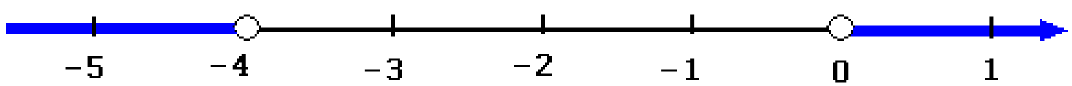
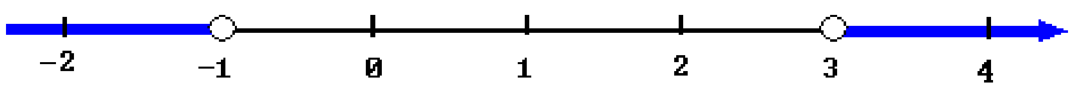
Representación gráfica en la recta real, de la solución de la inecuación lineal con valor absoluto, la escala es la misma para todas las rectas.	¿Cuál es el punto medio del intervalo?	¿Cuál es la distancia del punto medio a cada uno de sus extremos?	Inecuación con valor absoluto
1. 	0	2 *unidades*	$\lvert x \rvert \leq 2$ El intervalo solución es: $[-2, 2]$

Representación gráfica en la recta real, de la solución de la inecuación lineal	¿Cuál es el	¿Cuál es la	Inecuación con valor

con valor absoluto, la escala es la misma para todas las rectas.	punto medio del intervalo?	distancia del punto medio a cada uno de sus extremos?	absoluto
2. 	0.5		
3. 			$\|x+1.5\|\le 2$ El intervalo solución es: ______
4. 			______________ El intervalo solución es: [-4, 0]
5. 		2 *unidades*	______________ El intervalo solución es:______

II. Indica las semejanzas y las diferencias de los ejercicios 1 a 5.

III. Completa la tabla.

Representación gráfica en la recta real, de la solución de la inecuación lineal con valor absoluto, la escala es la misma para todas las rectas.	Inecuación con valor absoluto
6. 	$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ es la solución de la inecuación $\lvert x \rvert > 2$.
7. 	_______________ es la solución de la inecuación _________________________
8. 	_______________ es la solución de la inecuación _________________________
9. 	_______________ es la solución de la inecuación _________________________
10. 	_______________ es la solución de la inecuación _________________________

IV. Indica las semejanzas y las diferencias de los ejercicios 6 a 10

Anexo D

Una Prueba de Contraste

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Tema: Inecuaciones con valor absoluto en una variable
Febrero-Junio de 2009

Código: __ __ __ __ __ __ __ __ __   **Fecha:**

INSTRUCCIONES GENERALES

- El tiempo máximo que tienes para resolver tu cuestionario es de dos horas (2h).
- Si quieres puedes usar tu calculadora.
- **Justifica cada una de tus respuestas, indicando el procedimiento utilizado.**
- Es posible que los ejercicios propuestos tengan más de una forma correcta de solución. Adopte una y escríbala.
- No hay hoja adicional de trabajo. Utiliza, el espacio provisto en el cuestionario, para desarrollar tu examen.
- Tú profesora no está autorizada para responder preguntas sobre el tema.
- Al finalizar el cuestionario encontrarás un espacio para escribir tus observaciones, en ellas podrá expresar si tienes dificultades para responder alguna pregunta. Por ejemplo, podrías escribir: no es claro el enunciado de la pregunta 9, no sé del tema, no lo recuerdo, etc.

CUESTIONARIO

1. Expresa en tus propias palabras el significado de la expresión: $|x-a|\le b$, donde a y b representan constantes tales que $a, b \in \mathbb{R}$ y x es una cantidad desconocida que también pertenece a los reales.

2. Una inecuación equivalente a $|3x-6|<9$

a. $|x-6|\le 3$ **b**. $|x-2|\le 3$ **c**. $|2-x|<3$ **d**. $3x-6<9$

Justifica tu respuesta.

3. Considera el siguiente procedimiento realizado por Juanita para hallar la solución de la inecuación $x^2 \geq 9$, en los reales:

Paso 1: $x^2 \geq 9$

Paso 2: $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$

Paso 3: $x \geq \pm 3$

Juanita ha cometido por lo menos un error, identifica uno di cuál fue.

4. Considera las funciones $f(x) = |x+2|$ y $g(x) = 3$. Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) < g(x)$. ***Justifica tu respuesta, indicando el procedimiento utilizado***.

5. Considera la **Figura 1**

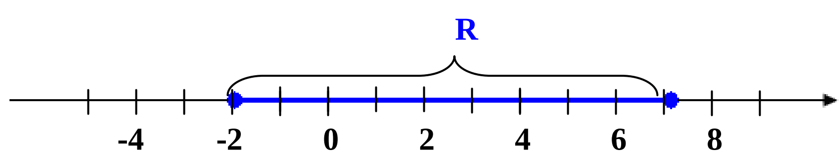


Figura 1

a. Da **una** descripción de la región R (sombreada) en la **Figura 1** (aunque pueden haber múltiples respuestas correctas, ***plantea una sola***).

b. La descripción de la región R (sombreada) en la **Figura 1** dada por Santiago es: $R = \{x \in \mathbb{R}: |2x - 5| < 9$. ¿Es correcta la respuesta de Santiago? ***Justifica tu respuesta.***

c. Juanita respondió: "*R representa todos puntos sobre la recta real cuya distancia a* $\frac{5}{2}$ *es a lo sumo* 9 *unidades*" ¿Es correcta la descripción de la región R (sombreada) en la **Figura 1** dada por Juanita? ***Justifica tu respuesta.***

6. A partir de la gráfica de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que aparecen en la **Figura 2**, de ser posible, encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales:

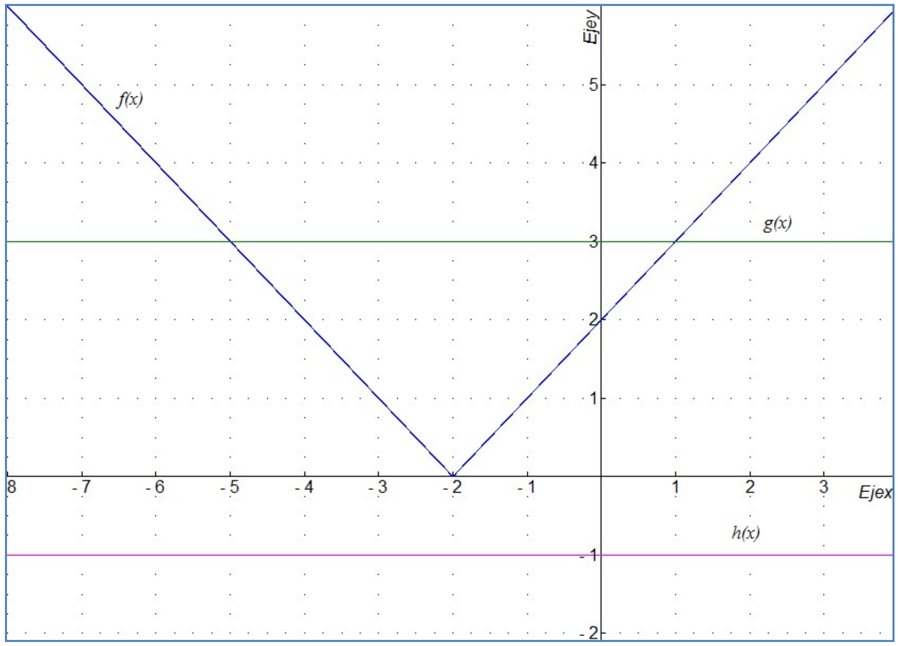


Figura 2

a. $f(x) \geq g(x)$. ¿Cómo llegaste a la respuesta?

b. $f(x) < h(x)$. ¿Cómo llegaste a la respuesta?

7. Describa el conjunto de puntos que están en la región rectangular (sombreada) de la **Figura 3**, mediante la utilización del valor absoluto y da su significado como distancia entre puntos.

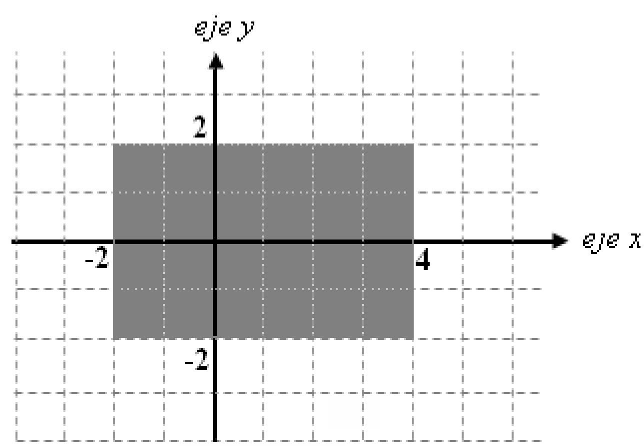


Figura 3

OBSERVACIONES____

____