EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA TRANSICIÓN BACHILLERATO UNIVERSIDAD.

FABIÁN PORRAS TORRES (cód. 0600028)

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (7412)

SANTIAGO DE CALI

MAYO DE 2011

El Concepto de Función en la Transición Bachillerato Universidad.

Fabián Porras Torres

Informe final de investigación, como requisito para optar al Título de Magíster en Educación

Directores:

Jairo Iván Álvarez Gaviria, PhD.

César Augusto Delgado García, PhD.

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática

Santiago de Cali

Mayo de 2011

El Concepto de Función en la Transición Bachillerato Universidad.

Fabián Porras Torres

Descriptores:

Función.

Estructura teórico conceptual.

Estados de comprensión.

Actos de comprensión

Obstáculos

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática

Santiago de Cali

Mayo de 2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 13 de Septiembre de 2011
ESTUDIANTE: FABIÁN PORRAS TORRES - CODIGO: 0600028
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: **"EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LA TRANSICIÓN BACHILLERATO UNIVERSIDAD"**
DIRECTOR DE TESIS: Profesor JAIRO ALVAREZ GAVIRIA
EVALUADORES: Profesora GABRIELA ARBELAEZ ROJAS *Profesor HUMBERTO MORA MARTÍNEZ*
COMENTARIOS DE LOS JURADOS
APROBADO X *APLAZADO* ___ *RECHAZADO* ___

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. JAIRO IVAN ALVAREZ GAVIRIA
Director de Tesis

Prof. GABRIELA ARBELAEZ ROJAS
Jurado - Evaluador

Prof. HUMBERTO MORA MARTÍNEZ
Jurado - Evaluador

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
En reemplazo del
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

DEDICATORIA

A mi esposa y mi hijo, por todo el tiempo que me regalaron, mirando y apoyando con paciencia, esperando para disfrutar juntos…

A mi madre, hermanos y sobrinos, que añoran mis visitas frecuentes.

A mi abuela…que le tocó ver el fruto de todo este esfuerzo desde el cielo.

A mi hermano "más delgado", por él y gracias a él inicié este camino…yo sé que está muerto de la risa, como siempre, por todo.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

Tabla de contenido

RESUMEN

Esta tesis aborda como problema la ausencia de un referente de formación matemática, relativa al concepto de función, deseable en egresados del bachillerato, que dé respuesta a las exigencias de los cursos de cálculo en carreras de ciencias e ingeniería. Inicialmente muestra los resultados de un estudio histórico del concepto de función apoyado sobre la adaptación que del modelo de S. Toulmin hizo Delgado C. (2003) complementándolo con aspectos de la epistemología genética de Piaget. Posteriormente presenta un artículo sobre el papel que desempeña el concepto de función en los cursos de cálculo diferencial e integral analizando, desde las matemáticas mismas, la manera en que dicho concepto es demandado en la constitución conceptual de otros conceptos, procesos o problemas matemáticos. Luego describe, a través de mapas conceptuales matemáticos ajustados, una estructura teórico conceptual de función que da respuesta a las demandas previamente identificadas; esta se fundamenta epistemológica, didáctica y cognitivamente. Finalmente se caracteriza un estado básico de comprensión a través de la identificación de actos de comprensión y obstáculos asociados, según una propuesta de Álvarez J. (2009) sobre lo que es comprender un concepto matemático, y se identifican problemas que pudieran presentarse en la apropiación de partes seleccionadas de la ETC, incluyendo reportes de otras investigaciones.

Palabras clave: función, estructura teórico conceptual, demanda matemática, demanda cognitiva, actos de comprensión, obstáculos, comprensión.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han enfocado principalmente en el estudio de la construcción conceptual de los objetos matemáticos, enriqueciéndose de las teorías y metodologías de campos como la Psicología, la Epistemología y la Semiótica entre otras y ramificándose en líneas de investigación como la Historia de las matemáticas, las Tecnologías de la información y las comunicaciones y la Didáctica de las matemáticas; en esta última línea ha enfocado sus trabajos el grupo "Formación Matemática en Contextos Curriculares" del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Esta tesis se enmarca en los proyectos de dicho grupo, reporta un estudio que surge de la preocupación por el bajo rendimiento académico que, con frecuencia, presentan los estudiantes de ciencias e ingeniería en los cursos de Cálculo y toma como objeto matemático de análisis el concepto de función por su carácter articulador e integrador en dichos cursos.

El análisis se aborda desde tres frentes: un estudio histórico crítico del concepto, un estudio del papel que juega el concepto de función en los citados cursos universitarios y el análisis de diversas investigaciones que han identificado problemas y dificultades notables en los procesos de apropiación del concepto de función.

El apoyo teórico y práctico central del trabajo de investigación se obtiene de los trabajos de Álvarez J., Delgado C., Sierpinska A., Dubinsky E., Tall D. y Vinner S. y se complementa por algunas de las diversas investigaciones que se han hecho acerca de la historia, enseñanza y aprendizaje del concepto de función y de sus conceptos soporte: Breidenbach D., Carlson M., Rüthing D., Deulofeu J., Kleiner I., Hitt F., Monna, A. F., Ochoviet C., Ruiz, L., Sfard, A., Youschkevitch, A. P. entre otros.

Este trabajo de investigación busca primero, a través de un barrido histórico, en el que se identifiquen las necesidades y desequilibrios que favorecieron la evolución del concepto de función hasta su forma actual, y de un análisis del papel que desempeña dicho concepto en los primeros cursos universitarios de cálculo, proponer una estructura teórico conceptual que responda a tal papel; segundo, caracterizar, a partir de la estructura propuesta, un estado básico de comprensión de función y, tercero, identificar problemas y vacíos notables que pudiera tener un estudiante en el proceso de apropiación de partes seleccionadas de dicha estructura; todo esto con el fin de proporcionar elementos epistemológicos y didácticos para posteriores propuestas de enseñanza del concepto de función en la transición bachillerato universidad, en una aproximación más científica a la teorización sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos en el bachillerato.

Los capítulos 1, 2 y 3 dan cuenta de los antecedentes y la justificación del problema de investigación, someramente descrito en esta introducción, y del marco teórico y metodológico en que se apoya todo el proceso.

El estudio histórico se presenta en el capítulo 4 y se apoya sobre la adaptación que del modelo de S. Toulmin hizo Delgado C. (2003) en su estudio de la continuidad en los griegos al complementarlo con aspectos derivados de la epistemología genética de Piaget. Las ideas de Toulmin sobre el conflicto cultural (desde el punto de vista de la filogénesis) se nutren de los mecanismos de equilibración propuestos por Piaget (desde el punto de vista de la ontogénesis) para explicar el avance del concepto de función como fruto de desequilibrios entre conocimientos y necesidades en momentos históricos de la cultura.

En el capítulo 5 se presenta el artículo “El concepto de función en los primeros cursos de Cálculo”, como resumen de los resultados del estudio de la manera en que el concepto de función es demandado matemáticamente en los cursos de cálculo diferencial e integral. Con ese fin se diseñaron programas representativos de los cursos que se dictan en las principales universidades de la región y se estudió la manera en que esos temas se abordan en los textos que suelen utilizarse como guía en esas universidades. Los programas representativos y el estudio de demandas aparecen en los anexos.

La estructura teórico conceptual propuesta se caracteriza en el capítulo 6 y da alcance al primer objetivo; utilizando criterios derivados del estudio histórico crítico, del estudio del papel del concepto de función en los cursos de Cálculo, de nuestra concepción de formación matemática y de diversas investigaciones relativas al concepto de función se escogen los conceptos que se articulan a través de nexos definicionales y/o proposicionales y se ponen en juego en los problemas de base, configurando la estructura teórico conceptual de función. Cada selección es justificada epistemológica, didáctica y cognitivamente.

En el capítulo 7 se describe un estado básico de comprensión de función a través de la identificación de dificultades, problemas, vacíos notables, actos de comprensión y posibles obstáculos que podrían presentarse en la apropiación de partes seleccionadas de la estructura teórico conceptual y que han sido reportados en otros estudios o encontrados al interior de este trabajo. Con este capítulo se alcanzan el segundo y tercer objetivos.

A lo largo de los capítulos 5, 6 y 7 se presentan hallazgos y recomendaciones relativas a la didáctica y cognición del concepto de función, en la medida en que se van presentando los productos de la investigación.

Finalmente, es importante aclarar que lo presentado en este trabajo de investigación, no constituye una propuesta didáctica ni se ha apoyado sobre entrevistas o intervenciones con estudiantes, si no que es fruto de reflexiones orientadas por el modelo teórico expuesto en los trabajos de Álvarez J. (1998, 2005, 2007, 2009) y por el análisis de gran variedad de investigaciones, en busca de apoyar maestros en ejercicio o configurar elementos para posteriores investigaciones, que culminen en propuestas didácticas para el concepto de función en la transición bachillerato universidad.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU JUSTIFICACIÓN

En este capítulo se mostrará cómo, al interior de nuestro grupo de investigación y fruto de reflexiones sobre la formación matemática y el aprendizaje conceptual de las matemáticas en la transición bachillerato universidad, se identifica el problema de investigación.

Luego de describir el contexto problemático y puntualizar la pertinencia de la investigación para la educación matemática, se plantean las preguntas que la orientan y dan lugar a sus objetivos.

1.1. CONSIDERACIONES TEÓRICAS INICIALES, EL CONCEPTO DE FORMACIÓN MATEMÁTICA Y EL CONCEPTO DE ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL

El grupo de investigación “Formación matemática en contextos curriculares” deriva su nombre del concepto de formación matemática introducido por el profesor Jairo Álvarez, cuyas ideas principales se exponen brevemente a continuación.

Formación matemática es un término que tiene un doble carácter: como proceso o como estado y que puede referirse a una persona concreta o a una persona ideal (lo que podría llamarse un “sujeto epistémico”). Cuando se habla de formación matemática como proceso se hace referencia al proceso mediante el cual un sujeto (ideal o concreto) construye un conjunto articulado de conocimientos matemáticos. Cuando se habla de formación matemática como estado se hace referencia al estado o nivel de conocimientos matemáticos que un sujeto (ideal o concreto) ha alcanzado después de un proceso formal de enseñanza-aprendizaje. El concepto presenta también una doble perspectiva: desde las matemáticas y desde el sujeto que aprende. En el primer caso, se circunscribe la perspectiva matemática a un contexto curricular, en particular la transición bachillerato universidad (aunque el modelo puede adaptarse a niveles superiores o inferiores) y en el segundo, al comportamiento intelectual y afectivo del sujeto.

Algunas investigaciones del grupo se han enfocado en la formación matemática desde la perspectiva del sujeto, buscando indagar por los procesos de construcción personal del conocimiento por parte de los sujetos en ámbitos curriculares, entendiendo formación matemática como "un comportamiento intelectual complejo, en el que se articulan diferentes habilidades y estrategias intelectuales, actitudes, expresión de una estructura cognitiva y afectiva que se construye y evoluciona como resultado de experiencias de todo tipo, en especial de procesos de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático socialmente existente, en contextos curriculares específicos, en términos del cual se evalúa y valora dicha formación."(Álvarez, 2005, 2).

Otras investigaciones se han enfocado en la formación matemática desde la perspectiva de las matemáticas, como estado y como proceso. Desde la perspectiva de las matemáticas la formación matemática como estado, se entiende como el conocimiento matemático que debe poseer una persona en un contexto cultural y/o profesional específico. Desde esa misma perspectiva, la formación matemática como proceso se entiende como la "secuencia de contenidos matemáticos que es necesario construir para alcanzar dicho nivel de conocimientos. Formación matemática como estado y como proceso son, por lo tanto, caras de una misma moneda."(2) Es en esta última perspectiva que se enmarca esta investigación, es decir, se investiga acerca de la formación matemática, como estado y como proceso, desde la perspectiva del conocimiento matemático socialmente existente apoyándose en el concepto de estructura teórico conceptual, entendida esta, en palabras del profesor Álvarez, como "un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos, mediante la cual se caracteriza un saber matemático presente en un discurso matemático específico, que puede tener o no fines de enseñanza"(8), e indagando acerca de posibles referentes para caracterizar la comprensión que de tal conocimiento es necesario que alcance un sujeto que planea ingresar a carreras de ciencias e ingeniería.

1.2. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación surge como fruto de la preocupación, ya generalizada, por las dificultades que presentan los estudiantes en su desempeño frente a situaciones que exigen la aplicación de habilidades y estrategias intelectuales que, normalmente, se consideran parte de la formación matemática esperada en cualquier estudiante promedio egresado del bachillerato. Dichas dificultades se evidencian en recurrentes fracasos al relacionar variables, establecer correspondencias y/o dependencias entre magnitudes en fenómenos objeto de estudio, analizar fenómenos de covariación etc. con la natural consecuencia de reprobación de cursos y, en algunos casos, hasta la deserción universitaria.

Este es un fenómeno bastante reportado, a nivel nacional algunos estudios muestran un bajo aprovechamiento en los primeros cursos universitarios de matemáticas con mortalidades entre el 35% y el 70%, porcentajes que permanecen como lo confirman estadísticas citadas en el encuentro realizado en la Universidad ICESI en el año 2005.

Esta situación ha sido objeto de estudio desde diferentes perspectivas, algunas enfocadas en la identificación de los problemas institucionales que pudieran generarla (Grupo Educación Matemática E.R.M, 1990), (Álvarez y Marmolejo, 1989), otras (las que son del interés de esta investigación) en la caracterización de deficiencias en la formación matemática del alumno que llega a la universidad, por ejemplo considerándolas resultado de insuficiencias en la construcción del conjunto básico de registros de representación (Robledo, 2003) o como manifestaciones observables de estados de comprensión de los conceptos matemáticos (Álvarez, Delgado et al, 2004) citando, en ambos casos, dificultades inherentes a los cursos de cálculo, en los que resulta relativamente sencillo “entrenar” al estudiante en la ejecución de cálculos mecánicos pero muy difícil la enseñanza del significado profundo de los conceptos.

Estas dificultades pueden provenir de numerosas fuentes y tienen diversas manifestaciones, pero algunas investigaciones dejan en claro que los estudiantes de nuestra región no están culminando sus estudios de bachillerato con un conocimiento adecuado del concepto de función, en particular la investigación de Álvarez y Delgado muestra que porcentajes superiores al 58% de los estudiantes que ingresa a la Universidad del Valle, no reconoce como tales funciones definidas por partes y que una gran mayoría tiene dificultades al establecer relaciones entre los distintos modos de representación de funciones, quedándose generalmente en concepciones dominadas por algún prototipo (fórmula, gráfica, tabla de valores, curva regular).

No es nuevo que la enseñanza y aprendizaje del concepto de función es algo complejo, numerosas investigaciones dan cuenta de ello: Breidenbach, Dubinsky, Hawks, Nichols (1992); Carlson (1995); Cooney, Wilson (1993); Dreyfus, Eisenberg (1984); Dubinsky y Harel (1992); Kaput (1992); Kleiner (1989); Leinhardt, Saslavsky y Stein (1990); Monk (1987, 1989,1992); Sierpinska (1992); Vinner, Dreyfus (1989); Sfard (1991), Ruiz (1998), Guzmán (1998), Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) son sólo algunas de ellas.

De cara al cálculo diferencial e integral su trascendencia en la transición bachillerato universidad es innegable. Las investigaciones de Deulofeu J, Hitt F. (1996) Oviedo, Lina Mónica Ma. (2003), Álvarez y Delgado (2001a, b, c y d) y Bagni, G. (2004), entre otras, constituyen una muestra de los esfuerzos que se han enfocado en esta problemática cuyos orígenes, según nuestra experiencia, podría encontrarse bien sea en propuestas de enseñanza que dejan al estudiante con una versión restringida del concepto de función que no responde a las exigencias que plantea la universidad o bien, en la ausencia de tales propuestas.

Propuestas insuficientes podrían tener origen en desconocimiento por parte de los maestros del objeto de estudio, de las dificultades inherentes a su enseñanza y aprendizaje y de lo que realmente significa comprender el concepto de función. Lo cual no resulta extraño si se tiene en cuenta la falta de un referente para una formación matemática respecto del concepto de función que pueda dar respuesta a las exigencias de los primeros cursos universitarios de cálculo y para determinar estados de comprensión de tal concepto.

En la universidad la situación no mejora, allí la problemática se aborda al iniciar los cursos de cálculo con una primera unidad de funciones, limitada en tiempos y estrategias de enseñanza, dejando a los estudiantes en niveles de comprensión instrumental (en términos de Skemp) que no solucionan el problema tal vez por razones similares a las citadas en los párrafos anteriores.

Un punto de partida para buscar soluciones a este problema sería entonces proponer un referente de formación deseable, en cuanto al concepto de función, en estudiantes que egresan del bachillerato, como fruto de estudios previos del concepto y de su papel en el desarrollo de los saberes propios de los primeros cursos de cálculo, en lo que se podría llamar una aproximación científica a su caracterización. Dicho referente debe servir de base para definir un estado básico de comprensión de función que permita hacer frente a las demandas de los cursos universitarios de cálculo, esto exige la formulación de qué se entiende por comprender este concepto, en lo que puede constituirse en la puesta en práctica de teorías e investigaciones al respecto. Ambos elementos proporcionarían fundamento a probables propuestas de enseñanza del concepto de función en el bachillerato.

Un trabajo como este abriría también una vía de acercamiento a una teoría de la enseñanza de las matemáticas en términos, si se quiere, más científicos, partiendo de un acercamiento epistemológico al concepto en estudio y a la manera en que este es puesto en juego en contextos curriculares más avanzados y continuando con la caracterización de un articulado de saberes en torno del concepto. Este primer producto proporcionaría elementos para dos aspectos identificados como problemáticos en nuestros análisis preliminares: un primer aspecto relativo a proponer referentes de formación con miras a capacitar a los estudiantes egresados de un determinado programa de formación para responder a demandas posteriores y un segundo aspecto relativo al estudio de dificultades y obstáculos propios de la enseñanza y aprendizaje del concepto que provean elementos para caracterizar y estudiar estados de comprensión.

Fundamentar propuestas de enseñanza del concepto de función y abrir un camino hacia una teoría de la enseñanza de las matemáticas es un claro aporte a la educación matemática, se configura entonces una labor de sumo interés y de gran pertinencia que amerita ser emprendida.

1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Siguiendo los planteamientos de la sección anterior, los estudiantes están llegando a los programas de ciencias e ingeniería con un concepto de función que resulta insuficiente para lo que los cursos de cálculo diferencial e integral les plantean. Entre otras, la causa nace de propuestas de enseñanza a nivel de bachillerato que no se han consolidado a partir de un referente claro que permita saber “qué es lo que necesita la universidad” y del desconocimiento de un significado contextualizado para la comprensión del concepto de función y de las dificultades y obstáculos inherentes a su aprendizaje.

Un referente de “lo que necesita la universidad” puede expresarse a través de las estructuras teórico conceptuales propuestas por Álvarez (2009) y un significado para la comprensión del concepto de función puede formularse a partir de tal referente. Esto permite formular tres preguntas cuya búsqueda de respuestas orientarán esta investigación.

¿Cómo debe ser una estructura teórico conceptual, relativa al concepto de función, que responda a las demandas matemáticas de los primeros cursos de carreras de ciencias e ingeniería y que sirva como referencia para caracterizar un estado de formación matemática deseable en los estudiantes que ingresan a dichas carreras?

¿Cómo debe ser un estado básico de comprensión deseable, con respecto a dicha estructura, en un estudiante que ingresa a dichas carreras?

¿Qué dificultades y vacíos notables suelen presentarse en el proceso de construcción personal, por parte de los estudiantes, de partes representativas de la estructura teórico conceptual de función propuesta?

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Las preguntas arriba planteadas se consolidan en los siguientes objetivos:

1.4.1. Objetivo 1:

Caracterizar una estructura teórico conceptual, relativa al concepto de función, que responda a las demandas matemáticas del currículum de primer semestre de las carreras de ingeniería y ciencias, que sirva de referencia para caracterizar un estado básico de comprensión de dicho concepto, deseable en estudiantes bachilleres, que ingresan a dichas carreras.

1.4.2. Objetivo 2:

Describir un estado básico de comprensión de función, deseable en bachilleres que ingresan a carreras de ingeniería y ciencias.

1.4.3. Objetivo 3:

Identificar problemas y vacíos notables que se suelen presentar en la construcción personal, por parte del alumno, de un estado básico de comprensión de función.

2. MARCO TEÓRICO

El objetivo 1 plantea caracterizar una estructura teórico conceptual (ETC); alcanzar este objetivo requiere, primero, explicar qué se entiende por dicho objeto y cómo se constituye. En este sentido se siguen los planteamientos consignados en (Álvarez, 2009). Y, segundo, disponer de criterios epistemológicos, cognitivos y didácticos, que permitan fundamentar la caracterización especifica que se realice de tal ETC. En este sentido se recurre a diversos estudios y publicaciones y en especial al estudio realizado sobre el rol que cumple el concepto de función en un primer curso universitario de Cálculo (Ver capitulo 5, “El concepto de función en los primeros cursos de Cálculo”).

Los objetivos 2 y 3, plantean describir un estado básico de comprensión, deseable en bachilleres que ingresan a carreras de ingeniería y ciencias, e identificar problemas y vacíos notables que suelen presentarse en la construcción personal de tal estado por parte del alumno. Estos objetivos requieren, a su vez, de una descripción de lo que se entiende por comprender un concepto matemático y esto, desde luego, se apoya en referentes teóricos importantes, que se describen en este capítulo.

2.1. OBSTÁCULOS COGNITIVOS Y ACTOS DE COMPRENSIÓN

La noción de obstáculo epistemológico aparece por primera vez en la epistemología de las ciencias experimentales (Bachelard, 1938) y fue retomada por Brousseau en 1976 quien la redefinió en términos de la teoría de situaciones didácticas. Brousseau definió un obstáculo como un conocimiento propio del saber matemático que funciona en ciertos dominios pero que en otros es fuente de errores, no es idiosincrásico, es resistente y difícil de modificar.

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos publicados entre los años 1980 y 1989. En ellos figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se sitúe en uno u otro de los polos del sistema didáctico (alumno, profesor y saber) o en la sociedad en general, distinguiendo entre obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural:

“Los de origen ontogenético son aquellos que se producen debido a limitaciones del estudiante (neurofisiológicas entre otras) en el momento de su desarrollo”.

“Los de origen didáctico son aquellos que parecen depender, solamente, de la escogencia de un proyecto dentro de un sistema educativo (de una propuesta institucionalizada de enseñanza del concepto)”

“Los de origen epistemológico son aquellos de los cuales uno no puede ni debe escapar, debido a su rol constitutivo del conocimiento que se trata de construir. Son encontrados en la historia de los conceptos mismos” (Balacheff, 1997)

Autores como Cornu (1991), según cita de Delgado (1998), utilizan el termino *obstáculos cognitivos* para agrupar los obstáculos anteriores, reseñados por Brousseau.

Es Sierpinska quien, en su trabajo “Sobre la comprensión de la noción de función” (Sierpinska, 1992) liga la *noción de obstáculo* con la *noción de acto de comprensión*. En dicho documento, adhiriendo al planteamiento de William Kuyk (1982) y otros, dice Sierpinska: (con relación a los planteamientos a que alude) “lo que es importante en el llamado proceso de aprendizaje y creación de las matemáticas son las discontinuidades, más que largos períodos en los que un progreso sostenido (de retroceso o stagnation) toma lugar” (Traducción libre, 2). Citando a Kuyk escribe “en el aprendizaje matemático los saltos (features) son prominentes: El reconocimiento repentino de una regularidad en la actividad de resolución de problemas, pero también en el descubrimiento de ciertas características que encajan en un cuadro comprensivo son ejemplos de ello" (Traducción libre, 2)

En esta dirección Sierpinska plantea que, en lo relativo al aprendizaje en matemáticas, cree que debe concentrarse en los saltos, es decir en los saltos cualitativos que pueden ocurrir en la mente humana. Dice que, mirados en perspectiva, dichos saltos, es posible identificar nuestras maneras antiguas o previas de conocer y que nos obstaculizan el conocer en una nueva forma. Este conocimiento puede ser calificado como un obstáculo (que puede ser epistemológico) pero si en lugar de mirar los errores del pasado concentramos nuestra mirada en lo que está frente a nuestros ojos, podemos mirar el salto como una nueva manera de conocer. La primera imagen puede ser llamada un acto de superación de una dificultad o un obstáculo. La última visión la podemos llamar un acto de comprensión. Las dos imágenes son complementarias. Ninguna de las dos, por si sola da cuenta del salto. Ambas son necesarias para explicar lo que pasó. Consecuentemente concluye:

"para describir lo que significa comprender un concepto particular ambas visiones o imágenes son necesarias: Actos de comprensión y actos de superación de dificultades u obstáculos". (El subrayado es nuestro, traducción libre, 3). Respecto de estos últimos Sierpinska es clara en que enfoca su atención en los de tipo epistemológico.

Los obstáculos epistemológicos son inevitables en la construcción de la comprensión de los conceptos y su existencia se refleja en su desarrollo histórico, por tanto un estudio epistemológico de un concepto puede dar evidencia de obstáculos epistemológicos que subsistan en sujetos actuales, ayudando a estudiar la comprensión que un estudiante puede tener de dicho concepto según las diversas maneras en que puede percibirlo y los obstáculos inherentes a esas maneras.

Siguiendo a autores como Looke (1985), Dewey (1988), Hoyles & Noss (1986), Sierpinska identifica como fundamentales los siguientes actos de comprensión:

-La identificación de un objeto entre otros objetos. El resultado de este acto es la aparición, como imagen principal, de lo que hasta el momento ha sido sólo fondo, haciéndose merecedor de interés y estudio. Si ya tiene un nombre, lo hace digno de la posición de término científico, o de tener un nombre, si no lo ha tenido.

-La discriminación entre dos objetos. Nos hace conscientes de la existencia de dos objetos distintos. Notamos tanto sus diferencias como sus propiedades relevantes.

-La generalización como acto que nos hace conscientes de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones. Descubrimos nuevas posibilidades de interpretación y consideramos irrelevantes algunos supuestos.

-La síntesis en su papel de reconocimiento de relaciones entre hechos aislados, conllevando a que hechos, propiedades, relaciones, objetos son agrupados en totalidades consistentes.

Sierpinska menciona también el acto de **usar** propuesto por Hoyles & Noss (1986) refiriéndose a la actividad de utilizar conceptos como herramientas para alcanzar objetivos específicos. Según ella, **usar** no es un acto de comprensión pero si una condición necesaria para que cualquier acto de comprensión ocurra.

2.2. LA DEFINICIÓN EN EL APRENDIZAJE CONCEPTUAL

Algunos autores han buscado identificar el papel de la definición en el aprendizaje de un concepto matemático; en esta tesis, interesan los planteamientos de Vinner (Vinner, 1991) y de Sierpinska, (Sierpinska, 1992).

VINNER (1991, 65) identifica que la definición pone en evidencia el conflicto entre la estructura de las matemáticas, como es concebida por los matemáticos profesionales, y el proceso cognitivo de adquisición de los conceptos.

Vinner plantea que saber la definición de un concepto no garantiza su comprensión, si no que es necesario construir lo que él y Tall llamaron “concept image” y que aquí se traduce como “imagen del concepto”:

> *“Usaremos el término* ***imagen del concepto*** *para describir la estructura cognitiva total asociada a un concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura”.* (Traducción libre de Tall y Vinner, 1981, 152)

Vinner describe luego la manera como la interacción entre la definición y la imagen del concepto interviene en la formación del concepto en la estructura cognitiva del sujeto.

En sus planteamientos afirma que cuando se intenta enseñar un concepto a partir de su definición y de ejemplos, se pueden generar algunas desadaptaciones en el aprendizaje conceptual, puesto que la imagen del concepto que construye el sujeto con frecuencia no refleja todos los aspectos del concepto:

> *“Una situación similar puede ocurrir cuando un concepto es presentado por medio de una definición. La celda de la imagen del concepto está vacía inicialmente, después de varios ejemplos y explicaciones, poco a poco se*

> *va llenando. Sin embargo, no necesariamente refleja todos los aspectos de la definición del concepto.”* (Traducción libre, 70)

Vinner ejemplifica esta situación citando el caso de estudiantes que, después de estudiar el concepto de función como correspondencia entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto exactamente un elemento del segundo conjunto, no admiten que la correspondencia que asigna a los números diferentes de cero su cuadrado y -1 al cero, es una función. Considera Vinner que esta situación puede superarse si se tiene conciencia de la necesidad de una interacción de largo plazo entre la definición y la imagen del concepto, favorecida por la presentación de suficientes situaciones y ejemplos que cubran toda la generalidad que posee la definición del concepto de función.

En opinión de Vinner:

> *"…muchos profesores de nivel secundario y universitario esperan un proceso unidireccional para la formación del concepto, como se muestra en la figura 3, a saber, que esperan que la imagen del concepto estará formada por medio de la definición de concepto y será completamente controlada por ella."* (Traducción libre, 71)

En el proceso de formación conceptual Vinner diferencia contextos cotidianos y contextos técnicos.

En el primer caso, para comprender una frase, usualmente no acudimos a la definición de los términos presentes en ella. Esto sucede porque en dichos contextos los términos no los hemos conocido a través de una definición, si es que la tienen, si no a través de su uso. Los contextos técnicos, por el contrario, imponen situaciones en las que no consultar la definición puede llevar a resultados inadecuados.

Vinner no limita sus análisis al papel de la definición en la formación del concepto, aborda también su papel en los procesos de solución de problemas o tareas. Plantea que el común de los maestros de secundaria (Vinner se refiere al contexto en que él realiza su investigación) espera que sus estudiantes, en el proceso de solución de un problema en contexto técnico, consulten, de una u otra manera la definición del concepto, sin embargo pese a ser este el proceso deseable, los estudiantes no suelen actuar de esta manera, si no que actúan, básicamente, consultando su imagen del concepto:

> *"…no importa cómo reacciona el sistema de asociación cuando se plantea un problema en un contexto técnico, no se supone que formulará una solución antes de consultar la definición del concepto. Esto es, por supuesto, el proceso deseable. Lamentablemente la práctica es diferente, la celda de la definición del concepto, incluso si no está vacía, no es consultada durante el proceso de solución."*(Traducción libre, 73)

Con la última frase de la cita anterior, Vinner hace referencia a que la definición del concepto comúnmente no es consultada en el proceso de solución de una situación problema. Vinner profundiza un poco más en estas ideas mencionando cómo las personas actúan según sus hábitos cotidianos al resolver situaciones y proponiendo una estrategia para obligar la consulta de la definición formal del concepto:

> *"La vida cotidiana impone hábitos y el sujeto no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal. En la mayoría de los casos, la referencia a la celda de la imagen del concepto resulta ser exitosa. Este*

> *hecho no anima a la gente a hacer referencia a la celda de la definición de concepto. Sólo problemas no rutinarios, en los que imágenes del concepto incompletas puedan llevar a errores, pueden animar a la gente a referirse a la definición del concepto. Esos problemas son escasos y cuando son propuestos los estudiantes lo consideran injusto. Por lo tanto, no hay aparentemente ninguna fuerza que puede cambiar los hábitos de pensamiento común que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos."* (Traducción libre, 73)

En síntesis, Vinner plantea que el mero conocimiento de la definición matemática de un concepto no garantiza su comprensión. Pero explicita la importancia de esta en los procesos de solución de situaciones problema en contextos técnicos como el matemático, enfatizando en la necesidad de que los estudiantes adquieran conciencia de la importancia de consultar la definición formal del concepto en dichos procesos.

SIERPINSKA (1992) hace también planteamientos sobre el papel de la definición en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Al igual que Vinner, dice que para comprender un concepto no es suficiente con leer su definición. Afirma que debemos llegar a ubicarlo en relación a otros conceptos, distinguiéndolo de ellos y descubriendo sus aplicaciones:

> *"Solamente cuando hemos visto ejemplos de lo que es y de lo que no es el objeto definido, cuando podemos decir que éste es y ése o aquel no es, cuando tenemos conciencia de sus relaciones con otros conceptos, cuando advertimos que estas relaciones son análogas a otras que nos son familiares, cuando descubrimos la posición que el objeto tiene en una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones, entonces podemos afirmar que*

> *hemos comprendido alguna cosa respecto al concepto”* (Traducción libre de Sierpinska, 1992, 2)

Según Sierpinska, llegar a comprender el concepto de función significará llegar a responder dos preguntas:

“¿Qué dice la definición del concepto de función?... ¿A qué hace alusión la definición?” (Traducción libre, 6)

Dice entonces que la respuesta a la primera pregunta se puede agotar con la definición de función como una tripla, pero al abordar la segunda manifiesta que, más allá de lo que dice la definición, están presentes interpretaciones y aplicaciones del concepto, así como formas de pensamiento y razonamiento.

Sin embargo no niega la importancia de la definición, por el contrario la considera importante porque encierra y articula los objetos que permiten su existencia y que nos deben guiar en la búsqueda de las condiciones para comprender el concepto de función:

> *“Así, en nuestro intento de definir las condiciones básicas de comprensión del concepto de función, trataremos de guiarnos por una exploración de los referentes de la definición de función. Nos hacemos la pregunta: ¿A qué se refiere en realidad la definición? ¿Qué objetos presentes se pueden identificar, discriminar en medio de ellos? ¿Qué clase de ordenaciones pueden ser encontradas que puedan surgir de la extensión de la realidad por discernimiento, generalizaciones y síntesis?”* (Traducción libre, 6)

Un aspecto importante en la investigación de Sierpinska radica en la identificación del conflicto entre la definición del concepto de función y el prototipo que los estudiantes construyen a partir de los primeros ejemplos a los que han sido expuestos, los cuales generalmente son “continuos, no diferenciables en al menos un número finito de puntos, construidos sobre un trozo de una curva en su representación gráfica, dados por una fórmula simple” (Traducción libre, 24). Supone entonces el estudiante que de ese prototipo es que debe dar cuenta la definición, pero al encontrarse con que esta admite como tales otras funciones diferentes al prototipo, tiende a rechazar la definición a cambio de modificar el prototipo. Para Sierpinska, pasar de esta actitud a aquella en que se acepta la definición con todas sus consecuencias, es un gran salto que exige un estudio más allá de las funciones elementales.

En Vinner (1991) aparece ejemplificada esta situación; él menciona el caso de estudiantes que citan la definición de función pero no aceptan como tales funciones definidas por partes. Tanto Vinner como Sierpinska analizan la construcción conceptual, pero Vinner se enfoca también en los procesos de solución de tareas o situaciones problema y el papel que en tales procesos desempeña la definición. Respecto de esto último, es importante para el desarrollo de nuestro tercer objetivo considerar el trabajo que, apoyados en Vinner, adelantaron Álvarez y Delgado:

PROBLEMÁTICA TALL-VINNER. REFORMULACIÓN OPERATIVA EN EL CASO DE FUNCIÓN (Álvarez y Delgado, 2001a)

Como ya se dijo, para Vinner un sujeto adquiere un concepto cuando construye una imagen de él:

“Suponemos que adquirir un concepto significa formar una imagen de él. Conocer de fondo la definición, no garantiza comprender un concepto. Para comprender, creemos, se requiere tener una imagen del concepto” (Traducción libre, 1991, 69)

Adicionalmente Tall y Vinner aclaran que:

> *“la imagen del concepto formada, no tiene que ser coherente en todo momento”* (Traducción libre, 1981, 152)

Lo que indica que la estructura que construye el sujeto muestra diferentes facetas dependiendo de las necesidades del momento, es decir, reacciona activando la parte de ella que mejor se adapta a la situación según su estado de desarrollo. En palabras de Tall y Vinner:

> "Llamaremos imagen evocada del concepto a la porción de la imagen del concepto que se activa frente a una determinada situación" (152)

La imagen evocada a que se hace referencia depende entonces no sólo del estado de desarrollo de la estructura cognitiva si no del contexto en que sea exigida.

En cuanto a la definición del concepto, Tall y Vinner hacen una importante diferenciación entre la definición institucional o formal del concepto y la definición que construye el estudiante o sea la definición personal del concepto:

> *"La definición de un concepto, si es que tiene una, es otro asunto. Consideraremos la definición del concepto como una conformación de palabras utilizadas para especificar el concepto. Un individuo puede aprenderla por repetición o, más significativamente aprenderla y relacionarla, en un mayor o menor grado, con el concepto como un todo. También puede ser una reconstrucción personal de una definición. En este caso la conformación de palabras que el estudiante utiliza es una manifestación de la imagen evocada del concepto. De esta manera una definición personal del concepto puede diferir de una definición formal del concepto." (152)*

Apoyados en los planteamientos anteriores y en observaciones empíricas, Tall y Vinner, identifican algunos problemas en el aprendizaje de conceptos matemáticos que se manifiestan como desarticulaciones entre el concepto personal, la definición institucional del concepto y la definición personal, en lo que Álvarez y Delgado han denominado “Problemática Tall-Vinner”:

En algunos casos la imagen evocada en un contexto puede ser incoherente con la evocada en otro, se habla de un primer problema identificable en los citados artículos:

A. *“El concepto-imagen mirado como un todo puede presentar incoherencias, al activarse o ponerse en juego en diferentes situaciones”* (Álvarez y Delgado, 2001a, 4)

En otros casos, el concepto personal que ha construido el sujeto puede no estar acorde con el concepto matemático institucional:

B. *“Entre el concepto-imagen o concepto personal que construye el sujeto y el concepto matemático institucional se pueden presentar desadaptaciones, que llamaremos matemáticas, relativas a la forma en que el sujeto apropia el significado socialmente compartido del concepto matemático”* (5)

Se presentan también situaciones en que el estudiante no dispone de una definición personal o, en caso de disponer de una, esta no estar acorde con la definición institucional:

C. *“Es frecuente que los estudiantes no dispongan de la definición personal de un concepto matemático que han estudiado; pero aun en el caso de tenerla, y aun si la definición que verbalizan concuerda con la definición institucional, ella puede estar desarticulada del correspondiente concepto imagen sin que tenga efectos en la acción del sujeto”* (6)

Los tres problemas identificados más arriba permiten explicar porqué, en ciertas circunstancias, un estudiante puede dar evidencias de comprensión de un concepto y, en otras, no, ya sea en sus acciones o en las descripciones o justificaciones que da de ellas.

En opinión de Álvarez y Delgado,

> *"…lo anterior remite a la importancia de la articulación entre la definición personal y el concepto personal como un todo…, que convierte la definición personal en un elemento que da coherencia a las distintas partes del concepto personal que son evocadas en diferentes contextos."* (7)

En consonancia con esta última afirmación, en la que el papel de la definición es central, ellos introducen los conceptos de "estabilidad", "adaptabilidad" y "coherencia":

> *"Diremos que una **definición personal,** relativa a un concepto matemático, es **estable** en la medida en que la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones."* (9)

> *"Una definición personal **estable** se llama **bien adaptada o bien ajustada matemáticamente** si es equivalente a la definición institucionalizada de función."* (9)

> *"La **coherencia** de la definición se refiere al grado de articulación que tiene dicha definición personal con la acción, es decir con el concepto imagen evocado…"* (9)

Aclarando que la estabilidad no necesariamente implica buena adaptación matemática y que una definición personal estable, ya sea bien o mal adaptada, puede no ser coherente, o una definición personal estable, mal adaptada, puede ser coherente pasan a plantear que comprender un concepto:

> *"implica construir un concepto imagen asociado con el concepto, pero agregaremos que esta comprensión se constituye en un concepto personal **bien constituido matemáticamente** en la medida en que el sujeto dispone*

de una definición personal estable del concepto, coherente y bien ajustada a la definición matemática del concepto…" (10)

Con todo lo expuesto, queda en evidencia el papel preponderante de la definición institucional como referente para el análisis del aprendizaje conceptual y de los procesos de solución de situaciones problema. En el marco metodológico se verá como, en el desarrollo del capítulo 7, la definición será eje de parte de los análisis que se adelantarán para alcanzar el segundo y tercer objetivos.

2.3. TEORÍA APOE DE DUBINSKY- LA ABSTRACCIÓN REFLEXIVA Y LA TOMA DE CONCIENCIA DE PIAGET

Influido por la propuesta de Piaget acerca de la **abstracción reflexiva** como base para la construcción de los conceptos matemáticos, Dubinsky (1992) desarrolló la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) en la cual la comprensión se desarrolla a partir de la manipulación de los objetos, ya sean físicos o mentales, conformando acciones que se interiorizan como procesos que luego se encapsulan como objetos. Estos objetos pueden desencapsularse hacia el proceso desde el cual se originaron. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos se organizan en esquemas.

El mecanismo que permite esta construcción es la abstracción reflexiva; mediante ella el sujeto puede identificar los elementos más sobresalientes del concepto y separar las propiedades que los relacionan. La abstracción reflexiva posibilita la construcción de nuevas estructuras a través de la creación de interconexiones entre conceptos que se han abstraído previamente, de ahí que este concepto revista importancia en el análisis de los procesos de construcción mediante los cuales un estudiante apropia una definición matemática que se estructura sobre varios conceptos, como es el caso en la ETC que se propondrá para el concepto de función.

Para Dubinsky un esquema no es estático si no que se encuentra en constante evolución. En este modelo la base para la comprensión es la acción, es decir, cualquier operación mental o física, de carácter externo y generalmente de tipo algorítmico, y que pueda transformar un objeto, ya sea este físico o mental (Asiala y otros, 1997), en este sentido esta teoría es similar a la comprensión como superación de obstáculos, a través de actos de comprensión, propuesta por Sierpinska.

La repetición de la acción en circunstancias similares conlleva su interiorización convirtiéndose en una construcción interna: un proceso, el cual tiene la característica de poder ser descrito, reflejado y/o revertido por el sujeto, aunque no exista el estímulo externo que dio comienzo a las acciones iniciales. Se asemeja esta afirmación con la toma de conciencia propuesta por Piaget, según cita Delgado (1998, 57)), en la que ocurre el paso de lo inconsciente a lo consciente, a través de

> *"…continuas construcciones, que consisten en rehacer acciones u operaciones de las que se quiere tomar conciencia y esto a todos los niveles: la toma de conciencia del acto transforma a éste en imagen; la de la imagen transforma a ésta en palabra; la del movimiento transforma a éste en un signo; la toma de conciencia del esquema de acción transforma a éste en un concepto. Todas ellas, son procesos de reconstrucción que comparten el hecho de construir en el plano de la representación conceptual aquello que ya existe en el plano de la acción, es decir, el paso de una asimilación práctica (esquema-objeto) a una asimilación conceptual (esquema conceptual-observables/ y/o/ coordinaciones inferenciales)."*

La coordinación o la reversión de un proceso puede dar lugar a otros procesos; la coordinación ocurre cuando el sujeto se enfrenta a situaciones en que debe componer dos procesos diferentes en una estructura más compleja, la reversión ocurre cuando la situación a que se enfrenta el sujeto exige un proceso contrario al que ya ha interiorizado. En el caso del concepto de función, para la coordinación y la reversión un buen ejemplo es la composición y la inversión respectivamente. Una vez el sujeto puede actuar sobre un proceso, ya sea reflejándolo o revirtiéndolo, se puede considerar que este ha sido encapsulado convirtiéndose en un nuevo objeto al que es posible asociarle un nombre (también un símbolo), esto último es especialmente importante por cuanto el sujeto, a través del nombre (o del símbolo, en esta tesis) puede evocar el objeto y al proceso que lo originó para desencapsularlo cuando sea necesario a fin de utilizar sus propiedades en nuevos procesos, en el caso del concepto de función el encapsulamiento y desencapsulamiento da cuenta de situaciones como la creación de conjuntos de funciones y la posterior definición de operaciones como la suma y la multiplicación en dichos conjuntos.

Cuando el sujeto posee una colección de objetos y procesos relativamente coherente que le sea útil para comprender una situación y actuar frente a ella con un objetivo específico se dice que ha construido un esquema. Se trata de una representación mental del concepto, que incluye acciones, objetos, procesos e, incluso, otros esquemas y puede ser utilizada para resolver una situación o como un objeto sobre el que pueden ejecutarse acciones y procesos. El mecanismo que permite la construcción y/o ampliación del ámbito de aplicación de un esquema es llamado generalización el cual no es más que una forma de abstracción reflexiva.

2.4. ESTRUCTURAS TEÓRICO CONCEPTUALES

Como se dijo en la sección de antecedentes y justificación, para aportar herramientas que posibiliten la búsqueda de solución a la problemática identificada, esta investigación se apoyará en un referente de formación matemática deseable, respecto del concepto de función, en el contexto curricular de interés, con el fin de identificar dificultades en el proceso de construcción de dicho concepto. Álvarez (2009), con el fin de hacer una descripción de un determinado saber matemático, utilizable como referente en el estudio de problemas, propone el concepto de Estructura Teórico Conceptual (ETC):

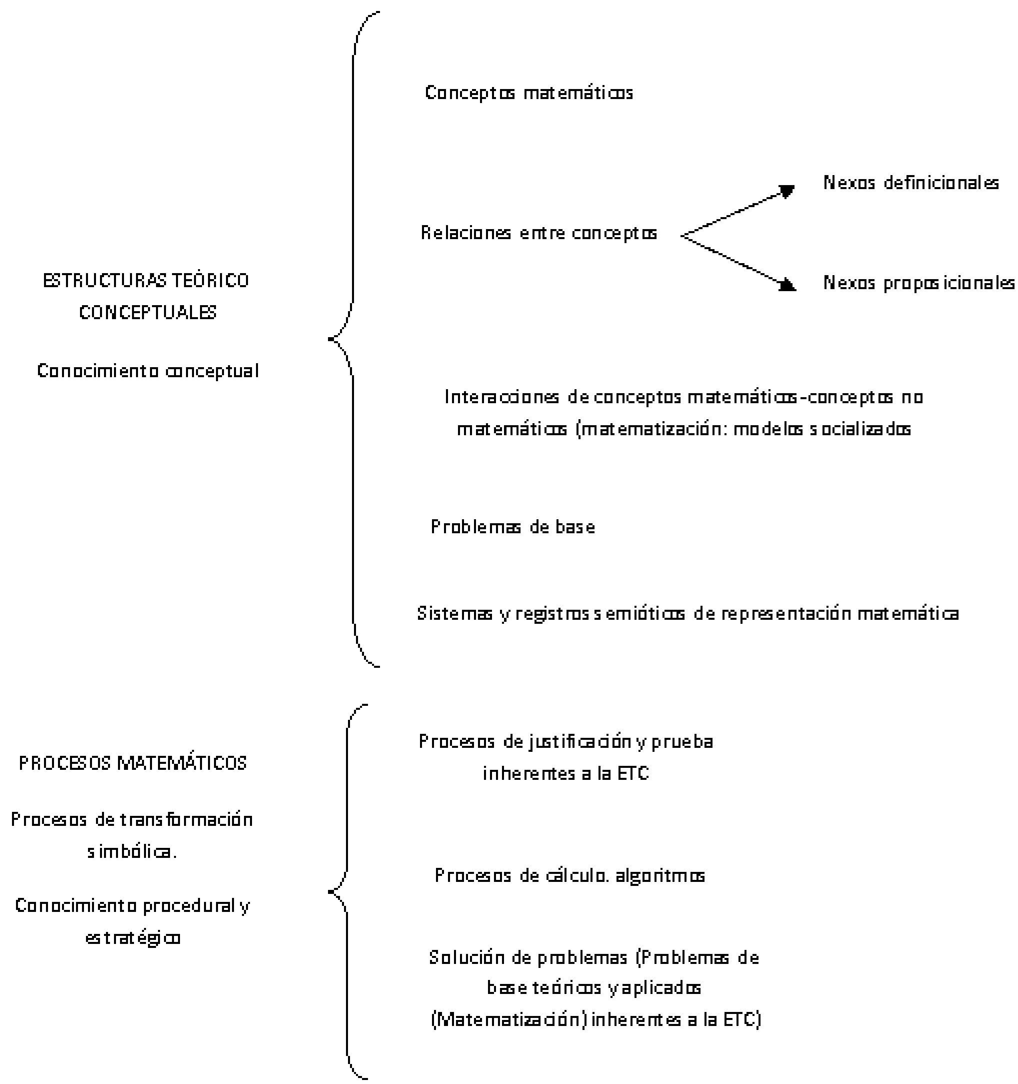
> *"…se hace necesario caracterizar un saber matemático institucional, que debe servir como telón de fondo para enmarcar el análisis de diferentes problemas… Por ejemplo,… se quiere analizar, sistemáticamente, las demandas cognitivas o actos de comprensión que, un determinado tema matemático, enseñado en un determinado contexto curricular, les plantea a los alumnos que lo estudian. En todas estas situaciones está presente un saber matemático institucional que sirve como referente de dichos análisis. Con el fin de disponer de diferentes conceptos y de una metodología que nos permita responder a tales necesidades hemos elaborado el concepto de estructura teórico conceptual. "* (Álvarez, 2009, 1)

Siguiendo a Álvarez:

> *"Una estructura teórico conceptual matemática (ETC) es un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos, mediante la cual se caracteriza un saber matemático presente en un discurso matemático especifico, en nuestro caso, con fines didácticos."* (1)

Álvarez, mediante el siguiente diagrama, exhibe los elementos constitutivos que dan forma a una ETC:

Figura 1. Elementos constitutivos de una ETC



Como puede observarse en el diagrama, los conceptos se relacionan de dos maneras: mediante nexos definicionales y mediante nexos proposicionales.

Para él, los nexos definicionales representan las conexiones que se establecen entre conceptos mediante definiciones, las cuales, por consideraciones didácticas, pueden no ser las formales.

La construcción de un concepto muchas veces exige la introducción previa de otros conceptos que sólo entran en juego para preparar el camino de ese concepto, por tal razón Álvarez afirma que:

> *"Los conceptos no vienen aislados. Forman* ***núcleos*** *con base en los cuales se van formando* ***estructuras conceptuales*** *amplias. La definición o elaboración de conceptos se apoya en otros conceptos (conceptos componentes o de soporte). Esta concatenación es fundamental en la construcción del conocimiento matemático."* (2)

Un concepto puede ser entonces el centro de lo que él ha llamado núcleo conceptual y dentro de este pueden surgir otros conceptos que no son soporte del concepto central pero que lo operacionalizan o lo complementan. Al respecto Álvarez cita como ejemplos:

> *"Mientras el concepto conjunto es un concepto componente o de soporte del concepto función, conceptos como dominio, imagen pueden considerarse complementarios. Hay también conceptos que toman un concepto central como soporte para profundizar en él generando categorías en el concepto original. Conceptos como los de función inyectiva y sobreyectiva, respecto del concepto función, serían de esta naturaleza."* (3)

Con fines didácticos es fundamental establecer las jerarquías entre los conceptos conformando estructuras.

Los nexos proposicionales son los teoremas o proposiciones que se establecen entre conceptos. Exhiben resultados teóricos que, según uno u otro autor pueden ser presentados como teoremas. Dentro de ciertos límites, una estructura teórico conceptual es relativa, puesto que los nexos definicionales o proposicionales pueden ser construidos de distintas maneras, de modo que lo que en una presentación puede ser considerado un teorema en otra puede ser una definición:

> *“Estas proposiciones constituyen los resultados teóricos que los textos subrayan como teoremas según las concepciones de los autores. Es importante, por lo tanto, que quede claro, desde un principio, que la forma de presentar dicha estructura es relativa dentro de ciertos límites, que los nexos teóricos pueden ser construidos de distintas maneras y que los nexos que se destacan pueden tener variaciones de acuerdo con la manera de comprender el tema.”* (3)

Álvarez al hablar de la manera como se da la inserción de las matemáticas en el conocimiento científico-técnico y humano en general, menciona una doble faz del conocimiento matemático, de un lado, la *faz interna,* es decir, las matemáticas como ciencia autónoma en la cual se expresan los resultados o verdades relativas a sus estructuras y conceptos, los criterios de su validación etc. Y, de otro lado, su *faz externa* en la cual se expresan los procesos de matematización de la realidad empírica y la forma como sus conceptos y desarrollos interactúan con otras disciplinas.

Apoyado en estos conceptos define el siguiente elemento constitutivo que se explicita en el diagrama, se trata del concepto de **matematización**:

> *“…los procesos mediante los cuales se conectan las que hemos denominado faz interna y faz externa de las matemáticas, es decir, mediante los cuales las matemáticas participan en la construcción conceptual de otras disciplinas y, en general, a los procesos mediante los cuales problemas no matemáticos son representados y resueltos matemáticamente.”* (4)

Para referirse a interacciones conceptuales consolidadas como parte de un conocimiento socialmente existente, utiliza el término modelos socializados de matematización haciendo referencia a modelos

> *“apropiados por el lenguaje ordinario o lenguajes especializados…La definición de rapidez como una derivada es uno de tantos modelos socializados de matematización, al igual que modelos de crecimiento como el lineal y el exponencial.”* (4)

Otro elemento importante de una ETC lo constituyen los problemas de base:

> *“Están referidos a los problemas que se espera el alumno esté en capacidad de resolver al culminar el estudio del tema considerado.”* (4)

En la propuesta de Álvarez acerca de la descripción de un estado básico de comprensión respecto de un concepto matemático, los problemas de base son centrales en lo que él ha llamado el marco interpretativo de los conceptos de la estructura teórico conceptual.

Estos pueden ser de orden teórico, es decir, aquellos problemas que el estudiante debe resolver como muestra de que ha apropiado la estructura teórico conceptual o que se convertirán en soporte para conceptos matemáticos posteriores. Los hay también surgidos desde otras disciplinas, en este caso se trata de problemas prototípicos que se enmarcan en modelos socializados de matematización que inscriben a la ETC en una práctica científica o tecnológica específica.

Aparecen también como elementos de una ETC los sistemas semióticos de representación matemática:

> *“…hacen referencia al conjunto de símbolos, figuras y gráficas (registros semióticos), con sus reglas de manejo, que se ponen en juego en el discurso matemático para designar o representar conceptos y participar en la expresión de los nexos definicionales y proposicionales y, por supuesto, en la representación semiótica de los procesos matemáticos…”* (5)

Para Álvarez el estudio de tales sistemas y registros semióticos es de gran utilidad en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ETC y de los procesos matemáticos expresados en ellas.

El término procesos matemáticos hace referencia al último elemento considerado en el diagrama. Se trata de las elaboraciones mediante las cuales se demuestran los nexos proposicionales y se resuelven los problemas de base, en el primer caso son procesos de justificación y prueba que incluyen, más que demostraciones, cualquier tipo de argumentación con registro semiótico que esté orientada a legitimar el nexo proposicional a que esté asociada, y en el segundo, procesos de resolución de problemas. La importancia de estos procesos radica en que

> *"…son los referentes del conocimiento matemático procedural o estratégico que se expresa en el saber matemático que se quiere caracterizar mediante la ETC y, por lo tanto, constituyen elementos concretos que permiten apreciar el nivel de fundamentación y razonamiento que sustenta el conocimiento matemático que se quiere caracterizar mediante la ETC."* (5)

Estos procesos matemáticos se objetivan y registran de manera escrita mediante procesos de transformación simbólica es decir, "secuencias de cadenas de registros semióticos o de representaciones gráficas" (6)

Sugiere Álvarez para describir las ETC la técnica de los mapas conceptuales matemáticos con el fin de facilitar su análisis y discusión. Este concepto se inspira en los mapas conceptuales de Novak y Gowin (1986) y será ampliado en el capítulo 6 al presentar el primero de tales mapas.

En línea con todo lo anterior Álvarez propone tales estructuras como referentes del sentido y significado matemáticos de los conceptos matemáticos y de la comprensión que logra un sujeto de tales conceptos:

> *“La comprensión, como fenómeno subjetivo, tiene su referente en los significados matemáticos e interpretativos en contexto, que se expresan en dichas estructuras, y que se presentan ante el sujeto como demandas cognitivas. La comprensión, en su mejor sentido, se entiende como la apropiación de dichos significados, en cuyo proceso el sujeto construye sus versiones personales de tales estructuras.”* (Álvarez, 2009, 7)

Respecto de tales versiones personales aclara que pueden estar bien o mal adaptadas matemáticamente.

En consecuencia, considera la comprensión conceptual como de carácter relativo:

> *“Para juzgar sobre la comprensión que alcanza un sujeto, de un concepto, es necesario considerar, por lo tanto, la estructura teórico conceptual que se toma como referencia y, desde esta perspectiva, lo que significa comprender un concepto puede tener connotaciones diferentes según sea la estructura teórico conceptual que se toma como referencia.”* (7)

Y ve la apropiación de conceptos más como la apropiación de estructuras teórico conceptuales:

> *… más que de conceptos aislados, de lo que se trata es de la apropiación de estructuras teórico conceptuales, que sirven de marco de referencia a los conceptos según situaciones dadas de enseñanza.”* (8)

Dicha apropiación entonces plantea demandas cognitivas que él entiende como actos de comprensión en el sentido de Sierpinska, y por tanto tal apropiación representa actos como:

> *“…identificar objetos o procesos matemáticos, o discriminar entre ellos, identificar o reconocer conexiones entre entidades matemáticas, generalizar, sintetizar articulaciones que generan nuevas totalidades u objetos (etc)”* (8)

La pregunta ¿Qué significa comprender un concepto matemático? adquiere entonces un referente caracterizable desde la perspectiva de las matemáticas

“mediante un conjunto de demandas cognitivas, es decir como un conjunto de actos de comprensión requeridos por la apropiación de la ETC que sirve de referencia al concepto. La comprensión que alcanza el sujeto (su estado de comprensión personal) estará determinado por sus respuestas a tales demandas.” (8)

Siguiendo estas ideas Álvarez propone planos de referencia para la comprensión conceptual:

“Un plano de referencia es un conjunto articulado de demandas o actos de comprensión que se consideran necesarios para apropiar aspectos parciales de la ETC que sirve de referencia al concepto.” (9)

Destaca dos planos en particular, uno relativo al conjunto de actos de comprensión requeridos por la apropiación del significado matemático del concepto, el cual puede ser presentado mediante una definición, no necesariamente la formal. En este primer plano las demandas cognitivas (los actos de comprensión) están asociadas con el reconocimiento de los conceptos soporte y con la identificación de su articulación y del papel en la generación del nuevo concepto, así como del fruto de dicha articulación. Siendo la definición la que da la manera en que se articulan los conceptos soporte y el papel que desempeñan en la construcción del nuevo concepto, es entonces la que se constituye en referente para este primer plano.

El otro plano está relacionado con los actos de comprensión, o demandas cognitivas, requeridos en la apropiación de versiones notables en contexto del concepto y con la identificación de las correspondencias entre tales versiones y la versión matemática del concepto. Es a estas versiones que Álvarez llama marco interpretativo del concepto.

Las versiones en contexto surgen de interacciones entre el concepto y conceptos, matemáticos o no matemáticos, siendo en estos últimos que se manifiesta la participación de las matemáticas en la construcción conceptual de otras ciencias y en sus aplicaciones en la vida cotidiana y en el conocimientos científico y/o técnico. Esto hace parte de lo que Álvarez ha llamado la faz externa del conocimiento matemático y que ejemplifica de la siguiente manera:

> *“Por ejemplo, respecto de conceptos como integral definido y derivada de una función, los conceptos de trabajo y rapidez, que son conceptos de la física, son versiones en contexto, respectivamente, de dichos conceptos y por lo tanto pertenecen a su marco interpretativo. Pero son también versiones en contexto, de los mismos conceptos matemáticos, pero al interior de las matemáticas, los conceptos de área debajo de una curva y pendiente de una recta tangente. En realidad estos últimos conceptos han sido, en gran medida, generadores históricos de los conceptos de integral y derivada.”* (11)

Álvarez recalca que los dos planos de referencia constituyen una unidad dialéctica en el desarrollo histórico del concepto, por cuanto las versiones en contexto constituyen aquello a lo que se refiere la definición y le da sentido al concepto y, “por tanto constituyen referentes de comprensión que el sujeto debe integrar en el proceso de su construcción personal.”

Afirma también que los marcos interpretativos son abiertos, pero se acotan y se construyen en el contexto de enseñanza desde la importancia matemática y la significación en la práctica matemática que tengan las versiones notables.

Recomienda igualmente que al estudiar estados de comprensión debe prestarse especial atención a demandas cognitivas que proceden de procesos de abstracción reflexiva que dan lugar a la interiorización de acciones externas y a encapsulamientos de procesos y objetos en símbolos.

Hay una aclaración de suma importancia en el documento de Álvarez, la elaboración de una ETC para caracterizar lo que significa comprender un concepto en contextos curriculares es un elemento de importancia para la fundamentación de propuestas didácticas, pero no plantea estrategias de enseñanza. Si no que, en sus palabras:

“Lo que se plantea es que, para comprender un concepto, no importa cómo, el sujeto debe constituir, él, los actos de comprensión identificados y mediante los cuales se concreta el planteamiento sobre lo que significa comprender dicho concepto.” (12)

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. CON RESPECTO AL PRIMER OBJETIVO:

El proceso de caracterización de una estructura teórico conceptual relativa al concepto de función, inicia con la identificación de las demandas matemáticas que el currículum de carreras de ciencias e ingeniería le plantea a aquellos estudiantes que ingresan a estas carreras; se trata de identificar de qué manera o maneras el saber matemático (conceptos, teoremas, proposiciones y/o problemas) presente en el contexto de los cursos de matemáticas del primer año en carreras de ciencias o ingeniería, exige en su construcción o solución al concepto de función. Este proceso se aborda desde la óptica de la actividad matemática en un contexto curricular, analizando qué elementos o connotaciones del concepto de función ingresan en la construcción de algunos saberes matemáticos. A manera de ejemplo pueden citarse elementos como dominio, rango, maneras de expresión o representación, etc. En cuanto a connotaciones, el concepto de función, para ciertos saberes matemáticos, entra como simple regla de asociación, para otros ingresa como objeto sobre el cual operar. La identificación de estos aspectos es un primer insumo para vislumbrar redes en torno y constitutivas del concepto de función que, se pretende, construya un estudiante.

Para la identificación de las demandas se diseñan programas representativos de los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo integral de los ofrecidos por universidades de la región, luego esos cursos se exploran, desde una perspectiva matemática, a fin de identificar aquellos conocimientos que se construyen en ellos y que requieren el concepto de función como soporte y aquellos problemas que exijan, bien sea, del concepto de función como herramienta de solución o de elementos proporcionados por dicho concepto.

Las demandas identificadas no constituyen el único elemento para la conformación de la ETC; la concepción de formación matemática que, respecto del concepto de función, agencia la línea de investigación y que se consolida en la manera como se integran todos los aspectos considerados en la propuesta en el contexto curricular considerado, es otro factor determinante en la escogencia de los conceptos, teoremas, problemas de base y demás elementos que ingresamos en la ETC. Teniendo en cuenta estos dos aspectos se conforma un listado de conceptos considerados importantes en la conceptualización de función y que le permitan al sujeto construir estrategias y/o procedimientos frente a situaciones de aprendizaje en el contexto de los primeros cursos de matemáticas universitarias (lo que se ha llamado "responder a las demandas matemáticas").

Sin embargo no basta con seleccionar los elementos; un concepto puede tener diversas definiciones dependiendo del sistema axiomático de que haga parte, un teorema puede enunciarse de varias maneras, incluso algunos conceptos en un sistema ingresan como definiciones mientras en otros ingresan como teoremas. Esta observación toma aun mayor fuerza en contextos curriculares en los cuales inciden no sólo factores de tipo axiomático sino también de tipo didáctico.

Por estas razones es importante disponer de criterios adicionales a las demandas matemáticas y a una concepción de formación matemática, para adoptar una u otra presentación de los conceptos y/o teoremas y establecer unos u otros nexos entre conceptos en el momento de configurar la estructura teórico conceptual de función. Esos criterios se construyen a partir de dos vías: la primera consiste en un estudio histórico crítico del concepto de función, que permita establecer un esquema de su génesis y desarrollo desde la perspectiva de las necesidades sociales y personales que lo promovieron y analizar la manera como unas u otras formulaciones se vieron, o no, favorecidas dependiendo de factores históricos y epistemológicos. La segunda se nutre de investigaciones didácticas relativas al concepto de función y sus conceptos tanto complementarios como constitutivos; a este respecto la bibliografía es demasiado amplia y un estado del arte para cada elemento se tornaría interminable, pero se seleccionan aquellos elementos que entren en consonancia con la concepción de formación matemática que se consolidará a lo largo de la investigación, respecto del tipo de concepto de función que se propone para que construyan los estudiantes y de la manera que se considera más adecuada para propiciar esa construcción personal.

El proceso de establecer los diferentes nexos requiere de un análisis, desde las matemáticas mismas, de las definiciones, a fin de identificar relaciones jerárquicas entre conceptos, es decir, identificar qué conceptos ofician como soporte de otros y de qué manera ingresan en la definición de los conceptos que se han configurado como centrales en núcleos conceptuales que, debidamente articulados, a través de nexos, ya sean definicionales o proposicionales, finalmente son los que van conformando la estructura conceptual amplia que da forma a la ETC.

Todo lo anterior provee una descripción de carácter matemático de la ETC, pero es importante, con fines de presentación y apoyo en su descripción detallada y de adentrarse con mayor claridad en los análisis del segundo y tercer objetivos, representarla a través de mapas conceptuales matemáticos ajustados. La representación sintética a través de este sistema se constituye en una herramienta que proporciona una visualización clara de la estructuración conceptual del concepto de función, otorgando a su descripción un mayor alcance en la ilustración de los nexos y jerarquías entre los conceptos. Los mapas conceptuales matemáticos ajustados son una adaptación de los trabajos de Novak y Gowin (1986) realizada por el profesor Álvarez (1998), quien conserva las pautas relativas a la jerarquía vertical de los conceptos y a la utilización de óvalos para su representación, pero sustituye las palabras de enlace por dos tipos de nexos de carácter matemático: proposiciones y definiciones, representando las primeras por flechas continuas dirigidas de la hipótesis a la tesis y las segundas, por flechas punteadas dirigidas de los conceptos soporte al concepto definido a partir de ellos.

Introduce además los núcleos conceptuales que facilitan la descripción matemática del concepto central.

Finalmente la ETC se complementa con aquellos problemas que se espera el estudiante esté en capacidad de resolver una vez apropiada la estructura, es decir, con lo que en el marco teórico se ha llamado problemas de base. Estos se proponen y formulan bajo tres criterios: primero, que den articulación y operacionalidad a los elementos constitutivos de la ETC apropiada por el estudiante; segundo, que le otorguen significación a la ETC con respecto al contexto curricular en que se propone y tercero, que pongan en juego los conceptos de la estructura teórico conceptual en situaciones propias de lo que en el marco teórico se define como el marco interpretativo.

3.2. CON RESPECTO AL SEGUNDO Y TERCER OBJETIVOS:

Se dijo en el marco teórico que, para Álvarez, la comprensión se entiende como la apropiación de dos significados para el concepto: el matemático y el de sus versiones en contexto (lo que se llamó marco interpretativo), los cuales se expresan en estructuras teórico conceptuales y se presentan al sujeto como demandas cognitivas. Por tanto, para describir un estado básico de comprensión de función, es necesario disponer de una estructura teórico conceptual de referencia, conformada con una selección de elementos de la ETC formulada al alcanzar el objetivo anterior. Tales elementos deben configurar el significado matemático básico del concepto de función y dar sentido a su marco interpretativo. En el primer caso, se trata de elementos conceptuales que estructuren de manera básica, pero completa, la definición de función que se haya propuesto en el primer núcleo conceptual (Ver sección 6.3.1). En el caso del marco interpretativo, se trata de versiones en contexto del concepto de función que se caractericen por su representatividad matemática en cuanto a:

-La variedad de objetos que puedan considerarse en la constitución del dominio y del codominio.

-La variedad en los criterios que definen su regla de correspondencia.

-La importancia del papel que juegan en la práctica curricular.

Una vez definida la ETC de referencia, el estudio de las demandas cognitivas que su apropiación le plantea al estudiante, permitirá describir un estado básico de comprensión de función. Las demandas cognitivas, como se dijo en el marco teórico, se entienden como actos de comprensión y obstáculos asociados. En este punto es necesaria una aclaración: aunque el término actos de comprensión es tomado en el sentido propuesto por Sierpinska (1992), es importante tener en cuenta que, en su investigación ella se enfocó, principalmente, en identificar actos de comprensión y obstáculos epistemológicos que pudieron presentarse en el proceso histórico de construcción del concepto de función, pero esos actos de comprensión no necesariamente tienen vigencia en el aula moderna, cuando se trata de comunicar, en un contexto curricular específico, un concepto de función ya elaborado y expresado mediante una definición que media en los procesos de apropiación personal del concepto.

En el proceso de identificación y análisis de los actos de comprensión y obstáculos asociados, se identifican también problemas reportados por otras investigaciones, los cuales denotan dificultades y vacíos notables en la apropiación del significado matemático del concepto de función o de sus versiones en contexto, dando respuesta al tercer objetivo.

Todo el proceso anterior será abordado sucesivamente para cada plano de referencia. En el caso del primero, el proceso se orientará mediante el estudio de dos actos de comprensión complejos:

i. Reconocimiento de los conceptos que ingresan como soporte explícito en la definición de función.

ii. Identificación de la forma como se articulan los conceptos soporte y los roles que adoptan en la constitución del concepto de función, e identificación del nuevo proceso -objeto matemático que se estructura con ellos.

Una parte complementaria, pero no menos importante, de la comprensión conceptual proviene de procesos de abstracción reflexiva que permiten al sujeto reflexionar y referirse al concepto que ha construido, al interiorizar sus acciones y encapsularlas como procesos y objetos en símbolos. Estos procesos también configuran problemas que se manifiestan a través de desadaptaciones entre la definición personal del concepto y la definición institucional (Ver en el marco teórico "Problemática Tall-Vinner…"), respecto de estos problemas se harán algunas consideraciones que permitirán completar la enmarcación del proceso de apropiación del significado matemático del concepto de función.

Para el segundo plano de referencia el proceso se abordará a través de las siguientes acciones:

-Identificar los actos de comprensión que plantea la apropiación de las versiones en contexto en relación con la definición general de función y el papel que esas versiones en contexto pueden jugar en el logro de tales actos de comprensión y en la superación de obstáculos asociados.

-Analizar los actos de comprensión, correspondientes a la apropiación misma de las versiones en contexto que se han propuesto como representativas del marco interpretativo.

4. ESTUDIO HISTÓRICO-CRÍTICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

4.1. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

Numerosos estudios evidencian la complejidad de este concepto tanto en su génesis como en la construcción personal que de él debe hacer cualquier estudiante en la actualidad. En cuanto a su génesis, esta puede remontarse incluso a la edad antigua ya que desde 4000 años atrás, estaba presente, aunque en un estatuto protomatemático, en las culturas babilónicas ligado implícitamente a tablillas de registro de observaciones astronómicas y en la cultura Griega en los estudios sobre relaciones entre magnitudes geométricas variables. Posteriormente y aun conservando el mismo estatuto, en la edad media se encuentra presente en el estudio de fenómenos naturales centrados en las relaciones entre cantidades variables dependientes e independientes y ya en la era moderna, haciendo su transición entre el estatuto paramatemático y el estatuto matemático, aparece a lo largo de todos los desarrollos matemáticos relacionados con la extensión del concepto de número, la creación del álgebra simbólica, el estudio del movimiento y la unión álgebra-geometría (Sastre, P., Rey, G.; Boubée, C. 2008).
Siguiendo a Youschkevitch (1976, 9) y atendiendo lo expuesto en el párrafo anterior, se consideran tres etapas en este estudio:

ÉPOCA ANTIGUA (2000 a.C – 500 d.C):

Se habla aquí de las matemáticas conocidas como antiguas o prehelénicas (desarrolladas en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India) y se incluyen las matemáticas helénicas. En las civilizaciones antiguas, aunque la egipcia llevaba la batuta, cada una hizo aportes que configuraron el marco en que se gestaron los problemas que, se considera, propulsaron la génesis de las primeras nociones de función. En cuanto a sistemas de numeración los egipcios crearon uno basado en jeroglíficos que, posteriormente, inspiró el sistema romano; los babilónicos utilizaban un sistema sexagesimal, la china antigua y la india antigua utilizaron sistemas de base diez y fueron más allá: implementaron el cero. Estas culturas también desarrollaron, aunque de manera rudimentaria, un álgebra, los egipcios llegaron a resolver lo que hoy se conoce como ecuaciones de primer grado, los indios implementaron correctamente la regla aritmética de cálculo, los mesopotámicos introdujeron el concepto de número inverso alcanzando la solución de algunos sistemas de ecuaciones y la implementación de algoritmos para calcular sumas de progresiones. Los chinos tuvieron como aporte principal la creación del "método del elemento celeste", desarrollado por Chou Shi Hié, para encontrar raíces enteras y racionales, e incluso aproximaciones decimales para ecuaciones de la forma $Pn(x)= a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$. Esta época se caracteriza inicialmente por la preocupación por el conteo y, posteriormente ante la ausencia de una idea abstracta de variable, por utilizar como métodos de registro de las cantidades tablas, descripciones verbales o gráficos; cuando se hacer referencia a cantidades se incluye también resultados de operaciones que ahora se conocen como binarias y de progresiones geométricas. Ya en la cultura helénica aparecen problemas que en la actualidad se llaman "clásicos", como la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo cuya búsqueda de solución trajo consigo la creación de diferentes curvas por parte de Apolonio, Arquímedes y Pappus, entre otros. Como puede observarse el trabajo matemático se caracterizó por la búsqueda de herramientas o métodos para contar o para registrar cantidades ya sean observadas o calculadas. Por tanto, la identificación de dos problemas (-el registro escrito, bien sea de observaciones de dos cantidades relacionadas, o bien sea de valores calculados para cantidades numéricas en las culturas babilónicas y –el problema relativo a la determinación de relaciones entre cantidades geométricas variables en la cultura helénica) lleva a considerar esta etapa como unidad de análisis en este estudio puesto que aun no se aborda el problema del movimiento como sucederá en la etapa siguiente.

EDAD MEDIA (476 d.C – 1453 d.C):

Esta etapa inicia con la caída de Roma y termina con la toma por parte de los turcos de Constantinopla. Suele pensarse que en esta época no hubo avances en las ciencias, incluida la matemática, pero sólo es que, comparativamente con la época helénica, los avances fueron menores. Europa se encuentra difuminada en pueblos aislados, su cultura se ha alejado de la herencia griega, pero los árabes recuperan buena parte de ese legado dando al mundo las bases de la aritmética y del álgebra. Es el estudio de los fenómenos naturales lo que importa ahora, y es justamente lo que produce avances en la concepción de variable tanto dependiente como independiente y en los medios de representación de propiedades que cambian, evidenciándose como característica epistémica en esta etapa el estudio del cambio, en particular del movimiento, problema que propulsiona la evolución del concepto de función y que hace considerar esta etapa separadamente en este estudio.

PERIODO MODERNO (desde finales del siglo XVI):

A finales del siglo XVI y comienzos del XVII se inicia un período de adelantos fundamentales para las matemáticas modernas: -se extiende el concepto de número. –se crea el álgebra simbólica. –se produce la unión entre el álgebra y la geometría (a partir de ahora, la geometría se subordina al álgebra). Todo esto gracias a que el estudio del movimiento (movimiento de puntos que describían curvas, cuerdas vibrantes, flujo de calor) es el problema central para las ciencias (Kleiner, 1989) y las matemáticas se tornan en modelo racional a seguir en su solución. En los inicios de este período el concepto de función se encuentra fuertemente vinculado a expresiones analíticas, y aun es una mera herramienta para expresar relaciones entre cantidades que dependen una de otra, sin embargo es en esta etapa que el concepto de función se convierte en un problema en sí mismo adquiriendo el estatuto matemático.

4.2. MODELO DE ANÁLISIS

En este estudio se utiliza la metodología que el profesor César Delgado aplicó en su investigación respecto a los conceptos de límite y continuidad (Delgado C. 1998), en particular al estudiar la evolución del concepto de continuidad en los clásicos griegos (2003). Delgado hace una adaptación del modelo de Stephen Toulmin (1977) sobre la evolución de los conceptos, complementándolo con conceptos derivados de la epistemología genética de Piaget. De esa manera las ideas de Toulmin sobre el conflicto cultural (lo que se constituiría en la filogénesis) se nutren de los mecanismos de equilibración propuestos por Piaget (es decir, la ontogénesis) para explicar el avance científico como fruto de desequilibrios entre conocimientos y necesidades.

Piaget atribuye las modificaciones en el estado de conocimiento a equilibraciones o reequilibraciones que ocurren en un proceso que Delgado (1998, 39) describió:

1. La interacción: un sujeto que interactúa con el medio externo. La calidad de la interacción depende de
2. el estado de equilibrio o desarrollo actual de su estructura que ha sido producto de un
3. proceso de equilibración anterior que se concretó en dos aspectos del conocimiento: la forma, que se deriva de la estructura interna (no observable pero

que se manifiesta en la organización de los esquemas de acción) y el contenido que se deriva de las situaciones a las que esta forma se aplica. Asociado al proceso de equilibración está el

4. mecanismo de actividad cognitiva, la activación de un esquema de acción se origina por un desequilibrio momentáneo que se percibe como una necesidad y desencadena un conjunto de acciones para satisfacerla. Esto implica el funcionamiento de un ciclo cognitivo con las asimilaciones y acomodaciones propias de los esquemas que debe conducir a

5. una equilibración entre la asimilación y la acomodación como resultado de la satisfacción de la necesidad si este es el caso. O asimilaciones y acomodaciones recíprocas si se trata de modificaciones introducidas en el ciclo cognitivo, o, en el sistema estructural a causa de un conflicto cognitivo,…"

Toulmin, por su parte, considera importante estudiar aquellos problemas que surgen entre el sujeto y el medio y los que surgen entre los sujetos miembros de una comunidad, pues como fruto de esas interacciones se produce, según él, el avance científico. La acumulación gradual, en el acervo cultural, de modificaciones en los métodos de solución de esos problemas es la que configura, en un proceso continuo y secuencial, el progreso científico. Por eso es importante considerar lo que se configura como problema y bajo qué condiciones, a este respecto Toulmin afirma

> *"Los problemas surgen (sostengo) cuando nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o entre si, esto es, cuando nuestras ideas corrientes quedan atrás, en algunos aspectos remediables, de nuestros ideales intelectuales."* (Toulmin, 1977, 160)

Es de resaltar el conflicto cognitivo como fuente de los problemas y, por supuesto, del progreso científico; Toulmin lo describe a través de la diferencia entre los "ideales intelectuales" (I) y la "capacidad corriente" (C):

Problemas científicos = Ideales explicativos-Capacidades corrientes.

Para él los ideales explicativos están constituidos por las concepciones compartidas por la comunidad de la disciplina sobre la forma que debe tomar una explicación completa del fenómeno; les llama ideales porque para Toulmin la realidad sólo puede conocerse por aproximaciones sucesivas siempre superables.

Las capacidades corrientes hacen referencia a teorías, instrumentos técnicos y demás patrimonios históricos que conforman la disciplina y permiten abordar la solución de problemas actuales.

La diferencia arriba expuesta es la que promueve el avance científico y favorece el cambio conceptual; este puede configurarse desde diversas variaciones conceptuales que pueden o no conducir a caminos exitosos.

Lo que se presenta a continuación es justamente la identificación de esas variaciones conceptuales que llevaron a la configuración actual del concepto de función, en la medida en que se vayan presentando los problemas que movilizaron la noción de función en cada época, se irán también presentando las respectivas nociones o definiciones de función y las probables variaciones conceptuales que condujeron por los caminos que se describen.

4.3. ÉPOCA ANTIGUA (2000 a.C - 500 d.C):

Inicialmente en la antigua Babilonia (2000 a. c 600 a. c) el hombre asumía el mundo como elemento independiente de sus propias decisiones, se veía más bien él como sujeto al albedrío de ese mundo, es decir, se sentía frágil ante su entorno. Por esta razón busca cómo empalagar a los elementos que él, por considerar más inalcanzables, les atribuía más poder: los astros celestes. Así que los idolatra, les ora, les ofrece sacrificios y ofrendas. Pero esto hace necesario estar pendiente de los resultados de estas acciones, la observación de esos astros se va convirtiendo casi en sistemática, arrojando como frutos registros escritos de los cuales sobreviven tablillas de arcilla con las cuales el hombre buscaba, inicialmente, evidencia de cambios en el comportamiento de los astros: es necesario buscar pues regularidades en los cambios registrados, esto lleva al estudio de problemas de variación continua: luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales, períodos de visibilidad de algunos planetas en relación con el ángulo con el sol y otros. En sus cálculos usaban tablas sexagesimales de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y de raíces cúbicas, también potencias sucesivas. No expresaban los resultados de sus análisis de forma general, sólo aparecen en sus tablas casos concretos a los que les buscaban generalidades sin llegar a formulaciones genéricas (Ruiz, 1998, 107), es decir, introducen el problema presente en la pregunta:

P_1: *¿qué regularidades existen en la relación entre cantidades de diferentes magnitudes variables?*
Autores como Pedersen (1974, 36) ven en estos trabajos:

IF: Instinto de funcionalidad. Se expresa como una *relación muy general que asocia elementos de dos conjuntos,* fruto de su profundización en métodos cuantitativos al tratar de aritmetizar observaciones difícilmente medibles, mediante lo que ahora se llamaría extrapolaciones e interpolaciones en busca de regularidades tal como lo evidencian las numerosas tablas dejadas por las culturas babilónicas.

Pero este mero instinto no llega a vislumbrar aun los cambios y su relación pues los trabajos de las culturas babilónicas versaban solamente sobre casos concretos, sin llegar a formulaciones aunque buscaran regularidades; los valores de las magnitudes son sólo vistos como puntuales, discretos, particulares, sin llegar aun a las ideas de cambio y de cantidad variable concebidas más adelante por el pensamiento griego al producir la variación conceptual (**V_1**), desde **IF** hacia una noción menos lejana a la de función:

NCR: Noción de cambio y de relación. Noción ajena a las matemáticas, pero presente en el pensamiento griego como idea muy primitiva de función. Se expresa como una "*noción de cambio y relación entre magnitudes variables"* (Ruiz, 108). Para los griegos la concepción de variabilidad era exclusiva de las magnitudes físicas y externa a los objetos matemáticos considerados estáticos. La respuesta al problema **P_1** se manifiesta en la creación de las proporciones las cuales se constituyen, en este momento histórico, en el mejor medio para comparar magnitudes que, además, estaban completamente desprovistas de su carácter numérico. Esta separación entre números y magnitudes alimentada por la inconmensurabilidad que ratificaba a los números como enteros y discretos y a las magnitudes como continuas hizo construir una versión discreta de los fenómenos naturales oponiéndose por siglos al avance en la construcción del concepto de función.

4.4. EDAD MEDIA (476 d.C – 1453 d.C):

Ya en el siglo XIII, la búsqueda no sólo de explicación de los fenómenos si no, además una explicación racional produce el problema **P_2** generado por la pregunta:

***P_2*:** *¿por qué ocurren los fenómenos naturales sujetos al cambio y al movimiento?*
NCR da cuenta del cambio, pero no del porqué, empieza pues a tornarse insuficiente para dar respuesta a esta nueva pregunta planteada en el marco de una época signada por la racionalidad y la búsqueda de "lo real, lo permanente, lo

inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia sensible…" (Crombie, 1979, p.29. citado por Ruiz, 111). Esta pregunta surge, aproximadamente a comienzos del siglo XIII, en particular está referida a fenómenos que incluían movimiento; se buscaba un modelo que respondiese a todas las cuestiones, la matemática entonces se convierte en la ciencia racional modelo para estas explicaciones tendiendo a ocupar cada vez un lugar más importante en las ciencias de la naturaleza poniendo en duda la demarcación establecida por Aristóteles entre estas y las matemáticas, o sea la variación conceptual **V_2**. Filósofos como Grosseteste y Bacon llegan a afirmar que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales, lo que desembocó, como fruto de un largo proceso de cerca de cuatro siglos, a que en el siglo XIV se otorgara gran atención a la formulación matemática nutrida de la cuantificación de los movimientos (Crombie, 1979) sustituyendo la pregunta ***P_2*** por la pregunta ***P_3***:

P_3: ¿cómo suceden los cambios en los fenómenos naturales?

NCR es ahora aun más insuficiente, no da cuenta ni del porqué ni del como de los cambios que registra, de modo que no da respuesta a las necesidades, se ha producido el desequilibrio y urge encontrarlo: Heytesbury y Swineshead habían desarrollado en Inglaterra la teoría de la intensidad de formas y, con eIla, una cinemática-aritmética mientras en Francia Oresme se orientaba hacia la geometría, de modo que, en ambos casos, el movimiento era estudiado matemáticamente por primera vez en términos de distancia y tiempo, contribuyendo al desarrollo de la variación conceptual **V_3**:

RF: relación funcional: *se expresa como una relación cualitativa entre el fenómeno a explicar y las condiciones necesarias y suficientes para su producción. Es, básicamente, una relación cualitativa causa efecto en la que se muestra claramente cómo están relacionados los cambios en lo que ahora llamaríamos variable dependiente con los cambios en lo que ahora llamaríamos la variable independiente,* es decir, la descripción de los fenómenos se hace desde el “cómo” (lo que no alcanzaba **NCR**), pero es fruto más de especulaciones teóricas que de la experiencia con el mundo físico, debido tal vez a una escasa sistematicidad en las medidas que no se alcanzaría hasta el siglo XVII, por esta razón la citada idea de relación funcional (**RF**) se desarrolló sólo en principio y fue expresada por dos métodos principalmente: El Álgebra de palabras” de Bradwardino de Oxford en el que se empleaban letras del alfabeto para representar las cantidades variables y las operaciones se indicaban con palabras, y el método geométrico, de Oresme, que acudía a las gráficas para representar la forma en que las cosas varían; el objetivo de Oresme era representar “las intensidades” de una cualidad de una magnitud continua, que depende de otra análoga, pero como aun se conserva la noción de número como conjunto de unidades, Oresme debe acudir a utilizar segmentos (que si son continuos) para representar las magnitudes y sus cambios. Sus representaciones, como las del Álgebra de palabras, son más cualitativas que cuantitativas, existe en ese entonces un desfase entre las especulaciones teóricas y las herramientas matemáticas y de medición disponibles, aspectos que constituyen una necesidad latente durante siglos y que no permitía el avance de la descripción de los fenómenos físicos, nuevamente se tiene un desequilibrio entre la necesidad y lo disponible.

4.5. PERIODO MODERNO (desde finales del siglo XVI):

El estudio del movimiento ha traído consigo nuevas preguntas, todas ellas referidas a las relaciones entre cantidades variables:

P_4: ¿cómo expresar de manera funcional la relación entre las causas y los efectos?

Galileo (1564-1642) tuvo gran empeño en buscar resultados y relaciones en la experiencia más que en la abstracción, la experiencia para él estaba favorecida por nuevos instrumentos de medida que introdujeron aspectos cuantitativos donde antes no existían. **RF** permitía expresar relaciones entre variables pero de una manera cualitativa, para Galileo esto no es suficiente, los nuevos instrumentos de medida le arrojan resultados que superan lo expresable con **RF**, el desequilibrio ha sido establecido. René de Cotret afirma que es en este contexto que, el desarrollo de la concepción de variable dependiente (gracias a los trabajos de Galileo), vital en el establecimiento de relaciones causa-efecto de manera cuantitativa, contribuyó enormemente a la evolución de la noción de función (R. de Cotret. 1988, 13, citado por Ruiz, 1998, 117). En particular se identifica en este momento histórico la variación conceptual $\mathbf{V_4}$, es decir, el paso de **RF** a una noción aún más cercana de función:

RFC: Relación funcional expresada cuantitativamente: *Noción que se expresa como una relación funcional causa-efecto expresada cuantitativamente.* Dichas relaciones eran verificables mediante la observación y la medición, pero Galileo aun expresa sus leyes de manera homogénea, en forma de proporciones, conservando el carácter que durante muchos siglos estancó el concepto de función dándole lugar al concepto de ecuación y encubriendo aspectos de la variación continua.

En este punto de la historia resulta interesante llamar la atención sobre un detalle trascendente para este estudio; el hombre sigue buscando respuesta a la pregunta sobre cómo expresar las relaciones entre cantidades variables (en este momento en particular las relaciones entre cantidades y el tiempo), entre las causas y los efectos, pero de esas búsquedas ha emergido un objeto matemático: función, el cual trae consigo preguntas que, sin hacer sombra a las ya mencionadas, se toman buena parte del trabajo de los hombres de ciencia del momento:

P_5: ¿Qué entidades se pueden clasificar dentro de la categoría de funciones? ¿Cómo definir función? ¿Cómo es correcto expresarla?

Hasta el siglo XVII la relación entre el álgebra y la geometría era de subordinación de la primera respecto de la segunda. Para la geometría sólo existían aquellas curvas que pudieran trazarse con regla y compás. Esta situación restringía al álgebra en su campo de aplicación y a la geometría en el espectro de curvas conocidas, puesto que algunas construcciones geométricas eran casi imposibles. Las dos empiezan a tornarse insuficientes frente a las necesidades que la humanidad le planteaba a la ciencia que consideraba modelo de racionalidad. La diferencia ideales explicativos - capacidades corrientes se ha producido; primero Vieta (1540-1603) y luego René Descartes (1596 - 1650), buscan resolver problemas de construcciones geométricas mediante el álgebra dándole sentido a esta desde la geometría (Pierre Fermat (1601-1655) por su parte, hace lo mismo apoyado en los trabajos de Vieta (Kline 1992, 402-403. Citado por Delgado, 1998, 178)), Vieta ve posible expresar la igualdad y la proporción entre magnitudes mediante el álgebra (Kline, 1972, citado por Sastre, Rey, Boubée, 2008, 145) y Descartes (y Fermat) establece que una curva se puede construir con sólo su expresión algebraica superando el criterio –griego– que exigía la constructibilidad de la línea para aceptar la existencia de una curva (Delgado, 1998, 180), ampliando el espectro de curvas conocidas distinguiendo, incluso, entre curvas geométricas y curvas mecánicas. De esta manera, afirma Youschkevitch (1976, 25) es a Descartes a quien se le debe la idea de presentar una función en forma analítica al determinar que una ecuación en *x* y *y* muestra la dependencia entre dos cantidades variables; **RFC** ahora se queda corta, ya no es suficiente establecer una relación funcional aunque sea cuantitativamente, la combinación álgebra-geometría (lo que podría llamarse algebreización de la curvas) posibilita predicciones operacionales para las relaciones funcionales, es necesaria la variación conceptual $\mathbf{V_5}$. Apoyado en Descartes, Gregory (1638 - 1675) realizará la distinción entre funciones “algebraicas” y “trascendentes” y, en 1667, da una definición más explícita de función:

COD: Cantidad obtenida de otras**:** *una función es una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable.*

Según Youschkevitch (26) este paso de expresar funciones en términos de ecuaciones tuvo un poderoso efecto en el desarrollo de las matemáticas pues le otorgó el verdadero estatus de cálculo al estudio de las funciones. Similarmente, Sierpinska (1989a) le otorga un gran valor al desarrollo de la notación algebraica en la superación del obstáculo epistemológico de la diferenciación entre número y magnitud. Sin embargo es importante mencionar que este logro también produjo lo que Ruiz (121) llamó encantamiento con el álgebra que, a la larga, se constituyó en obstáculo epistemológico para el concepto de función: considerar como funciones sólo aquellas que pudieran expresarse algebraicamente.

El desarrollo del cálculo diferencial e integral se apoya primordialmente en la existencia del álgebra, de la variable y del método de las coordenadas, pero lo que realmente motiva y dirige todo este proceso es el empeño por buscar solución a los problemas de la mecánica, la astronomía y la física, problemas que abundan en situaciones de dependencias funcionales. Ya no es suficiente con explicar cómo ocurren los fenómenos, el hombre busca también predecirlos. Dos hombres abordan, casi de manera simultánea pero a distancia, estos problemas: Newton y Leibniz. Newton los aborda desde una concepción mecanicista en la que (influenciado por Isaac Barrow, su maestro) interpreta las variables dependientes como cantidades que poseen una velocidad de cambio y este cambio discurre de manera continua en el tiempo (noción universal, de fluir constante). Con Newton se produce la variación conceptual $\mathbf{V_6}$; los problemas de la mecánica están estrechamente ligados al tiempo, para Newton este se convierte en la "…noción universal e interpreta las variables dependientes como cantidades que transcurren de forma continua y poseen una velocidad de cambio…, *la función es una fluente, es decir, una cantidad que transcurre en el tiempo*, la derivada es la fluxión, y sirve para estudiar las variaciones de la fluente." (Ruiz, 123). Esta noción de función, fruto de la variación conceptual **V_6**, puede denominarse CVT: Cantidad que transcurre en el tiempo. Es notable como está implícito en este concepto, el concepto de variable dependiente, es decir, magnitud cuya variación es producida por la variación de otras en el tiempo.

Por su parte, Leibniz se apoyó en un contexto principalmente geométrico ligando elementos geométricos a una curva. La diferencial (dy) de una ordenada, la define como un segmento tal que su relación a dx sea igual a la relación entre la ordenada y la subtangente. Para él el término función designa cualquier cantidad que varía de un punto a otro de la curva. La necesidad de disponer de un término para designar cantidades que dependen de una variable ya es evidente, tal y como lo señala Youschevits (130) acerca de la obra de Bernoulli y de Leibniz, y esta necesidad conducirá a utilizar el término función con este fin, pero haciendo referencia sólo a aquellos casos expresables de manera analítica. Esto constituye una nueva variación conceptual: **V_7**, identificable en un artículo de Jean Bernoulli titulado "Remarques sur ce qu´on a donné´jusqu´ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres" publicado en 1718 en las memorias de la real academia de ciencias de París (Youschkevitch, 35) en el que, por primera vez, se hace referencia explícita a una función como una expresión analítica:

FMV: Función de una magnitud variable: *"llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes"* (Bernoulli citado por Boyer, 1986, 531).

Bernoulli, incluso, propone la letra *f* para denotar la función, escribiendo *fx*, sin paréntesis. Si se lee con cuidado lo escrito por Bernoulli, no se encuentra allí evidencia que indique que las funciones se expresaran analíticamente, sin embargo muchos historiadores coinciden en afirmar que en esta época las funciones se pensaban como expresiones analíticas.

Es importante observar que, en el pensamiento de los matemáticos de entonces, ya se tiene un nombre para la función, se tiene conciencia de ella y se utiliza como herramienta, es decir, tiene un estatuto paramatemático y está en transición a ser objeto en si misma de estudio (estatuto matemático), lo cual, se podría afirmar, ocurre a partir de Euler (alumno de Bernoulli), (Boyer, 1959, 243) quien piensa que el concepto de función es el organizador de todos los demás conceptos del cálculo (Delgado, 189) y propulsa la transición del cálculo vinculado estrechamente con la geometría, al cálculo que se ocupa de funciones; vale recordar que, en este punto de la historia, el análisis infinitesimal es la disciplina científica en boga, y aunque está íntimamente relacionada con la física, la geometría y la mecánica, ha ido adquiriendo su estatus de disciplina independiente: "Tous les concepts initiaux du calcul perdent graduellement leur carapace géométrique et mécanique, prennent une formulation arithmétique ou algébrique et commencent à être appréhendés comme précédant logiquement les concepts semblables des autres sciences exactes." afirma Youschkevitch, (35). El concepto de función no es la excepción, así que su definición ya no podía estar en términos generales, no expresados de manera analítica como era debido de acuerdo con los "cánones" del momento. Euler escribe entonces una nueva definición acorde con el momento histórico, apoyándose en la de su maestro Bernoulli pero cambiando el término cantidad por el de expresión analítica, término con el que hace referencia a las operaciones algebraicas incluyendo los procesos de paso al límite abarcando entonces, como funciones, los polinomios, las funciones que se obtienen de series infinitas y las funciones trascendentes (Delgado, 190). A este paso en la noción de función se le puede denominar variación conceptual $\mathbf{V_8}$. En las palabras de Euler:

FEA: Función como expresión analítica: ***"****una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números o cantidades constantes"*. ("Introductio in anlysis infinitorum", escrita por Euler en 1744 pero publicada en 1748. Citado por Delgado, 190). Es entonces Euler el autor del desarrollo ulterior del concepto de función y quien desarrolla un estudio centrado en dicho concepto, es decir, lo considera un objeto de estudio; se puede afirmar que es en este momento cuando el concepto de función obtiene el estatuto matemático (Delgado, 197) puesto que se formulan las primeras definiciones explícitas y se propone una clasificación para las funciones siendo estudiadas como objetos matemáticos.

Sin embargo Euler restringía el concepto de función a las expresiones analíticas y creía que la manera más general y mejor de representarlas era a través de series de potencias enteras, los matemáticos de la época compartían esta creencia y pensaban que toda función podía expresarse de esta manera. Esto tuvo como consecuencia que los estudios se enfocaran en “las formas de representación más que en una relación entre variables en la cual la variable dependiente debe ser determinada unívocamente por la variable independiente.” (Delgado, 191).

En este punto del desarrollo del concepto de función empiezan a tejerse varias situaciones que configurarán un ambiente que exige nuevos cambios en el concepto, de nuevo se producirá el desequilibrio entre ideales explicativos y capacidades corrientes:

- En ese momento (mediados del siglo XVIII) se hace aun más estrecha la relación entre la noción de función y la noción de curva: si a toda función le corresponde una curva era razonable pensar que a toda curva le corresponde una función. Lo que entra en contradicción con la definición de función del momento, puesto que no toda curva tenía asociada una expresión analítica así que, de acuerdo con la definición, no tenía asociada una función. Euler se ve entonces abocado a admitir como funciones las llamadas curvas mecánicas, es decir aquellas que su gráfico se ve como la trayectoria que describe un punto en movimiento por ejemplo, la espiral de Arquímedes (Sastre, Rey, Boubée, 148) (Delgado, 206) aunque no tuvieran una expresión analítica para algunas de ellas. Aparece a la sazón la clasificación euleriana en continuas y discontinuas. Continuas eran aquellas que se representaba mediante una sola ecuación y discontinuas eran aquellas que se definían por más de una expresión algebraica o eran arbitrarias, es decir, definidas por movimientos libres de la mano o mixtas.

-Los matemáticos aceptaban por "artículo de fe", es decir sin demostración y sin duda alguna, que:
"si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes" (Sastre Vázquez, P.; Rey, G.; Boubée, C. 2008, p.148)

-El problema de la cuerda vibrante: se trataba de una cuerda elástica con extremos fijos que era deformada a fin de ponerla a vibrar. El problema radicaba en encontrar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. Dalambert (1717 - 1783), Euler (1707 - 1783) y Daniel Bernoulli (1700 -1782) abordaron la solución de este problema lo que suscitó diferencias y coincidencias entre ellos. En 1747 Dalambert propone una solución que coincide con la solución dada por Euler un año después, sólo que Euler no la consideraba la más general. Seis años después Daniel Bernoulli propone otra solución, pero Euler y Dalambert la rechazaron puesto que se trataba de una función par y periódica, sólo que ellos llegaban a esta conclusión por que en aquel entonces se daba por sentado que si dos funciones coincidían en un intervalo entonces coincidían en todas partes; en este último hecho y en el concepto de función que se manejaba en la época se encontraba la raíz de sus diferencias: función era cualquier expresión analítica, pero Euler se da cuenta que esa definición restringía las soluciones al problema de la cuerda vibrante (dejaba por fuera las curvas arbitrarias) y decide modificarla a fin de dar lugar a estas curvas y a funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica.
Como puede verse, se dan todas las condiciones para la siguiente variación conceptual (**V_9**), Euler promulga entonces su nueva definición de función, en el prefacio de su «Institutiones calculi differentialis» en 1755 (Ruiz, 129) (Delgado, 192):

FRV: Función en términos de la relación entre variables: ***“****Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces todas las otras variables que dependan de x no importa de qué manera, o que son determinadas por x, son llamadas funciones de x.”* [1]

El concepto de función incluye ahora funciones definidas a trozos y funciones que, aunque tuvieran un gráfico, carecían de una expresión analítica. Sin embargo, en la práctica los matemáticos de la época pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas (Sastre, Rey, Boubée, 150), más exactamente funciones continuas en la acepción de la época, o, en términos de Ruiz (130): “perfectamente determinadas, indefinidamente derivables, desarrollables por medio de una serie de Taylor, integrables y representables mediante una curva algebraica o trascendente.” Se llega así a dos nociones de función: la formal, de expresión analítica (incluso expuesta, implícitamente por Cauchy en 1827 en su curso de análisis algebraico (Youschkevitch, 58), y la de correspondencia arbitraria (promulgadas por Euler y Jean Bernoulli). Sólo a finales del siglo XIX se establecerá la relación entre ambas gracias a otra evolución del concepto de función engendrada por reflexiones en torno a la ambigua noción de continuidad.
La concepción euleriana de continuidad (más exactamente de discontinuidad) no pudo sostenerse por mucho tiempo. Con el paso de los años los matemáticos fueron produciendo ejemplos de funciones que serían discontinuas en el sentido de Euler, pero podían expresarse por medio de una sola ecuación, así que serían continuas, “se trata de los casos de funciones definidas por dos expresiones

[1] Por esta misma época, Lagrange, en respuesta las duras críticas del obispo George Berkeley (ver Delgado, 1998. p.194) publica en 1797 Théorie des functions analytiques (1797, Euvres, 9). Allí consigna una definición de función muy similar a la propuesta por Euler.

analíticas diferentes en dos intervalos diferentes del dominio de la variable independiente (Euler-discontinuas) y que pueden ser representadas por una única expresión (por tanto era Euler-continua) –Por ejemplo, f(x)=$\sqrt{x^2}$-. La distinción entre funciones continuas y discontinuas lleva entonces a contradicción." (Delgado, 206). Esto hizo cada vez más insostenible el criterio de Euler. El desequilibrio se ha presentado nuevamente, las explicaciones de Euler ya no son suficientes, el medio (en este caso el gremio de matemáticos del momento) exige respuestas que la estructura existente no puede dar, de nuevo deben producirse cambios que respondan a demandas. Así se produce la variación conceptual $\mathbf{V_{10}}$: en 1822 Fourier, a raíz de sus estudios sobre la teoría del calor, conjetura sin demostrarlo, que es posible representar, mediante una serie trigonométrica, cualquier función discontinua en el sentido de Euler (mixta) (Youschkevitch, 53). Cuando Fourier afirma que esto es cierto para todas las funciones el término función tiene su más general interpretación para ese momento:

FVA: Función como valores arbitrarios: *"In general, the function f(x) represents a succession of values or ordinates each of which is arbitrary. An infinity of values being given to the abscissa x, there are an equal number of ordinates f(x). All have actual numerical values, either positive or negative or null. We do not suppose these ordinates to be subject to a common law; they succeed each other in any manner whatever, and each of them is given as if it were a single quantity"* (D. Rüthing, 1984, 73) (Grattan-Guinnes, 1984, 199)

Esta definición amplía el rango de funciones (superando el rango de funciones representable mediante series de Taylor) considerando ahora también aquellas que tuvieran puntos en los que no fueran derivables o en que no fueran continuas, es decir, la definición de función exige ahora la inclusión de cualquier correspondencia arbitraria.

Los trabajos de Fourier le dieron importancia nuevamente a la expresión analítica y en consecuencia a la definición del concepto de función, pero carecían del rigor necesario en la escritura matemática propia de la época, Dirichlet asume entonces el trabajo de reescribir la producción de Fourier encontrando que su conjetura sobre la representación de cualquier función como una serie era falsa. La situación está dada, el sistema presenta un desequilibrio, obliga al sujeto, en este caso Dirichlet, a buscar nuevamente el equilibrio. En 1829 intentando encontrar las condiciones para que fuera posible la afirmación de Fourier, dio lugar a la variación conceptual $\mathbf{V_{11}}$: definió función de modo que -su dominio esté definido sobre un intervalo determinado. –exista una correspondencia cuya regla de asociación sea arbitraria:

FCA: Función como correspondencia arbitraria: *“y es una función de la variable x, definida en el intervalo* $a<x<b$*, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia.”* (N. Luzin, 1940, 314-334)

Con esta definición se da un salto doble: de la expresión analítica (o curva) a cualquier representación o, sencillamente a la no representación (ya son admitidas como funciones incluso algunas que no poseen expresión analítica y no pueden graficarse) y de considerar las funciones continuas en el sentido euleriano, como funciones discontinuas, o las discontinuas en el sentido de Euler como continuas. Se puede ilustrar este hecho con la función conocida como función de Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases} c, \textit{ si x es racional} \\ d, \textit{ si x es irracional} \end{cases}$$

A pesar de no poseer una expresión analítica y no tener una gráfica asociada, es una función de acuerdo con la definición propuesta por Dirichlet. Además no es continua en ningún punto.

Gracias a estos trabajos el concepto de función inicia un proceso de separación de la representación analítica con la cual había estado tan ligada hasta el momento, que "No se especifica su dominio ni su regla de correspondencia, es una totalidad que englobada en una única expresión analítica contiene intrínsecamente los diferentes caracteres de paridad o imparidad, periodicidad, continuidad, etc." (Delgado, 208). En particular el ejemplo citado arriba exige un concepto de función mucho más general que incluya como funciones algunas "con una infinidad de valores extremos y discontinuidades y/o de valores infinitos en un intervalo finito,…" (Grattan-Guinness, 164-165 citado por Delgado, 208), es decir, el concepto de función se ha independizado de la expresión analítica y ha pasado a constituirse en lo que se podría llamar un "apareamiento arbitrario". Dirichlet logra determinar intervalos de convergencia para las series de Fourier lo que amplió el espectro de funciones representables mediante dichas series, incluyendo funciones que podían no ser diferenciables en muchos puntos o ser discontinuas en otros tantos (Delgado, 208) debido a esto Dirichlet propone otra definición en 1837 que respondía a estas nuevas exigencias (variación conceptual $\mathbf{V_{12}}$):
FRR: Función como regla de relación: ***"****Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es función de la variable independiente x."* (Boyer, 1986, 687 citado por Delgado, 208)

Esta definición no es más que la ratificación de que ya estaban dadas las condiciones para expresar el concepto de función como correspondencia independizándolo de la expresión analítica y del apoyo geométrico tan necesario durante su constitución. La "desgeometrización" se toma al concepto de función, los métodos del análisis de Cauchy no requieren ya de la intuición geométrica ni de la expresión analítica (algebraica o trascendente) (Ruiz, 132; Grattan-Guinnes, 146). Contemporáneamente a esta definición, en diversos artículos, aparecieron otras definiciones de función que mostraban cómo, en otros contextos también el concepto de función era exigido en términos de asociación arbitraria, pero conservando la posibilidad de expresar una regla de asociación. Por su parte, Riemann (alrededor de 1858), se adhirió a la concepción de Dirichlet (Grattan-Guinnes, 171,181 y 207), las necesidades de sus investigaciones así lo clamaban: se dedicó a buscar funciones con infinitas discontinuidades pero con una integral definible y/o una serie trigonométrica convergente. En cuanto a Weierstrass y sus seguidores, dedicaron sus esfuerzos a "la construcción de expresiones analíticas que definan funciones con infinitas oscilaciones y discontinuidades en un intervalo finito…" (Grattan-Guinnes, 181), estos trabajos también se apoyaron en esta definición dado su carácter general.

Puede verse en las dos últimas definiciones propuestas por Dirichlet, cómo la primera hace referencia a la asociación arbitraria ("…*es irrelevante como se establece esa correspondencia."*) y la segunda a una regla de asociación ("…*hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es función de la variable independiente x."*) es decir, con cada una busca responder a una necesidad imperante en un momento determinado. Pero las circunstancias que configuraron el correspondiente desequilibrio no desaparecieron (el trabajo de buscar condiciones para la representación en series de Fourier para la primera y el trabajo de asimilación de ejemplos de funciones extrañas para la segunda) así que pareciera presentarse una dicotomía. Esta nueva situación de desequilibrio no se prolongó por mucho tiempo. En 1870, ratificando el carácter central adquirido por el concepto de función, y respondiendo a la necesidad, ya ineludible, de responder simultáneamente a dos exigencias, la asociación arbitraria y la regla de asociación, Hermann Hankel en "Untersuchunger über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen" (página 49) formuló la siguiente definición que que puede considerarse como variación conceptual $\mathbf{V_{13}}$:

FAA-RA: Función como asociación arbitraria y como regla de asociación: *"On dit que y est fonction de x si a chaque valeur de x d´un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l´intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x"* (H. Hankel, 1870. Citado por Youschkevitch, 61).

Esta definición, aunque de manera implícita, cubre las dos opciones consideradas por Dirichlet, reconciliándolas en una sola, gracias al proceso generado por la evolución del concepto de continuidad. No exige que *y* esté definida por la misma ley en todo el intervalo, ni que sea definida por una expresión matemática explícita en *x.* Pero la manera en que se expresa la definición tampoco rechaza que pueda darse una misma ley o que exista una expresión matemática. Sin embargo es claro que se apoya totalmente en la definición de Dirichlet como de hecho sucederá a lo largo del siglo XX hasta la actualidad, aunque algunas definiciones mantienen el carácter de correspondencia unívoca (Ruiz, 133) y otras evolucionan a la idea de pares ordenados como se verá más adelante.

La noción general de función presentada por Dirichlet es pues la base para posteriores definiciones que, en realidad, no la modifican de manera significativa y continúan teniendo el carácter de función estrictamente numérica. Sin embargo no se puede dejar de mencionar que esta noción ha sido sometida a cuestionamientos más filosóficos que surgidos de desequilibrios que pudieran hacer de la definición algo insuficiente. En particular se prestó a discusión la frase de la definición de 1829 que hace referencia a la no importancia de la regla de correspondencia: "…*es irrelevante como se establece esa correspondencia."* El debate al respecto se dio en torno a un axioma formulado por Zermelo en 1904 (axiom of choice) y tomó forma en un intercambio de cartas entre Baire, Borel, Hadamard y Lebesgue en 1905 (Para mayores detalles ver Monna, 1972/73, 57-84 y Moore, 1982). La discusión giraba en torno a si la definición de un objeto matemático, ya fuera un número o una función, legitimaba su existencia. Para

Lebesgue la definición de Dirichlet era demasiado amplia, para Baire y Borel carecía de significado y para Hadamard era adecuada. Baire, Borel y Lebesgue eran partidarios de explicitar una ley definitiva de correspondencia en la definición de una función. Por su parte Hadamard, consideraba que la exigencia de una ley para determinar una función era un retroceso hacia el siglo XVIII, cuando el concepto de función estaba fuertemente ligado a la expresión analítica. Este debate no es más que una ilustración de debates más amplios entre partidarios de unas u otras filosofías de las matemáticas. De hecho el problema nunca fue resuelto pero, seguramente dio lugar al crecimiento de otros conceptos más profundos en algunas ramas de las matemáticas. (Kleiner, 296, 297)

En los años siguientes las matemáticas crecieron ya independientes, en algunos casos, de la física y sus motivaciones y en otros muy de la mano de sus problemas. Muchas ramas profundizaron en sus avances desde sus propios intereses; estos avances se reflejaron en evoluciones del concepto de función promovidas desde necesidades diferentes y, por supuesto, generando variaciones conceptuales diferentes. Llaman la atención especialmente dos de ellas por la trascendencia que tienen para la educación matemática y la problemática que involucran en el aprendizaje del concepto de función, más que por representar una gran diferenciación respecto de la definición de Dirichlet.

La primera de ellas es promovida por ramas de las matemáticas cuyas necesidades no se ven satisfechas por funciones numéricas definidas sobre intervalos de reales, si no que exigen del concepto una mayor generalidad que no restrinja su utilización. Se trata de aquellas ramas para las que se hace necesario definir funciones de funciones, es decir, constituir con funciones el dominio sobre el que se definirán otras funciones, esta variación conceptual, identificada en este estudio como $\mathbf{V_{14}}$, puede describirse desde los factores que la promovieron (no necesariamente en orden cronológico puesto que muchos de esos desarrollos se dieron paralelos aunque independientes) por cuanto no se ve reflejada en una definición en particular:

Un primer desarrollo que propulsó esta variación conceptual corresponde a los espacios de Hilbert. Es de nuestro interés que este tipo de estudio requiere trabajar con clases de equivalencias de funciones y no con funciones particulares, es decir, el concepto de función ya es exigido como un objeto, no como proceso y, adicionalmente, las funciones a que se hace referencia no son numéricas ni responden a la regla de asociación o a la expresión analítica, es decir, no pueden ser caracterizadas como funciones ni en el sentido de Euler ni en el de Dirichlet, aunque pueden ser tratadas como tales; en términos de Davis y Hersh (1981): "…involve a further evolution of the concept of function. For an element in L_2 is not a function, either in Euler´s sense of an analytic expression, or in Dirichlet´s sense of a rule or mapping associating one set of numbers with another. It is function-like in the sense that it can be subjected to certain operations normally applied to functions (adding, multiplying, integrating). But since it is regarded as unchanged if its values are altered on an arbitrary set of measure zero, it is certainly not just a rule assigning values at each point in its domain." (L_2= {*$f(x)=f^2(x)$ is Lebesgue-integrable*}).

Sobre 1887 Volterra define un "funcional": funciones con dominio en un conjunto de funciones y codominio en intervalos de números reales o complejos. Las funciones ya no sólo son las asignaciones, ahora son también a quienes se les asigna, ahora constituyen objetos sobre los cuales se actúa. (299)

Por los lados de la física, alrededor de la década de los 30 (siglo XX), ciertas situaciones idealizadas producían como soluciones lo que parecían ser funciones pero que no se correspondían con ninguna de las funciones admitidas como tales en la concepción vigente en el momento: se portaban como la derivada de funciones discontinuas (recuérdese que una condición necesaria, aunque no suficiente, para la derivabilidad es la continuidad). Por la misma época el problema que ocupaba a los físicos era explicar el comportamiento de los átomos y de los electrones, pero la física clásica no era suficiente, se hacía necesaria una síntesis de la física clásica y la física relativista. En 1927, el físico británico Paul Adrien Maurice Dirac introdujo la función delta o de impulso (δ) en su artículo "The physical interpretation of the quantum mechanics", en el que demostraba la equivalencia entre las formulaciones de la mecánica cuántica de Heisenberg y Schrödinger. Pero la "función delta de Dirac" en realidad no lo era en el sentido del cálculo diferencial e integral, pues podía probarse que no existía como tal aunque pudiera calcularse la integral mediante la que se definía [3]:

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\, dx$$

Estas dos últimas situaciones físicas, contribuyeron enormemente en la variación conceptual $\mathbf{V_{14}}$, pues generaron la necesidad de admitir como funciones nuevos objetos que no lo eran desde la óptica de la teoría vigente. Como respuesta a esta necesidad se crea la teoría de distribuciones por Sergéi Sóbolev en 1935; en ella se definen funciones que asignan a cada función de un espacio de funciones diferenciables, una distribución expresada como una integral impropia. Una función de distribución o función generalizada es una integral y corresponde a una función lineal continua. Todas las funciones convencionales pueden considerarse como distribuciones. También las nociones de espacio métrico y espacio topológico, desarrolladas en las dos primeras décadas del siglo, exigieron la utilización de funciones como operadores lineales entre dichos espacios, es decir, funciones de funciones. En estos desarrollos propulsores de la variación conceptual $\mathbf{V_{14}}$, la gama de funciones se amplió a un nuevo nivel: se construyeron funciones de funciones, la regla de asociación es ahora alguna operación que se hace sobre funciones, para obtener otra función. ¡No resulta fácil, mediante la definición de Dirichlet, determinar si se trata o no de una función! Ya esa definición se torna insuficiente, se ha generado una necesidad que no se satisface con las herramientas disponibles y exige una variante en el desarrollo, en este caso un nivel superior en el concepto de función que engloba los anteriores.

La segunda de estas variaciones conceptuales, $\mathbf{V_{15}}$, se va produciendo en la medida que finaliza el siglo XIX y avanza el siglo XX, es decir, en la medida que toma fuerza la teoría de conjuntos. Esta teoría se empieza a gestar entre 1873 y 1897 cuando el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) plantea a su amigo Richard Dedekind el problema relativo a la posibilidad de hacer corresponder biunívocamente los números naturales con el conjunto de todos los números reales del continuo. Cantor construyó una demostración de esta imposibilidad, es decir, demostró la no numerabilidad de los reales. Pero este hecho no hizo más que incentivar otras cuestiones de este tipo en la mente de Cantor: ¿sería posible establecer una correspondencia entre una superficie y una línea recta de tal manera que a cada punto de la superficie correspondiera un solo punto de la línea y recíprocamente? Le preguntó a Dedekind a comienzos de 1874 (Grattan Guinness, página 242). Para los matemáticos de la época la respuesta era obvia e inmediata: “No”. Sin embargo en 1877, Cantor construye una correspondencia biunívoca entre los puntos de cualquier espacio p-dimensional y los del continuo lineal. De allí en adelante Cantor empieza a constituir la teoría de conjuntos lineales de puntos y a introducir los números transfinitos, necesarios para su teoría general de conjuntos infinitos (para más detalles, ver Grattan Guinness, 235-282). Los trabajos de Cantor se tradujeron rápidamente al italiano y al francés, de modo que sus ideas tuvieron pronta y amplia difusión obteniendo el valor que se merecían (y por supuesto algunos detractores). Años después, en 1903, Rusell demuestra inconsistencias en la definición intuitiva de conjunto propuesta por Cantor: “Por un conjunto entendemos una colección cualquiera M de objetos definidos y distintos de nuestra percepción o de nuestro pensamiento (a los cuales llamaremos los elementos de M) en un todo” (“contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinita” 282, citada por Grattan Guinness, 266), a través de la famosa paradoja que plantea por carta a su amigo Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925); en ella pregunta si el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos forma parte de sí mismo (conocido también como la paradoja del barbero); la paradoja consiste en que si ese conjunto no se contiene a sí mismo entonces hace parte de él mismo por la definición del conjunto(contradicción), y si se contiene a sí mismo entonces no puede estar en él mismo (de nuevo, contradicción). Queda en evidencia que la definición de Cantor es ingenua por su carácter circular y debe reelaborarse, lo que da inicio al proceso de reconstrucción de la ya famosa teoría. Rusell da solución radical a la cuestión con su "teoría de tipos" en la que propone diferentes niveles de conceptos con la condición de que ningún concepto puede aplicarse a conceptos de nivel igual o superior. En 1908 Ernst Zermelo (1871-1953) construyó, por primera vez en la historia, la axiomatización de la teoría de conjuntos mediante siete axiomas (el de extensionalidad, el de conjuntos elementales, el de separación, el del conjunto-potencia, el de unión, el de elección y el de infinitud) otorgándole precisión, pero restringiéndola para evitar las paradojas ya identificadas. Más adelante esta axiomática fue depurada por Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros hasta llegar a la teoría de conjuntos actual. La axiomática construida exige una definición de función como una relación entre elementos de dos conjuntos (pueden ser conjuntos de conjuntos o de otros objetos) expresada o no, mediante pares ordenados, que permita formular conceptos, como los axiomas de elección o la buena ordenación de un conjunto, el axioma de reemplazamiento, el concepto de ordinal y otros, en términos propios a la axiomática propuesta.

Lo anterior pone en boga y fortalece la acepción de una definición de función desde un punto de vista estrictamente conjuntista, la teoría axiomática de conjuntos tomó tanta fuerza que la noción de función inmersa en ella llegó a considerarse la definición última del concepto; definiciones de función expresadas como relaciones entre conjuntos o como pares ordenados nacen de allí y se consolidan como la variación conceptual **V_{15}**, a través de la definición formulada por el grupo Bourbaki en 1939:

FCRF: Función como relación funcional: *"Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if, for all x∈E, there exists a unique y∈F which is in the given relation with x. We give the name of function to the operation which in this way associates with every element x∈E the element y∈F which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function."* (ver Bottazzini, pag 7 citado por kleiner, 299)

Según Kleiner, el grupo Bourbaki también formuló esta definición como un subconjunto del producto cartesiano ExF, es decir, proponen la definición de función como un conjunto de pares ordenados (FCPO: Función como par ordenado).

Nótese cómo en esta definición los Bourbaki llaman relación funcional a la relación entre un elemento variable *x* de E con un único elemento variable *y* de F y llaman función a la operación que permite la asociación entre *x* e *y*. Se trata de la primera definición como relación entre elementos de conjuntos; anteriormente las definiciones se formulaban respecto de expresiones algebraicas, de cantidades variables que dependían unas de otras, de asociaciones entre valores numéricos, ya sea tomados de intervalos o de cantidades variables, pero no respecto de elementos de conjuntos; es pues la primera definición conjuntista de función de gran influencia desde el momento de su formulación dado el gran trabajo presentado por este grupo y que, aunque nunca fue su finalidad, influyó en determinaciones pedagógicas que afectaron desde luego, la noción de función que se ha presentado en numerosos cursos universitarios y de bachillerato:

> *"…Su nombre fue asociado igualmente al fenómeno de las llamadas "matemáticas modernas", con la modificación durante los años sesenta de los programas de matemáticas de la enseñanza secundaria introduciendo "los conjuntos", y las nociones y vocabulario de la matemática "estructural". Aunque ninguno de ellos intervino directamente en tales actividades y quien más se aproximó -Dieudonné-rechazó toda relación, no puede negarse que muchos de los patrocinadores franceses del movimiento eran partidarios entusiastas de Bourbaki formados en su lectura."*

(http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Bourbaki3.asp)

Godement, miembro del grupo Bourbaki, presenta en 1971 una definición de función como terna, es decir, una definición aun más estructural:

FCT: Función como terna: *"se llama función a la terna f=(G,X,Y), en donde G,X,Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:*

1) G⊂ XxY

2) Para todo x∈X, existe un y sólo un y∈Y, tal que, (x,y)∈G, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que (x,y)∈G se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo y=f(x). Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (x,f(x)) donde x∈X, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

A⊂X se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f."

(Godement, 1971, 63-64. Citado por Ruiz, 134).

Apostol, en su edición de 1973, es una buena muestra de libro de texto cuya utilización aún perdura y en el cual es clara la influencia de la definición conjuntista expresada como pares ordenados:

FCPO: Función como pares ordenados: "*una función f es un conjunto de pares ordenados (x,y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento*" (Apostol, 1973, 65).

En textos actuales se encuentran variaciones de estas mismas definiciones, pero lo común en todas es la función como relación, como terna o como conjunto de pares ordenados.

Es importante, después de este extenso recorrido por la evolución del concepto de función, no dejar de tener en cuenta que en las definiciones actuales ya nada queda de cantidades que fluyen produciendo magnitudes variables, ni de puntos que se mueven sobre curvas, ni la idea de variabilidad. La abstracción definitivamente se tomó a la definición y, esto, muy seguramente la ha alejado de la comprensión de nuestros estudiantes.

5. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN LOS PRIMEROS CURSOS DE CÁLCULO

Nuestra búsqueda de un estado de formación matemática, acorde con las exigencias de los primeros semestres de carreras de ciencias e ingeniería, debe empezar, como es natural, por la identificación de dichas exigencias en la actividad matemática propia del contexto curricular de interés para esta investigación. En el marco teórico se dijo que esas exigencias se asumen como elementos o connotaciones del concepto de función, que intervienen en la construcción de algunos saberes matemáticos, en la solución de situaciones problema o en la comprobación o demostración de teoremas o proposiciones y constituyen el insumo para entrever posibles redes conceptuales en torno y constitutivas del concepto de función, que luego devendrán en la ETC bajo la orientación de nuestra concepción de formación matemática y de criterios epistemológicos, didácticos y cognitivos tal y como ya se mencionó en el marco teórico y en el marco metodológico.

Esta parte de la investigación se desarrolló sobre contenidos representativos para un primer curso universitario de Cálculo diferencial e integral, ambos en el contexto de carreras de ciencias e ingeniería. Con el término representativo se hace referencia a una escogencia fruto de la comparación de un conjunto de programas y/o textos reconocidos en universidades de la región, según criterios que se desprenden de la concepción de formación matemática que respecto del concepto de función se evidencia a lo largo de esta tesis.

Se sintetiza en esta sección los resultados del estudio que, en el anexo B, aparece bajo el nombre de “Demandas matemáticas al concepto de función en los primeros cursos universitarios de Cálculo”; se describe el papel que juega el concepto de función en el desarrollo de tales cursos, a través de la definición de algunas categorías de análisis y la conformación de algunos grupos de demandas que se identificaron en el mencionado estudio.

5.1. TIPOLOGÍA DE CONCEPTO DE FUNCIÓN DEMANDADO:

En primera instancia el concepto de función es demandado como regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto numérico de partida un elemento en otro conjunto numérico de llegada, en algunos casos intervalos de reales, en otros conjuntos discretos. Esta asignación suele hacerse evidente a través de flechas, tablas, parejas ordenadas, fórmulas o mediante representaciones en el plano cartesiano. En el estudio de demandas se identificó que esta tipología del concepto de función es demandada en el concepto de límite, cuando se exhibe la manera en que valores cada vez más cercanos a un valor del dominio se corresponden con valores cada vez más cercanos a un determinado valor en el rango:

"En el cálculo y sus aplicaciones a menudo nos interesamos por los valores f(x) de una función f cuando x está muy cerca de un número a, pero no es necesariamente igual a a. De hecho, en muchos casos el número a no está en el dominio de f; esto es f(a) no está definido. Vagamente hablando, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿si x se acerca más y más a a (pero $x \neq a$), f(x) se acerca también cada vez más a algún número L? si la respuesta es sí decimos que el límite de f(x), cuando x tiende a a, es igual a L, y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L .$$

(Swokowski, 1982, 50).

"…En la figura 2.4 damos una interpretación geométrica en la cual la flecha curva indica la correspondencia entre x y f(x).

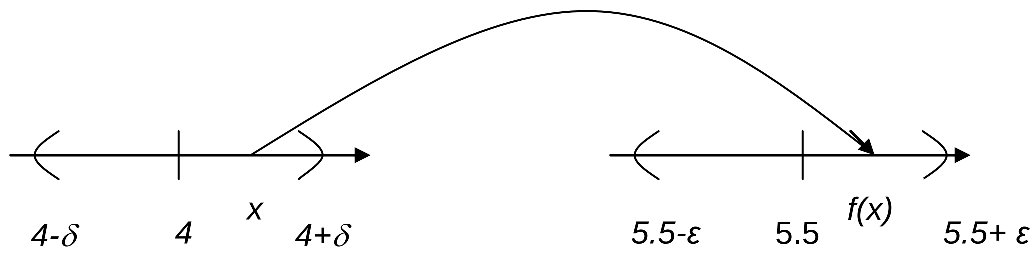


Figura 2.4”

(56)

En los apartes que se han tomado como muestra, es importante llamar la atención sobre el uso de los símbolos *f, x, a, f(a)* y *f(x),* de los cuales el estudiante debe dar cuenta de su interpretación a todo lo largo de los cursos de cálculo: *f* para el objeto matemático función, *x* para un elemento variable, genérico en el dominio de la función, *a* para un elemento específico, fijo en el dominio de la función, *f(a)* para el valor de la función en el elemento fijo del dominio *a* y *f(x)* para el valor genérico de la función*.* Igualmente importante, aunque no aparezca explícito en los apartes escogidos, es la notación utilizada para especificar el dominio y el rango de una función, estos suelen presentarse por medio de los símbolos *Dom(f)* e *Im(f)* y se utiliza la notación propia de conjuntos o de intervalos reales, según sea el caso, para especificar el conjunto en particular.

La misma tipología del concepto de función y los mismos símbolos pueden identificarse en las presentaciones que suelen hacerse del concepto de continuidad a través de representaciones en el plano, en ejemplos de funciones que relacionan variables físicas a través de fórmulas expresadas analíticamente y presentadas en la introducción al concepto de derivada y en problemas de aplicación de máximos y mínimos.

En los casos anteriores el dominio es un conjunto numérico continuo, isomorfo a la recta numérica, sin embargo existen casos en que la regla de correspondencia tiene como dominio un conjunto discreto, como ocurre en la presentación que suele hacerse del concepto de integral como límite de sumas de Riemann: el dominio son los rectángulos de la partición (conjunto discreto) y la función asigna a cada uno de ellos el valor correspondiente a la altura del rectángulo limitado por la curva de la función a integrar.

En segunda instancia es importante tener en cuenta que dicha regla de correspondencia no se restringe a conjuntos numéricos aunque en los cursos de cálculo ese sea el caso predominante; en conceptos como la función derivada o la integral indefinida el concepto de función pasa a ser una regla de correspondencia definida sobre un conjunto de funciones, esto se puede ejemplificar con el teorema fundamental del cálculo en el que se define una función de otra función:

"EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b].

Parte I. *Si se define G como*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo x en [a,b], entonces G es una antiderivada de f en [a,b]…"

(243)

Se ratifica así la tipología de función como regla de correspondencia pero generalizada a procesos de cambio sobre elementos de cualquier tipo de conjunto (dominio), es decir, conjuntos numéricos (discretos o continuos) o no numéricos que pueden ser funciones e incluso conjuntos de figuras en el plano como ocurre con las transformaciones en el plano: reflexión, proyección, homotecia, rotación, traslación e inclinación.

La tipología del concepto de función identificada como demandada en los primeros cursos de Cálculo, conduce entonces a que la definición de función que se adopte al interior de la ETC debe ungir como correspondencia o regla de asignación general entre conjuntos tanto numéricos como no numéricos que pueda extenderse luego a versiones más específicas, por ejemplo transformaciones.

5.2. OPERACIONES CON FUNCIONES:

Como puede observarse en el anexo correspondiente a las demandas matemáticas al concepto de función, con la operacionalización del concepto de límite, las operaciones entre funciones emergen como elemento necesario tanto en procesos demostrativos como operativos. Siendo el concepto de límite soporte de los conceptos de continuidad, derivada e integral, estos también tienen a dichas operaciones en el engranaje de su conceptualización y operatividad. Las operaciones suma, producto y cociente de funciones se tornan entonces de obligatorio manejo para la construcción y aplicación de dichos conceptos. Se Ilustra lo anterior con algunos apartes de textos representativos:

"TEOREMA

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$ *, entonces*

(i) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ *.*

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)\bullet g(x) = L\bullet M$ *.*

(iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *, siempre y cuando* $M \neq 0$*.*

El teorema anterior a veces se escribe como sigue: (2.12) *(i)* $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)\bullet g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Donde se supone que los límites indicados existen y $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ *en (iii). Los resultados (i) y (ii) pueden generalizarse a sumas y productos de más de dos funciones.*

En palabras, (2.12) puede enunciarse como sigue:

(i)El límite de una suma es la suma de los límites.

(ii)El límite de un producto es el producto de los límites.

(iii) El límite de un cociente es el cociente de los límites." (Swokowski, 64).

En el aparte reproducido es importante llamar la atención sobre un detalle simbólico, *f(x)+g(x)* hace referencia a la función suma de *f* y *g, f(x).g(x)* hace referencia a la función producto de *f* y *g* e igual ocurre con el cociente, es decir, se asume la apropiación de este simbolismo para las operaciones aritméticas de funciones, dando por sentado que estas operaciones entre funciones dan lugar a otras funciones.

Otra operación que no es de carácter aritmético pero igualmente es exigida en el estudio de límites, de continuidad, de derivadas y de integrales, es la composición de funciones:

"…Demostraremos ahora un teorema que nos dice que la propiedad de la continuidad se conserva en la operación composición. Con mayor precisión, tenemos lo siguiente:

TEOREMA 3.5 Suponiendo que v es continua en p y que u es continua en q, siendo q=v(p), la función compuesta f=u $_o$ v es continua en p." (Apóstol, 1973, 173).

El manejo simbólico nuevamente es requerido como parte de las demandas al concepto de función; *f=u $_o$ v* hace referencia a la función compuesta de *v* y *u* ("*v* compuesta *u*") o sea a la función obtenida al efectuar la composición en orden aparentemente inverso a la manera como se escribe, aspecto que será muy importante tener en cuenta en la ETC que se propondrá. Respecto de la operación composición resalta que el nivel de profundidad con que va siendo exigida es mayor en la medida en que se avanza hacia el cálculo integral, pasando por la conocida regla de la cadena en la cual se opera sobre funciones compuestas y alcanzando un punto álgido con el método de integración por sustitución:

"Las integrales de la forma

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Pueden calcularse calculando…" (Salas y Hille, 1984, 264)

La demanda al concepto de función inversa surge en el estudio de las llamadas funciones elementales y se extiende a través de todo el curso de cálculo diferencial e integral. Una de las temáticas en que es más clara la exigencia a este concepto, es en el estudio de la derivada de funciones inversas (función logarítmica y exponencial, funciones trigonométricas y sus inversas), el cual toma forma en el teorema que permite calcular la derivada de la función inversa:

"TEOREMA 6.7. Supongamos f estrictamente creciente y continua en un intervalo [a,b], y sea g la inversa de f. Si existe la derivada f'(x) y no es nula en un punto x de (a,b), entonces la derivada g'(y) también existe y no es nula en el correspondiente punto y, siendo y=f(x). Además, las dos derivadas son recíprocas una de otra; esto es, tenemos

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

(Apóstol, 308, 309)

En otros textos la formulación de la ecuación anterior es la siguiente:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

(Salas y Hille, 146)

Formulación que evidencia la notación utilizada para la función inversa: $f^{-1}(x)$, notación sobre la que será importante volver al describir la ETC dadas las dificultades, ampliamente reportadas, que representa para los estudiantes.

5.3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES:

En este apartado se analizan las propiedades de inyectividad, sobreyectividad, monotonía y continuidad (a nivel intuitivo, gráfico) de las funciones.

El concepto de inyectividad es demandado como condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de una función:

*"**Función inversa***

Sea f una función inyectiva. La inversa de f, simbolizada por f^{-1}, es la única función definida en la imagen de f y que satisface la ecuación $f(f^{-1}(x))=x$ para todo x en la imagen de f." (Salas y Hille, página 40)

También es demandado como condición necesaria, pero no suficiente, para la monotonía de funciones. Aunque estos conceptos no son exclusivos de los cursos de cálculo universitarios, suelen abordarse a este nivel de manera previa a temáticas como la derivada de funciones y por tal razón se considera esta demanda como propia de dichos cursos.

En cuanto a la sobreyectividad, su importancia para los cursos de cálculo radica en la relación que establece entre el codominio y el rango o conjunto de imágenes de la función, necesaria para establecer condiciones para la composición e inversión de funciones.

El concepto de monotonía aparece en los cursos de cálculo en el marco de las aplicaciones de la derivada de funciones como elemento para ejercitar el concepto de derivada y su operatividad; el llamado criterio de la primera derivada exige del concepto de función creciente y función decreciente en su formulación:

"Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a,b). Tenemos entonces:

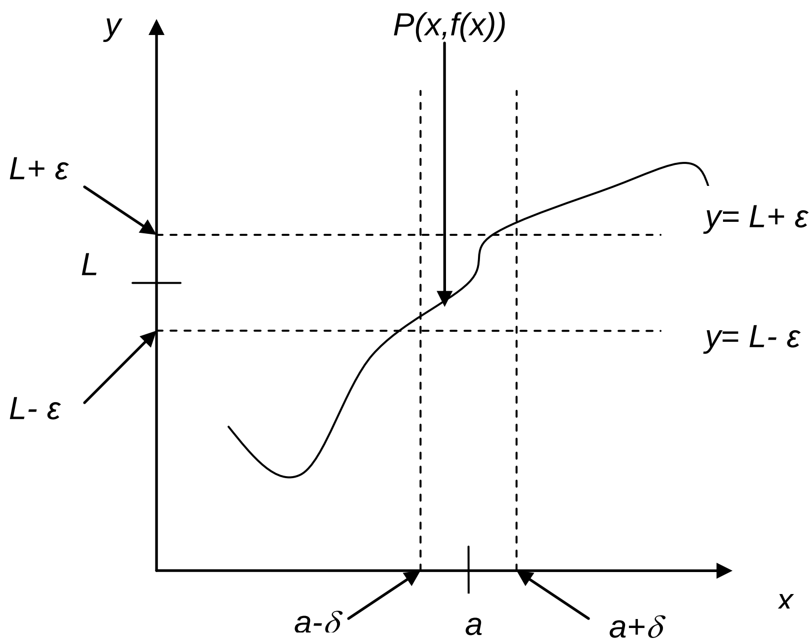
a) *Si f'(x)>0 para todo x de (a,b), f es estrictamente creciente en [a,b].*
b) *Si f'(x)<0 para todo x de (a,b), f es estrictamente decreciente en [a,b]*
c) *Si f'(x)=0 para todo x de (a,b), f es constante en [a,b]."* (Apostol, 228)

Puede verse que aparece también el concepto de continuidad como condición necesaria para este teorema; aunque a esa altura del curso de cálculo el concepto de continuidad ya ha sido construido, se considera que una conceptualización previa, a nivel intuitivo, principalmente geométrico, es necesaria para abordar la construcción épsilon-delta apoyada en el concepto de entorno y que, como ha sido ampliamente reportado (Delgado, 1998; Vrancken y otros, 2005; Artigue, 1995; Cornú, 1981, 1983), genera tantas dificultades a los estudiantes.

5.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES:

Los conceptos de límite y continuidad, el teorema del valor intermedio para funciones continuas, el concepto de derivada como solución al problema de la pendiente de la recta tangente, la aplicación del concepto de derivada en el trazado de curvas, el concepto de integral como área bajo una curva, el teorema del valor medio para integrales definidas, entre otros, se construyen o ilustran mediante representaciones gráficas de funciones. A continuación se presentan algunos apartes de textos, que permitirán ilustrar la manera en que la gráfica de una función es demandada por los anteriores conceptos.

Una primera muestra hace referencia a la manera en que la gráfica de una función permite visualizar los entornos que acotan el límite de la función a medida que se acota el valor de *x* en torno a *a:*



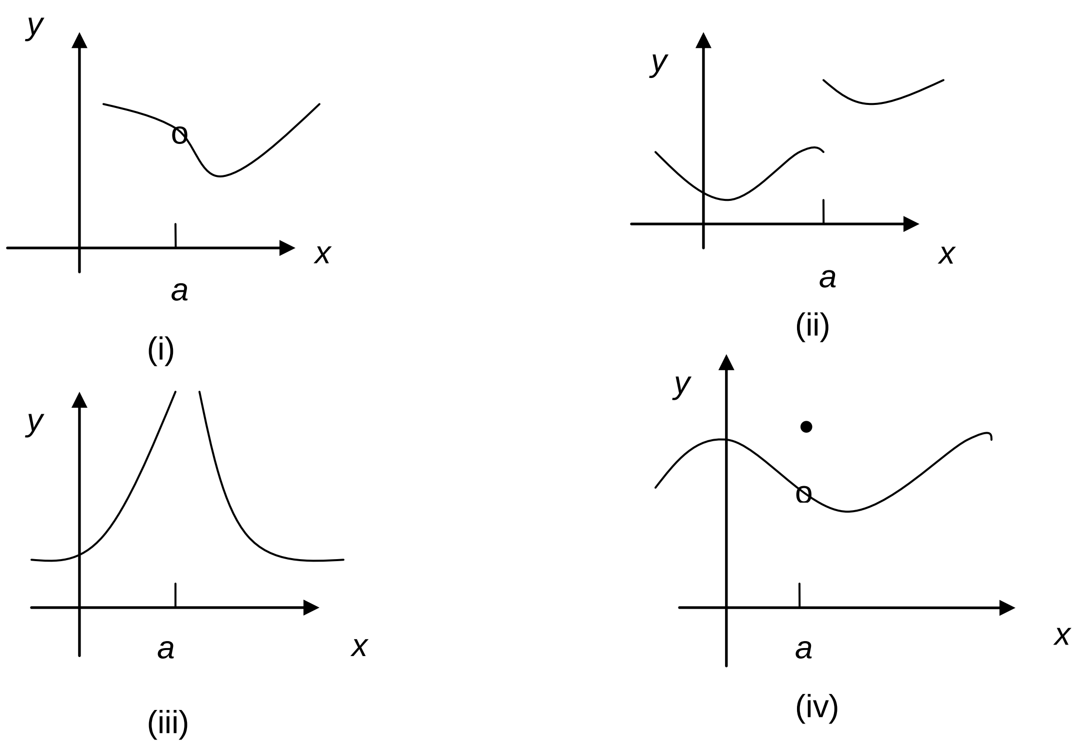
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Figura 2.7

(E. Swokowski, 57)

Resulta especialmente llamativo este caso de utilización de la gráfica de una función porque la gráfica adquiere un carácter dinámico al mostrar, como apoyo al discurso del texto, que la disminución del valor épsilon, es decir, del radio del entorno de L, genera disminución en el valor delta, el radio del entorno de *a.* El mismo carácter puede verse cuando la gráfica de una función es utilizada para ilustrar el concepto de derivada como solución al problema de la pendiente de la recta tangente. Situación distinta se presenta cuando la gráfica es utilizada para ilustrar el teorema del valor medio o el concepto de integral definida, en esos casos la gráfica tiene un carácter estático. En el manejo simbólico aparece la notación *(x,f(x))* para designar un punto genérico de la gráfica en el plano cartesiano.

Suelen utilizarse también gráficas para representar los casos de discontinuidad, dichas gráficas también poseen el carácter dinámico a que se hizo referencia en el párrafo anterior:



(77)

5.5. MODELOS FUNCIONALES:

Los modelos constante, lineal, cuadrático, exponencial, logarítmico y periódico son ampliamente demandados a todo lo largo de los cursos de cálculo diferencial e integral; en algunas temáticas son demandados como simples funciones sobre las cuales se halla un límite, se estudia su continuidad, se determina su derivada o su integral, en otras se constituyen en herramientas para modelar situaciones o soluciones a situaciones problema.

En cuanto a la demanda de que son objeto estos modelos funcionales por parte de los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral como funciones sobre las que operan dichos conceptos, no es necesario ilustrarlos aquí pues el lector interesado puede remitirse al respectivo anexo o verificar en cualquier texto de cálculo.

Resulta más importante ilustrar aquellos casos en que estos modelos funcionales son demandados como herramientas para modelar situaciones o soluciones a situaciones problema:

En particular, el modelo lineal es demandado como herramienta en la construcción del concepto de derivada, cuando este es introducido como solución al problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto y como modelador de situaciones problema que se plantean en el marco de aplicación del concepto de derivada.

Los demás modelos citados arriba son exigidos primordialmente en el último sentido mencionado en el párrafo anterior (como modeladores de situaciones problema), en problemas extraídos del ámbito de la economía, la administración y la física en los que la situación se describe mediante una función sobre la que luego se aplica el concepto de derivada:

*“**20.** Un fabricante de artículos para alumbrado sabe que puede vender x lámparas de pie por semana a p dólares cada una, donde $5x=375-3p$. El coste de producción es $(500+15x+1/5x^2)$ dólares. Demostrar que el máximo beneficio se obtiene cuando la producción es de alrededor de 30 unidades por semana.”* (Salas y Hille, 198)
*“**19.** Un camión ha de recorrer 300 km en una carretera llana a velocidad constante de x km por hora. Las leyes de circulación prescriben...”* (Apóstol, 238)
“EJEMPLO 5. Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta...Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.” (235)
5. “Un cable telegráfico consta de un núcleo de hilos de cobre con una cubierta de material aislante. Si x denota la relación del radio del núcleo al espesor de la cubierta, se sabe que la velocidad de transmisión de señales es proporcional a $x^2\log(1/x)$. ¿Para qué valor de x es máxima la velocidad? (Salas y Hille, 351)
Como puede verse, se trata de situaciones típicas de modelos de crecimiento que se pueden representar mediante funciones constantes, lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas o trigonométricas.

En el cálculo integral la demanda es análoga, se presentan situaciones problema que se modelan mediante alguno de los modelos funcionales para luego aplicar el concepto de integral:

“17. Una región plana tiene la forma de un semicírculo de radio a montado en un cuadrado con lado 2a. Encuentre el centro de gravedad de esta región.”
“18. Una región tiene la forma de un triángulo equilátero de lado a montado en un cuadrado de lado a. Encuentre su centro de gravedad.” (Swokowski, 482)
La notación simbólica utilizada puede variar según la temática y el texto utilizado; cuando estas funciones son demandadas como elementos sobre los que actúan los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral suele utilizarse $f(x)=mx+b$ para la función lineal y $f(x)=c$ para la función constante. A la función cuadrática no

se hace referencia explícita mediante una expresión analítica, si no que aparecen casos concretos de ella, expresados en la forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Lo mismo sucede con las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas las cuales se expresan en la forma $f(x)=a^x$ para la exponencial, $f(x)=log_a x$ para la logarítmica y *f(x)=senx, cosx, tanx* para las trigonométricas.

Las notaciones a que se hace referencia presentan, en algunos casos, variaciones importantes en su expresión, en especial cuando la demanda se presenta en la modelación de situaciones mediante funciones. Resulta importante llamar la atención del lector sobre el siguiente ejemplo, reproducido ya en párrafos anteriores pero que se cita nuevamente para una más fácil ilustración:

*"**20.** Un fabricante de artículos para alumbrado sabe que puede vender x lámparas de pie por semana a p dólares cada una, donde 5x=375-3p. El coste de producción es ($500+15x+1/5x^2$) dólares. Demostrar que el máximo beneficio se obtiene cuando la producción es de alrededor de 30 unidades por semana."* (Salas y Hille, 198)

En él aparece una función lineal expresada implícitamente, es decir, no aparece una de las variables despejada: *5x=375-3p*. Existe cierta tendencia a utilizar esta notación cuando las funciones en cuestión están expresando la relación entre variables en el contexto de situaciones problema.

En este mismo sentido la notación implícita tiene una particular utilización, las llamadas cónicas (elipse, hipérbola, parábola con eje de simetría paralelo al eje *x*), la circunferencia y otras curvas, con las debidas restricciones en su dominio, se utilizan para expresar analíticamente funciones mediante notación implícita:

"30. La ecuación $x^3+y^3=1$ define una o más funciones y de x. (a) Supuesto que existe la derivada y' y sin resolver la ecuación respecto a y, demostrar que y' satisface a la ecuación $x^2+y^2y'=0$. (b) Supuesto que existe la segunda derivada y'', demostrar que $y''=-2xy^{-5}$ siempre que $y\neq 0$." (Apóstol, 221,)

"32. La ecuación $3x^2+4y^2=12$ define implícitamente dos funciones y de x si $|x|\leq 2$. Supuesto que la segunda derivada y'' existe, demostrar que verifica la ecuación $4y^3y''=-9$." (221).

5.6. FUNCIÓN COMO PROCESO Y FUNCIÓN COMO OBJETO:

Aunque las concepciones de función como proceso y como objeto no son excluyentes una de la otra si no complementarias, existen teoremas, proposiciones, conceptos, procesos de solución o de demostración que enfatizan una de las concepciones sobre la otra. Se ilustran a continuación algunas situaciones representativas, propias de la actividad matemática de los cursos de cálculo en que alguna, o ambas, de las concepciones son exigidas.

Una buena muestra de la demanda de la concepción de función como proceso es el teorema del valor intermedio para funciones continuas, en él el concepto de función es exigido como regla de correspondencia o asignación entre elementos del dominio y elementos del rango:

"TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si f(a) ≠ f(b), entonces f toma todos los valores entre f(a) y f(b) en el intervalo $[a,b]$.

(Swokowski, 82)

Los símbolos *f(a)* y *f(b)* hacen clara referencia a elementos del rango, asignados mediante la regla de correspondencia de la función a los elementos *a* y *b* del dominio, o sea que se está usando la concepción de función como proceso. Sin embargo, cuando el teorema hace referencia a "la función *f*" el símbolo *f* hace referencia a la función como un todo, es decir, como un objeto; el símbolo *f* encierra en sí todas las significaciones, modos de representación y reglas de la función en estudio.

No obstante existen algunos teoremas en que el concepto de función es claramente demandado como objeto, dejando de lado su acepción como proceso:

"EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b].

Parte I. *Si se define G como*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo x en [a,b], entonces G es una antiderivada de f en [a,b].

Parte II. *Si F es una antiderivada de f, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(243)

En la parte I de este teorema, la función *f*, centro del teorema, es un objeto sobre el cual se define otra función, a través de una operación de orden superior: la integral, que opera sobre ella tomándola como insumo de entre un conjunto de elementos del mismo nivel: el conjunto de funciones numéricas.

En la parte II, la función F, antiderivada de *f,* es evaluada en los valores *a* y *b* nuevamente la función es exigida en su acepción de regla de asociación, es decir, como proceso. Se ve cómo, a lo largo del estudio del cálculo las concepciones de función como objeto y como proceso van y vienen, coexisten todo el tiempo.

Se ve cómo, ninguna de las dos concepciones deja de aparecer ratificándose la afirmación de Sfard (1991): son concepciones complementarias, dos caras de una misma moneda.

6. CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL

6.1. INTRODUCCIÓN

En la vía de alcanzar el objetivo número uno (Caracterizar una estructura teórico conceptual, relativa al concepto de función, que responda a las demandas matemáticas del currículum de las carreras de ingeniería y ciencias y en términos de la cual se puedan caracterizar estados de comprensión del concepto de función en bachilleres que ingresan a tales carreras) y luego de haber identificado las demandas matemáticas respectivas, en este capítulo se describirá la estructura teórico conceptual del concepto de función que se postula como respuesta a dichas demandas.

Su estructuración obedece a criterios tanto epistemológicos como didácticos, cognitivos, matemáticos y curriculares que reflejan la concepción de formación matemática que se agencia al interior de la línea de investigación, a los cuales se ha hecho mención en el marco teórico y en el metodológico y que se ampliará en la medida que se vaya presentando la ETC.

En ella se han incluido aquellos conceptos, en torno al concepto de función, que se considera que, si son objeto de aprendizaje del alumno, contribuirán en buena medida a que él pueda responder a las demandas descritas en el capítulo anterior y que estructuran matemáticamente al concepto de función. Como se dijo en el marco teórico, entre los conceptos se establecen diferentes nexos que los vinculan de una manera orgánica, ya sea definicionalmente (definición de unos conceptos a partir de otros) o proposicionalmente, en este último caso se hace referencia a teoremas, respecto de los cuales no se pretende solamente que el estudiante los conozca como simple apropiación del discurso matemático, si no que los vea como procesos de legitimación en la construcción del conocimiento matemático, esto es imprescindible por su importancia en el afianzamiento de los conocimientos que se van adquiriendo y por su carácter estructurador conceptual al exigir la verificación de cualquier conjetura por válida que esta parezca.

Se han agrupado los conceptos en núcleos conceptuales según criterios de tipo matemático en cuanto un concepto se relaciona y/o depende de otros en su formulación. En otras palabras la presentación de esta ETC busca mostrar de manera explícita y precisa la visión acerca del concepto de función que debe construir un estudiante al finalizar su bachillerato, exhibiendo las relaciones entre el concepto de función y todos los conceptos complementarios a él y entre ellos mismos.

Adicionalmente a los conceptos y nexos entre ellos, la ETC incluye problemas de base, es decir, aquellos problemas que se espera el estudiante esté en capacidad de resolver una vez haya construido su propia versión de la ETC. En la selección de los problemas de base se tuvo en cuenta que estos fueran prototípicos sin ser abiertos, que su proceso de solución se encuentre dentro del contexto de la ETC y que tengan relevancia en la formación matemática del alumno desde la perspectiva del concepto de función.

Para que resulte más clara la exposición de la ETC y de los distintos vínculos entre conceptos, haciendo más fácil cualquier discusión alrededor de ella, esta se ha representado mediante el sistema de mapas conceptuales descrito en el marco teórico según la propuesta del profesor Jairo Álvarez.

El capítulo se inicia con una visión esquemática en la que se describen someramente los núcleos conceptuales, los nexos proposicionales y los problemas de base ilustrando su estructuración a través de un mapa conceptual matemático global de la ETC. Esta visión esquemática incluye la descripción del conocimiento soporte externo a la estructura teórico conceptual.

Continúa luego con la descripción detallada, núcleo a núcleo, de la ETC. Allí se hace una descripción esquemática y se presenta el mapa conceptual matemático de cada núcleo conceptual, para después entrar en el detalle de su descripción. Esta descripción aborda primero los nexos definicionales, no a través de la mera presentación de definiciones si no de la ilustración de la importancia epistemológica y didáctica del nexo y, para los nexos de mayor trascendencia, presentando también un breve análisis de probables dificultades reportadas por algunas investigaciones y algunas sugerencias didácticas apoyadas sobre tales estudios y sobre la experiencia docente. Para aquellos núcleos que incluyen nexos proposicionales, se presenta el respectivo análisis, constituido por la formulación, el proceso de justificación y prueba, los conceptos y teoremas soporte y un análisis cognitivo en cuanto a la comprensión de lo que dice el nexo y de su proceso de justificación.

Finalmente se presentan los 6 problemas de base seleccionados para la ETC, para cada uno se presenta su formulación, técnica de solución, soporte teórico y justificación.

6.2. VISIÓN ESQUEMÁTICA DE LA ETC

6.2.1. Estructuración en núcleos conceptuales:

Recordemos que una estructura teórico conceptual es un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos y como tal puede alcanzar niveles de complejidad relativamente altos que hacen de su presentación un proceso largo y complicado; sabemos que los conceptos matemáticos no existen aisladamente, si no que sus definiciones se apoyan en otros conceptos formando una concatenación que configura el andamiaje sólido que conocemos como característica fundamental de las matemáticas, esto es resultado de los procesos mismos de variación conceptual que han dado lugar a los conceptos matemáticos que conocemos en la actualidad, la génesis misma de los conceptos es un proceso complejo, intrincado en redes que proceden de los más diversos sentidos; sin embargo ese mismo andamiaje, que complejiza la estructura de las matemáticas, puede también constituir una herramienta para simplificar la presentación de estructuras teórico conceptuales, se trata de conformar, alrededor de conceptos centrales, constitutivos del concepto principal (en este caso el concepto de función), núcleos conceptuales que incluyan conceptos soporte, conceptos complementarios u operacionales del concepto central y/o conceptos que generan nuevas categorías en él, como estrategia para configurar paulatinamente la ETC global del concepto principal.

En este orden de ideas, al interior de la estructura teórico conceptual que proponemos para el concepto de función y que ilustramos globalmente en el mapa conceptual matemático que aparece más abajo, se configuran los siguientes núcleos conceptuales que serán descritos de manera pormenorizada en la sección llamada descripción detallada:

- Primer núcleo: CONCEPTO GENERAL DE FUNCIÓN. Este núcleo se centra en el concepto general de función y agrupa los conceptos de dominio, codominio, imagen y rango, complementarios a él y que permiten generar en el concepto de función las categorías que se agrupan en el segundo núcleo. Se incluyen también los conceptos de variable dependiente y variable independiente. Todos los nexos son definicionales.

- Segundo núcleo: FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS. Núcleo conformado con las categorías que se generan en el concepto de función según criterios relativos a la regla de asociación: funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Este núcleo se relaciona con los subnúcleos 4.2 y 4.3 a través de los nexos proposicionales NP1 y NP2. El primero de ellos vincula el concepto de función inyectiva con el concepto de monotonía y el segundo, al mismo concepto con la gráfica de una función numérica. Similarmente, el concepto de función inversa, ubicado en el núcleo 3, se apoya definicionalmente en el concepto de función inyectiva.

- Tercer núcleo: COMPOSICIÓN E INVERSIÓN DE FUNCIONES. Incluimos en este núcleo la composición e inversión de funciones como procesos apoyados en la regla de asociación de las funciones en cuestión. Estos dos conceptos se vinculan a través del nexo proposicional NP3 que establece la manera como puede formularse la función inversa mediante la composición de funciones.

- Cuarto núcleo: FUNCIONES NUMÉRICAS. Agrupamos en este núcleo funciones con dominio y codominio en los números reales, de probada importancia para los cursos de cálculo. Incluimos también aspectos relativos a sus propiedades y representación gráfica. El núcleo se estructura en cuatro subnúcleos:

    - Subnúcleo 4.1: FUNCIÓN NUMÉRICA. Se centra en dicho concepto; de él se desprenden definicionalmente los conceptos de función con dominio discreto y función definida por partes, los cuales a su vez apoyan la definición del concepto de función con dominio mixto.

    - Subnúcleo 4.2: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES NUMÉRICAS. Con centro en el concepto gráfica de una función, incluye conceptos relativos a la caracterización de la gráfica de una función numérica: asíntotas, tanto verticales como horizontales, a partir de las cuales se define, aunque de manera intuitiva con un tratamiento principalmente gráfico, el concepto de límite; en este último y, naturalmente en el concepto de gráfica, se apoya el concepto de continuidad. Como elemento de utilidad en el análisis gráfico, se incluye también el concepto de simetría axial y respecto de un punto. Al interior de este subnúcleo no incluimos nexos proposicionales, pero si se relaciona, a través del nexo NP2, con el concepto de inyectividad.

- Subnúcleo 4.3: FUNCIONES MONÓTONAS Y VALORES EXTREMOS. Centrado en estos dos conceptos, deriva de ellos definicionalmente los conceptos de función creciente, función decreciente, máximos y mínimos locales y absolutos de una función. El concepto de función monótona recibe los nexos proposicionales NP4, NP5 Y NP6 de los modelos exponencial, logarítmico y lineal respectivamente. A su vez el concepto de extremos de una función se vincula con el modelo cuadrático a través del nexo proposicional NP7. Citado anteriormente, el nexo NP1 vincula el concepto de monotonía con el de inyectividad.

- Subnúcleo 4.4: FAMILIAS DE FUNCIONES Y PARÁMETROS. Subnúcleo centrado en el concepto de familia de funciones que permite definir el concepto de modelo funcional. Incluye los modelos funcionales constante, lineal, cuadrático, exponencial, logarítmico y periódico. Los modelos exponencial, logarítmico y lineal tienen nexos proposicionales (NP4, NP5 y NP6) con el concepto de función monótona, mientras que el modelo cuadrático lo posee con el concepto de extremos de una función (NP7).

- Quinto núcleo: OPERACIONES CON FUNCIONES. Se estructura alrededor del concepto de conjunto de funciones numéricas en R, sobre este se definen las operaciones aritméticas suma y multiplicación y la composición de funciones como operación, esta última se apoya también sobre el núcleo 3 (composición e inversión de funciones).

6.2.2. Conocimiento soporte de la ETC:

- Conceptos: Como pudimos constatar en nuestro estudio histórico, el concepto de función es tal vez la mejor muestra de lo intrincado y lento que puede resultar el proceso de construcción de un concepto matemático, por tanto su construcción matemática se cimenta en estructuras previas, organizadas sobre conceptos debidamente articulados por fuera de la estructura teórico conceptual del concepto de función y que de manera directa o indirecta entran en la definición de función y/o de los demás conceptos que conforman dicha estructura.

De acuerdo con lo anterior y analizando cada núcleo desde una perspectiva matemática identificamos que para la estructuración del primer núcleo (concepto general de función) es necesario el concepto de conjunto, entendido como colección de elementos cuyo criterio de conformación puede ser conocido o no y el concepto regla de asociación. Similarmente, los conceptos incluidos en el segundo núcleo (funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas) y en el tercer núcleo (composición e inversión de funciones) apoyan su conformación matemática en relaciones entre conjuntos, nos referimos a relaciones de inclusión (subconjuntos) y de pertenencia (elemento-conjunto), a fin de disponer de elementos para aplicar criterios relativos a la clasificación de funciones según su regla de asociación y decidir si es posible o no componer dos funciones y/o hallar la inversa de una función. En este mismo sentido el determinar dominio y/o codominio de la composición de dos funciones requiere que entre los conjuntos se puedan definir operaciones (unión, intersección, diferencia, complemento) ya sean estos conjuntos generales o conjuntos numéricos. En el cuarto y quinto núcleos (funciones numéricas y operaciones con funciones), el trabajo con funciones numéricas exige del conjunto de los números reales, en particular intervalos de reales. Respecto de este sistema, el estudio y manipulación de funciones numéricas exige de los axiomas de orden y, en general, de todas las propiedades que hacen de él una estructura numérica (cuerpo) a fin de que sea posible establecer valores extremos, intervalos de monotonía de una función, propiedades y operaciones, así como las nociones de límite y continuidad apoyados en los conceptos de asíntota y densidad de los reales respectivamente. Así mismo la representación gráfica de funciones numéricas se cimenta sobre el concepto de producto cartesiano y requiere para su representación de un sistema de coordenadas cartesianas.

-Teoremas: no identificamos teoremas o proposiciones que actúen como soporte a la ETC propuesta.

-Procesos matemáticos notables: se destacan como procesos trascendentes, de tipo matemático, necesarios para la construcción de la estructura teórico conceptual dos procesos: covariación y manipulación algebraica. El primero de ellos fue fundamental en la constitución histórica del concepto de función, en el estudio histórico se encontró cómo, el estudio de los fenómenos naturales en la edad media genera avances significativos en la concepción de variable tanto dependiente como independiente y en los medios de representación de propiedades que cambian; se encuentra pues, que el estudio del cambio, en particular del movimiento, impulsa la evolución del concepto de función al requerir para su desarrollo la concepción de las ideas referentes a la manera como el cambio en una magnitud produce cambios en otra, es decir, la covariación. O sea que, epistemológicamente, buena parte de la génesis del concepto de función se encuentra en la noción de covariación; matemáticamente hablando el concepto de función tiene una de sus bases en la noción de dependencia entre variables como proceso matemático previo y necesario para que el concepto de función adquiera su acepción como relación entre magnitudes variables. Respecto de los procesos relacionados con la manipulación algebraica, se hace referencia a todos aquellos procesos relacionados con la generalización de operaciones y relaciones aritméticas y su expresión en términos de variables, constantes e incógnitas, en otras palabras expresiones algebraicas y ecuaciones; los procesos de simplificar, factorizar, encontrar el valor numérico de una expresión, resolver una ecuación, expresar situaciones geométricas mediante expresiones algebraicas hacen parte de dichas manipulaciones algebraicas que consideramos soporte para la estructura teórico conceptual. Las razones para esta consideración parten de la experiencia didáctica y del estudio histórico del concepto de función; desde el siglo XVI y comienzos del XVII el estudio del movimiento (movimiento de puntos que describían curvas, cuerdas vibrantes, flujo de calor) es el problema central para las ciencias (Kleiner, 1989, citado por Ruiz Higueras, 1998) y las matemáticas se toman el protagonismo en su solución, en este contexto se produce la extensión del concepto de número, la creación del álgebra simbólica y su posterior unión con la geometría (subordinación de la geometría al álgebra); el concepto de función, en este momento de su desarrollo, se liga a las expresiones analíticas, y aunque es una mera herramienta para expresar relaciones entre cantidades que dependen una de otra, es en esta etapa que adquiere el estatuto matemático, en la forma de lo que hoy se conoce como función numérica y que, en la estructura teórico conceptual que se propone, conforma un núcleo conceptual importante según lo muestra el estudio de demandas, de modo que la vinculación epistemológica y matemática entre dicho núcleo y los procesos que se han llamado de manipulación algebraica es clara y necesaria.

6.2.3 Nexos proposicionales:

Los nexos proposicionales que aparecen al interior de la ETC establecen vínculos de tipo implicativo o de equivalencia entre conceptos de un mismo núcleo conceptual o entre conceptos de distintos núcleos; le otorgan un carácter orgánico a la estructura al mostrar las interrelaciones existentes entre los distintos componentes de la estructura revelándola como un todo que sólo se fracciona con fines de presentación. Cada nexo proposicional tiene asociado un proceso de demostración o de prueba que se exhibirá en la presentación del respectivo núcleo según criterios relativos al contexto curricular en que se enmarca la estructura.

- NP1 Relación monotonía-inyectividad: establece el criterio de inyectividad para una función según sea monótona o no. Vincula el subnúcleo 4.3 (funciones monótonas y valores extremos) con el núcleo 2 (funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas).

- NP2 Criterio de la recta horizontal para funciones inyectivas: otorga una herramienta gráfica para determinar la inyectividad de una función. Vincula el subnúcleo 4.2 (representación gráfica de funciones numéricas) con el núcleo 2 (funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas).

- NP3 Formulación de función inversa como composición: proporciona la definición de función inversa apoyada sobre la composición de funciones. Se trata de un nexo interior al núcleo 3 (composición e inversión de funciones).

Los nexos NP4, NP5 y NP6 establecen la relación entre los parámetros de la expresión analítica del modelo de crecimiento exponencial, logarítmico y lineal con la naturaleza de la función que representan, así como con la gráfica respectiva. Estos nexos son de destacar por el valor conceptual que otorgan a los parámetros como determinantes de la naturaleza de los modelos funcionales, adicionalmente dan paso a la noción de funciones de funciones es decir, función como objeto. Los tres vinculan el subnúcleo 4.2 (familias de funciones y parámetros) con el subnúcleo 4.3 (funciones monótonas y valores extremos).

- NP4 Criterio de monotonía para las funciones exponenciales

- NP5 Criterio de monotonía para las funciones logarítmicas

- NP6 Criterio de monotonía para funciones lineales

- NP7 Extremos absolutos de la función cuadrática: permite determinar los valores extremos de la función cuadrática a partir de los parámetros de su expresión analítica. Vincula el subnúcleo 4.2 (familias de funciones y parámetros) con el subnúcleo 4.3 (funciones monótonas y valores extremos).

6.2.4 Problemas de base:

Los problemas de base que incluimos en la estructura teórico conceptual, buscan poner en juego todo el marco teórico de la estructura, de manera sectorizada, dando lugar a dinámicas que movilicen el conocimiento al interior de la estructura pero exigiendo procesos de pensamiento no mecánicos ni memorísticos si no de tipo inferencial, basados en aplicaciones no evidentes de los conceptos y nexos de la estructura. Cada uno de los problemas que presentamos a continuación se analizará a fondo en la sección correspondiente una vez se hayan descrito todos los núcleos conceptuales.

- Pb1 Reconociendo y construyendo funciones en distintos contextos. Involucra este problema de base lo relativo al reconocimiento y construcción de funciones en diferentes contextos: tabla, conjunto de parejas ordenadas, gráfica cartesiana o expresión analítica. Se enmarca en el primer núcleo conceptual, pero se relaciona también con el núcleo 4 por cuanto considera también funciones numéricas.

- Pb2 Reconociendo y construyendo funciones inversas en distintos contextos. En este problema de base se agrupan los conceptos y técnicas relativas al reconocimiento y construcción de funciones inversas en diferentes contextos. En ciertos aspectos utiliza los conceptos de composición e inversión de funciones como proceso, apoyándose en el núcleo 3, en otros utiliza la composición y la inversión como operaciones binarias apoyándose en el núcleo 5. Pone en juego los criterios de inyectividad de funciones presentes en el núcleo 2 y favorece la articulación conceptual y proposicional al exigir la utilización de los nexos proposicionales NP2 y NP3. Aunque el énfasis del problema se hace para funciones numéricas, también se incluyen funciones que no lo son.

- Pb3 Resolviendo ecuaciones de primer grado en F(R). Este problema de base plantea la utilización de las operaciones entre funciones descritas en el quinto núcleo para solucionar ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son funciones. Se trata de poner en juego estrategias, apoyadas en la inversión de la composición y de la multiplicación de funciones como operaciones binarias, para despejar incógnitas.

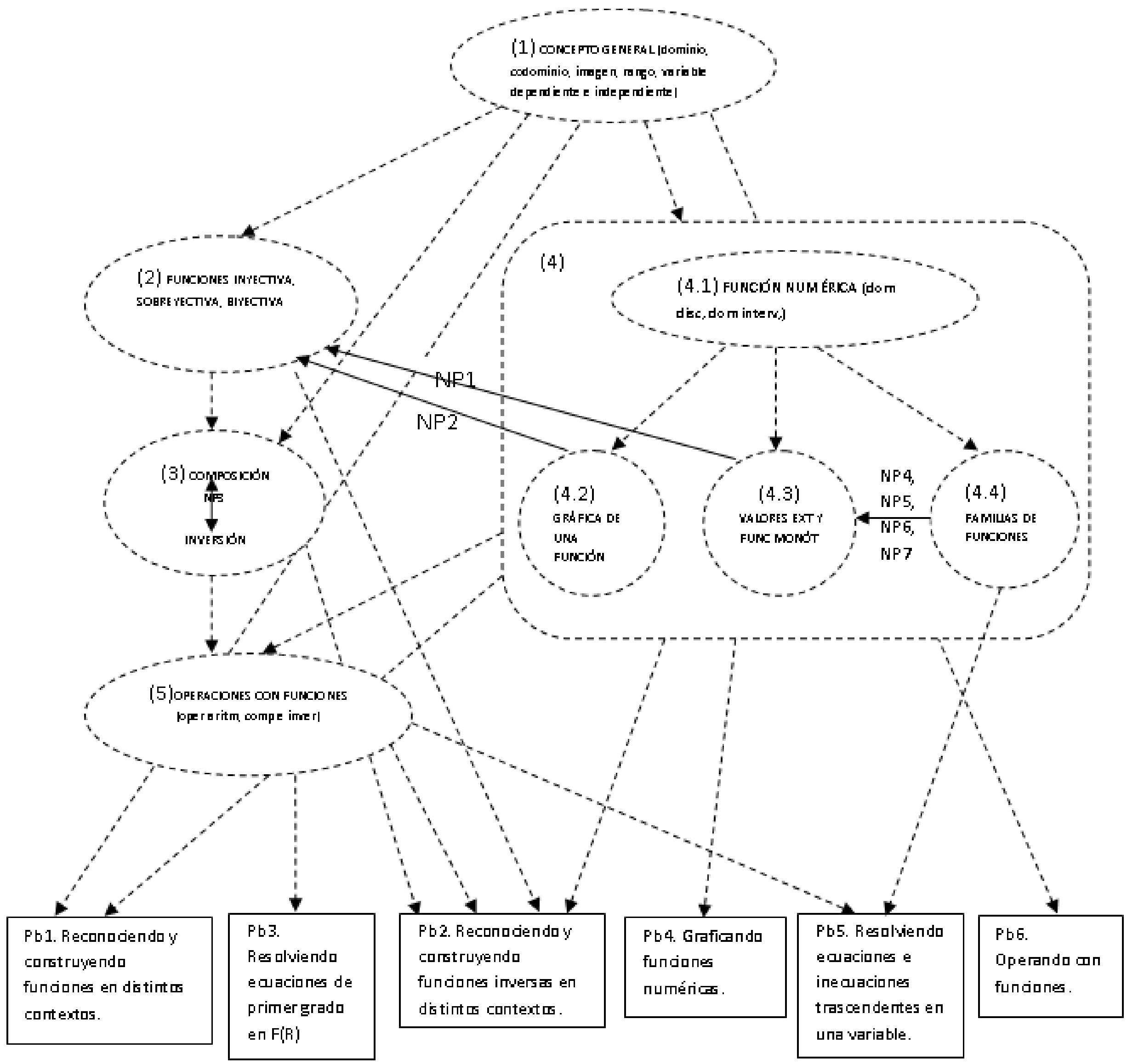
- Pb4 Graficando una función numérica. Este problema de base agrupa estrategias y técnicas básicas para la construcción de graficas de funciones numéricas expresadas analíticamente, en especial aquellas que permitan el análisis de características matemáticas, como intervalos de monotonía, valores extremos, simetrías, asíntotas y discontinuidades de diverso tipo, desde su proceso de construcción.

- Pb5 Resolviendo ecuaciones e inecuaciones trascendentes en una variable. Problema de base contextualizado en el subnúcleo 4.4 y apoyado en el núcleo 5, se enfoca en la utilización de de las propiedades de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para resolver ecuaciones e inecuaciones en una incógnita.

- **Pb6 Operando con funciones.** Problema de base que busca evidenciar la apropiación del sistema abstracto de representación de funciones, a través de la realización de operaciones, expresadas simbólicamente, en diversos contextos.

6.2.5 Mapa global de la ETC

Figura 2. Mapa Global De La Estructura Teórico Conceptual



En la Figura 2 se presenta una visión esquemática de la ETC global propuesta para el concepto de función.

En el mapa se representan cuatro de los elementos constitutivos de una ETC: los conceptos, los nexos entre ellos, y que se clasifican como definicionales y proposicionales y los problemas de base. Hay otros dos elementos de la ETC, como son los procesos matemáticos, asociados con procesos de justificación y prueba y solución de problemas, y aspectos relacionados con representaciones semióticas que no se representan en el diagrama. Por esta razón se dice que el diagrama da una visión esquemática de la ETC.

Por ser una visión esquemática no aparecen aquí conceptos específicos, pero si núcleos conceptuales, los cuales se representan mediante óvalos con borde punteado. Tal es el caso del núcleo (2) Funciones inyectivas, sobreyectiva y biyectivas. En los mapas de los núcleos y subnúcleos conceptuales, que se describirán en detalle más adelante en este mismo capítulo, se podrán apreciar óvalos de borde continuo para representar los conceptos.

Los nexos definicionales, se representan por medio de flechas punteadas e indican que el concepto de donde parte la flecha ingresa como soporte en la construcción de la definición del concepto hacia el cual apunta la flecha. Por ejemplo, la flecha punteada que une el núcleo (1), concepto general de función, con el núcleo (4), función numérica, indica que el concepto general de función ingresa en la formulación de la definición de función numérica.

Los nexos proposicionales se representan por medio de flechas continuas que indican que existe un teorema o proposición que liga al concepto de partida como antecedente con el concepto de llegada como tesis, y que enumeramos como NP1, NP2, NP3, NP4, NP5, NP6 y NP7 arriba en la presentación de los nexos proposicionales. Por ejemplo, la flecha continua (Marcada NP1) que une valores extremos y función monótona (Subnúcleo 4.3) con función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva (Núcleo 2), representa el teorema que establece el criterio de inyectividad para una función según sea monótona o no.

Los problemas de base se representan con rectángulos que aparecen en la parte inferior del mapa, al extremo de flechas punteadas que permiten identificar los conceptos que dan sentido y relevancia a tales problemas, por ejemplo Pb3, “resolviendo ecuaciones de primer grado en F(R)”.

6.3 DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL

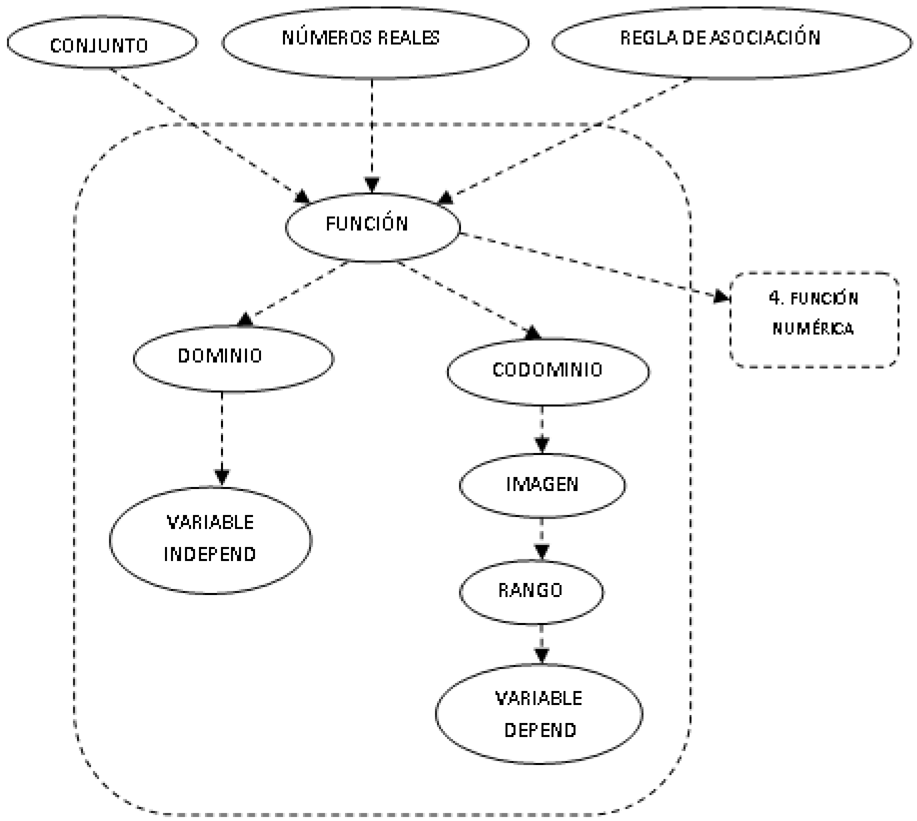
6.3.1 Primer núcleo: concepto general de función

6.3.1.1 Descripción esquemática: Este núcleo se ha estructurado alrededor del concepto general de función. Como puede observarse en el mapa conceptual matemático que aparece más abajo, dicho concepto se define a partir de los conceptos de conjunto y regla de asociación, sin embargo se incluye como concepto previo el de número real, dado que en el contexto escolar predominan las funciones numéricas que requieren de una imagen conceptual de número real bien adaptada matemáticamente. Aparece complementado el concepto de función por los conceptos de dominio, codominio, imagen, rango (conjunto de valores de la función), variable dependiente y variable independiente que, aunque no ingresan explícitamente en su definición, generan nuevas categorías en él.

No se proponen nexos proposicionales ni problemas de base al interior del núcleo. Obviamente, este núcleo posee nexos definicionales con todos los demás núcleos.

6.3.1.2 Mapa del núcleo

Figura 3. Primer Núcleo. Concepto General De Función



6.3.1.3 Nexos definicionales

Concepto de función: en los textos universitarios y aun en textos de bachillerato es común encontrar presentaciones del concepto basadas en definiciones estructurales de función, que hacen más remota su comprensión para el estudiante; son de este tipo definiciones de función como terna o como un conjunto de pares ordenados, surgidas posteriormente a la definición de Dirichlet, producidas por desarrollos de las matemáticas como los espacios de Hilbert, el "funcional" de Volterra, el concepto de distribución, las nociones de espacio métrico y espacio topológico, la axiomática construida por el grupo Bourbaki, la teoría de conjuntos iniciada por Cantor y desarrollada por Zermelo (1908), Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros, en las cuales el concepto de función supera las expresiones algebraicas, la dependencia entre cantidades variables y las asociaciones entre valores numéricos, ya sea tomados de intervalos o de cantidades variables, para evolucionar a funciones de funciones y a relaciones entre elementos de conjuntos o a conjuntos de pares ordenados (Ver variaciones conceptuales $\mathbf{V_{14}}$ y $\mathbf{V_{15}}$ del estudio histórico crítico, capítulo 4) alcanzando niveles de estructuración propios de discursos matemáticos evolucionados, alejados del discurso propio de contextos escolares.

Tales definiciones, estructuradas en contextos axiomáticos, se tornan de difícil acceso para el lector inexperto, en el caso del concepto de función, una definición que es el resultado de un proceso histórico de más de 4000 años ha sido ya descontextualizada de toda significación distinta a la que el discurso axiomático al que pertenece le exige. Los procesos de enseñanza requieren una posición diferente, que favorezca la construcción personal del concepto de función por parte del estudiante, es decir, necesitan definiciones más operativas que estructurales, contextualizadas en un universo cercano y asequible al estudiante. La definición de función altamente evolucionada debe entonces contextualizarse adecuadamente, debe pasar por el proceso que Chevallard llamó transposición didáctica: “El conjunto de transformaciones que sufre una obra para ser enseñada” (Chevallard, Y., Bosh, M., y Gascón, J, 1997, 136).

De otro lado es importante recordar que, de los conocimientos matemáticos, los sujetos pueden tener dos concepciones: una estructural y una operacional, en el caso particular del concepto de función Anna Sfard afirma: “una función puede ser definida no sólo como un conjunto de pares ordenados, sino también como un tipo de proceso computacional” (Sfard, 1991, 4), en este sentido, es posible constatar, como quedó dicho en el capítulo 5 (“El concepto de función en los primeros cursos de cálculo y álgebra lineal), que en general el concepto de función es exigido en ambas concepciones a lo largo de los cursos de cálculo y álgebra lineal, pero la concepción operacional precede a la estructural y es necesaria para la construcción conceptual de muchos de los conceptos de dichos cursos.

No quiere decir lo anterior que es suficiente que el estudiante alcance una concepción de función como proceso, pero sí que debe partirse desde allí posibilitando la construcción de la noción de función como objeto que será exigida por otros conceptos más elaborados como el Teorema fundamental del cálculo (ver capítulo 5). Asumir el concepto de función como un proceso y como un objeto, es condición necesaria para su comprensión y, por tal razón, esta propuesta se inclina por una definición de tipo operativo general, que posibilite su utilización en contextos tanto numéricos (geométricos, analíticos y algebraicos) como cotidianos o científico-técnicos, favoreciendo la construcción del concepto de función a partir de su operacionalización, pero potenciando el paso al concepto de función como objeto cuando el avance en el proceso de formación matemática lo exija.

Lo que se busca es evitar, en lo posible, la aparición de dificultades ligadas a este concepto, que ya han sido claramente identificadas entre estudiantes que se enfrentan a los cursos universitarios de matemáticas:

-los criterios que utilizan los estudiantes para identificar funciones generalmente no obedecen a lo establecido por la definición, aunque puedan citar muy bien esta (Vinner y Dreifus, 1989), si no que dependen del tipo de representación utilizada, es decir, existe un divorcio entre la “definición del concepto” y la “imagen del concepto” (Tall y Vinner, 1981; Álvarez y Delgado 2001a). En el capítulo 7 se verá que este tipo de desadaptación es de las más frecuentes en los procesos de construcción conceptual de función, probablemente como resultado de presentar el concepto a través de una definición de función como terna o como conjunto de pares ordenados, lo que restringe el concepto a un solo contexto dificultando la movilización a otros contextos.

–a los estudiantes les resulta difícil pasar de una concepción de función como proceso a una concepción de función como objeto (Sfard, 1992; Dubinsky, 1991; Dubinsky y Harel, 1992). Si de entrada se presenta una definición de función como objeto (como lo es la definición tipo terna o pares ordenados) la situación se tornará más complicada: no existirá el salto cualitativo, menos aun se podrá llegar a la concepción como objeto sin ni siquiera haber construido la noción que, compartiendo el criterio de Sfard, se considera previa. Una definición operativa y generalizada puede potenciar la construcción del concepto de función como proceso e incrementar las posibilidades del salto a la otra concepción cuando esta empiece a ser exigida.

–los estudiantes no perciben la importancia del pensamiento funcional y asocian el trabajo con funciones sólo con el contrato didáctico (Artigue, 1998, 5). Una definición de función poco operativa, rigurosa y alejada de sus posibilidades como herramienta cotidiana, técnica y/o científica reforzará esta dificultad, el estudiante pensará en funciones como la tarea a realizar para aprobar el curso, sin ver en ella sus potencialidades como economía de pensamiento.

-es preponderante la frecuencia con que los estudiantes asocian el concepto de función con una fórmula o con una curva. El origen de esta confusión es de tipo didáctico, puesto que, en gran medida, el concepto suele presentarse mediante ejemplos que corresponden a este prototipo, el estudiante lo asocia entonces al concepto de tal modo que, en adelante, cada vez que vaya a identificar funciones lo hace a través de él, pasando por alto la definición.

Complementariamente a las dificultades reportadas en los párrafos anteriores, al interior de esta investigación, en el estudio de demandas (ver capítulo 5) se encontró que el concepto de función, en cursos de cálculo diferencial, es exigido en su acepción como regla de correspondencia expresada ya sea mediante una expresión algebraica, una gráfica, un conjunto de pares ordenados o flechas que vayan de un segmento de recta a otro. En cualquiera de los casos era vital el reconocimiento, independientemente del medio de representación, de la asociación unívoca como elemento fundamental en la temática a tratar: contextos numéricos (cálculo diferencial e integral), contextos vectoriales (vectores en R^n cálculo de varias variables), o de contextos en que se trata con conjuntos de funciones (función derivada en cálculo diferencial, integrales indefinidas en cálculo integral).

Todo lo anterior lleva a considerar que sólo una definición de carácter general, que explicite las condiciones que debe cumplir una asociación entre elementos, cualquiera que estos sean, para llamarse función, puede posibilitar el reconocimiento como funciones de una gran diversidad de relaciones, ya sean estas de tipo cotidiano, técnico, científico, matemático o numérico (según la naturaleza del dominio) y cualquiera que sea su sistema de representación (manera de expresión de la regla de correspondencia). En particular nos parece de vital importancia que el estudiante vea las funciones numéricas sólo como un caso particular de función.

Por tanto se postula como definición de función (D1): “llamaremos función a toda asociación entre dos conjuntos A y B, en la que a todo elemento de A le corresponde un único elemento de B. Los conjuntos A y B pueden ser iguales o no y los elementos que los conforman pueden ser objetos materiales o abstractos.” Utilizaremos las letras *f, g, h* o *F, G, H* para denotar las funciones como un todo o sea que al utilizarlas nos referiremos a una función con todos sus conceptos complementarios.

Al conjunto A lo llamaremos dominio (D2) de la función.

Al conjunto B lo llamaremos codominio (D3) de la función.

El elemento asignado en B, para un elemento *x* de A, le llamaremos imagen o valor (D4) de la función en *x.* Lo denotaremos *y* ó *f(x)*.

Al subconjunto del codominio formado por todas las imágenes de la función lo llamaremos Rango (D5).

Sin embargo, el concepto de función que deben construir los estudiantes no puede quedarse expresado mediante un lenguaje cercano al lenguaje natural, si no que es fundamental que el mismo estudiante llegue a expresar los esquemas que ha construido, mediante el lenguaje propio de las matemáticas, puesto que es mediante ese lenguaje que se producirán sus avances a través de la estructura teórico conceptual que dará respuesta a las demandas matemáticas al concepto de función. Pero la expresión simbólica del concepto debe ser fruto de la construcción por parte del estudiante de esquemas que encapsulen en lo que lee, o escribe, el concepto y su aplicación en procesos de identificación de funciones. Por tal razón la definición anterior de función debe evolucionar, en el proceso de construcción personal de la estructura teórico conceptual, a la representación semiótica tradicionalmente utilizada.

Definidos todos los elementos anteriores, como estrategia que genera una dialéctica entre ellos y relativiza la importancia del codominio, se incluye como complemento de la definición de función el criterio de igualdad entre funciones: "diremos que dos funciones *f* y *g* son iguales si y solamente si, comparten el mismo dominio y para todo *x* en el dominio de *f* y *g* se cumple que *f(x)=g(x).*" Este criterio fue introducido en el proyecto SCS del grupo de investigación y se ha retomado, en esta propuesta de estructura teórico conceptual, por cuanto su puesta en práctica obliga al estudiante a iniciar el salto hacia la concepción de función como objeto, ya que el hecho de comparar funciones como un todo exige interiorizar y condensar el proceso algorítmico o de asociación que las origina para desligarlas de él y constituirlas en elementos sujetos a categorización (los términos interiorización, condensación y cosificación fueron introducidos por Anna Sfard en 1991). El criterio de igualdad lleva al estudiante a considerar como iguales funciones que tienen diferente codominio, lo que no sería posible en una definición como terna o como conjunto de pares ordenados puesto que, bajo estas definiciones, diferentes codominios determinan diferentes funciones (Respecto de la manera en que este criterio incide en la comprensión básica de función ver capítulo 7, primer plano de referencia); esto incide también sobre el concepto de función sobreyectiva pues lo flexibiliza ya que cualquier función puede serlo con sólo introducir modificaciones sobre su codominio. Por tales razones no se incluye en la definición de función, ninguna especificación sobre el codominio aparte de ser el conjunto de donde se toman las imágenes de la función.

D6 Variable: el concepto de función ha evolucionado apoyado en el concepto de variable. Las culturas prehelénicas veían los valores de las magnitudes que tabulaban como puntuales y aun no vislumbraban la variabilidad, pero estuvieron a un paso de alcanzar lo que la cultura griega encontró al buscar regularidades en las relaciones entre magnitudes, nos referimos a considerar las magnitudes como cantidades variables. Fue esta primera idea el estante sobre el que se apoyó la primera noción, aunque muy primitiva, de función, es decir, desde sus inicios las cantidades variables son la esencia de la noción de función (ver capítulo 4, estudio histórico crítico).

En la evolución del concepto de función es reiterada la aparición del concepto de variable como elemento sobre el que se estructura este, se puede decir que estos dos conceptos han evolucionado de la mano. Sin pretender un estudio histórico del concepto de variable, es pertinente hacer un breve recorrido por su evolución que permita tener claridades respecto de la conceptualización que se considerará necesaria para la estructura teórico conceptual. Como ya se dijo, para los griegos no había variables sino magnitudes variables que, además, sólo podían ser magnitudes físicas, los objetos matemáticos eran estáticos y número y magnitud estaban completamente separados. A comienzos del siglo XIII el interés se enfoca en fenómenos relacionados con el movimiento y las matemáticas adquieren un papel fundamental en la búsqueda de explicaciones al por qué de los fenómenos estudiados, pero la separación número-magnitud sigue vigente por lo tanto las explicaciones eran primordialmente cualitativas. En el siglo XIV las preguntas evolucionan al cómo, esta exigencia pone de manifiesto la insuficiencia en el concepto de variable como mera magnitud que cambia, se dan entonces los primeros pasos a la cuantificación de los cambios: Oresme desde lo geométrico y Heytesbury y Swineshead con la construcción de una cinemática-aritmética. El concepto de variable se aproxima al de cantidad que cambia (cantidad de una cualidad diría Oresme), pero se representa a través de segmentos. La búsqueda del cómo conlleva la separación entre lo que ahora se conoce como variable dependiente y variable independiente. El obstáculo para la unificación número-cantidad aun no ha sido salvado: no se dispone de instrumentos de medición adecuados para las especulaciones teóricas que rigen la investigación, sólo cuando los instrumentos de medición evolucionan un poco, Galileo ve favorecido su trabajo y desarrolla la concepción de variable dependiente como cantidad que cambia debido a los cambios en otra pero aun en referencia a cantidades físicas, sólo que ahora aquellas relacionadas con el movimiento. El paso hacia la algebrización de la geometría fue también el paso hacia la separación del concepto de variable del mundo físico: Vieta, Descartes y Fermat, entre los siglos XVI y XVII, muestran que una curva se puede construir a partir de su expresión algebraica, pero es Descartes quien, al determinar que una ecuación en x y y muestra la dependencia entre dos cantidades variables, le otorga el estatus de variable a las letras utilizadas por él para representarlas, es decir, se da el paso hacia la variable como símbolo que representa cualquier valor de una cantidad, sin embargo esa cantidad continúa, en esencia, siendo una cantidad física. Con Newton el concepto de variable no cambia de estatus pero se explicita claramente la variable dependiente: magnitud cuya variación es producida por la variación de otras en el tiempo. Ya en el siglo XVIII, Jean Bernoulli postula una definición de función que explicita una expresión analítica de una magnitud variable y de cantidades constantes. La adquisición del estatuto matemático del concepto de función determinaría, finalmente, la separación del concepto de variable matemática del concepto de variable física, aparece Euler en esta historia con su consideración de funciones únicamente para aquellas que tuvieran una expresión analítica, se considera en esta investigación que desde allí se empieza a hacer referencia explícita a variables numéricas separadamente del mundo físico, pero las variables numéricas pueden representar cantidades físicas cuando esto sea necesario. Después de Dirichlet, las variables incluso pueden hacer referencia a las mismas funciones u otros objetos. Como puede verse en este breve recorrido histórico, el concepto de variable en su evolución cada vez ha ido abarcando un mayor dominio, pasando de la estricta representación de cantidades físicas a considerar estas sólo como un caso particular de ellas.

Desde los puntos de vista cognitivo y didáctico, es importante tener en cuenta aspectos relativos a confusiones que suelen presentarse con el concepto de variable. Algunas son relativas a los diversos significados que suelen asignarse a la manera como se representan o sea a los usos que se le dan a los símbolos literales, a este respecto Küchemann (1980) identificó seis:

-a la letra se le asigna un valor numérico (Letra evaluada).

-la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado (Letra no utilizada).

-la letra se considera una abreviación del nombre de un objeto o un objeto en sí (Letra como objeto).

–la letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella (Letra como incógnita especifica).

–la letra representa o es capaz de asumir distintos valores (Letra como número generalizado) y

–la letra representa un rango de valores no especificado y existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo (Letra como variable).

De estos seis usos el último reviste especial interés para esta tesis, pues corresponde al que más amplia demanda ofrece al concepto de función, sin embargo los otros cinco se presentan con frecuencia en las matemáticas del bachillerato por lo cual el estudiante puede entrar en confusiones que afecten la construcción personal que debe hacer del concepto de función; este aspecto se profundizará en el capítulo 7 junto con otras confusiones que son relativas propiamente a las caracterizaciones que puede tener una variable según el contexto en que sea utilizada (Usiskin, 1988) a saber:

-incógnita específica (número desconocido pero de valor fijo que puede ser calculado utilizando las condiciones dadas).

-número generalizado.

-relación funcional (entre dos cantidades cuyos valores cambian).

Existe un tercer aspecto relativo a confusiones que suelen presentarse con la discriminación entre variable dependiente y variable independiente, sobre el cual se volverá más en detalle en el capítulo 7, por la incidencia negativa que tiene en el nivel de asertividad en actividades relacionadas con los conceptos de límites y continuidad, o con situaciones propias del marco interpretativo del concepto de función. Se trata de la no discriminación entre variable dependiente y variable independiente al representar funciones numéricas en un plano cartesiano (Vrancken y otros, 2005, 6).

Como puede verse, la comprensión del concepto de variable presenta dificultades generalizadas para los estudiantes, derivadas tanto de su epistemología, como de su representación y del significado que se le asigne según el contexto de trabajo. Definirlo pues no resulta algo sencillo. Como lo que se busca es construir una estructura teórico conceptual que dé respuesta a las demandas previamente identificadas al concepto de función, pero sin olvidar aspectos como los arriba mencionados, se utilizará como definición de variable una que atienda a:

*la generalidad que ha alcanzado el concepto después de siglos de evolución, es decir, que su mención pueda hacer referencia a valores numéricos, objetos o cantidades físicas, objetos matemáticos (funciones, vectores, espacios, etc.); discriminados estos entre los que cambian por sí mismos y los que lo hacen por causa de cambios en otros;

*lo que en su modo de representación exige el concepto de función, es decir, como letra evaluada o como número generalizado, en particular atendiendo a la demanda identificada en el estudio de demandas respecto a la determinación de valores de una función numérica en cualquiera de sus modos de representación (Ver capítulo 4, “El concepto de función en los primeros cursos…”);

*la caracterización propia del contexto de trabajo con funciones, o sea en su utilización para representar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores cambian; una de ellas por causa de cambios en la otra.

Coherentemente con lo anterior, en la ETC se designa con el nombre de variable al símbolo que, en la expresión con la cual se describe una función, sea esta analítica o no, representa cualquier valor de un conjunto de referencia, sea este un conjunto numérico o no. Se utiliza la letra ***x*** cuando el conjunto de referencia es el dominio de la función y la letra ***y***, cuando el conjunto de referencia es el codominio de la función. En el primer caso se habla de variable independiente, en el segundo caso, de variable dependiente.

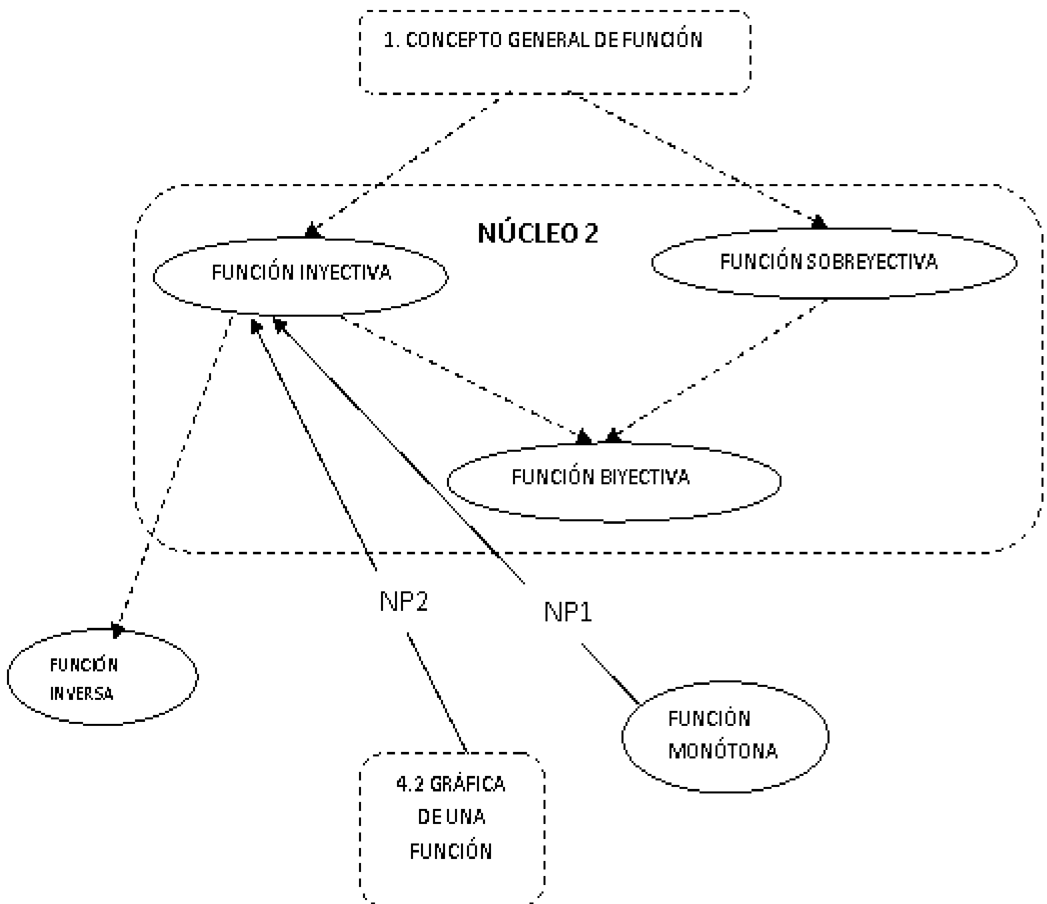
6.3.2 Segundo núcleo: funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

6.3.2.1 Descripción esquemática: En este núcleo se han agrupado funciones que tienen como criterio de clasificación características relativas a su regla de asociación según sea biunívoca o determine que el rango y el codominio sean iguales; se trata de funciones inyectivas y funciones sobreyectivas. Como puede observarse en el mapa conceptual matemático presentado más abajo, los nexos intra son sólo de tipo definicional y vinculan los conceptos de función inyectiva y sobreyectiva con el concepto de función biyectiva. En cuanto a los nexos inter aparece uno de tipo definicional que vincula el concepto de función inyectiva como soporte del concepto de función inversa y dos proposicionales, uno con el concepto de función monótona (al interior del subnúcleo 4.3) y otro con el subnúcleo número 4.2 (representación gráfica de funciones numéricas). Respecto de estos dos últimos, se presentarán detalles al abordar los núcleos que aportan la hipótesis de cada uno de ellos.

No se proponen problemas de base relacionados con este núcleo.

6.3.2.2 Mapa del núcleo

Figura 4. Segundo núcleo. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas



6.3.2.3 Nexos definicionales Los conceptos de función inyectiva y función sobreyectiva surgen del análisis de la regla de asociación de la función en dos sentidos: un primer sentido referido a la cantidad de veces que los elementos del rango (subconjunto del codominio que se conforma con las imágenes o valores de la función, es decir, los *f(x)*) son utilizados como imágenes (inyectividad) o, en otras palabras, el carácter biunívoco que puede tener la regla de asociación y un segundo sentido referido a la comparación entre el rango y el codominio de la función (sobreyectividad).

D7 Función inyectiva: En el primer sentido, hay un caso particular en el que cada elemento del rango sólo es utilizado una vez como imagen por ser la regla de asociación biunívoca, en cuyo caso se dice que la función es inyectiva. Este concepto puede definirse desde varias perspectivas:

-La cardinalidad del dominio es igual a la del rango. Este tipo de definición, aunque se desprende del concepto de función como asignación, se apoya en otro concepto que no hace parte de la estructura teórico conceptual y presenta como desventaja su carácter poco operativo, salvo en casos de funciones con dominio finito, representables mediante tablas o diagramas sagitales, lo cual puede reforzar en el estudiante la tendencia a considerar este tipo de funciones como prototipos a usar como apoyo en la identificación de funciones; adicionalmente, en su aplicación el estudiante compara conjuntos, mas no analiza la función en sí misma, lo que genera dificultades al utilizarse en contextos como el cartesiano o el analítico en los cuales la conformación del rango puede tornarse complicada. Sin embargo, sin asumirla como la definición de función inyectiva, es positiva su presentación a los estudiantes como una consecuencia de la relación biunívoca entre dos conjuntos sean estos discretos (finitos o infinitos) o continuos, y de manera posterior a la construcción personal, por parte del estudiante, de la definición que se asuma para función inyectiva.

-Cada elemento del rango es imagen de un solo elemento del dominio. Es esta una definición apropiada para analizar funciones representadas mediante diagramas sagitales, tablas, pares ordenados o en el plano cartesiano, por tanto su aplicación exige ese primer paso en la estrategia. De manera introductoria parece adecuada, además de necesaria, por cuanto obliga a la utilización del registro gráfico de la función, lo que pone en juego el pensamiento visual, de vital importancia en el aprendizaje del cálculo (Zimmermann, 1990, 136). Si la función no ha sido presentada en este tipo de registro, será necesaria la conversión entre el tipo de registro utilizado y el gráfico para poder realizar el "mapeo" del codominio y el dominio lo que refuerza un aprendizaje profundo del concepto de función gracias a la movilización entre diferentes representaciones. Sin embargo ingresa aquí un aspecto de importancia identificado por el grupo de investigación y que se analizará más en detalle en el capítulo 7, se trata de que los estudiantes identifican como funciones sólo aquellas que son inyectivas y/o al pedirles que definan función inyectiva, lo hacen mediante la definición de función (Álvarez, Delgado y otros, 2001b, 65). En el primer caso lo que falla es el conocimiento en acto que no se corresponde con el institucionalmente aceptado, el estudiante posee una imagen conceptual mal adaptada matemáticamente del concepto de función. En el segundo caso lo que falla es el modo de representación del conocimiento en acto por diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático (para más detalles ver página 65 de dicho documento), al respecto debe recordarse que se presentan problemas de comprensión asociados a las representaciones semióticas del discurso matemático, tanto en el sentido de crear significados a partir de dichas representaciones como en el sentido inverso, es decir, al representar semióticamente significados personales que pueden estar bien o mal adaptados matemáticamente. Este es un problema que, en muchos casos, es generado por enfoques de enseñanza que privilegian algunos sistemas de registro sobre otros. El estudiante no es exigido para movilizarse entre unos y otros sistemas de registro por lo cual construye conceptos de poca generalidad y esquemas insuficientes para la movilización entre diferentes registros. Por este motivo esta definición no debe asumirse como definición última de función inyectiva, puesto que pierde aplicabilidad en otros registros como el algebraico, propio de contextos analíticos, o en casos de funciones de difícil representación gráfica o de funciones que no tienen dominio numérico (funciones vectoriales por ejemplo), es decir, debe abordarse introductoriamente, como definición aplicable a registros gráficos, pero siempre preparando el paso a otra definición de aplicación en otros registros. Esto último puede potenciarse mediante la utilización de contraejemplos que pongan en conflicto los esquemas que el estudiante ha construido y que ya resulten insuficientes para la identificación adecuada de funciones inyectivas, o sea diversos casos de funciones, en diferentes registros, que no sean inyectivas o de relaciones que pudieran ser inyectivas aunque no sean funciones.

-No hay, en el dominio, dos o más elementos diferentes con la misma imagen. Es esta definición muy similar en su estructura a la anterior y, como tal, presenta las mismas ventajas y desventajas de ella. Sin embargo, al analizarla más en detalle, vemos que esta se centra en el dominio mientras la anterior se centra en el rango lo que le da una forma lógica a su escritura favoreciendo el acercamiento a la definición formal, en lenguaje matemático, necesaria para la construcción de otros tipos de registro en estados más avanzados de formación matemática.

-Si dos elementos del dominio tienen la misma imagen entonces dichos elementos son iguales. Esta definición, aquí expresada en lenguaje natural, se desprende de manera lógica de la anterior y es la que se propone como definición de función inyectiva. Es importante señalar que, aunque sea propuesta esta como definición, se ha enfatizado en una construcción previa que llegue, incluso, hasta la expresión en el registro propio del lenguaje de las matemáticas:

Si x_1, x_2 son elementos del dominio de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

Este tipo de definición, construida a partir de registros de tipo gráfico y de lenguaje natural, encapsula las definiciones ya citadas sin perder operatividad. Presenta la ventaja de ser aplicable en cualquiera de los registros (gráfico, tabular, algebraico o en lenguaje natural), puede aplicarse a funciones de dominio discreto o continuo, conformado por objetos materiales o abstractos. A pesar de enfatizar en la función como proceso, abre camino hacia la construcción de una conceptualización como objeto, dado el nivel de generalidad que proporciona y la manera como encapsula en una sola frase todo el concepto permitiendo aun la movilización desde ella hacia cualquiera de los diferentes registros existentes para funciones. Es importante que el estudiante construya esta definición que será fundamental en otros apartes de la estructura (por citar un ejemplo, en los análisis correspondientes a la relación monotonía inyectividad, nexo proposicional NP1)

D8 Función sobreyectiva: en el segundo sentido, es decir, en cuanto a la comparación entre el rango y el codominio de una función, el caso particular que se toma para establecer una categoría en el concepto de función es aquel en que estos sean iguales, es decir, la función es sobreyectiva. Este concepto puede enfocarse, para efectos de la estructura teórico conceptual, de varias maneras:

-Una función es sobreyectiva si su rango es igual a su codominio. Esta definición se apoya en los conceptos de codominio y rango, y en su operatividad utiliza la comparación de conjuntos, por esta razón resulta apropiada en casos de funciones en registro tabular o sagital, e incluso hasta cartesiano, como etapa inicial de construcción del concepto, cuando aun el estudiante conforma, casi que paso a paso, el rango de las funciones a través de la aplicación de la regla de asignación propuesta, o dicho rango ha sido puesto de manifiesto. Sin embargo al ser exigida para analizar funciones en registro algebraico el estudiante se encontrará con una definición poco operativa y requerirá una definición más evolucionada, desventaja propia de una definición formulada en lenguaje natural.

-Una función es sobreyectiva si todos los elementos del codominio son imágenes de la función. Posee el mismo campo de aplicación que la definición anterior, sólo cambia en cuanto que no cita explícitamente el rango, si no que hace referencia a él citando las imágenes de la función como “pidiendo” la revisión elemento a elemento. Se trata de una definición bastante procedimental, basada en la constatación paso a paso de la condición de sobreyectividad, de nuevo se tiene una definición adecuada en las primeras instancias de introducción del concepto, pero que debe evolucionar a una definición que, sin perder operatividad, extienda su campo de aplicación y posibilite al estudiante la movilización entre los diversos tipos de registro utilizados para representar funciones y el manejo de funciones con dominios numéricos tanto continuos como discretos y en funciones con dominio y codominio no numéricos.

-Una función es sobreyectiva si para todo elemento en el codominio, existe un elemento en el dominio del cual este es imagen. No resulta sencillo llegar al nivel de elaboración implícito en esta definición, a pesar de estar expresada en lenguaje natural. Llegar a ella exige el trabajo previo en las definiciones anteriores y la presentación de diversidad de casos de funciones sobreyectivas y no sobreyectivas, en diferentes registros, que coloquen al estudiante en conflicto cognitivo al acudir a las herramientas definicionales disponibles pero insuficientes. La aplicación de esta definición a funciones representadas en registros tabulares, sagitales o, incluso, cartesianos pasa por el "mapeo" de los elementos del codominio, pero al momento de plantear el análisis de funciones expresadas algebraicamente o funciones cuya representación en ese tipo de registro posea niveles de dificultad altos, se tornará insuficiente. Este conflicto debe dirigirse de manera adecuada a la construcción de una expresión de la definición en lenguaje matemático que la ponga en posición de extender sus alcances:

Para todo y en el codominio de f, existe un x en el dominio de f, tal que $f(x)=y$.

Se toma esta definición como meta de construcción en esta parte de la estructura teórico conceptual, por cuanto cubre las definiciones iniciales y extiende su aplicación a funciones no numéricas (por ejemplo funciones vectoriales) o funciones expresadas analíticamente que pueden ser analizadas a partir de manipulaciones algebraicas y porque reviste el carácter de preparatoria para el problema de base Pb3.

D9 Función biyectiva: diremos que una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Podría parecer intrascendente este concepto, sin embargo, desde el punto de vista matemático es fundamental, en particular al abordar temáticas correspondientes a espacios, Subespacios, bases, homomorfismos e isomorfismos. Desde los puntos de vista cognitivo y didáctico, el concepto de función biyectiva pone en juego de manera simultánea los conceptos de función, función inyectiva y función sobreyectiva lo que permite al maestro y al estudiante identificar y abordar situaciones de imágenes conceptuales mal adaptadas o dificultades ya sea con la interpretación personal de representaciones semióticas o con la representación semiótica de significados personales. Esto será posible en la medida en que el estudiante sea enfrentado a distintas situaciones que lo movilicen entre diversos registros y en ambos sentidos, es decir, trabajar identificando y clasificando funciones, de acuerdo a las definiciones y construyendo, él mismo, funciones que cumplan con tales definiciones en todos los registros.

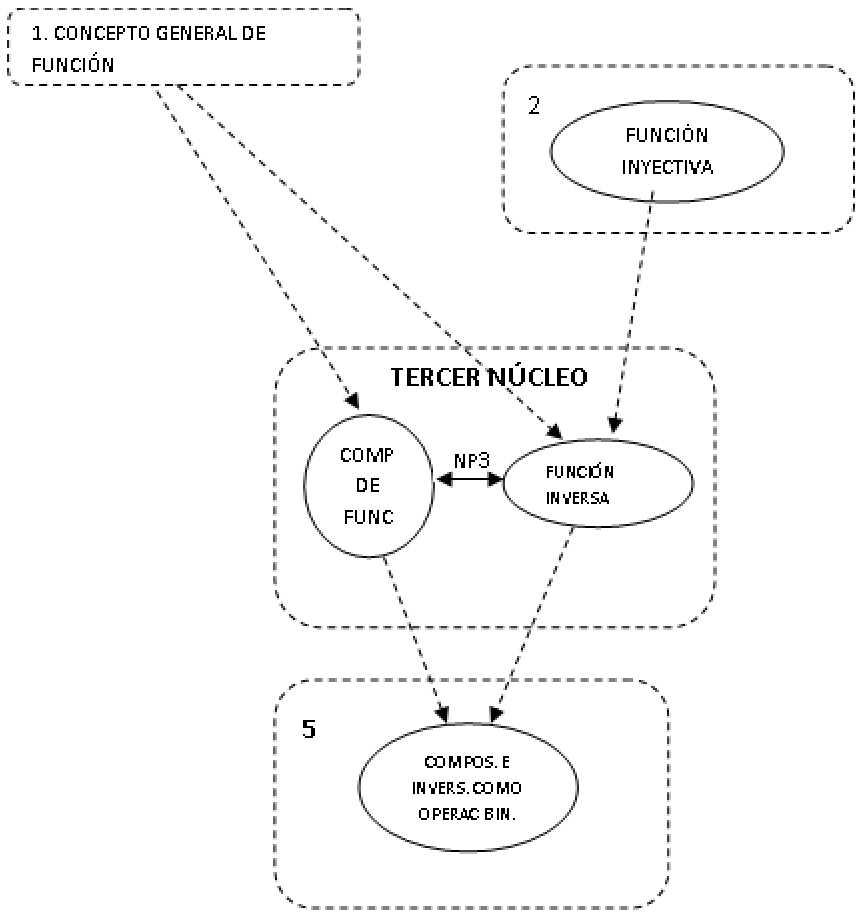
6.3.2.4 Nexos proposicionales Los nexos proposicionales NP1 y NP2 vinculan a este subnúcleo con los núcleos conceptuales 4.3 y 4.2 los cuales aportan las respectivas hipótesis, por tal razón haremos su descripción al presentar cada uno de esos subnúcleos.

6.3.3 Tercer núcleo: composición e inversión de funciones

6.3.3.1 Descripción esquemática En este núcleo se han agrupado los conceptos de composición e inversión de funciones considerados como proceso. Se busca destacar procesos, propios del trabajo con estos conceptos, que exijan del concepto de función en cada uno de sus modos de representación. En el mapa conceptual matemático, presentado más abajo, se ilustran las relaciones entre estos conceptos y otros conceptos presentes en otros núcleos. A nivel intra se incluye un nexo proposicional que vincula, en ambos sentidos, los conceptos de composición de funciones y función inversa; a nivel inter se presenta el nexo definicional que explicita el concepto de inyectividad como soporte para la inversión de una función y el nexo definicional que permite la definición de la composición y la inversión de funciones como operaciones binarias en el marco del núcleo conceptual “operaciones con funciones”.

6.3.3.2 Mapa del núcleo

Figura 5. Tercer Núcleo. Composición e inversión de funciones



6.3.3.3 Nexos definicionales

D10 Composición de funciones:

En el estudio de demandas se evidenció que numerosas funciones numéricas (por ejemplo funciones racionales y funciones radicales) son funciones compuestas y que conceptos como límite, derivada e integral exigen de manera cada vez más elaborada la composición de funciones (Ver capítulo 5, “El concepto de función en…” y el anexo A, “Demandas matemáticas…”). Es de considerarse también que la composición posee un carácter operativo que tiene como insumo y producto funciones, lo que la reviste de especial importancia en el camino a la consolidación del concepto de función como objeto.

Por tanto, la construcción de dicho concepto es un trabajo didáctico de particular importancia que debe abordarse desde un terreno en que el estudiante pueda movilizar sus conocimientos previos. La idea es que, a partir de la noción de función como proceso, el estudiante pueda conceptualizar la composición de dos funciones *f* y *g,* definidas sobre conjuntos de elementos reales o numéricos (discretos o continuos) y representadas en cualquiera de los registros, como el proceso de asignar a un elemento *x,* en el dominio de *g,* el elemento *f(g(x))* en el rango de *f*:

Si el rango de la función *g* está contenido en el dominio de la función *f*, la composición *fog* (se lee “*g* compuesta *f*”) es la función definida en el dominio de *g* mediante

(fog)(x)=f(g(x)).

El camino a dicha conceptualización debe apoyarse en situaciones que pongan al estudiante en la necesidad de concluir las condiciones que deben cumplir las funciones a componer en cuanto a su dominio y su rango, inicialmente funciones definidas sobre conjuntos discretos para hacerlas luego extensivas a funciones definidas sobre conjuntos numéricos continuos.

Es particularmente importante la relación entre el dominio de *f* y el rango de *g*: la condición de que el rango de la función *g* sea subconjunto del dominio de *f*, mirada más en detalle, exige que exista por lo menos un elemento en el dominio de *g,* tal que *g(x)* esté en el dominio de *f* para que tenga sentido calcular *f(g(x));* en dicho caso la función *fog* tiene como dominio el subconjunto de elementos en el dominio de *g* que cumplen la condición anterior. Las razones para proponer esta condición en la definición son de tipo didáctico pues así no todo par de funciones puede ser objeto de composición, lo que exige del estudiante la verificación previa de la condición, otorgándole la debida importancia a los conceptos complementarios de dominio, codominio y rango que, como se verá en el capítulo 7, son vitales para la comprensión básica del concepto de función por parte de los estudiantes.

Existe un aspecto, relativo al sistema de representación simbólica, de particular importancia en el aprendizaje y enseñanza de la composición de funciones y que, por tal razón, no puede pasarse por alto en ninguna propuesta didáctica:

fog se lee en sentido inverso "*g* compuesta *f*". La razón para esta lectura se origina en el orden en que se "aplican" las dos funciones que se están componiendo: el dominio de la función compuesta (*fog*, *g* compuesta *f*) es el dominio de la función *g* (A en el diagrama que aparece más abajo); esta asigna a cada elemento de su dominio valores en su rango, que es subconjunto del dominio de *f* (B en el diagrama que aparece más abajo); luego *f* asigna a cada elemento del rango de *g* un elemento en su propio rango (C en el diagrama que aparece más abajo), que es el rango de la función compuesta; esquemáticamente:

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

$$x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$$

La experiencia docente puede mostrar las dificultades que genera en los estudiantes este detalle, aparentemente superfluo pero que para ellos reviste todo el carácter de confusión. Esta es una buena razón para introducir el concepto aprovechando la visualización gráfica otorgada por la representación sagital o tabular. En muchos casos el concepto es presentado a los estudiantes desde el formalismo de la definición pasando de inmediato al conocido proceso algebraico de componer funciones sustituyendo una expresión algebraica en otra, esta estrategia refuerza la dificultad expuesta arriba, mientras que el inicio gráfico permite una visualización que posibilita que el estudiante, al operar directamente sobre los objetos (en este caso los elementos de los conjuntos), construya el concepto de composición más allá de las manipulaciones algebraicas que sólo refuerzan las habilidades algebraicas.

D11 Función inversa: durante el proceso de construcción personal de la estructura teórico conceptual de función es vital que el estudiante no "vea" las funciones como objetos estáticos, carentes de acción en cuanto relación entre variables involucradas en fenómenos científicos o cotidianos, de modo que, más adelante, el concepto de función como objeto sea construido de manera sólida, con el respaldo de un bagaje procedimental al cual acudir cuando sea necesario; el concepto de función inversa puede contribuir de manera significativa a este objetivo.

Es importante recordar que es frecuente que los estudiantes vean el gráfico de una función como un objeto estático en el plano (Carlson et al, 2007), sin percibir en él una descripción, no verbal, de la asociación entre un conjunto de valores de entrada y un conjunto de valores de salida. En el capítulo 5 se vio como esta percepción de la gráfica de una función es vital en la comprensión de conceptos como límites, continuidad y derivada, por tanto la ETC debe proveer elementos para la construcción de esa concepción de la gráfica de una función; el estudio de la función inversa puede aportar estrategias a este fin si su presentación se aborda a través de una definición que exija el análisis gráfico. Consecuentemente se propone como definición inicial para la función inversa:

"función que a cada valor de salida, de la función cuya gráfica se ha ilustrado, le asigna el correspondiente valor de entrada".

Esta definición, eminentemente verbal, gráfica y transitoria, permitirá además concluir la necesidad de la inyectividad como condición para la posibilidad de construcción de la función pedida. Movilizar esta definición a otras más formales será un excelente ejercicio de cambio de registro para el concepto de función.

Paralelamente a la introducción previa y llevando al estudiante a considerar casos no numéricos o numéricos discretos, puede hacerse la presentación anterior pero sobre una función registrada en una tabla de valores que puede construirse desde una gráfica cartesiana, una descripción verbal de la regla de asociación o una expresión algebraica, o bien puede ser el punto de partida para luego transformarse a esas maneras de representación. El trabajo sobre este tipo de representación presenta el mismo carácter del anterior y también permite llegar a la conclusión de la inyectividad como condición necesaria para la inversión y favorece el proceso de construcción de la definición formal de función inversa.

Marcela Ferrari y Rosa María Farfán, en su estudio socioepistemológico de lo logarítmico (Ferrari y Farfán, 2008, 10), explican la confusión que suele presentarse con la función inversa y el recíproco de una expresión algebraica, considerar $f(x)=x$ como la inversa de $f(x)=1/x$ es un ejemplo de esta situación. Ellas aducen como orígenes posibles para dicha confusión: -los usos comunes de la palabra inversa y la palabra recíproco en contextos matemáticos escolares y contextos no matemáticos, -la utilización de la expresión inversa tanto para funciones inversas como para la proporcionalidad inversa y -el uso de la notación f^{-1} y x^{-1}, en el primer caso para la función inversa y en el segundo para el recíproco de x. Posiblemente, a través de la movilización del estudiante entre diversos modos de representación, en su ejercicio personal de construcción de funciones inversas en diversos registros y verificando siempre la condición necesaria de inyectividad, esta dificultad podría ser obviada.

En concordancia con esta línea de pensamiento, la expresión para función inversa propuesta arriba no deberá quedarse como definición, sino que debe ser un primer paso hacia una definición formal construida desde el trabajo del estudiante. Se propone entonces que, a continuación, la inversa de una función sea encontrada mediante la estrategia de deshacer el proceso de asignación de la función original, pero sin perder el apoyo de las expresiones anteriores como sustento al cuidado que debe tenerse con la inyectividad y las posibles restricciones en el dominio y el rango; en este punto se plantea como definición:

"llamaremos función inversa a aquella función definida por el proceso que deshace el proceso de la función que se toma como directa. La denotaremos por $f^{-1}(x)$."

Esta definición entra ya a hacer necesario analizar el proceso mediante el cual se asignan los elementos del codominio a los elementos del dominio, para poder realizarlo en sentido inverso. Es fundamental la utilización de esta definición con el fin de que el estudiante vea las funciones como procesos de asignación que pueden ser invertidos, no sólo como una curva estática en el plano. Esto previene situaciones que suelen presentarse a causa de análisis sesgados por un solo punto de vista, como el reportado por Marcela Ferrari y Rosa María Farfán (9): los estudiantes extienden la simetría con respecto a la recta $y=x$, para una función y su inversa, a otras simetrías.

Sin embargo la definición anterior debe ser superada en aras de la formalización, necesaria en cursos más avanzados y que sólo debe llegar como resultado del proceso de cosificación del concepto de función inversa para convertirse en una definición aplicable en todos los contextos y que sirva de base para otros conceptos. Como definición formal de función inversa proponemos:

Dada una función inyectiva f, con dominio A y rango B, llamaremos función inversa de f a la función g, con dominio en B y rango en A, tal que $g(y)=x$ si y solamente si $f(x)=y$, con x en A y y en B. A la función g, inversa de f, la denotaremos f^{-1}.

Esta definición es aplicable en cualquiera de los registros utilizados para funciones (plano cartesiano, tabla de valores, parejas ordenadas, expresión algebraica, expresión verbal) dado que aun deja el concepto en su acepción como proceso, puesto que las expresiones $g(y)=x$ y $f(x)=y$, invocan y permiten el proceso de asociación propio de la función en cuestión para tabular o graficar según sea el caso. Sin embargo está próxima a la construcción del concepto de función inversa como objeto al no depender de ninguno de los modos de representación en su expresión.

6.3.3.4 Nexos proposicionales

Al interior de este núcleo se ubica el nexo proposicional (NP3) que vincula en un doble sentido la composición de funciones y la función inversa. Se trata de la proposición que establece que dos funciones son inversas si y solamente si su composición, en los dos órdenes posibles, arroja como resultado la función identidad.

Esta proposición y su demostración son de especial importancia en la construcción personal de la estructura teórico conceptual por su carácter relativo, ya que, en otros discursos, puede también considerarse como otra manera de definir la función inversa (en cuyo caso la definición aquí presentada sería una proposición) con la desventaja de asumir, de entrada, la función como objeto, poniendo un punto alto a su comprensión; sin embargo es positivo que el estudiante conozca estas otras formulaciones para que vea cómo las relaciones entre conceptos y teoremas pueden darse de diferentes maneras, según las formulaciones se den en un contexto u otro.

La proposición tiene un valor adicional: da paso a la encapsulación de la definición de función inyectiva, puesto que deja de ser una mera clasificación para convertirse en una condición que “autoriza” operaciones entre funciones en el proceso de prueba. Ya no se trata de la constatación de condiciones para inyectividad, sino que es ella en sí misma una condición.

En cuanto a la formulación del nexo, esta debe hacerse de manera acorde a la notación utilizada para la composición de funciones:

6.3.3.4.1 NP3: *f* y *g* son funciones inversas si y solamente si $f_o g(x)=x$ para todo x en el dominio de *g* y $g_o f(y)=y$ para todo y en dominio de *f*.

El teorema puede ser presentado en cuanto a lo que afirma a través de gráficas de funciones inversas mediante las cuales puedan constatarse todas las condiciones de la proposición; también es importante la presentación de gráficas de funciones que no cumplan alguna o algunas de las condiciones para analizar las razones por las que, en esos casos, no se cumple el resto de la proposición. Todo lo anterior también puede hacerse con funciones representadas mediante pares ordenados o tablas en aras de realizar conjuntamente los mismos análisis, pero sin perder de vista el carácter variable de los valores en consideración. La visualización es un mecanismo importante en la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral y Montiel, 2001; Ferrari y Martínez–Sierra, 2003) y por tal motivo debe ser implementada en el mayor número posible de situaciones de enseñanza.

En cuanto a la demostración, apoyar el nexo en el concepto de función como conjunto de pares ordenados resulta contraproducente con la noción de función que se pretende construya el estudiante; el par ordenado puede constituirse para el estudiante en un objeto estático restando a la función su carácter de proceso de asignación o de relación de dependencia entre cantidades que varían, por esa razón, una vez se hayan hecho los análisis correspondientes a lo que nos dice el nexo puede abordarse el proceso de justificación y prueba.

-Proceso de justificación y prueba

La prueba se hace en dos partes, una para cada implicación que compone la equivalencia.

En el primer sentido, consiste en tomar un elemento arbitrario del dominio de cada una de las funciones que se supusieron inversas y probar que, bajo la composición de las dos funciones, se conserva intacto.

En el segundo sentido se trata de tomar un elemento del dominio de *f* y su respectiva imagen, y, a partir de la hipótesis de que la composición de las dos funciones da la función identidad, probar que, bajo la función *g,* el elemento es imagen de la que era su imagen bajo *f* y por tanto, según la definición, las funciones son inversas.

El proceso demostrativo, paso a paso, es el siguiente:

Para el primer sentido de la equivalencia, el cual dice: "si *f* y *g* son funciones inversas entonces *fog(x)*=*x* para todo x en el dominio de *g* y *gof(y)*=*y* para todo y en dominio de *f*":

Primer paso: sean *f* y *g* funciones inversas y sea *a* en el dominio de *g* es decir en el rango de *f,* entonces *g*(a)=b para algún b, único, en el rango de *g* que es el dominio de *f*, por tanto *f*(b)=a.

Segundo paso: como consecuencia de lo anterior y de que *f* es una función inyectiva

g(a)=b

f[*g*(a)]=*f*(b)=a,

es decir que para cualquier *x* en el dominio de *g* se cumple que

f[*g*(x)]=x.

Tercer paso: sea *a* en el dominio de *f,* es decir, *a* está en el rango de *g,* entonces *f*(a)=b para algún b, único, en el rango de *f* que es el dominio de *g*, por tanto *g*(b)=a.

Cuarto paso: como consecuencia de lo anterior y de que *g* es una función inyectiva

f(a)=b

$g[f(a)]=g(b)=a$,

es decir que para cualquier *y* en el dominio de *f* se cumple que

$g[f(y)]=y$.

con lo cual queda demostrado el primer sentido de la equivalencia.

La implicación en sentido contrario, que completa la equivalencia del nexo proposicional, afirma: "si *g* es una función tal que $f(g(x))=x$ para todo *x* en el dominio de *g* y $g(f(y))=y$ para todo *y* en el dominio de *f,* entonces *f* y *g* son funciones inversas".

La demostración se organiza de manera similar a lo que hemos presentado arriba:

Supóngase que existe una función *g* tal que $f(g(x))=x$ para todo *x* en el dominio de *g* y $g(f(y))=y$ para todo *y* en el dominio de *f.*

Primer paso:

Sea *a* en el dominio de *f* entonces $b=f(a)$ para algún b único en el rango de *f.*

Segundo paso:

Como *g* es una función se puede afirmar que $g(b)=g(f(a))$.

Tercer paso:

Puesto que $g(f(y))=y$ para todo *y* en el dominio de *f,* tenemos que $g(b)=a$ o sea que *g* cumple la condición para ser la inversa de f.

Cuarto paso:

Ahora sea *a* en el dominio de *g,* entonces $b=g(a)$ para algún b único en el rango de *g.*

Quinto paso:

Como f es una función se puede afirmar que $f(b)=f(g(a))$.

Sexto paso:

Puesto que $f(g(x))=x$ para todo x en el dominio de g, tenemos que $f(b)=a$ o sea que f cumple la condición para ser la inversa de g.

-Conceptos y teoremas soporte

En la formulación y comprensión de lo que dice el nexo es necesario que el estudiante esté familiarizado con la significación propia del lenguaje lógico matemático, a fin de que la expresión “si y solamente si” evoque en él la doble implicación, es decir, debe disponer del concepto de equivalencia como condición necesaria y suficiente. No se identifica ningún otro concepto o teorema externo a la estructura que se constituya en soporte para el nexo.

En el proceso de justificación y prueba es necesario el concepto de transitividad de la igualdad y los procesos asociados al método de demostración directa.

-Análisis cognitivo del nexo

Se consideran relevantes en la construcción de una versión personal del nexo, debidamente adaptada a la versión institucional, los siguientes aspectos:

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo):

La comprensión de lo que dice el nexo exige que el estudiante disponga de una versión personal, bien adaptada matemáticamente del concepto de función inversa, apoyada en la composición de funciones, pero que esté debidamente articulada con el concepto de función como asignación entre elementos de conjuntos numéricos o no numéricos, de modo que sea posible establecer una conexión entre el enunciado del teorema y los ejemplos que tradicionalmente se utilizan para presentarlo.

La interpretación de la primera parte de la equivalencia supone, de un lado, que el estudiante, reconozca en los símbolos *f* y *g* funciones que pueden operarse mediante la composición y, de otro, que tenga articulado a la palabra inversa, un significado personal, coherente con el significado institucional: el de una función que "invierte" el proceso efectuado por otra sobre un elemento de su dominio y que esto sólo es posible bajo la condición de que la función sea inyectiva.

En cuanto a la segunda parte de la equivalencia, es importante que el sujeto tenga debidamente asociado al símbolo *fog(x)* todo el proceso de composición de funciones como evaluación de la función *f* en el valor de la función *g* en *x,* sin perder de vista las condiciones relativas al dominio.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo):

En primera instancia, la comprensión de la demostración del nexo exige la adecuada interpretación de lo que este dice, es decir, haber alcanzado el primer nivel.

La demostración se apoya en el concepto de función como asignación entre elementos de dos conjuntos, por tal razón es necesario que el estudiante disponga de dicha conceptualización, a un nivel en que pueda revertir el proceso y ver esta reversión como la función inversa en la que el anterior dominio pasa a ser el rango y el anterior rango pasa a ser el dominio. Después de esta primera etapa en la construcción de la prueba, al componer la función con su inversa, debe disponer de una concepción de la composición como un proceso de evaluación sucesiva de dos funciones.

Ya en el sentido contrario de la equivalencia, esta se apoya en idénticas condiciones que la prueba del primer sentido, pero adicionalmente, al tomar dos valores iguales (*b* y *f(a)*) aplicando sobre ellos la función *g*, conservando la igualdad, el argumento reposa sobre una conceptualización de función estructural, en el sentido en que el sujeto debe tener muy presente que a valores iguales del dominio les corresponde valores iguales en el rango. Si el sujeto no comprende la necesidad de este argumento para la prueba entonces no está alcanzando un nivel adecuado de comprensión de ella, ignora que “aplicar” una “operación” a los miembros de una igualdad esta se conserva sólo si se trata de una función y, de no ser así, el teorema no sería válido.

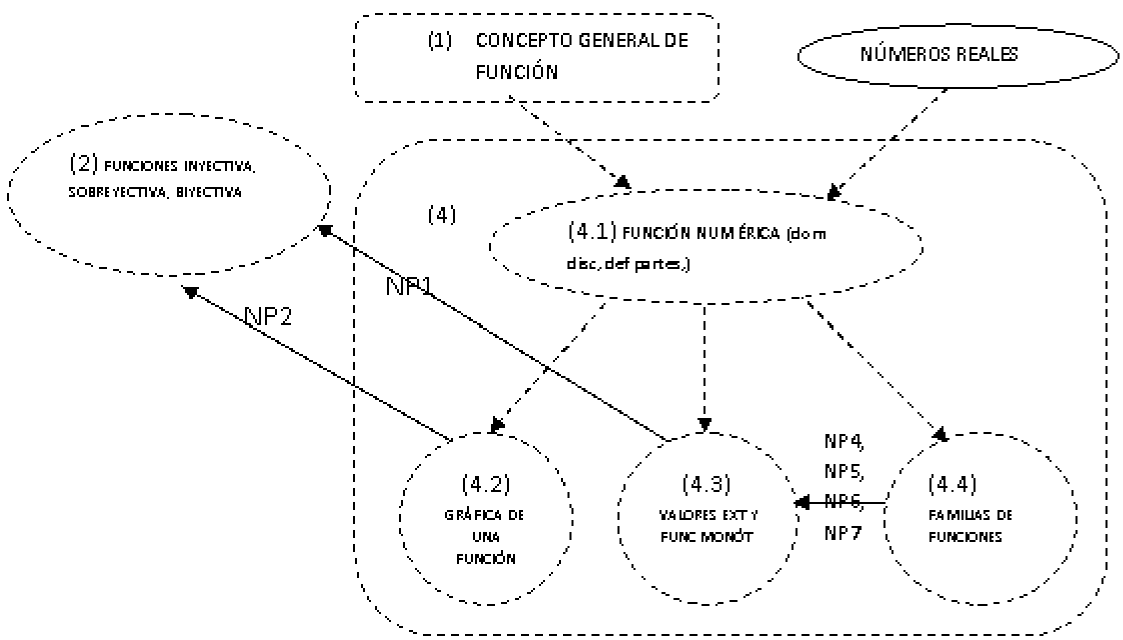
6.3.4 Cuarto núcleo: funciones numéricas

Este núcleo, cuyo mapa conceptual matemático aparece más abajo, se ha conformado agrupando aquellas funciones definidas sobre conjuntos de números reales. El núcleo aparece estructurado en cuatro subnúcleos, el primero de ellos se esquematiza en torno al concepto de función numérica e incluye una clasificación de funciones según su dominio sea discreto o formado por intervalos de números reales, se trata de incluir funciones que, tradicionalmente, son de poco o ningún tratamiento en programas de bachillerato, pero que son bastante exigidas en los cursos universitarios, como se pudo constatar en el estudio de demandas (ver capítulo 5), son funciones con dominio discreto y funciones definidas por partes. El segundo subnúcleo se estructura en torno a un elemento de importancia en el estudio de las funciones numéricas, se trata de la representación gráfica, elemento esencial de la imagen del concepto que se supone como ideal para el concepto de función. En el tercer subnúcleo se han agrupado los conceptos de monotonía y valores extremos de una función, los cuales suelen presentarse sólo a nivel universitario y asociados al concepto de derivada pero que se proponen, como parte de esta ETC, a fin de desligarlos de ese concepto y buscar mayor generalidad al concepto de función que debe construir un estudiante al generar, mediante los nexos proposicionales NP4, NP5, NP6 y NP7 que se muestran en el mapa, categorías entre las funciones que se han agrupado en el cuarto subnúcleo obedeciendo a otro criterio de clasificación: son funciones numéricas que se caracterizan por tener una expresión analítica que permite agruparlas conformando familias de funciones que definen modelos funcionales de crecimiento como el constante, el lineal, el cuadrático, el exponencial, el logarítmico y el periódico.

Puede observarse también en el mapa conceptual matemático que, a nivel inter, se incluyen los nexos proposicionales NP1 y NP2 que vinculan, respectivamente, los subnúcleos funciones monótonas y valores extremos (4.3) y gráfica de una función numérica (4.2) con el núcleo de funciones inyectivas y sobreyectivas (2).

6.3.4.1 Mapa del núcleo

Figura 6. Núcleo 4. Función Numérica



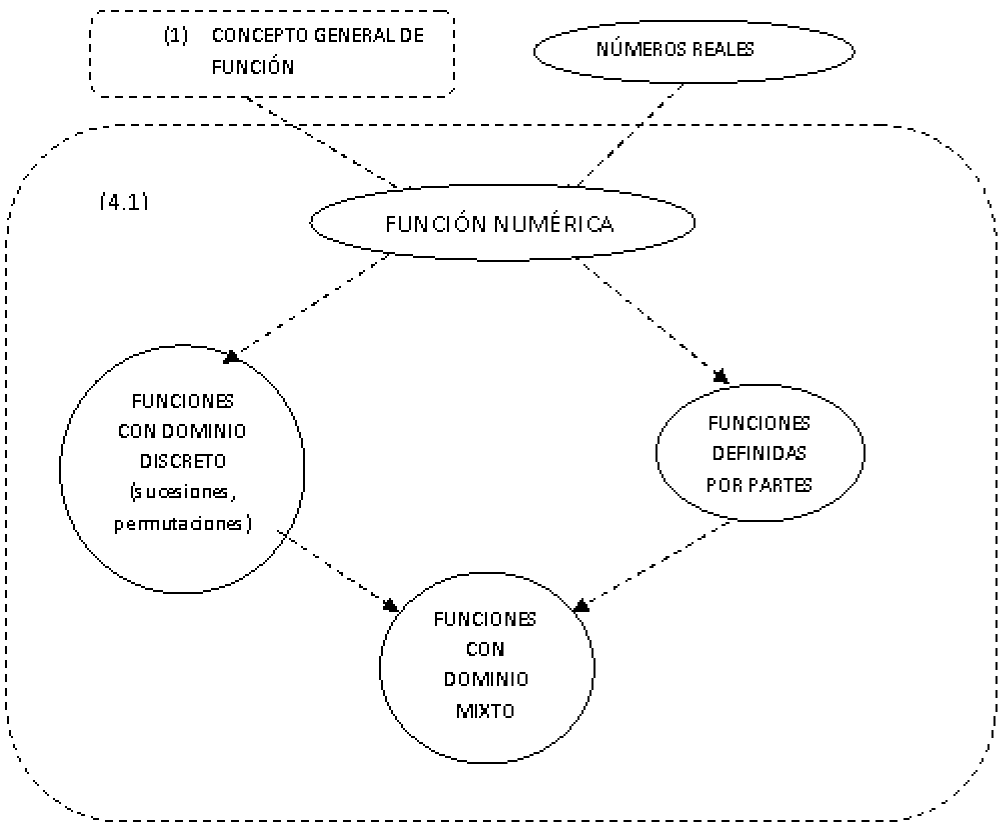
6.3.4.2 Descripción detallada por subnúcleos

6.3.4.2.1 Subnúcleo 4.1 función numérica En el estudio de demandas se constató que los cursos de cálculo diferencial e integral se estructuran en torno de funciones numéricas, sus propiedades y lo que puede o no puede hacerse con ellas, de modo que sin un conocimiento pleno de este concepto difícilmente puede construirse toda la conceptualización del cálculo diferencial y del cálculo integral.

Como lo ilustra el mapa conceptual matemático siguiente, el concepto de función numérica se define desde el concepto general de función, utilizando como apoyo el concepto de número real como elemento que permite determinar la característica que lo diferencia de otras funciones: la naturaleza de su dominio. Se incluyen en este subnúcleo funciones numéricas que obedecen, en su clasificación, a criterios relativos al tipo de dominio y/o a la manera como se definen en él, pero cuya expresión analítica es tal que no cumple con las condiciones para incluirlas como parte de algún modelo funcional a partir de una familia expresada genéricamente (subnúcleo 4.4); son funciones que se han definido sobre conjuntos discretos y/o han sido definidas por partes, es decir, a través de diferentes expresiones para diferentes partes del dominio. No se proponen nexos proposicionales al interior de este núcleo.

6.3.4.2.1.1 Mapa del subnúcleo

Figura 7. Subnúcleo 4.1. Función Numérica



6.3.4.2.1.2 Nexos definicionales

D12 Función numérica:

El concepto general de función, promulgado a lo largo de esta estructura teórico conceptual, incluye a las funciones numéricas, eje de los cursos de cálculo diferencial e integral, como una categoría más del concepto, sin negar su probada importancia. Dos puntos de vista han llevado a esta consideración. El primero de ellos se identificó en el estudio de demandas matemáticas al concepto de función en los cursos de cálculo diferencial e integral (ver en el capítulo 5, “El concepto de función en los primeros cursos…”): los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral se construyen a partir de funciones numéricas y su operacionalización, a lo largo de estos cursos, se hace sobre dichas funciones; adicionalmente es mediante funciones numéricas que se modelan situaciones físicas, químicas o económicas. El segundo punto de vista se identificó en el estudio histórico crítico del concepto de función: desde Galileo, con el desarrollo del concepto de variable dependiente, el concepto de función evoluciona hacia funciones que expresan de manera cuantitativa relaciones causa efecto (Ver variaciones conceptuales V_3 y V_4 del estudio histórico crítico, capítulo 4); Gregory, Newton, Bernoulli, Euler y Dirichlet explicitan definiciones de función netamente cuantitativas, que evidencian cómo el concepto evoluciona amarrado a lo numérico. No es sino hasta comienzos del siglo XX que desarrollos ulteriores de algunas ramas de las matemáticas presentan la exigencia de funciones que no tuvieran carácter numérico (ver variaciones conceptuales V_{14} y V_{15} del estudio histórico crítico, capítulo 4), es entonces cuando el concepto adquiere mayor generalidad y las funciones numéricas se constituyen en casos particulares del concepto de función. Sin embargo los desarrollos en el cálculo diferencial e integral ya se habían producido en torno al concepto de función numérica, constituyendo a este en eje conceptual de estas ramas de las matemáticas pero como parte integrante de una categoría más amplia: el concepto general de función.

Se propende entonces por un concepto de función general y no restringido, que permita al estudiante responder tanto en situaciones en que se demanda funciones numéricas (cursos de cálculo) como en aquellas en que no (curso de álgebra lineal, por ejemplo). Por tales razones se considera que el concepto de función numérica debe presentarse al estudiante partiendo del concepto general de función, a través de situaciones que exijan la construcción de relaciones de carácter numérico que el estudiante pueda luego identificar como funciones utilizando la definición general, de modo que construya una categoría de funciones cuyo dominio y codominio sean subconjuntos de los números reales, es decir, funciones numéricas.

D13 Funciones con dominio discreto: este tipo de funciones ingresan como una particularidad dentro de las funciones numéricas, al restringir el dominio real a conjuntos numéricos discretos, y adquiere especial importancia en el caso de las sucesiones y las series, fundamentales en procesos de construcción de los conceptos propios de la integración de funciones. En la estructura teórico conceptual adquiere importancia en la medida que contribuye a la construcción de una imagen del concepto de función amplia al crear categorías dentro de las categorías en la clasificación de funciones, lo que reforzará la noción de función como construcción humana no acabada. Se enfatiza la inclusión de las sucesiones en esta clasificación por cuanto es común que estas no se piensen como funciones dado el tipo de representación simbólica que las caracteriza y el estudio que suele hacerse de ellas separadamente del concepto de función.

D14 Funciones definidas por partes: en el estudio de demandas se vio que aquellas funciones que exhiben diferentes reglas de asociación para diferentes partes de su dominio, como la función de Dirichlet o funciones definidas por intervalos, suelen utilizarse para ilustrar casos de funciones que no presentan un comportamiento “común” en cuanto a su continuidad, derivabilidad y límites, o sea que son mostradas como casos aislados y no como funciones objeto de estudio en sí mismas, restándoles la importancia que de hecho tienen, tanto en el cuerpo teórico de las matemáticas como en la epistemología del concepto de función; históricamente, este tipo de funciones jugó un papel importante en la evolución del concepto al construirse como contraejemplo frente al concepto de función vigente en el momento, pues presentan un comportamiento atípico que violaba las concepciones propias de la época, en particular en cuanto a las características de su gráfica y de su expresión analítica lo que obligó a nuevas variaciones conceptuales (Ver en el capítulo 4 las variaciones conceptuales **V_9,**

V_{10}, V_{11}, V_{12} y **V_{13}**) necesarias para dar respuesta al reto planteado por la manera en que estas funciones se definen y que, a la larga, desembocan en el concepto general de función que se asume en esta estructura teórico conceptual. De manera análoga estas funciones pueden jugar un papel importante en la construcción personal del concepto de función por parte del estudiante, al exhibirse como muestra de reglas de asociación que cumplen con las condiciones para clasificarse como funciones a pesar de no poseer una misma expresión para todo su dominio. Desde un punto de vista didáctico, el ejercicio, por parte del estudiante, de construir funciones definidas por partes, distintas de las tradicionales definidas por una simple expresión analítica y con una gráfica de un solo trazo, contribuirá a la construcción de una imagen del concepto de función no restringida y amplia que otorgue un papel preponderante a la definición matemática en las acciones que se ejecutan al reconocer o construir funciones.

D15 Funciones con dominio mixto: agrupa este concepto funciones cuyo dominio esté conformado en parte por conjuntos discretos y en parte por intervalos de reales, se trata de que el estudiante amplíe su horizonte en cuanto a la variedad de funciones que pueden construirse con sólo cambiar un valor en ella o mediante la manipulación del dominio en uno o más de sus puntos. Su importancia didáctica radica en su utilidad para la construcción de conceptos como continuidad y límites, pues mediante este tipo de funciones se favorece el colocar al estudiante en situaciones de conflicto necesarias para la superación de obstáculos respecto de estos conceptos, ya bastante referenciados en numerosos estudios (Vrancken et al, 2005; Delgado, 1998; Cornu, 1981, 1983).

6.3.4.2.2 Subnúcleo 4.2 Gráfica de una función Hitt (1996) admite que un determinado conocimiento es estable en un individuo, si este puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones. Duval afirma que la coordinación entre diferentes registros de representación es una condición fundamental para el aprendizaje de conceptos (Duval 1998, 189). Esta investigación es partícipe de estas afirmaciones y, siendo la representación gráfica una de las representaciones existentes para el concepto de función, un objetivo de cualquier programa de enseñanza del concepto de función debe ser que el estudiante pueda construir su gráfica y, a su vez, construir a partir de ella la regla de asociación que la rige y movilizarse hacia cualquiera de los otros registros utilizados para representar funciones.

La representación gráfica de una función numérica es parte esencial de la imagen del concepto que de ella deben construir los estudiantes; a través de ella se construyen numerosos conceptos del cálculo como se verificó en el estudio de demandas (límites, continuidad, derivada, integral, ver capítulo 5) y favorece la diferenciación entre dominio y rango así como posibilita la comprensión de procesos de covariación. Duval también ha mostrado cómo las traslaciones del sistema gráfico a las representaciones algebraicas son las que causan mayores dificultades (181). De allí que la representación gráfica de funciones haya sido incluida en un subnúcleo particular, cuyo mapa conceptual matemático se ilustra más abajo.

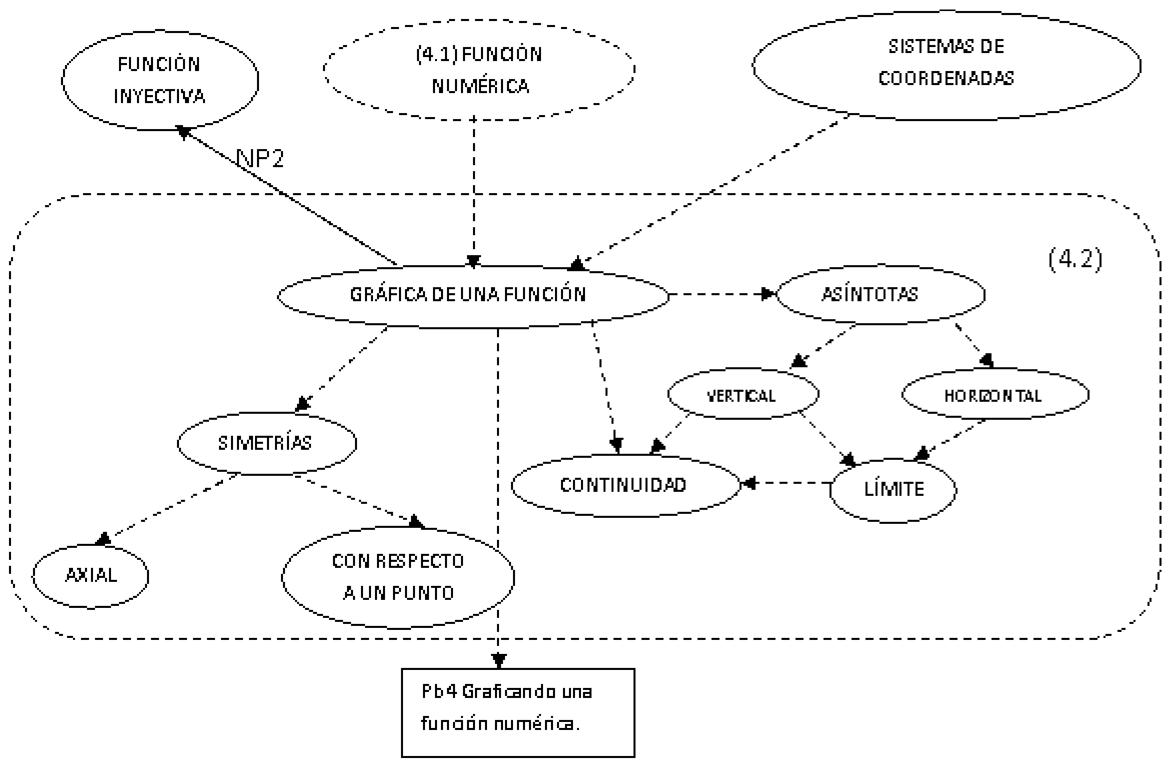
Naturalmente este subnúcleo se ha soportado sobre el concepto de sistema de coordenadas y sobre el subnúcleo función numérica (4.1). Alrededor del concepto de gráfica de una función numérica se incluye el concepto complementario de asíntota, sobre el cual se construye el concepto de límite de una función, también considerado en este núcleo conceptual como elemento en el cual se apoya el concepto de continuidad. Se incluye además el concepto de simetría por su utilidad en el trazado de gráficas.

En cuanto a nexos proposicionales aparece nexo NP2 que vincula el concepto de gráfica de una función numérica con el concepto de función inyectiva, este es importante en la construcción de la estructura teórico conceptual por parte del estudiante por cuanto exige operacionalizar la definición de función inyectiva desde el contexto gráfico y potencia la diferenciación entre el concepto de función inyectiva y el concepto de función, es decir, puede prevenir la imagen del concepto de función mal adaptada, que Álvarez et al llamaron CI (cuasiconjuntista inyectiva) (Álvarez et al, 2001d, 64-65).

Atañe a este subnúcleo el problema de base denominado Pb4 relativo a estrategias y técnicas básicas para la construcción de graficas de funciones numéricas expresadas analíticamente, en especial aquellas que permitan el análisis de características matemáticas, como intervalos de monotonía, valores extremos, simetrías, asíntotas y discontinuidades de diverso tipo.

6.3.4.2.2.1 Mapa del subnúcleo

Figura 8. Subnúcleo 4.2. Gráfica de una Función



6.3.4.2.2.2 Nexos definicionales

D16 Gráfica de una función: La gráfica de una función constituye un apoyo definitivamente importante en el estudio de las propiedades de las funciones puesto que, mediante ella, es posible que el estudiante constate la existencia de valores máximos o mínimos, de asíntotas, de intervalos de monotonía, de valores límites, de discontinuidades, si se trata de una función inyectiva, si posee inversa, etc. De allí su importancia matemática y didáctica. Más que presentar una definición explícita de gráfica de una función, interesa presentar una descripción de la imagen del concepto que se espera el estudiante construya. No se da mayor importancia a la definición por que esta no influye en el trazado de la gráfica ni en su utilización didáctica con fines de mostrar propiedades o características de una función en particular.

Como estrategia para que el estudiante reconozca que la gráfica de una función no es única, se busca que la imagen del concepto que construya sea relativa al sistema de coordenadas utilizado. Análogamente, con el fin de que le asigne un carácter dinámico, se pretende que esté constituida por puntos $(x,f(x))$, enmarcados en razonamiento covariacional, con x en el dominio de la función, y no por parejas de números aislados.

No se trata sólo de que el estudiante construya gráficas de funciones, sino que también a partir de gráficas pueda determinar funciones; este aspecto en ocasiones se descuida en procesos de enseñanza del concepto de función y es fuente de desvinculaciones conceptuales entre la naturaleza dinámica de la representación gráfica de una función y el concepto mismo de función.

D17 Sistema de Coordenadas: Acorde con el comentario anterior, definiremos sistema de coordenadas como "un conjunto de puntos cuya posición se encuentra completamente determinada mediante una codificación adecuada."

D18 Asíntota: este concepto tampoco debe restringirse a un solo sistema de coordenadas: una asíntota de una curva es una recta cuya distancia a un punto de la curva tiende a cero cuando el punto se aleja indefinidamente del origen de coordenadas recorriendo la curva.

D19 y D20 Continuidad y Límite de una Función: Antes que postular cualquier definición para estos conceptos se pretende ilustrar aspectos relevantes sobre su comprensión. Es bueno empezar por recordar que sobre el concepto de límite se soportan las definiciones y/o construcciones conceptuales de derivada e integral, así como de conceptos de otras ciencias; esta misma importancia hace que en algunas propuestas de enseñanza sólo se enfatice su carácter instrumental con enfoques algorítmicos que descuidan la construcción profunda de su definición. Puesto que su aprendizaje como objeto matemático tiene un nivel de complejidad alto, derivado de aspectos cognitivos que no se puede generar meramente desde su definición matemática (Cornú (1991) y Sierpinska (1985) citados por Azcárate (1996)) y de la existencia de varios obstáculos epistemológicos inherentes a ellos, la simple presentación de su definición es insuficiente para la construcción del concepto. Por tales razones la aproximación que se propone es de tipo intuitiva, apoyada esencialmente en el registro gráfico, en particular el cartesiano, como preparación para la utilización posterior del lenguaje propio del rigor matemático.

Tall (1992) propone la utilización del conflicto cognitivo como punto de partida para la superación de los obstáculos relativos al concepto de límite, pero eso sí favoreciendo las tres representaciones: la gráfica, la numérica y la simbólica. Aunque su propuesta hace referencia sólo al concepto de límite (igual que los obstáculos identificados por Cornú y Sierpinska), dada la sutil diferencia entre la definición de uno y otro concepto y el enfoque con que se pretende sean abordados al interior de esta estructura teórico conceptual, se considera igualmente válida para el concepto de continuidad de cuya construcción se puede desprender la de límite según la propuesta de Delgado (1998). Este último plantea la construcción de las definiciones de continuidad y límite de una función a través de una serie de situaciones fundamentales que provoquen el conflicto cognitivo y obliguen al sujeto, a través de abstracciones reflexivas, a realizar modificaciones en sus ciclos cognitivos mediante la incorporación de nuevos esquemas (lo que podría resumirse Perturbación → Desequilibrio → Regulación → Compensación → Evaluación → etc.) (Delgado, 1998, 251-314).

En la secuencia que él expone, la definición (tanto la de continuidad como la de límite de una función) va siendo construida por el mismo estudiante en la medida que el proceso de ingeniería didáctica se va cumpliendo, sin embargo es menester citar una aclaración importante del autor: “Finalmente se debe advertir que no se puede asegurar una evolución exacta a la que se observa en el diagrama de flujo evolutivo, debido a que algunos obstáculos epistemológicos o lagunas conceptuales pueden impedir que cierta situación caiga en el dominio de la Z.D.P. de un estudiante concreto. No obstante, las situaciones deben ser efectivas para revelar cuáles son los obstáculos o dificultades conceptuales que han impedido una toma de conciencia de un problema.” (315) (Delgado con el término Z.D.P hace referencia a la Zona de Desarrollo Próximo propuesta por Vygotsky: “No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero capaz” (Vygotsky, 1996, 133)).

Respecto de los obstáculos cognitivos, de las lagunas conceptuales y de la zona de desarrollo próximo a que hace mención Delgado, el lector puede consultar la citada tesis. Es importante tener en cuenta que la propuesta de Delgado fue elaborada para estudiantes de primeros semestres universitarios, lo que está por encima del contexto curricular de esta estructura teórico conceptual, sin embargo, esta propuesta puede aplicarse estructurándose sobre el proyecto “Enseñando una unidad de funciones en la interfase universidad bachillerato con la ayuda del SCS Mathematica” (Álvarez, Delgado et al, 2001c) allí se propone una aproximación intuitiva a los conceptos de límite y continuidad a partir de las características de las gráficas sustentando la propuesta en los planteamientos de Freudenthal (1983) acerca de la conveniencia de que el estudiante, en primera instancia, construya objetos mentales que luego transformará en conceptos. La idea es que la manipulación de la gráfica permita analizar comportamientos, que den respuesta a preguntas enfocadas en, lo que Delgado llama, situaciones fundamentales y que no son más que cuestiones dirigidas a crear el conflicto cognitivo adecuado a cada característica que quiera estudiarse en la vía de la construcción de los conceptos de entorno (tanto en el eje de las ordenadas como en el de las abscisas), asíntota, límite y continuidad, pero sin renunciar al acercamiento, adecuado al contexto curricular en que se enmarca esta investigación, del lenguaje descriptivo de lo observado al lenguaje propio de la simbología matemática o sea el lenguaje utilizado en el trabajo con límites de funciones.

D21 y D22 Simetría Axial y respecto a un punto: refiriéndose estrictamente a la gráfica de una función numérica, se puede definir el término simetría como la correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de una gráfica respecto a un centro. Si este último es un eje (línea recta) se habla de simetría axial, si es un punto, se habla de simetría respecto a un punto.

6.3.4.2.2.3 Nexos proposicionales

6.3.4.2.2.3.1 NP2: Si ninguna recta horizontal corta más de una vez a la gráfica cartesiana de una función numérica entonces la función es inyectiva.

-Proceso de justificación y prueba

Para este nexo no se propone una prueba formal, si no un proceso de justificación apoyado en estrategias de movilización entre el contexto gráfico y el contexto algebraico en la representación de funciones.

Paso 1: se ilustra la situación con una gráfica general de una función continua inyectiva y con la gráfica general de una función continua no inyectiva. Ambas son atravesadas por una recta horizontal.

Paso 2: se muestra cómo, en el primer caso, sólo se presenta un único punto de corte de la recta horizontal con la gráfica, que corresponde al valor de la función $f(x_1)$ correspondiente al elemento x_1 en el dominio. El cual, evidentemente es único y, por tanto la función es inyectiva de acuerdo con la definición "cada elemento del rango es imagen de un solo elemento en el dominio". Mientras que en el segundo caso los puntos de corte de la recta horizontal con la gráfica de la función corresponden a valores $f(x_1), f(x_2),\ldots,f(x_n),$ todos iguales (por tratarse de una recta horizontal) de donde se infiere que esta segunda función no cumple con la definición de inyectividad: un mismo valor del rango corresponde a dos o más valores del dominio".

-Conceptos y teoremas soporte

Tanto en la formulación como en la justificación los conceptos soporte son los relativos al trazado e interpretación de gráficas cartesianas de funciones y al concepto de función inyectiva.

-Análisis cognitivo del nexo

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

La comprensión de lo que afirma la proposición exige del sujeto disponer de una versión personal, coherente con el significado institucional, asociada con las expresiones "gráfica cartesiana" "recta horizontal" y "función inyectiva" de modo que le sea posible establecer la relación de implicación entre las dos expresiones a saber: a partir de la visualización de la gráfica cartesiana de una función, determinar la imagen (o imágenes) que corresponde, mediante la función, a cada elemento del dominio y caracterizar esta asociación según la definición de función inyectiva.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

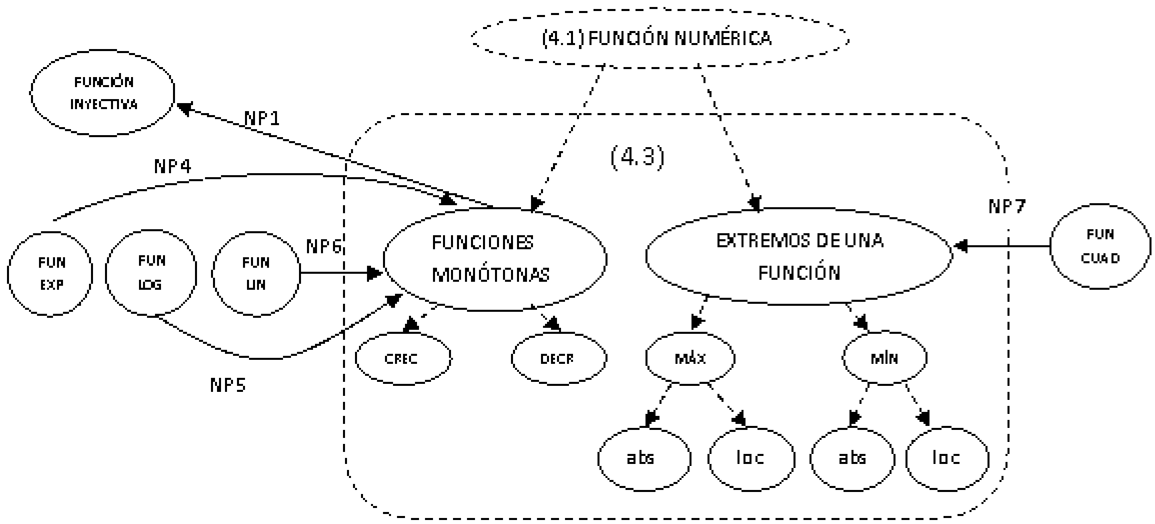
La comprensión del proceso de justificación requiere de estrategias de construcción e interpretación de gráficas cartesianas que estén debidamente articuladas con la definición de función y sus conceptos complementarios de dominio, codominio, rango y regla de asociación, de modo que la movilización hacia la conclusión de la inyectividad sea posible. El proceso hacia la conclusión, parte de la adecuada interpretación de los puntos de la gráfica como asociaciones de elementos del dominio con elementos del rango, continúa con la conversión del sistema de representación gráfico al sistema de notación simbólica *f(x)* y finaliza con la aplicación de la definición de inyectividad en este último sistema semiótico de representación. Como puede verse la conversión entre uno y otro sistema de representación se constituye en eje de la comprobación del nexo junto con la definición, que juega el papel de criterio decisorio en la justificación.

6.3.4.2.3 Subnúcleo 4.3 Valores extremos y funciones monótonas

Como puede observarse en el mapa conceptual matemático asociado, este subnúcleo depende definicionalmente del subnúcleo 4.1 (funciones numéricas), agrupa los conceptos de monotonía y extremos de una función y, a partir de ellos, genera categorías dentro de las funciones del subnúcleo 4.4. En particular, respecto del primer concepto permite determinar el carácter creciente o decreciente en funciones numéricas y, respecto del segundo concepto, permite determinar los valores en que una función elemental alcanza los máximos y/o mínimos absolutos o locales, a través de los nexos proposicionales NP4, NP5, NP6 y NP7 que permiten establecer la monotonía y los valores extremos de las funciones agrupadas en el subnúcleo 4.4 (familias de funciones y parámetros) según características de los parámetros de sus expresiones analíticas. De otro lado se tiene el nexo proposicional (NP1) que establece la monotonía de una función como condición suficiente para que sea inyectiva.

6.3.4.2.3.1 Mapa del subnúcleo

Figura 9. Subnúcleo 4.3. Valores extremos y funciones monótonas



6.3.4.2.3.2 Nexos definicionales

Los conceptos de monotonía y valores extremos de una función, tradicionalmente en los cursos de cálculo, van amarrados al concepto de derivada y a su operatividad, de suerte que el estudiante termina asociándolos exclusivamente a funciones derivables y considerándolos anexos al concepto de derivada, restándoles la importancia que poseen en sí mismos. En esta estructura teórico conceptual, se busca que estos conceptos se correspondan con el nivel de generalidad propio del concepto de función y que puedan asociarse incluso con funciones de dominio discreto; consecuentemente estos conceptos deben ser abordados inicialmente en el registro gráfico para luego construir definiciones de corte analítico; la búsqueda del cambio de registro a través de procesos mentales que coordinen dos o más sistemas de representación para estos conceptos es una actividad necesaria para su construcción y para que el estudiante no confunda el objeto matemático con su representación. Por esta razón es importante que, aunque los conceptos se aborden desde el registro gráfico esto no quede allí; para un estudiante puede ser sencillo determinar los intervalos de crecimiento de una función mediante la observación de su gráfica y eso es un buen comienzo, pero ¿qué sucederá cuando se le pidan los intervalos de crecimiento de una función que no resulte fácilmente graficable? Es pues necesario que la construcción de los conceptos de monotonía y extremos absolutos también se movilice al registro analítico en forma tal que sea aplicable también a funciones numéricas de diversa índole.

D23, D24 máximo relativo y máximo absoluto, mínimo relativo y mínimo absoluto: conceptos de gran importancia en la caracterización gráfica de una función y, en particular, elementos vitales en las aplicaciones de funciones cuadráticas; según Castañeda (2004) Leibniz en 1683, caracteriza el máximo de una función mediante dos criterios geométricos, el primero mediante la comparación de estados con una línea horizontal que ubica la mayor de las ordenadas y el segundo a través de una condición geométrica que explica que la tangente a la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas, luego se hace con criterios algebraicos (podríamos decir geométricos con visos analíticos) utilizando las diferencias pero sin ilustrar la técnica utilizada. A pesar de no tratarse de un texto con fines de difusión, resulta interesante como Leibniz empieza con argumentos geométricos, netamente visuales que luego hacen la transición a lo analítico.

Siguiendo a Castañeda, L´Hospital, A (1696), y Agnesi, M. (1748) a diferencia de Leibniz, presentan el cálculo con fines de difusión y, tal vez, por tal razón en lo referente al concepto de máximo exhiben varias formulaciones, pero todas parten de argumentos geométricos apoyados en argumentos variacionales que, en algunos casos, tocan lo analítico:

-la noción de tamaño (argumento geométrico),

-la naturaleza dinámica de las curvas (argumento geométrico con referente analítico),

-la subtangente de magnitud infinita (geométrico - analítico) definida a partir de la variación de las abscisas,

-el signo de las diferencias infinitesimales (argumento analítico) destacando que muy cerca del máximo las diferencias pasan de un signo a otro,

-la propiedad infinitesimal (analítico) indicando que cerca del máximo ocurren las variaciones más pequeñas,

-la propiedad analítica a través de una regla que indica que en el máximo las diferencias se hacen nulas o infinitas.

Siguiendo el mismo lineamiento, el cotejo de valores de funciones en su registro gráfico, tanto con dominio en intervalos de reales como con dominio discreto, que posean máximos y mínimos tanto relativos como absolutos y otras que no los tengan, será un buen inicio, primero para la construcción de estos conceptos y luego para la construcción de una definición asociada a cada uno de ellos. La comparación visual de valores de la función, mediante rectas paralelas a las abscisas y tangentes a la curva constituirá un buen acercamiento que permitirá que el estudiante, por sí mismo, vaya concluyendo las condiciones que debe cumplir un valor para ser catalogado como máximo o como mínimo, absoluto o relativo de modo que la definición sea parte activa de la imagen del concepto. Las nociones de altura de la gráfica (visión geométrica), de movimiento (o sea una visión dinámica o variacional de la gráfica, en la que se observa “hasta dónde sube o baja la gráfica”) y por último una noción algebraica apoyada en las diferencias entre valores de la función, pueden ser los peldaños que se vayan salvando en la construcción de la definición que se considera adecuada para este nivel de conocimiento:

D25: “decimos que una función *f,* definida en un conjunto S, tiene un máximo relativo en un subconjunto M de S, si existe por lo menos un elemento *c* en M tal que *f(x)≤f(c)* para todo *x* en M. A *f(c)* se le llama el máximo relativo de *f* en M*.* Si la desigualdad anterior se cumple para todo *x* en S entonces se dice que *f(c)* es un máximo absoluto de *f.*

D26: “De manera análoga, decimos que tiene un mínimo relativo en un subconjunto M de S, si existe por lo menos un punto c en M tal que *f(x)≥f(c)* para todo *x* en *M*. A *f(c)* se le llama el mínimo relativo de *f* en M*. Si* la desigualdad anterior se cumple para todo *x* en S entonces se dice que *f(c)* es un mínimo absoluto de *f.”*

D27, D28, D29 función creciente, función decreciente, función monótona el estudio gráfico de una función numérica no puede considerarse completo sin considerar el análisis de su naturaleza creciente, decreciente, constante o sencillamente ninguna de ellas; estos conceptos constituyen el eje de la caracterización de los modelos funcionales presentados en el subnúcleo 4.4 y contribuyen notablemente a la posibilidad que ellos tienen de representar situaciones económicas, físicas o sociales.

La construcción de estos conceptos, de manera similar a los conceptos de extremos de una función, parte de argumentos apoyados en contextos gráficos y de tablas, tanto de funciones de dominio real como de funciones con dominio discreto, de forma que el estudiante analice ordenamientos que le permitan sacar conclusiones pertinentes teniendo en cuenta de qué manera influye el orden establecido en los elementos del dominio, en el ordenamiento de los elementos del rango. Este análisis es fundamental en dos sentidos, de un lado acentúa la diferenciación dominio-codominio y de otro permite establecer que, en el análisis de la monotonía, el ordenamiento de partida se hace en el dominio de la función y, una vez hecho este ordenamiento, la condición se verifica en el codominio (más precisamente en el rango). La verificación de estos conceptos, en un contexto cartesiano, se apoya en una visión dinámica de la función numérica como puntos que se movilizan por la curva que la describe, sin embargo es importante que ninguno de los contextos sea considerado independiente de los otros, a fin de no perder generalidad en el concepto de función que se busca construir a lo largo de la estructura teórico conceptual y de que se favorezca la construcción de una definición de función creciente y decreciente de corte analítico, pero con vínculos gráficos cimentados en las relaciones de orden propias de los números reales (eso sí, sin dejar de lado funciones con dominio discreto).

Se propone como meta de este proceso, construir como definiciones:

D27**:** "sea f una función definida en un conjunto S, diremos que f es creciente en un subconjunto M de S si para todo par de elementos de M, x_1 y x_2, $f(x_1)<f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$ y diremos que

f es decreciente (D28) en un subconjunto M de S si para todo par de elementos de M, x_1 y x_2, $f(x_1)>f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$.

Una función f definida en un conjunto S se denomina monótona (D29) en un subconjunto M de S si es creciente en M o decreciente en M."

6.3.4.2.3.3 Nexos proposicionales En este subnúcleo se han ubicado nexos proposicionales que vinculan de manera inter a los conceptos de este subnúcleo con el núcleo 2 y con el subnúcleo 4.4:

NP4 sea $f(x)=a^x$ la función exponencial. Si $0<a<1$ entonces f es decreciente. Si $a>1$ entonces f es creciente.

NP5 sea $f(x)=log_a x$ la función logarítmica. Si $0<a<1$ entonces f es decreciente. Si $a>1$ entonces f es creciente.

NP6 sea la función lineal $f(x)=a_0+ a_1x$. Si $a_1<0$ entonces $f(x)$ es decreciente. Si $a_1>0$ entonces $f(x)$ es creciente.

NP7 sea la función cuadrática $f(x)=a_0+ a_1x+a_2x^2$. $f(-a_1/2a_2)$ es un extremo absoluto de f. Si $a_2<0$ entonces es máximo. Si $a_2>0$ entonces es mínimo.

Y al concepto de monotonía con el concepto de función inyectiva:

NP1 si una función numérica es monótona (creciente o decreciente) entonces es inyectiva.

La importancia de estos nexos radica en que articulan matemáticamente los diferentes elementos de la estructura al tiempo que posibilitan el establecimiento de vínculos cognitivos entre los distintos conceptos:

En el primer caso los cuatro nexos (NP4, NP5, NP6 y NP7) otorgan un valor especial a las características de los parámetros presentes en las expresiones analíticas de las funciones algebraicas y de las funciones exponencial y logarítmica. Son importantes porque vinculan los registros gráfico y analítico, al exigir al estudiante constatar que las modificaciones en los parámetros de la expresión analítica generan cambios en la expresión gráfica y viceversa. Esta movilización entre registros, alimentada por un factor adicional (la interdependencia y congruencia entre los dos registros a través de la relación entre las características de los parámetros y la forma de la representación gráfica) potencia la construcción de una imagen del concepto de función lineal, cuadrática, logarítmica y exponencial que articule la definición, la representación gráfica y la expresión analítica.

En el segundo caso, el nexo **NP1** vincula el carácter creciente o decreciente de una función (carácter gráfico y de orden) con una característica de su regla de asociación; a través de este nexo, dos cosas que parecerían no tener relación terminan siendo dependientes una de la otra: relaciones de orden entre valores del dominio y del rango son condición suficiente para determinar el cumplimiento de una característica de la regla de asociación, la inyectividad. Al descubrirse en toda su significación, este nexo le otorga a la estructura teórico conceptual un carácter de interdependencia que le ilustra al estudiante el engranaje propio de una estructura conceptual matemática, lo cual es fundamental en la formación matemática de cualquier persona. Su demostración es una excelente oportunidad para poner en juego estrategias demostrativas de importancia formativa y que, cognitivamente, ponen en juego una correcta imagen del concepto de los axiomas de orden en los números reales, de la inyectividad y de la monotonía, confrontada desde el punto de vista analítico y el punto de vista gráfico.

Descripción y análisis matemático de los nexos

6.3.4.2.3.3.1 NP1 si una función numérica es monótona (creciente o decreciente) entonces es inyectiva.

Es conveniente que lo que afirma el nexo sea presentado al estudiante a través de gráficas de funciones monótonas y de funciones no monótonas, que permitan al estudiante observar de qué manera la monotonía de una función incide en el cumplimiento de las características que hacen que sea inyectiva. Es muy importante también que el estudiante analice gráficas de funciones inyectivas que no son monótonas para que verifique que la recíproca del nexo no es cierta. En los análisis de los gráficos seleccionados es fundamental la visualización de la gráfica como un objeto dinámico en el que los conceptos de dependencia entre variables sean puestos en evidencia, así la gráfica de una función no será vista como estática (es recurrente que los estudiantes consideren la gráfica de una función como una foto de ella (Carlson et al. 2007)) y su dinamismo podrá promoverse aprovechando las ventajas que otorga el análisis de la monotonía.

Esta presentación inicial es válida como estrategia para comprender lo que afirma el nexo, pero no debe quedarse allí; abordar la demostración es imprescindible para la formación matemática que se quiere que los estudiantes alcancen en torno a la estructura teórico conceptual de función, pues el proceso demostrativo pone en juego las estrategias propias de una demostración directa apoyada en la lógica proposicional y además, vital para la construcción personal de la estructura, exige del estudiante poner en diálogo la imagen gráfica de funciones monótonas (y/o inyectivas) con su definición formal, lo cual fortalecerá la conformación de una imagen del concepto coherente y bien adaptada matemáticamente que conjugue estos dos aspectos evitando la disociación, frecuente por cierto, entre imagen del concepto y definición (Vinner, 1991).

Respecto del proceso demostrativo es pertinente presentar los siguientes aspectos:

-Proceso de justificación y prueba

La prueba de esta proposición se basa en la definición de función monótona, la cual, tomada como hipótesis, permite concluir la inyectividad como una consecuencia casi inmediata apoyada por los axiomas de orden en los números reales:

Primer paso: Sea f una función monótona definida sobre un conjunto S de números reales y sean x_1 y x_2 en S, tales que $x_1 \neq x_2$,

Segundo paso: por los axiomas de orden en R $x_1 < x_2$ (ó viceversa) lo que implica, por ser monótona la función f, que $f(x_1) < f(x_2)$ (o viceversa, dependiendo si la función es creciente o decreciente),

Tercer paso: como $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son también números reales entonces, por axiomas de orden, $f(x_1) \neq f(x_2)$,

Cuarto paso: tenemos que si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, que es equivalente, según lógica proposicional a su contra recíproca: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$ lo que prueba la inyectividad de f, según la definición de función inyectiva.

-Conceptos y teoremas soporte

En la formulación y comprensión de lo que dice el nexo es necesario que el estudiante esté familiarizado con la significación propia del lenguaje lógico matemático, a fin de que la expresión “si…entonces…” evoque en él el concepto de condición suficiente. No se identifican otros conceptos o teoremas externos a la estructura que se constituyan en soporte para el nexo.

El proceso de justificación y prueba se apoya sobre los axiomas de orden en los números reales y en la lógica proposicional como elemento para los procesos de demostración directa.

-Análisis cognitivo del nexo

Se consideran relevantes en la construcción de una versión personal del nexo, debidamente adaptada a la versión institucional, los siguientes aspectos:

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

A fin de interiorizar el significado del nexo, el estudiante debe tener asociadas a las expresiones “función monótona” y “función inyectiva” imágenes conceptuales que involucren registros gráficos y analíticos a fin de que pueda encontrar relación entre los dos conceptos a través de la interpretación de la implicación como condición suficiente.

En particular en cuanto a la expresión “función monótona” su concepto imagen evocado debe articular con la definición, coherente con la definición institucional, una representación cartesiana a fin de que se posibilite la correlación con la definición de función inyectiva a partir de la identificación de imágenes diferentes, para elementos diferentes del dominio.

Así pues, la disponibilidad de esquemas adecuados para la construcción y lectura de gráficas de funciones, junto con definiciones de función monótona y función inyectiva articuladas con sus representaciones gráficas, son las que permiten la comprensión de lo que dice el nexo.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

La estrategia demostrativa es directa, apoyada en una serie de implicaciones que parten de la definición de monotonía y continúan con la implicación correspondiente a la definición de función inyectiva. Para que el estudiante reconozca esta serie de implicaciones, como verdaderas y concluyentes, es necesario que, partir de la definición de función monótona (y apoyado en una representación gráfica, lo cual no es necesario pero si favorable desde el punto de vista cognitivo) pueda establecer que a elementos diferentes del dominio, les corresponde elementos diferentes del rango y que, posteriormente, y de ser necesario apoyado por representaciones gráficas, pueda asociar esta conclusión con la definición de función inyectiva.

6.3.4.2.3.3.2 NP4 sea $f(x)=a^x$ la función exponencial. Si $0<a<1$ entonces f es decreciente. Si $a>1$ entonces f es creciente.

Es aconsejable que la presentación de este nexo sea precedida de un proceso de construcción de gráficas cartesianas de funciones exponenciales que se diferencien en los valores del parámetro *a*, así el estudiante en ese proceso de construcción podrá establecer relaciones, gráficas y numéricas, entre el valor del parámetro *a* y la manera en que se producen variaciones en los valores que toma la función a medida que los valores del dominio varían, es decir, inferir la incidencia del valor del parámetro *a* en la covariación entre los valores del dominio y los valores que toma la función. Cubrir de manera exhaustiva este proceso de análisis facilitará el proceso demostrativo puesto que podrán establecerse vínculos entre la gráfica de la función exponencial, la regla de asociación y la monotonía de la función posibilitando el paso al “desmenuce” analítico necesario para la prueba del nexo, la cual se expone a continuación:

-Proceso de justificación y prueba

El proceso de justificación y prueba se apoya en la definición de función creciente y función decreciente y en los teoremas relativos al orden en los números reales:

Demostración:

Primer paso: Sea $f(x)=a^x$ una función exponencial con $0<a<1$ y sean x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $x_1<x_2$, se debe probar que f es decreciente, o sea $f(x_1)>f(x_2)$, es decir, $a^{x1}>a^{x2}$.

Segundo paso: supongase que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir, $a^{x1}<a^{x2}$; como $0<a<1$ de esta última desigualdad y de los axiomas de orden en los números reales se puede concluir que $x_1>x_2$ lo que contradice la hipótesis, así que $a^{x1}>a^{x2}$ y la función es decreciente.

Tercer paso: Sea $f(x)=a^x$ una función exponencial con $a>1$ y sean x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $x_1<x_2$, se debe probar que f es creciente, o sea $f(x_1)<f(x_2)$, es decir, $a^{x1}<a^{x2}$.

Cuarto paso: supongase que $f(x_1)>f(x_2)$, es decir, $a^{x1}>a^{x2}$; como $a>1$ de esta última desigualdad y de los axiomas de orden en los números reales se puede concluir que $x_1>x_2$ lo que contradice la hipótesis, así que $a^{x1}<a^{x2}$ y la función es creciente.

-Conceptos y teoremas soporte

Los conceptos y teoremas soporte, externos a la estructura, son relativos a las desigualdades de números reales (axiomas de orden en los números reales).

-Análisis cognitivo del nexo

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

La comprensión de lo que dice el nexo requiere que el estudiante haya construido una imagen del concepto de función exponencial que articule las características de la constante *a*, la naturaleza de la función y su gráfica:

En cuanto a las características de la constante se trata del reconocimiento en ella de un número real que cumple las propiedades de orden propias de este sistema numérico.

En cuanto la naturaleza de la función, se trata de que el estudiante vea en ella un modelo de crecimiento cuyas características son representadas por el parámetro *a.*

En cuanto a la gráfica de la función, el estudiante debe verla como una representación dinámica del modelo de crecimiento expresado analíticamente por la función exponencial.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

El proceso de justificación que se presenta en este análisis requiere que el estudiante disponga de estrategias derivadas de esquemas relativos a las propiedades de orden en los números reales, ya que son esas estrategias las que permiten descifrar por qué el valor de *a* determina el tipo de comportamiento en la variación de la función. En este punto aparece, con un nivel relativamente alto de importancia, el concepto de función como dependencia entre variables para hacer posible establecer que el tipo de covariación, entre el dominio de la función y sus valores, está determinado por las características del parámetro *a.* A un nivel más operativo, el estudiante debe dominar las estrategias necesarias para interpretar las gráficas de funciones de una manera dinámica, en la que la curva se considere una representación de la forma en que varían los valores de la función debido a variaciones en los valores del dominio.

6.3.4.2.3.3.3 NP5 sea $f(x)=\log_a x$ la función logarítmica. Si $0<a<1$ entonces f es decreciente. Si $a>1$ entonces f es creciente.

En este nexo como en el anterior es vital una introducción gráfica que proporcione al estudiante la oportunidad de establecer, previamente al proceso demostrativo, la relación que guarda el valor del parámetro *a* con la manera como se produce la covariación entre los valores del dominio y los valores que toma la función. Una vez hecha esta introducción, abordar el proceso demostrativo puede incluso ser una consecuencia de este análisis. A continuación se presenta el proceso demostrativo:

-Proceso de justificación y prueba

El proceso de demostración se apoya totalmente en las definiciones de función creciente y decreciente y en los axiomas de orden en los números reales.

Primer paso: Sea $f(x)=log_ax$ la función logarítmica con a tal que $0<a<1$ y sean x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $x_1<x_2$, se debe probar que $f(x_1)>f(x_2)$, es decir, $log_ax_1>log_ax_2$. Sea $b= log_ax_1$ y $c= log_ax_2$. Supóngase que $b<c$.

Segundo paso: De acuerdo con la definición de logaritmo, $x_1=a^b$ y $x_2=a^c$, como por hipótesis $x_1<x_2$, entonces se tiene que $a^b<a^c$ con $0<a<1$ y $b<c$ lo que contradice propiedades de orden en los números reales, así que se concluye que $b>c$ y por tanto $log_ax_1>log_ax_2$, es decir, $f(x_1)>f(x_2)$ y entonces la función logaritmo es decreciente.

Tercer paso: Sea $f(x)=log_ax$ la función logarítmica con a tal que $a>1$ y sean x_1 y x_2 en el dominio de f tales que $x_1<x_2$, se debe probar que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir, $log_ax_1<log_ax_2$. Sea $b= log_ax_1$ y $c= log_ax_2$. Supóngase que $b>c$.

Cuarto paso: De acuerdo con la definición de logaritmo, $x_1=a^b$ y $x_2=a^c$, como por hipótesis $x_1<x_2$, entonces se tiene que $a^b<a^c$ con $a>1$ y $b>c$ lo que contradice propiedades de orden en los números reales, así que se concluye que $b<c$ y por tanto $log_ax_1<log_ax_2$, es decir, $f(x_1)<f(x_2)$ y entonces la función logaritmo es creciente.

-Conceptos y teoremas soporte

Aparecen como conceptos y teoremas soporte, externos a la estructura, las desigualdades de números reales (axiomas de orden en los números reales).

-Análisis cognitivo del nexo

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

La comprensión de lo que dice el nexo se apoya sobre el significado de la constante *a* como número real determinante en las características de la función logarítmica y de su regla de asignación. Este significado involucra lo relativo a sus propiedades como elemento del sistema numérico de los reales y lo relativo a su papel como factor que determina el crecimiento del modelo logarítmico.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

El proceso de justificación exige estrategias de aplicación de las propiedades de orden en los números reales. Es de resaltar la necesidad de disponer de un concepto de función como relación de dependencia puesto que el estudiante debe estar en capacidad de ver los valores de la función (y la naturaleza de su variación) como dependientes del parámetro *a.* A un nivel más operativo, el estudiante debe dominar las estrategias necesarias para evaluar funciones y representarlas en el plano cartesiano. También es importante que pueda movilizarse entre una representación gráfica, dinámica y la expresión de una función como una relación entre variables.

6.3.4.2.3.3.4 NP6 sea la función lineal $f(x)=a_0+ a_1x$. Si $a_1<0$ entonces $f(x)$ es decreciente. Si $a_1>0$ entonces $f(x)$ es creciente.

Tradicionalmente existen dos maneras de formular este nexo, la que se presenta arriba y la que utiliza la expresión $f(x)=b+ mx$ para la función lineal. La diferencia no radica sólo en los símbolos utilizados para representar las constantes, si no que, en esta última forma, la función lineal es considerada separada de las funciones polinómicas mirándola desde la interpretación en el plano cartesiano de sus constantes (m es su pendiente, b su corte con el eje y) mientras que en la primera se trata de una función perteneciente a la familia de funciones polinómicas. En este estudio se ha escogido esta expresión por la importancia del concepto familia de funciones, que se apoya en el concepto de función de un parámetro (función con dominio en R y rango en un conjunto de funciones).

Cuando se utiliza la expresión *f(x)=b+ mx,* el que la función sea creciente o decreciente es considerado una consecuencia del valor de *m,* es decir, el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (pendiente de la función lineal), lo que constituye un argumento que se apoya más en un contexto geométrico que en las propiedades de los números reales.

Cuando se utiliza la expresión $f(x)=a_0+ a_1x$, el que la función sea creciente o decreciente obedece a propiedades de la desigualdad en los números reales puesto que a_1 es un parámetro, no la pendiente de la función lineal, es en este argumento que se apoya la demostración del nexo.

Sin embargo, en el proceso didáctico no puede dejar de presentarse la expresión que se apoya en el contexto geométrico, puesto que favorece los procesos de interpretación de la gráfica de una función lineal, estableciendo relaciones entre su expresión analítica y su representación cartesiana. El concepto de pendiente está íntimamente ligado con el de covariación, interpretada esta como una razón de cambio entre la variable dependiente y la variable independiente; resulta interesante, incluso, ver cómo, cuando esta covariación es constante se tiene una función lineal, mientras que, si esa covariación varía, se generan otro tipo de funciones algebraicas de la misma familia (cuadrática por ejemplo). La demostración del nexo puede precederse de una prueba apoyada en la interpretación geométrica de la pendiente, que permita al estudiante inferir que el signo de esa razón determina el carácter creciente o decreciente de la función lineal. Esta prueba se sustenta en el análisis del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (a_1 en la notación de familia de funciones), enmarcado en el gráfico cartesiano, para establecer el tipo de proporcionalidad entre *x* y *f(x)* y de qué manera esta se refleja en que la función sea creciente o decreciente según la forma en que incrementos en *x* generan incrementos (o decrementos) en *f(x)*. Esto exige esquemas relativos a función de una función, puesto que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ depende funcionalmente de *f* y esto se refleja en su gráfica. Por este motivo es fundamental, en este tipo de prueba, que la imagen del concepto evocada de función creciente o decreciente incluya el contexto gráfico, pues es en este contexto que se interpreta el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

En cuanto a la prueba apoyada en la expresión $f(x)=a_0+a_1x$ se tiene lo siguiente:

-Proceso de justificación y prueba

Se trata de una prueba apoyada en las propiedades de orden de los números reales y sobre las definiciones de función creciente y decreciente, que no acude a la interpretación geométrica de las constantes a_1 y a_0, lo cual denota demandas cognitivas diferentes a las que se ilustraron al referirnos a la prueba geométrica.

Primer paso: Sea $f(x)=a_0+a_1x$ con $a_1>0$ y x_1, x_2 en el dominio de *f* con $x_1<x_2$.

Segundo paso: Como $a_1>0$ y $x_1<x_2$ entonces $a_1x_1<a_1x_2$ y $a_1x_1+a_0<a_1x_2+a_0$ o sea $f(x_1)<f(x_2)$, es decir, *f* es creciente.

Tercer paso: Sea $f(x)=a_0+a_1x$ con $a_1<0$ y x_1, x_2 en el dominio *f* con $x_1<x_2$.

Cuarto paso: Como $a_1<0$ y $x_1<x_2$ entonces $a_1x_1>a_1x_2$ y $a_1x_1+a_0>a_1x_2+a_0$, o sea $f(x_1)>f(x_2)$, es decir, *f* es decreciente.

-Conceptos y teoremas soporte

De nuevo se tienen como conceptos y teoremas soporte, externos a la estructura teórico conceptual, los relativos al orden en los números reales.

-Análisis cognitivo del nexo

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

La interpretación de lo que dice la proposición arranca con cierta dificultad en cuanto a la comprensión de que a_1 y a_0, aunque en el marco de la función son constantes, pueden variar como parámetros generando diferentes funciones dentro de una misma familia de ellas.

Habiendo ya comprendido el significado implícito en los parámetros, aparecen las consecuencias generadas según el valor de a_1, es decir, aparece la comprensión de lo que significa que una función sea creciente o decreciente (monótona) y la relación que existe entre esto y el valor de a_1. Es decir que, al leer estos registros escritos, el estudiante debe evocar las características de una función sea lineal, creciente o decreciente, tanto por su expresión algebraica como por su gráfica, pero esas características deben estar articuladas en un solo concepto (la función lineal en uno y el carácter creciente o decreciente en otro) como un todo que le posibilite la interpretación del nexo aunque sin justificarlo aun, viendo la conclusión como una consecuencia coherente de la hipótesis. Por supuesto que todo esto requiere de los esquemas asociados con la construcción e interpretación de gráficas de funciones, expresadas algebraicamente, en el plano cartesiano.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

Sin la comprensión de primer nivel no es posible abordar la prueba del nexo. Al abordarla es necesario el reconocimiento de que se está tratando con funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales y de que estos poseen una axiomática en cuanto al orden, es pues fundamental la existencia en el sujeto de los esquemas asociados a dicha axiomática, de modo que sea posible asimilar el discurrir lógico en los pasos seguidos.

Cuando estos, partiendo de la desigualdad entre x_1 y x_2 (primer paso), desembocan en la desigualdad entre las expresiones $a_1 x_1 + a_0$ y $a_1 x_2 + a_0$ (cuarto paso), el sujeto debe, a través de una imagen del concepto evocado adecuada a la función lineal, construir la desigualdad entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Ya en esta parte de la prueba, la lectura de la formulación simbólica de esta última desigualdad, debe evocar en el estudiante un concepto de función monótona que permita establecer que la conexión entre la primera y la última desigualdad corresponde efectivamente a lo que plantea la proposición como tesis (la función es creciente o decreciente).

6.3.4.2.3.3.5 NP7 sea la función cuadrática $f(x)=a_0+ a_1x+a_2x^2$. $f(-a_1/2a_2)$ es un extremo absoluto de f. Si $a_2<0$ entonces es máximo. Si $a_2>0$ entonces es mínimo.

El nexo se ha formulado en términos de funciones polinómicas, es decir, como una función de esa familia: un polinomio con todos sus coeficientes cero, excepto a_0, a_1 *y* a_2. Tradicionalmente este nexo se prueba de manera gráfica, sin discurrir axiomático, a través de la ilustración de la relación entre los extremos de la función y los valores de a_1 y a_2, determinando en qué casos se trata de un máximo y en qué casos se trata de un mínimo.

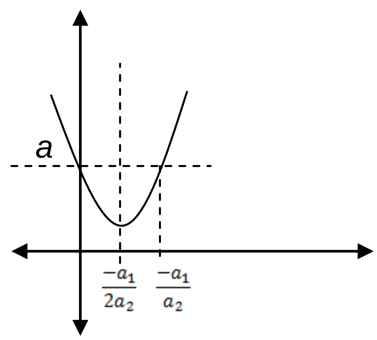
-Proceso de justificación y prueba

Es costumbre demostrar la existencia del máximo o mínimo de la función cuadrática como una aplicación de la derivada, aquí se pretende independizar estos conceptos; el estudiante debe familiarizarse con el concepto de valores extremos de una función cuadrática como una propiedad que depende de los valores de sus parámetros y no como un ejercicio de aplicación de la derivada, esto fortalece el concepto personal de familia de funciones y parámetros.

La prueba que se presenta se apoya sobre el registro gráfico sin perder de vista su relación con el registro analítico, de modo que el estudiante se movilice entre uno y otro registro verificando conclusiones.

Más que una prueba se trata de un proceso deductivo en el que, a partir del concepto de simetría, se encuentra la abscisa del vértice de la gráfica de la función cuadrática, es decir, de la parábola:

Figura 10. Gráfica general de una función cuadrática.



Como guía para el lector, previamente se muestra la gráfica de una función cuadrática general.

Primer paso: sea la parábola de ecuación y $=a_2x^2+a_1x+a_0$, haciendo $x=0$ se encuentra su corte con el eje y, es decir, el punto de coordenadas $(0,a_0)$.

Segundo paso: el vértice de la parábola se encuentra sobre su eje de simetría, así que su abscisa será el punto medio de las abscisas de dos puntos simétricos respecto al eje de la parábola.

Tercer paso: o sea que si se encuentran las abscisas de dos puntos cualquiera que sean simétricos respecto al eje de la parábola, bastará encontrar el punto medio de ellas para obtener la abscisa del vértice buscado.

Cuarto paso: como ya se tiene el punto $(0,a_0)$ sobre la parábola, ahora se encontrará su simétrico buscando un x tal que tenga la misma ordenada que el punto $(0, a_0)$ y que se encuentre sobre la parábola, es decir, que satisfaga el sistema

$$\begin{cases} y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ y = a_0 \end{cases}$$

Quinto paso: se igualan las dos ecuaciones obteniendo la siguiente serie de equivalencias:

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_0$

$a_2x^2 + a_1x = 0$

$x(a_2x + a_1) = 0$

$x = 0$ o $a_2x + a_1 = 0$

de la última ecuación se obtiene el valor $x = -a_1/a_2$ que corresponde a la abscisa del punto simétrico, respecto al eje de la parábola, del punto $(0, a_0)$.

Sexto paso: el punto medio entre $x=0$ y $x = -a_1/a_2$ corresponde a la abscisa del vértice, así que:

$$\bar{x} = \frac{\frac{-a_1}{a_2} + 0}{2} = \frac{-a_1}{2a_2}$$

Séptimo paso: se sustituye el valor de la abscisa del vértice en la función cuadrática obteniéndose la ordenada, de modo que el vértice de la parábola es $(-a_1/2a_2, f(-a_1/2a_2))$ por simple inspección de la gráfica de una función cuadrática es posible verificar que el vértice es un extremo absoluto de la función. Sólo resta comprobar en qué casos se trata de un máximo y en qué casos se trata de un mínimo.

Octavo paso: en cuanto a si se trata de un máximo o un mínimo dependiendo del signo de a_2, este carácter se infiere de la naturaleza de la gráfica puesto que si $a_2<0$ la parábola abre hacia abajo (y por tanto su vértice es un máximo) y si $a_2>0$ la parábola abre hacia arriba (y por tanto su vértice es un mínimo).

-Conceptos y teoremas soporte

Externos a la estructura se tienen los conceptos de punto medio y solución de sistemas de ecuaciones.

-Análisis cognitivo del nexo

Primer nivel (relativo a la comprensión de lo que dice el nexo)

La comprensión de lo que dice el nexo tiene exigencias relativamente altas, puesto que su formulación es bastante simbólica. Cada expresión tiene una gran carga de significación; en primer lugar el estudiante debe identificar la expresión $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ como la expresión general de una función cuadrática en la que se evalúa $f(-a_1/2a_2)$. En segundo lugar, esta última expresión debe identificarse como un elemento en el rango de la función, para que sea posible clasificarla como un extremo absoluto según el concepto asociado con este nombre, tanto gráfica, como analíticamente. En lo anterior se encuentra implícita la diferenciación entre parámetros y variables para cada uno de los símbolos presentes en la expresión general de la función cuadrática.

Segundo nivel (relativo a la comprensión de la prueba del nexo)

La comprensión del proceso de prueba del nexo exige disponer de cierto conocimiento del significado de cada uno de los coeficientes de la expresión analítica de la función cuadrática, en relación con su representación cartesiana. Sin esto no tendrán sentido expresiones utilizadas en el proceso de justificación como “corte con el eje y $(0,a_0)$”, “vértice de la parábola $(-a_1/2a_2,f(-a_1/2a_2))$”. Igualmente es necesario que el estudiante disponga de elementos para interpretar y construir la representación gráfica de una función cuadrática, incluyendo elementos relativos a eje de simetría, ramas de la parábola y vértice de la parábola. El concepto de punto medio emerge como elemento central en las deducciones que llevan a encontrar las coordenadas del vértice pues sin él no tendrá mayor significación la prueba del nexo. Todo el proceso de justificación se apoya sobre estrategias para la construcción e interpretación de gráficas de funciones especialmente en lo relativo a decidir por qué dos puntos simétricos respecto a una recta vertical tendrán la misma ordenada y considerar cada punto de la gráfica de una función como un par ordenado perteneciente a la función.

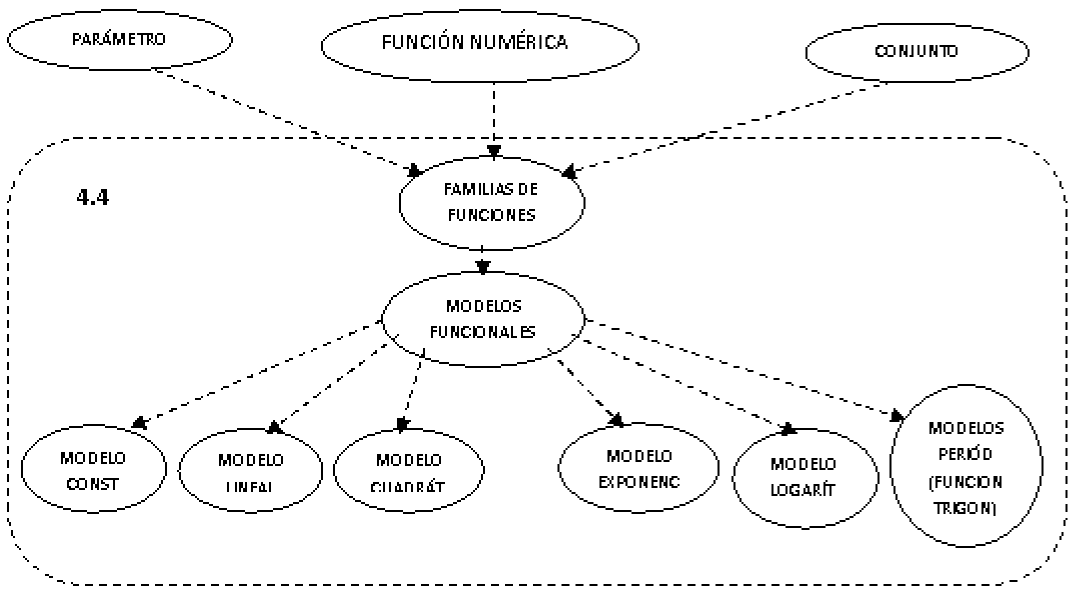
6.3.4.2.4 Subnúcleo 4.4 familias de funciones

Aunque no es tradicional incluir en programas de bachillerato este concepto, en el estudio de demandas se identificó como un concepto de importancia en procesos de antiderivación o determinación de integrales indefinidas en la forma de funciones primitivas (Ver capítulo 5, “El concepto de función en los primeros cursos…”), lo que en cursos más avanzados constituirá la solución a ecuaciones diferenciales. Cognitivamente hablando, el concepto de familia de funciones es fundamental para la conceptualización de las llamadas funciones elementales (como la función lineal y la función cuadrática) y abre camino hacia la comprensión de función como objeto, al conformar conjuntos de funciones que cumplen ciertas condiciones de agrupación determinadas por valores de parámetros lo que, a su vez, puede aprovecharse para la construcción de funciones con dominio en los reales y valores en esos conjuntos de funciones.

Como se puede apreciar en el mapa conceptual matemático que aparece a continuación, el subnúcleo familia de funciones se estructura sobre el concepto que lleva su mismo nombre el cual se apoya definicionalmente, en los conceptos de función numérica, parámetro y conjunto. Definido a partir del concepto de familia de funciones, aparece el concepto de modelo funcional que permite definir los seis modelos matemáticos de crecimiento que se identifican como de más amplia demanda en los primeros cursos de matemáticas universitarios: el constante, el lineal, el cuadrático, el exponencial, el logarítmico y el periódico.

6.3.4.2.4.1 Mapa del subnúcleo

Figura 11. Subnúcleo 4.4. Familias De Funciones



6.3.4.2.4.2 Nexos definicionales

D30, D31 Familias de funciones, parámetros y modelos funcionales: Las integrales indefinidas pueden mostrar lo que es una familia de funciones que comparte una misma expresión algebraica y la representación gráfica ilustra el significado de las características que permiten agruparlas, pero su importancia matemática se evidencia más claramente en la solución de ecuaciones diferenciales y en la categorización de las llamadas funciones elementales y de las funciones trascendentes, de gran utilización en diversas ramas de las matemáticas y de otras ciencias. Didácticamente, el estudio de esta temática favorece la creación de situaciones en que el estudiante debe operar sobre funciones al hacer corresponder a diferentes valores de un parámetro, diferentes funciones dentro de una familia, favoreciendo el paso de la conceptualización de función como proceso a la conceptualización como objeto. La conformación de conjuntos de funciones (familias de funciones) con características similares en su regla de asociación, en este caso en su expresión analítica (modelos funcionales), no obedece a razones arbitrarias; las expresiones analíticas, en muchos casos, al enunciar la relación o regla de correspondencia entre la variable dependiente (generalmente y) y la variable independiente (generalmente x), dejan en evidencia la existencia de otras variables que permiten, parafraseando a Drijvers (2001), la generalización de una clase o grupo de expresiones (en el caso que aquí atañe, funciones) conformando familias de funciones que comparten una misma expresión, esas variables extras son conocidas como parámetros y su variación determina funciones. Una vez determinada una función, en ella el parámetro pasa a ser una constante, mientras las otras letras siguen como variables:

"por un lado, el parámetro es un argumento de una función (de segundo orden), y al variar, éste, determina ecuaciones o funciones, por otro lado, dentro de cada ecuación o función, que corresponde a un valor específico del parámetro, el parámetro es una constante, mientras las otras letras son incógnitas o variables" ((Bloedy-Vinner, 2001).

Resulta natural que los estudiantes tengan dificultades con este concepto puesto que, además de distinguir variables, deben distinguir a estas de los parámetros, los cuales poseen su propia significación y, a su vez, pueden considerarse como funciones con dominio en los reales y codominio en el conjunto de funciones numéricas. En el bachillerato no es muy común explicitar este tipo de conocimiento, pues es abordado pero sólo a través del estudio de funciones con características comunes (por ejemplo "funciones exponenciales" o "funciones lineales") sin conceptualizar que se trata de modelos funcionales determinados por familias que comparten una misma expresión que varía gracias a sus parámetros; esta limitada conceptualización es insuficiente cuando el estudiante, en los cursos universitarios, se ve abocado al reconocimiento de la manera en que la variación en los parámetros determina cambios en una función en el estudio de aplicaciones de la derivada y de la integral indefinida como primitiva de una función.

De acuerdo con Duval (Duval, 1995) los fenómenos relativos al conocimiento matemático no pueden ser objeto de estudio sin recurrir a representaciones; estas representaciones, según Rico (2000), pueden ser de dos tipos: gráficas y simbólicas; a estas últimas corresponden las expresiones analíticas de tipo alfanumérico que permiten agrupar funciones numéricas en familias que pueden determinar modelos funcionales. Su principal importancia radica en las posibilidades que abren a la representación de relaciones funcionales de una variable, muy utilizadas para describir situaciones del mundo real, resolver problemas y para expresar resultados en lenguaje matemático; no sobra recordar que no son esas expresiones las funciones en sí mismas (en términos de Duval: no debe confundirse el objeto matemático con su representación) y es fundamental diseñar estrategias que no propicien en el estudiante la construcción de esquemas de funciones como expresiones analíticas si no como funciones que al expresarse analíticamente toman ese tipo de expresión.

La contextualización de la construcción de modelos funcionales desde lo geométrico y desde situaciones problema es una estrategia positiva en esta dirección pero sin dejar de lado el objetivo último: la construcción del objeto matemático función, el cual, a la larga, se constituirá prácticamente en centro de las temáticas posteriores (límites, continuidad, derivada e integral de funciones). Consecuentemente con lo expuesto, la construcción de los conceptos de familias de funciones y modelos funcionales y de cada una de las funciones que se agrupan en este subnúcleo y siguiendo a J. Deulofeu (2001) debe hacerse partiendo del uso de tablas que luego pasarían a constituir una primera caracterización de los modelos de dependencia funcional, a partir de las cuales se pueden establecer las respectivas relaciones aritméticas para llegar, posteriormente a la construcción de gráficas (en busca de evitar que el estudiante asuma que los valores de la función son todos discretos) y de las respectivas expresiones algebraicas.

La presentación de familias que determinan modelos favorece, a su vez, la posibilidad de presentar al estudiante los parámetros como elementos que determinan características de la función que se representa por esa expresión, es decir, mostrar que las funciones pueden ser función de otros elementos (en este caso función del parámetro que las determina) lo que va en la dirección de la conceptualización de la función como objeto y de la concepción de una concepción unitaria de las matemáticas, es decir, una concepción no fragmentada.

En particular se enfoca el estudio de los modelos funcionales más conocidos: función constante, función lineal, función cuadrática, función exponencial, función logarítmica y funciones trigonométricas por su importancia en el proceso de capacitar al estudiante en la utilización de funciones en la resolución de situaciones y problemas contextualizados, a través del lenguaje algebraico y gráfico, como se verá en el capítulo 7 en la parte correspondiente al marco interpretativo.

D32 Función constante: de aparente simpleza conceptual, no dejan de presentar dificultades para los estudiantes aspectos como la falta de variación en la gráfica, el hecho de que variaciones en el dominio no generen variaciones en el rango y que en la expresión analítica no aparezca la variable independiente. Es de gran utilidad didáctica por tratarse de una función en que a todos los elementos del dominio les corresponde un mismo valor en el rango, lo que la convierte en un buen elemento de apoyo en la superación del fenómeno identificado por Álvarez y Delgado (Álvarez y Delgado, 2001a), respecto de estudiantes que utilizan la definición de función para definir función inyectiva, problema aparentemente asociado con la interpretación de la frase *"a cada elemento del dominio corresponde uno y solo un elemento del codominio"*, ya que esta función en su codominio presenta una situación radicalmente opuesta (al mismo elemento del codominio le corresponden todos los elementos del dominio).

A partir de tablas y la representación en el plano cartesiano el estudiante puede construir la expresión algebraica particular de la función constante $f(x)=a_0$ *con* a_0 *en* R, e identificar los efectos que produce la variación del parámetro a_0 tanto en la expresión algebraica como en el gráfico. Analizar el respectivo gráfico redundará en discusiones acerca del carácter dependiente de la función respecto de dicho parámetro. De otro lado no puede dejarse de lado que el estudiante debe analizar situaciones en contexto que se modelen mediante la función constante.

D33 Función lineal: en su expresión analítica (algebraica) $f(x)=a_0+ a_1x$ *con* a_0 *y* a_1 *en* R, el parámetro determinante de su carácter de linealidad ($\boldsymbol{a_1}$) es conocido como pendiente, concepto que guarda estrecha relación con la proporcionalidad tanto desde lo geométrico como desde lo aritmético a través de cada uno de los lenguajes usuales para funciones: tabla, gráfico o fórmula. En cada uno de ellos el parámetro "pendiente" establece la razón de cambio entre las variables relacionadas, lo que le otorga a la función lineal su importancia como herramienta en la solución de problemas relacionados con fenómenos de cambio y como objeto matemático que será sujeto de diversas demandas matemáticas en temáticas posteriores del cálculo, especialmente en aquellos en que sea necesario modelar situaciones, tanto geométricas como aritméticas y algebraicas, en que incrementos en la variable dependiente sean directamente proporcionales a incrementos en la variable independiente y en aquellos en que sea necesario expresar gráfica o analíticamente modelos de crecimiento de este tipo. De las funciones elementales es la llamada a iniciar el camino al reconocimiento de la función como herramienta para representar el cambio, más allá de la simple asignación de objetos; esto puede lograrse a través de la ilustración de situaciones de covariación lineal representables mediante tablas y gráficas que luego puedan traducirse en expresiones algebraicas en las que pueda evidenciarse el papel de los parámetros a_0 y a_1 como elementos que determinan las características de posición e inclinación en la gráfica y las condiciones iniciales y de covariación en el fenómeno a describir, en este último caso buscando la conceptualización del modelo lineal como función de los parámetros que lo describen.

D34 Función cuadrática: la caracterización de modelos elementales de crecimiento (o de decrecimiento) y de modelos que guardan relaciones de proporcionalidad, no queda totalmente satisfecha con la función lineal; muy pronto puede detectarse cómo, en algunas situaciones, no hay proporcionalidad entre los incrementos de las variables y el concepto de pendiente es rebasado por las exigencias de la situación a modelar, ya sea esta de tipo aritmético, geométrico o de medida; empieza entonces a gestarse una importante transición entre las matemáticas elementales y las avanzadas, a través de un modelo funcional que salta de la proporcionalidad a variaciones de tipo cuadrático, cuya expresión gráfica evidencia variaciones no lineales y cuya expresión analítica extiende el de la lineal en un término adicional: $f(x)=a_0+ a_1x+a_2x^2$ *con* a_0, a_1 *y* a_2 *en* R. Las situaciones de variación se extienden de esta manera a nuevas aplicaciones en modelos de crecimiento y en la relación entre incrementos. De manera análoga a la función lineal, los coeficientes a_0, a_1 *y* a_2 son los parámetros que determinan la naturaleza de la función representada mediante esa expresión y adquiere especial importancia que el estudiante construya tablas y gráficas que le permitan establecer diferencias y similitudes con la función lineal, concluyendo el modelo funcional que se ajusta a la situación representada. El ejercicio de establecer la relación entre los valores de los parámetros y la función cuadrática que se determina, favorece la conceptualización de que la función puede ser una función de los parámetros en aras de un concepto estructural de función. No sobra recomendar que el estudiante, mediante manipulaciones algebraicas, llegue a la expresión algebraica $f(x)=a_2(x-h)^2+k$, más cercana a la representación gráfica por explicitar las coordenadas del vértice en el gráfico de la función cuadrática.

D35, D36 y D37 Funciones exponencial, logarítmica y funciones trigonométricas: hasta el siglo XVII sólo eran consideradas como funciones las relaciones entre cantidades geométricas variables expresables mediante ecuaciones, las relaciones que no poseían este tipo de expresión se decía que trascendían a las expresiones algebraicas (Ver variación conceptual V_5 del estudio histórico-crítico, capítulo 4) y eran expresadas por medio de una explicación del método de construcción geométrica de su correspondiente curva, por tal razón estas curvas eran llamadas trascendentes. Entre ese grupo de curvas se encuentra la que hoy conocemos como función exponencial (D35) y que, según Trujillo (1995) sólo empezó su camino hacia la representación analítica con Nicolás Chuquet (siglo XV) y con Michel Stifel (siglo XVI) a través del surgimiento de las nociones de exponente cero, negativo y fraccionario; el problema en cuestión consistía en establecer relaciones entre la progresión aritmética de los números naturales y progresiones geométricas. Parece que, en un largo proceso, (para más información ver Martínez G (2000)) se fue identificando la progresión aritmética con las abscisas y la progresión geométrica con las ordenadas al tiempo que se evolucionaba en la notación hasta llegar a lo que se conoce ahora como función exponencial: función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x donde a es un número real, la denotamos por $y = a^x$.

De manera análoga, aunque por un camino alterno, la curva que hacía corresponder una progresión aritmética en las ordenadas a una progresión geométrica en las abscisas tampoco poseía una expresión algebraica (Bos, 1975), no era admitida como función y se conocía como curva logarítmica o, en términos actuales, función logarítmica (D36) o sea la que en la actualidad se define como el exponente al cual se debe elevar la base *a* para obtener el número *x* y que denotamos $y=log_a x$. En cuanto a las funciones trigonométricas (D37) estas iniciaron su ingreso al mundo de la expresión analítica gracias a los trabajos de Jhon Napier (1550-1617) sobre logaritmos y a Leonhard Euler (1707-1783), quien las definió utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Lo tradicional en los programas de bachillerato es basar el estudio de las funciones trigonométricas en las propiedades de los triángulos rectángulos, sin embargo el estudio de demandas permitió detectar que el estudiante más adelante deberá enfrentarse a situaciones en que los ángulos utilizados trascienden las medidas posibles para un triángulo o en que las expresiones utilizadas mezclan partes algebraicas con partes trigonométricas (por ejemplo senx + x) al calcular límites, derivadas o integrales, es decir, situaciones en que las definiciones apoyadas en el triángulo se tornan insuficientes en cuanto a su dominio y sus propiedades analíticas. No debe abandonarse este tipo de presentación para las funciones trigonométricas, pero si debe superarse en cuanto a extensiones en su dominio y posibilidades de analizar propiedades analíticas como su gráfica, su naturaleza periódica (amplitud, período, fase) y su carácter de funciones a través de la construcción mediante el círculo unitario.

Como puede verse las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas comparten su tardío ingreso a la categoría de funciones y, desde una mirada matemática, comparten el poseer expresiones analíticas diferentes de las expresiones algebraicas. Históricamente también comparten una especial importancia desde sus orígenes mismos, especialmente como herramienta en la solución de problemas de crecimiento (en el caso de las funciones exponencial y logarítmica) y de medida (en el caso de las funciones trigonométricas). En la actualidad el campo de acción de las funciones trascendentes se extiende desde las matemáticas básicas universitarias hasta los cursos más avanzados; en el estudio de demandas se constató que en los cursos de cálculo son funciones de amplia utilización en modelos de crecimiento (exponencial y logarítmica) y en la modelación de fenómenos periódicos (funciones trigonométricas), sin embargo debe evitarse la arraigada costumbre de presentar las funciones trascendentes como simples herramientas en la solución de problemas de ese tipo, pues adicionalmente estas funciones presentan propiedades de corte analítico cuyo estudio enriquece la imagen del concepto de función que se pretende construya el estudiante para el concepto de función: su expresión analítica no es polinómica, la manera de evaluarlas se sale del uso tradicional de las operaciones básicas, su dominio está sujeto a restricciones, presentan carácter creciente y decreciente en diversos intervalos del dominio, pueden tener carácter periódico, no todas son inyectivas y modelan situaciones que no pueden modelarse con las funciones polinómicas.

6.3.5 Quinto núcleo: operaciones con funciones

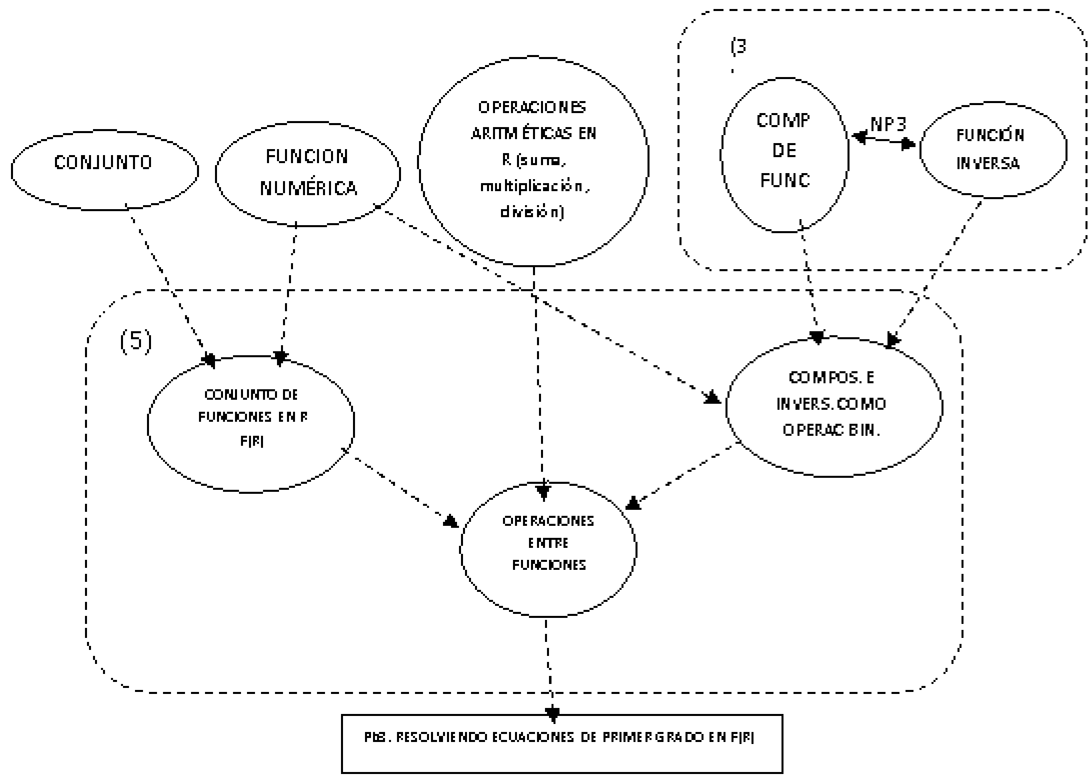
6.3.5.1 Descripción esquemática: Los conceptos matemáticos evolucionan desde un estatuto protomatemático hasta un estatuto matemático pasando por el estatuto paramatemático, esta evolución es un reflejo del papel utilitario de los conceptos en el desarrollo de la cultura y de las ciencias, en la medida en que esos conceptos se tornan insuficientes y pasan a ser “elementos de trabajo” para otros conceptos más avanzados; en el estudio histórico crítico (capítulo 4) se estudió este proceso evolutivo para el concepto de función y cómo este concepto se constituyó en eje de ramas de las matemáticas como el cálculo.

Igualmente en el capítulo 5 se mostró que la conceptualización operativa de función no es suficiente para responder en los cursos de cálculo por cuanto varios conceptos se apoyan sobre operaciones que utilizan las funciones como objetos. Es necesario recordar que con la construcción personal de la estructura teórico conceptual por parte del estudiante, se pretende que, inicialmente, las funciones sean generadas como procesos sobre otros objetos (que pueden ser numéricos o no numéricos (vectores por ejemplo), abstractos o reales), es decir, cubra una etapa de interiorización; luego, por medio de la identificación de propiedades y relaciones, reconozca en esos procesos factores en común que los agrupe en una categoría autónoma (condensación) y, finalmente, mediante el trabajo operativo sobre ellas, las conciba como entidades abstractas o sea objetos reificados (Sfard, 1991, 20). Esta última etapa puede darse en la construcción personal de este núcleo conceptual, puesto que viabiliza el salto de la función como un proceso, a la función como un objeto sobre el que puede actuarse, miembro de una categoría (conjuntos de funciones numéricas) sobre la que pueden operarse procesos de un nivel más avanzado (por ejemplo composición y operaciones aritméticas como la suma y el producto) conformando un álgebra que permite otras clasificaciones (estructuras algebraicas como los espacios vectoriales) en estados más avanzados de conocimiento.

Como puede observarse en el mapa asociado, el centro del núcleo es el concepto del cual deriva su nombre, soportado en dos conceptos internos al núcleo (porque no habían sido definidos antes en la estructura teórico conceptual y su definición obedece al proceso de estructuración de este núcleo): conjunto de funciones numéricas en R (F(R)) y composición e inversión de funciones como operaciones binarias, y en un concepto externo al núcleo: operaciones aritméticas en los reales. Al interior de este núcleo se configura y resuelve el problema de base Pb3 que se especifica en la parte inferior del mapa y se amplía en la correspondiente sección.

6.3.5.2 Mapa del núcleo

Figura 12. Quinto núcleo. Álgebra de funciones



6.3.5.3 Nexos definicionales

D38 Conjunto de funciones en R: Constituye este concepto el primer paso, al interior de este núcleo, hacia la concepción de función como objeto. La conformación de conjuntos de funciones numéricas con dominio en los reales no es una simple agrupación de funciones, hay infinitas funciones numéricas con dominio en los reales, así que no se trata de un conjunto que pueda expresarse por extensión; el ejercicio de concebir este conjunto pone un punto alto en la comprensión del concepto de función desligando las funciones de los procesos de asignación con los que, hasta el momento, el estudiante las ha tenido asociadas para considerarlas ahora objetos abstractos estáticos (la palabra abstractos hace referencia a objetos fruto de procesos mentales propios de la abstracción reflexiva). Este conjunto hace las veces de nueva categoría que integra las funciones en R asignándoles su significación como funciones que ya tienen doble carácter: el de proceso y el de objeto; puntualmente se trata del proceso que Anna Sfard (1991) describe con las etapas de interiorización, condensación y cosificación, estadio este último en el que se iniciará el proceso de interiorización de los conceptos integrados en este núcleo: las operaciones binarias sobre funciones.

D39, D40 Composición e inversión como operaciones binarias: ya se ha hecho mención en el tercer núcleo a la importancia epistemológica y matemática de estos dos conceptos, sin embargo cabe mencionar algunos aspectos adicionales relacionados con la trascendencia que tienen en la conceptualización del concepto de función y con aspectos didácticos relativos al paso de dichos conceptos como proceso a su consideración como operaciones binarias.

La composición de funciones es de las primeras operaciones que se definen entre funciones y posee la característica de que no es definida previamente entre números, esto le otorga gran potencialidad como concepto que toma a la función como objeto sobre el cual se define u opera. Su importancia se extiende desde su aplicación en las funciones más elementales, en contextos geométricos (traslaciones o rotaciones de figuras en el plano), aritméticos (tablas de asignación de valores), algebraicos (funciones expresadas analíticamente) hasta estados en que las funciones han evolucionado a transformaciones, derivadas, integrales, transformadas, etc. Por tales razones, al interior de la estructura teórico conceptual, el concepto de composición de dos funciones *f* y *g,* debe evolucionar del proceso de asignación a un elemento *x* en el dominio de *g,* de un elemento *f(g(x))* en el rango de *f,* a la asignación de la función *fog* a las funciones *f* y *g* a través de la operación binaria composición (D39).

Si se mira en detalle el proceso de composición de dos funciones *f* y *g (fog),* pueden verse algunos aspectos de interés didáctico que no deben pasarse por alto: el proceso pasa por la identificación del dominio de la función *f* como subconjunto del rango de la función *g* y debe tener como objetivo final la identificación del dominio de esta última y del rango de la primera como el dominio y rango, respectivamente, de la función compuesta de esas dos; la situación se puede visualizar mejor en el esquema, ya tradicional:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$$

El conjunto B contiene el dominio de la función *f* y es el rango de la función *g.* El conjunto C es rango de la función *f.* Al componer las dos funciones, A será el dominio de "*g* compuesta *f*", es decir *fog,* y C será su rango, esquemáticamente:

$$A \rightarrow C$$

$$x \rightarrow fog(x)$$

quedando el conjunto B relegado a un nivel en que no es explicito a pesar de su trascendencia en la posibilidad o imposibilidad de la composición de las dos funciones, pero esto sólo ocurre una vez *fog* es una nueva función, es decir, ya el proceso de composición ha dejado de serlo para convertirse en una nueva regla de asignación. Sin embargo puede ocurrir que el estudiante no visualice esta situación, es allí donde la diversidad en las situaciones a que el maestro lo enfrente entra en juego. Situaciones en que el alumno deshaga una función en dos o más funciones que al componerse la produzcan, situaciones en que se compongan dos funciones obteniendo una función que entra en contradicción con el proceso mismo, es decir, h(a), con *h* función compuesta de *f* y *g,* exista, mientras que *g(a)* o *f(g(a))* no exista. (Por ejemplo la composición de las funciones $g(x)=\sqrt{x}$ y $f(x)=x^2$, sin los análisis adecuados conduce a h(x)= $fog(x)=x$ de modo que $h(-1)=-1$, pero el proceso $f(g(-1))=f(\sqrt{-1})$ no es posible pues $\sqrt{-1}$ no existe en R.), situaciones en que el dominio de *f* no sea subconjunto del rango de *g* pero sin embargo sea posible, algebraicamente, la composición de las funciones, pueden favorecer el proceso de significar la composición de funciones como operación binaria en F(R). Adicionalmente es importante la verificación de que la composición de dos funciones en F(R), siempre que esta sea posible, arroja otra función en F(R).

Por su parte, en cursos de cálculo diferencial e integral, el concepto de función inversa reviste importancia como apoyo definicional a varios conceptos como el concepto de función exponencial, funciones trigonométricas, e incluso en la concepción de la derivada y la integral de funciones como inversas. Este concepto, en el tercer núcleo se concibió como proceso inverso al de la función original o directa, ahora al interior del quinto núcleo se concibe como el elemento inverso, mediante la composición, es decir, el elemento-función del conjunto de funciones F(R) que compuesto con la función *f* arroja la función identidad. Simbólicamente: D40 "dada una función *f* en F(R), definimos la función inversa de *f,* como aquella función *g*, también en F(R), tal que *fog=gof=x.* A la función *g* la denotamos por f^{-1}." Como puede verse esta definición ya no se apoya en revertir el proceso de asignación de la función original, si no en la composición de funciones como operación binaria en F(R), o sea que pasa de ser la inversión de un proceso a ser una propiedad de la composición de funciones, lo que le asigna a esta, y por ende al concepto de función, un estatus conceptual más elevado que el de mero proceso. Para el estudiante este paso no es instantáneo ni fruto de una información, si no una construcción apoyada en situaciones que hagan necesaria esa evolución. Verificar que la función *g,* obtenida mediante la reversión del proceso de la función *f,* es su inversa, a través de la verificación de que la composición *fog* y *gof* arroja la función identidad; armar colecciones de parejas de funciones que sean inversas (obtenidas a través del proceso de revertir el proceso de la función original); utilizar esa colección de funciones inversas para anular funciones en el marco de ejercicios matemáticos que hagan necesario este proceso, son muestra del tipo de situaciones que pueden posibilitar el paso de la concepción de función inversa como proceso inverso a la concepción de función inversa como propiedad de la operación binaria composición y en este sentido se enfoca el problema de base Pb3 del que se hará un análisis en la sección correspondiente.

D41, D42, D43 suma, producto y cociente de funciones la suma, el producto y el cociente de funciones evidenciaron su importancia en el estudio de demandas; el cálculo de límites de funciones exige de estas operaciones de una manera tanto operativa como conceptual y de allí se desprende que lo mismo ocurra con los conceptos de derivada e integral. Su importancia también radica en que se trata de operaciones que se realizan sobre funciones, potenciando la conceptualización como objeto de la función. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que estas operaciones se definen a partir de las respectivas operaciones sobre números reales:

Sean f y g funciones en F(R) con el mismo dominio D, sea x en D, definimos

la suma de f y g: $s(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

el producto de f y g: $p(x)=(f.g)(x)=f(x).g(x)$

el cociente de f y g: $c(x)=(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ siempre y cuando $g(x)$ no sea cero.

Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ están en R, en primera instancia las tres operaciones se realizan sobre R, pero el conjunto de todas esas operaciones conforma la respectiva función (*s, p* o *c* según el caso), lo que cognitivamente equivale a que el conjunto de todas las acciones encaminadas a determinar valores de la función operación, debe interiorizarse por parte del estudiante para constituir el proceso que determina esa función-operación como un objeto, elemento de la categoría que conforma este núcleo, es decir, otorgarle a ese proceso el estatus de operación binaria. Pero ese paso cognitivo no va de la mano con la definición, como bien lo afirma Vinner (1991): "Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos" así que se requiere de el importante proceso de abstracción reflexiva, de modo que las acciones que, inicialmente se efectúan sobre reales, puedan interiorizarse para formar los procesos correspondientes a la operación y encapsularse en los objetos que, en matemáticas, se definen como operaciones binarias, en este caso sobre funciones. En este proceso es importante que el trabajo del estudiante no se limite al cálculo de sumas, multiplicaciones y/o divisiones, si no que estas sean utilizadas, en el marco de situaciones que hagan de ellas instrumentos para procesos más avanzados en los que el simple cálculo de un valor no sea suficiente, como ocurre en la determinación de expresiones generales o gráficas de funciones obtenidas mediante las operaciones, o en la descomposición de funciones, que se encuentren representadas analítica o gráficamente, para expresarlas como la suma, el producto o el cociente de dos funciones.

6.4 PROBLEMAS DE BASE

Los problemas de base son parte fundamental de la ETC en cuanto elemento que pone en juego su engranaje al exigir de los estudiantes procesos de solución apoyados en referentes teóricos de sectores de la estructura. Por tal razón se presenta, además de su formulación, la técnica de solución acompañada del respectivo soporte teórico. También se justifica, desde el punto de vista didáctico y cognitivo, la pertinencia de cada problema de base aduciendo razones apoyadas en la manera en que la comprensión de los referentes teóricos es puesta a prueba y la operatividad que se demanda sobre ellos.

6.4.1 Pb1: Reconociendo y construyendo funciones en distintos contextos.

6.4.1.1 Formulación

Involucra este problema de base lo relativo al reconocimiento y construcción de funciones definidas sobre diversos tipos de objetos (reales o abstractos) y en diferentes contextos: tabla, conjunto de parejas ordenadas, gráfica cartesiana o expresión analítica de la forma $y=f(x)$. El reconocimiento y construcción de funciones incluye reconocimiento o determinación de dominio, codominio, rango y regla de asociación o correspondencia, en el caso de funciones numéricas esta última puede estar definida de diversas maneras. La determinación del dominio y del rango puede involucrar cálculos no muy complicados.

6.4.1.2 Técnica de solución y soporte teórico El reconocimiento de funciones inicia con reconocer la regla de asociación y verificar si esta cumple con la condición propia de la definición de función. Este primer paso en el proceso obedece a diferentes técnicas dependiendo del contexto en que se defina la función, en el caso de funciones definidas mediante tablas la verificación de la regla de correspondencia y el reconocimiento de dominio, rango y codominio es una tarea prácticamente visual; si se trata de funciones numéricas definidas a través de ecuaciones en dos variables o representadas gráficamente, las respectivas técnicas se apoyan en criterios conocidos, como el del exponente de la variable dependiente para funciones expresadas con ecuaciones o el criterio de la recta vertical para funciones en contexto gráfico. Para las funciones expresadas como ecuaciones es importante considerar funciones definidas implícitamente, en particular es recomendable poner en discusión aquellos casos donde el despeje de la variable dependiente no sea expedito, abriéndose la discusión de si la ecuación define o no una variable como función de la otra, y qué técnicas o procedimientos se podrían utilizar para resolver el problema.

Para funciones definidas mediante expresiones de la forma $y=f(x)$, la determinación de dominios implícitos exige manipulaciones algebraicas que permitan la solución de ecuaciones e inecuaciones en una variable. En la determinación del rango la expresión $y=f(x)$ es resuelta como una ecuación en la variable x para luego conformar el conjunto correspondiente al rango con aquellos valores de y, para los cuales la ecuación tiene una solución en el dominio. Esta última técnica también es utilizable en la determinación de funciones inyectivas y, por supuesto, para determinar las preimágenes asociadas con un valor dado de la función, que se presenta permanentemente en contextos no matemáticos y que exhibe un nivel de dificultad notorio para los estudiantes.

6.4.1.3 Justificación Este problema de base, cuyo soporte teórico se ubica en los núcleos 1 y 4 (concepto general de función y función numérica respectivamente), agrupa un gran número de situaciones prototípicas que crean condiciones para la construcción de un concepto personal de función acorde con la generalidad que se propone en la definición, buscando responder a la tipología que se identifica como demandada por los primeros cursos de Cálculo y buscando evitar lo que, en la descripción del núcleo en que se enmarca este problema de base, mencionamos como una de las más frecuentes desadaptaciones del concepto de función que construyen los estudiantes, la restricción en la clase de objetos que identifican como funciones (en particular es alta la tendencia a identificar como funciones cualquier fórmula o cualquier curva en el plano cartesiano).

Adicionalmente el problema busca crear fundamentos operativos necesarios para el manejo del concepto de función en cualquier tipo de contexto, especialmente resaltamos el acercamiento a la interpretación de la expresión $y=f(x)$, como una ecuación en x, para un y dado, de gran aplicabilidad. La determinación de rangos, utilizando esta técnica, plantea un punto alto en el problema de base, es aconsejable mirarlo como un plus, reservado para ciertos estudiantes, lo cual no quita que debe quedar claro para todos los estudiantes el sentido, interpretación y manera de abordar en contexto la ecuación $b = f(x)$, siendo b un valor dado en el rango.

6.4.2 Pb2: Reconociendo y construyendo funciones inversas en distintos contextos.

6.4.2.1 Formulación Se centra este problema de base en aspectos relativos al reconocimiento de funciones con inversa y a su respectivo cálculo en caso de esta existir. Aunque el problema se enfatiza en funciones numéricas, también debe incluirse una gran variedad de funciones que no lo sean. Es importante tener en cuenta que el reconocimiento de una función inversa implica determinar su dominio, su rango y la regla de correspondencia que la define.

Dada una función f, formulada ya sea a través de una tabla, una ecuación, una gráfica cartesiana o una expresión analítica de la forma $y=f(x)$, su formulación en términos generales podría ser:

- Determinar si tiene inversa y calcularla si es el caso.
- Verificar si la función encontrada es en realidad la inversa.

6.4.2.2 Técnica de solución y soporte teórico El primer paso es la verificación de que se trata de una función inyectiva, lo que, de acuerdo con la definición, garantiza que tenga inversa. Respecto de esta verificación vale recordar la disponibilidad de tres estrategias:

1. La aplicación de la definición en cualquiera de sus tres versiones:

    a. $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$, donde x_1, x_2 son elementos arbitrarios en el dominio de f.

    b. $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, donde x_1, x_2 son elementos arbitrarios en el dominio de f.

    c. Una función f es inyectiva si a cada elemento del rango le corresponde solo una pre-imagen en el dominio.

2. El estudio de la ecuación $y=f(x)$ para y arbitrario en el rango de f, respecto de la unicidad de su solución.

3. El método del contraejemplo para probar que se trata de una función que no es inyectiva.

La selección de cualquiera de las estrategias anteriores obedece al grado de dificultad según el contexto en el cual se defina la función f.

En el caso de funciones definidas por tablas pequeñas, cualquiera de las estrategias 1. y 3. puede resultar efectiva y casi que inmediata. Igualmente la determinación de la regla de correspondencia para la función inversa es sólo cuestión de invertir la tabla.

Cuando la función se encuentra definida en contexto gráfico las tres versiones equivalentes de la definición, citadas en la primera estrategia, son el sustento para el criterio de la recta horizontal (nexo proposicional NP2) y por tanto cualquiera de ellas es de utilidad y la regla de correspondencia puede encontrarse a través de la simetría con respecto a la recta $y=x$. Tanto en este caso como en el anterior, la verificación de que efectivamente la función definida por la regla de correspondencia encontrada es la función inversa, puede hacerse mediante la composición de funciones en el registro en que se ha planteado el problema, apoyándose en el nexo proposicional NP3 que formula la función inversa a través de la composición de funciones.

Si la función está definida a través de una ecuación en dos variables, el proceder más lógico es despejar la variable dependiente, lo cual remite este caso al que se presenta cuando la función es representada a través de una expresión analítica de la forma $y=f(x)$. En esta última situación se puede acudir a las versiones a. y b. de la definición, aunque no son garantía de éxito para la tarea; puede también acudirse a la versión c. lo que requiere la solución de una ecuación en x, para valores arbitrarios de y, que no siempre es de sencilla solución, pero lleva directamente a encontrar la regla de correspondencia para la función inversa, si esta existiera. En cuanto a la verificación de si la función calculada es o no la inversa de la función dada, de nuevo se puede acudir al nexo proposicional NP3 que vincula el concepto de composición con el concepto de función inversa.

Como aspecto relevante se destaca que, de acuerdo con nuestras definiciones de función y función inversa, una función para tener inversa sólo requiere ser inyectiva, de modo que el dominio de la función inversa siempre será el rango de la directa, aunque dicho rango no sea igual al codominio inicialmente propuesto.

6.4.2.3 Justificación

La formación matemática que se espera de un estudiante, con respecto al concepto de función, se ve nutrida en la medida en que la manipulación del concepto de función como objeto y como proceso, es alternada por las exigencias de este problema de base. De otro lado el concepto de función inversa fue identificado, en el estudio de demandas, como altamente significativo para la conceptualización de funciones de uso frecuente y cuya relación es de tipo inverso, como las funciones exponenciales y logarítmicas, las funciones trigonométricas y sus inversas y en conceptos de altos niveles de elaboración, centrales en los cursos de cálculo y álgebra lineal como derivada-integral o matriz y matriz inversa utilizados estos últimos en el contexto de transformaciones lineales.

Adicionalmente, este problema de base resulta particularmente interesante porque vincula los núcleos 1, 2, 3, 4 y 5 al poner en juego, tanto el concepto general de función como los conceptos de función inyectiva, función inversa y composición de funciones. En particular la exigencia que hace de los nexos proposicionales NP2 y NP3 fortalece, en la construcción personal que debe hacer el estudiante, la articulación conceptual y proposicional entre elementos de la ETC.

6.4.3 Pb3: Resolviendo ecuaciones de primer grado en F(R).

6.4.3.1 Formulación Este problema de base agrupa lo concerniente al estudio de la ecuación de primer grado en el marco del álgebra que se define sobre el conjunto de funciones numéricas con dominio en los reales (F(R)). Si *f, g, h* son funciones en F(R), la ecuación de primer grado puede tener las siguientes versiones generales:

- *f.X+h = g* (. Indica multiplicación entre funciones)
- *foX+h = g* (“o” indica composición de funciones)
- *Xof + h = g*

6.4.3.2 Técnica de solución y soporte teórico La técnica de resolución sigue el mismo procedimiento utilizado para la resolución de ecuaciones lineales en el conjunto de los números reales, pero el tratarse de ecuaciones definidas en F(R) genera diferencias en la aplicación de los conceptos involucrados.

El primer paso para despejar *X* se apoya en la existencia de una única función *–h* (la función opuesta de *h*), en la propiedad asociativa para la suma de funciones y en el axioma relativo a la uniformidad para la suma de funciones. Las versiones citadas arriba se convierten entonces en las siguientes ecuaciones equivalentes:

- *f.X = g+(-h)*
- *foX = g+(-h)*
- *Xof = g+(-h)*

En la primera ecuación, si *f* es una función que no se anula para ningún valor en R, entonces posee recíproca única *1/f* y se puede terminar el proceso de despeje, apoyándose en el axioma de uniformidad para la operación binaria multiplicación de funciones y en la propiedad asociativa para esa misma operación, obteniendo como solución única: $X=(g-h)/f$.

En la segunda ecuación, si *f* es una función biyectiva entonces posee inversa (además única) f^{-1} en F(R) lo que permite continuar con el proceso para despejar *X*, apoyándose en las propiedades asociativa y uniforme, en este caso de la operación binaria composición de funciones, obteniendo $X=f^{-1}o(g-h)$.

Para la tercera ecuación el razonamiento es similar, sólo que la composición con la inversa se hace por la derecha.

6.4.3.3 Justificación

Este problema de base plantea cuestiones de fondo en la parte conceptual, puesto que tras los procesos de solución existen condiciones necesarias y suficientes que no se evidencian como si se hace con las condiciones suficientes y que traen consigo preguntas que es importante abordar:
En la primera ecuación ¿Qué sucede con la solución si la función *f* se anula en algún punto?

En la segunda y tercera ecuaciones puede plantearse: ¿Qué sucede con la solución si la función *f* no posee inversa? ¿Qué sucede si la función *f* es inyectiva pero no sobreyectiva? Ingresan factores como la restricción de las funciones según conveniencias.

La comprensión del problema de base y de su proceso de solución supone una concepción de las operaciones entre funciones como operaciones binarias entre objetos que no son números (aunque se apoyan en las operaciones entre números) incluyendo en esa categoría la composición de funciones. Adquiere particular relevancia también la identificación de semejanzas y diferencias entre los conceptos de opuestos aditivo y opuesto multiplicativo, de composición y de función inversa y el dominio de los procesos algebraicos que permiten resolver una ecuación de primer grado en los reales para extenderlos a una ecuación lineal en F(R).

Este problema de base aunque incluye algoritmos y algunos procesos de cálculo, se perfila desde una perspectiva teórica y constituye una garantía de comprensión del núcleo 5, vital en el acercamiento del estudiante a la concepción de función como objeto. Este problema de base tiene un valor adicional en la formación matemática que se espera de un estudiante con respecto al concepto de función, la comprensión del problema mismo y las manipulaciones que exige, garantizan de cierta manera la concepción de función como objeto sobre el que se opera y dicha operacionalidad, aplicada en solución de ecuaciones, otorga al conjunto de funciones numéricas en R, así sea de manera intuitiva, el carácter de sistema algebraico lo que, es un buen punto de llegada en la ETC de función que se propone como respuesta a las demandas matemáticas que, con respecto al concepto de función, hacen algunas definiciones y teoremas importantes en los cursos de cálculo y de álgebra lineal.

6.4.4 Pb4: Graficando funciones numéricas.

6.4.4.1 Formulación

Este problema de base envuelve aspectos relativos a estrategias y técnicas básicas para la construcción de graficas de funciones numéricas a partir de su expresión analítica, enfatizando en aquellas que permitan el análisis de características matemáticas, como intervalos de monotonía, valores extremos, simetrías, asíntotas y discontinuidades de diverso tipo, a partir de su proceso de construcción.

Una versión general del problema podría ser:

Dada una función numérica *f,* expresada analíticamente, trazar su grafica y, a partir de ella y de su proceso de construcción, analizar su comportamiento matemático en cuanto a monotonía, valores extremos, simetrías, asíntotas y discontinuidades.

6.4.4.2 Técnica de solución y soporte teórico La técnica general para el trazado de la gráfica inicia con el estudio de la expresión analítica de la función para establecer su dominio mediante la identificación de valores de indefinición. Esta primera parte del proceso exige del reconocimiento de posibles restricciones según el tipo de expresión analítica. Los valores de indefinición serán entonces utilizados como indicadores de rupturas o discontinuidades y pueden constituir asíntotas o simplemente saltos en la gráfica; el lograr esta clasificación se apoya en las definiciones que de estos conceptos se introdujeron al interior del subnúcleo 4.2 y requiere de la elaboración de tablas de valores de coordenadas de puntos sobre la gráfica, que permitan analizar su comportamiento en las vecindades de dichas discontinuidades. A esta altura de la técnica, han entrado en juego el cálculo de valores de una función numérica expresada analíticamente, la diferenciación entre dominio y rango y la movilización entre la expresión analítica y la expresión mediante tablas de valores.

Contribuye también, en el proceso de construcción de la gráfica, el determinar simetrías y cortes con los ejes; estas determinaciones pueden hacerse a través de la búsqueda de los llamados ceros de una función y del estudio de las propiedades algebraicas de la expresión propuesta para la función a graficar, o a partir del análisis del comportamiento de la expresión analítica según propiedades de los respectivos modelos funcionales identificados al interior de ella. El trazado final de la curva también puede apoyarse en el establecimiento de analogías entre la función a graficar y las expresiones generales de los modelos funcionales estudiados al interior del subnúcleo 4.4.

La determinación de intervalos de monotonía y valores extremos para la función, una vez construida la gráfica, se puede considerar un ejercicio en esencia visual pero apoyado por las definiciones establecidas en el subnúcleo 4.3. Sin embargo también es importante que estos conceptos puedan ser utilizados como elementos para la construcción de la gráfica, en ese caso el ejercicio dejaría de ser visual para pasar a ser un ejercicio apoyado en la diferenciación entre dominio y rango, en las propiedades de orden de los números reales y, desde luego, en las correspondientes definiciones presentes en el subnúcleo 4.3.

6.4.4.3 Justificación

En la actualidad cualquier calculadora o paquete informático ofrece la posibilidad de obtener una expresión gráfica de una función con relativa facilidad, sin embargo es innegable que, didácticamente, la consolidación y posterior apropiación de técnicas básicas para trazar y analizar gráficas de funciones, ofrece variedad de situaciones que favorecen la puesta en juego de las capacidades analíticas del alumno en el contexto de la utilización de las propiedades de las funciones, de las cuales varias son de importancia en la aproximación a conceptos más avanzados relativos al concepto de función, en particular el estudio de rupturas y la identificación de asíntotas es de gran utilidad en el acercamiento a conceptos como límite y continuidad, de gran dificultad en los cursos de cálculo.

De otro lado, ha sido ampliamente reportada la tendencia, generalizada por cierto, a asociar el concepto de función con curvas suaves y continuas, rechazando como funciones aquellas curvas que presenten rupturas, saltos, restricciones y/o asíntotas; la construcción paso a paso de la gráfica asociada con una función, identificando características como las ya mencionadas y confrontando estas con la definición de función para constatar que no la violan, lo que ayuda firmemente a solventar el obstáculo mencionado.

Este problema de base conlleva el estudio de varias funciones que se salen de los prototipos, lo que contribuye a la construcción personal de un concepto de función mucho más general acorde con el que promulgamos en la ETC.

6.4.5 Pb5: Resolviendo ecuaciones e inecuaciones trascendentes en una variable

6.4.5.1 Formulación: Compete a este problema de base lo relativo a la solución de ecuaciones e inecuaciones definidas mediante expresiones matemáticas en una variable de tipo trascendente, surgidas, o no, de aplicaciones científicas o tecnológicas. Este problema de base da origen a dos conjuntos de problemas bien diferenciados:

- Situaciones problemáticas que pueden ser resueltas utilizando propiedades de las funciones exponencial y logarítmica.
- Situaciones problemáticas que pueden ser resueltas utilizando propiedades de funciones trigonométricas.

6.4.5.2 Técnica de solución y soporte teórico Para el primer grupo de situaciones la técnica de solución es similar a la técnica utilizada para resolver ecuaciones lineales en los números reales, pues se apoya en la existencia de opuestos (-*b* o –*f*) tanto para números como para funciones, en la propiedad asociativa para la suma de funciones, en el hecho de que la función exponencial y la función logarítmica son inversas una de la otra, en el axioma de uniformidad para la suma y para la operación binaria composición de funciones y en las propiedades que caracterizan a las funciones exponencial y logarítmica.

En el proceso de solución pueden surgir expresiones conformadas por funciones logarítmicas cuyas restricciones en el dominio es importante analizar, o por funciones exponenciales cuya solución sólo puede garantizarse luego de la revisión de su inyectividad o monotonía, según se trate de una ecuación o de una inecuación. Igualmente es importante, antes de utilizar cualquier inversa, constatar las condiciones que deben cumplir las funciones en cuestión y tener en cuenta que el proceso puede conducir, finalmente, a funciones lineales o cuadráticas cuya existencia de soluciones también depende de condiciones que deben ser verificadas.

Para el segundo grupo de situaciones la técnica de solución es similar a la del primer grupo, excepto que ahora deben tenerse en cuenta las propiedades de las funciones trigonométricas y sus inversas, así como las restricciones que posibilitan, o no, la necesaria operatividad en el proceso.

6.4.5.3 Justificación

Es tendencia generalizada la conceptualización y ejercitación de los estudiantes en la resolución de ecuaciones e inecuaciones algebraicas, este problema de base amplía este horizonte al exigir que el estudiante ponga en juego propiedades de operaciones definidas sobre conjuntos que no son numéricos, en este caso, conjuntos de funciones.

De manera más particular la importancia de este problema de base radica en la conceptualización de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas; la utilización de ellas como funciones inversas y de sus propiedades en el contexto de la solución de ecuaciones, aborda cuestiones conceptuales que son puestas en juego de manera práctica, al reorganizar ecuaciones e inecuaciones de modo tal que pueda efectuarse el proceso de deshacer una función mediante la aplicación de su inversa, lo que contribuye, a través de la instrumentalización de dichas propiedades, a la conceptualización como objeto de las mismas.

El problema puede ser aprovechado didácticamente a partir de cuestiones de fondo que sustentan de manera implícita el proceso de solución, estas cuestiones se resumen en preguntas como las siguientes:

¿Qué condiciones debe cumplir cada uno de los parámetros de la ecuación o inecuación a fin de que tenga solución?

Respecto de las soluciones encontradas ¿Están definidas para todo el dominio en que se definió el problema? En caso de que no sea así ¿Cuáles son las restricciones y de dónde se derivan?

¿En qué radica la importancia de la inyectividad? ¿En qué casos es necesaria y en cuáles no?

En caso de ser necesario ¿Es posible introducir alguna restricción en el dominio para posibilitar la existencia de soluciones?

¿Podría el proceso de solución extenderse a situaciones definidas mediante funciones que no sean monótonas o que no sean inyectivas?

La comprensión del problema de base y de su proceso de solución supone la operacionalización de las propiedades de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y de la relación existente entre ellas, esto alimenta la búsqueda de la construcción de la conceptualización de función como objeto utilizable en situaciones, matemáticas o no matemáticas, como instrumento operativo. El problema también otorga importancia al proceso de deshacer el efecto de una función aplicada sobre otra a través de la aplicación de su inversa, esto es importante porque, aunque se trata de ecuaciones o inecuaciones en *x,* las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas pueden aparecer actuando sobre funciones lineales o cuadráticas, es decir, el problema en sus dos agrupaciones involucra la composición de funciones como un objeto dado que debe ser desintegrado en aras de resolver la ecuación o la inecuación. Aparece implícito un problema adicional: los dominios de las funciones en juego, cabe plantear cuestiones respecto de la manera como el dominio de dicha función determina los valores posibles para la función lineal o cuadrática sobre la cual sea evaluada.

Pese a los algoritmos y procesos de cálculo que puede incluir, este problema constituye teóricamente un punto alto en la construcción personal, por parte del estudiante, de la estructura teórico conceptual al garantizar en cierta medida la comprensión del núcleo 5 y del subnúcleo 4.4, de importancia en la creación de categorías dentro del concepto de función y en su objetivación, aspectos fundamentales del concepto de función que se identificó como necesarios para responder a las demandas que los cursos de álgebra lineal y cálculo plantean a dicho concepto.

6.4.6 Pb6: Operando con funciones.

6.4.6.1 Formulación

Problema de base enfocado en el manejo operacional de funciones, como exhibición de la apropiación del sistema abstracto de representación propio de funciones. El problema implica realizar operaciones simbolizadas en términos abstractos en distintos contextos.

Una formulación general del problema de base puede ser la siguiente:

Dadas las funciones *f* y *g,* expresadas en cualquier contexto, un elemento *a* en el dominio de *f,* un elemento *b* en el dominio de *g* y un elemento *c* en el codominio de *f,* calcular, si es posible:

- *f(a)* y *f(f(a))*.
- *f(g(b)).*
- *x* tal que *c=f(x).*

6.4.6.2 Técnica de solución y soporte teórico El problema exige que el estudiante haya construido la abstracción del simbolismo propio de funciones, de modo que pueda interpretar y resolver el problema independientemente de que este se plantee en una tabla, en un conjunto de parejas ordenadas, en una gráfica o a través de una expresión analítica. Tanto en el primero como en el segundo y tercero puntos del problema de base, deben ser del conocimiento del estudiante los conceptos de dominio, rango, imagen y preimagen, en cualquiera de los contextos mencionados, interpretados como elementos constitutivos del concepto general de función que propusimos al interior del núcleo uno.

Encontrar *f(a)*, cualquiera que sea el contexto, una vez se ha interpretado que se trata de determinar la imagen de *a* mediante la función *f*, consiste en seguir el proceso de asignación definido por la función *f* discriminando adecuadamente la ubicación de *a* y *f(a)* entre dominio y rango a través de la técnica adecuada a cada contexto. En el caso de funciones expresadas en tablas el proceso es prácticamente visual, en funciones presentadas como curvas en el plano cartesiano, además de visual, incluye cuestiones relativas a la lectura de puntos sobre una curva en el plano, en el caso de funciones expresadas mediante fórmulas el proceso se remite a encontrar el valor numérico de la expresión con el respectivo despeje si es el caso. Sin embargo el problema va más allá, pide tomar el valor así obtenido en el rango de *f,* y asignarle el valor *f(f(a))* es decir, tomar *f(a)* como elemento del dominio para asignarle otro elemento en el rango a través del mismo proceso anterior, lo que trae consigo que el estudiante debe identificar que el dominio y el codominio son un mismo conjunto o el codominio es subconjunto del dominio.

El segundo punto, aunque lo pareciera, no está poniendo en juego el concepto de composición de funciones; se trata de encontrar la imagen particular del valor *g(b)*, identificado previamente a través de la función *g*, mediante la función *f.* El problema consiste en el juego de tomar valores obtenidos mediante una función como elementos sobre los cuales puede operar otra función utilizando los procesos descritos en el párrafo anterior. Resulta importante el detalle de los dominios y codominios de las funciones en cuestión para el problema a fin de que el estudiante pueda decidir en qué circunstancias es posible resolver la situación y en cuáles no lo es.

El tercer punto del problema de base tiene un proceso similar, sólo que el elemento conocido "c*"* debe ser identificado como elemento del codominio, para luego hallar el elemento del dominio al cual este fue asignado por la función *f*, revirtiendo el proceso que define a dicha función utilizando una técnica adecuada al contexto en que se haya definido la función *f*. Cuando la función está expresada en tablas o curvas en el plano, se trata de un proceso visual; cuando la función está expresada en la forma $y=f(x)$, se hace necesario acudir a las técnicas propias de la solución de ecuaciones en x. En algunos casos es recomendable poner en discusión si dicha ecuación tiene solución o bajo qué condiciones la tiene o si sus soluciones hacen parte del dominio de la función.

6.4.6.3 Justificación Este problema de base confiere un primer nivel de operatividad al concepto de función al plantear cálculos con funciones en lenguaje simbólico, se trata de una aproximación en la que se utiliza la manipulación de funciones como operadores sobre elementos de conjuntos para transformarlos en otros, mas no aun sobre otras funciones, esto contribuye a la conceptualización de función como proceso, vital como base para avances conceptuales posteriores. Conceptualmente otorga importancia a los conceptos complementarios al concepto de función; los conceptos de dominio, codominio, rango e imagen, son los que determinan que el problema de base tenga sentido o no y que su solución pueda encontrarse, así que en este problema de base adquieren sentido y dejan de ser simples nombres que aparecen en la definición del concepto central.

El problema trae consigo un aspecto que no por escribirlo al final tiene menor importancia, se trata de la utilización del lenguaje simbólico; en varios estudios citados a lo largo de esta investigación se ha visto cómo este se constituye en una de las principales dificultades para los estudiantes, no sólo con el concepto de función si no con otros conceptos. El manipular funciones como operadores representados mediante letras operativiza la utilización de la notación simbólica desde un campo relativamente nuevo, en cuanto no se trata de los símbolos tradicionales si no de símbolos propios de la temática en cuestión.

Al incluir procesos de cálculo, el problema garantiza, desde una perspectiva operativa, la comprensión de los conceptos de regla de asociación, dominio, codominio, rango e imágenes de una función incluidos en el núcleo conceptual uno. El tercer punto del problema de base tiene un valor adicional cuando exige la solución de la ecuación $b=f(x)$, de gran utilidad tanto en otros sectores de la ETC como en situaciones no matemáticas y fundamental para dar pie a discusiones de trascendencia conceptual: la ubicación de b, la ubicación de la solución, la interpretación de ella y si es acorde con las restricciones que pudiera tener la función en cuestión.

7. ACTOS DE COMPRENSIÓN Y PROBLEMAS EN LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pretende dar respuesta al segundo y tercer objetivo de esta investigación:

Caracterizar un estado básico de comprensión del concepto de función e identificar problemas que suelen presentarse en la apropiación personal de la ETC de referencia.

Dicha respuesta se buscará a través de la identificación y estudio de actos de comprensión relevantes en la apropiación personal del concepto de función y de problemas cognitivos que suelen presentarse en ese proceso de apropiación.

En el capítulo anterior se propuso y fundamentó una ETC que describe y articula el saber matemático que, respecto del concepto de función, se considera deseable haya apropiado un estudiante al momento de ingresar a la universidad, en especial si está interesado en iniciar estudios en carreras de ciencias e ingeniería y que, por tanto, debe constituirse en un punto culminante de la formación matemática en la educación secundaria para dichos bachilleres. Tal como se planteó en el marco teórico, siguiendo a Álvarez (2009), la apropiación personal de ese saber es un proceso de construcción que plantea demandas cognitivas que traen consigo problemas y dificultades que el sujeto debe superar; por lo tanto, en una aproximación científica a la enseñanza del concepto de función y a la descripción de un estado básico de comprensión de tal concepto, se buscará identificar y estudiar tales demandas, entendidas como actos de comprensión, y tales problemas que se revelan en el aprendizaje del alumno los cuales pueden ser desadaptaciones, dificultades u obstáculos, en cuyo caso pueden haber sido identificados como tales en otras investigaciones, los cuales se denotarán con "**O",** o pueden ser conocimientos previos que podrían llegar a constituirse en obstáculos, los cuales se denotarán con "**O***".

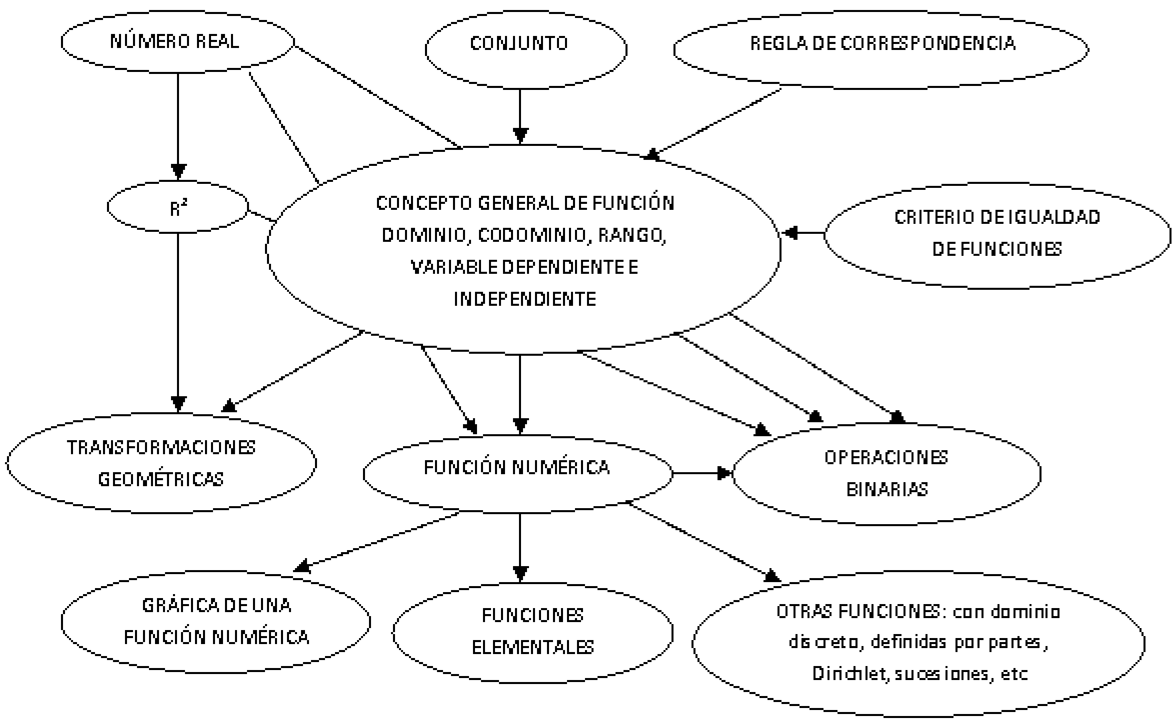
En el mismo orden de ideas, se planteó también en el marco teórico y metodológico, que, según Álvarez, el estudio de la comprensión conceptual se puede abordar desde dos planos de referencia, el primero relativo al significado matemático del concepto y el segundo, al marco interpretativo del concepto.

Con respecto al primer plano de referencia, se analizan en detalle los actos complejos de comprensión presentados en el marco metodológico y, de acuerdo con lo planteado en el marco teórico, se estudian aspectos relativos a demandas cognitivas provenientes de los procesos de abstracción reflexiva, necesarios para el encapsulamiento del concepto personal de función en una definición personal. Se trata de la identificación y análisis de dificultades que suelen presentar los estudiantes en procesos de identificación y construcción de funciones, que han sido reportadas en otros estudios y que pueden identificarse como manifestaciones de problemas en la interiorización y encapsulamiento del concepto.

Con respecto al segundo plano de referencia, se describen las versiones en contexto que se pueden considerar representativas para el concepto de función, seleccionando como elemento central del marco interpretativo, dada la variedad de objetos que pueden considerarse para su dominio y codominio y la variedad de criterios que puede utilizarse para definir su regla de correspondencia, el concepto de función numérica. Posteriormente se estudia el proceso de constitución de tal concepto, a través de un análisis de las demandas o actos de comprensión requeridos en su apropiación y su relación con la constitución de actos de comprensión requeridos para lograr la síntesis del concepto general de función.

Con el fin de orientar al lector en el seguimiento de los análisis que dan desarrollo a este capítulo, se presenta a continuación el mapa conceptual matemático de referencia para la caracterización de un estado básico de comprensión de función:

Figura 13. Mapa conceptual de referencia para la descripción de un estado básico de comprensión de función



7.2. ACTOS DE COMPRENSIÓN Y PROBLEMAS ASOCIADOS CON LA APROPIACIÓN DEL SIGNIFICADO MATEMÁTICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

En la identificación de actos de comprensión necesarios para la apropiación del significado matemático del concepto, de acuerdo con la definición de función que se planteó al describir el primer núcleo conceptual de la ETC, y según los planteamientos del marco teórico y del marco metodológico, se señalaron tres actos de comprensión complejos que se tratará de desarticular con cierto detalle:

i) Reconocimiento de los conceptos que ingresan como soporte explícito en la definición de función.

ii) Identificación de la forma como se articulan los conceptos soporte y los roles que adoptan en la constitución del concepto de función, e identificación del nuevo proceso -objeto matemático que se estructura con ellos.

Se ha planteado (Ver marco teórico, sección 2.4), que el estudio de las demandas que la apropiación personal de una ETC le plantea al sujeto, se realiza a partir de un conocimiento soporte o infraestructura matemática que se toma como punto de partida en la construcción de la ETC y que, en el contexto de la enseñanza, se supone disponible en el alumno. Es decir, tales demandas no se refieren a la apropiación de dicho conocimiento soporte sino a las demandas que plantea la identificación de su rol en la constitución de la ETC objeto de estudio. Pero tal conocimiento soporte podría no estar disponible plenamente en el sujeto y vacíos o desadaptaciones matemáticas a este respecto, en la formación matemática del alumno, podrían constituirse en obstáculos cognitivos que limitan al sujeto en la apropiación de la ETC o reflejarse en desadaptaciones matemáticas en la versión personal de la ETC que finalmente construye el alumno. Por esta razón, se dedicará parte importante del capítulo a identificar actos de comprensión, asociados con el conocimiento matemático de soporte, que se consideran necesarios para que el sujeto pueda estar en posición de construir un concepto personal de función, bien adaptado matemáticamente, y acorde con la generalidad de la definición utilizada. Este análisis está referido al acto de comprensión complejo enumerado como i). En los otros dos se analizarán propiamente las demandas que la apropiación del concepto le plantea al alumno, a partir del conocimiento matemático que se toma como soporte en i).

i) Reconocimiento de los conceptos que ingresan como soporte en la definición de función.

Los conceptos que ingresan como soporte en la definición de función utilizada (Ver núcleo conceptual No 1, capítulo 6), y sin conocer los cuales no sería posible acceder al significado matemático del concepto de función, son conjunto y regla de de asociación o de correspondencia.

Actos de comprensión relevantes y problemas en la apropiación del concepto de conjunto

En la definición de función, el concepto de conjunto es tomado como una colección arbitraria, finita o infinita, de objetos que pueden ser concretos o abstractos, especialmente números. Pero no es fácil que un estudiante construya una versión personal de este concepto acorde con la generalidad que plantea tal definición; la versión personal que los estudiantes poseen de este concepto suele estar restringida a agrupaciones discretas ya sean finitas o infinitas. Estas restricciones podrían tener dos tipos de origen; uno didáctico por cuanto la enseñanza del concepto de conjunto se aborda en estadios tempranos de la educación formal a través de la exhibición de modelos de conjuntos finitos, concepción que, de no ser modificada a lo largo del ciclo educativo, podría permanecer en la formación matemática del alumno y constituirse en un obstáculo en la construcción personal de una versión general del concepto de función. El otro, epistemológico, en referencia a la dificultad presente en el salto del número discreto al número continuo, reportada como histórica y obstaculizadora del avance del concepto de función (ver capítulo IV, entre preguntas P_1 y P_2).

También varios estudios muestran diversidad de dificultades asociadas a la construcción del concepto de conjunto infinito, evidenciando la naturaleza compleja de este concepto; en particular resalta el trabajo de Luis Moreno y Guillermina Waldegg (1991) en el que se revela que los estudiantes de primeros semestres tienen como prototipo de conjunto infinito el de los números naturales.

Una versión personal de conjunto con las restricciones mencionadas, podría incidir en que el sujeto construya una versión personal del concepto de función que no esté acorde con la generalidad que debe tener el concepto. Desde esta perspectiva se destaca el siguiente acto de comprensión como requerido para la construcción del concepto general de función:

AC1: Identificar, como conjunto, toda agrupación, finita o infinita, constituida ya sea por objetos concretos o abstractos.

Se dijo arriba que este acto no es espontáneo y, por el contrario, se oponen a él concepciones previas, restringidas del concepto de conjunto de origen tanto didáctico como epistemológico, lo que permite anticipar el siguiente obstáculo:

O*1: Pensar en los conjuntos como colecciones de objetos discretas y/o finitas.[2]

La pertenencia y la inclusión son relaciones básicas en el manejo y razonamiento con conjuntos; su simbolización e interpretación son importantes no sólo en la apropiación del concepto de función si no también en la manipulación de los

[2] Recordemos que conocimientos previos que podrían llegar a constituirse en obstáculos, los denotamos con "**O***"

conceptos de dominio, codominio y rango. Es relativamente común que los estudiantes confundan la inclusión y la pertenencia utilizándolas indistintamente y que utilicen mal su representación simbólica.

También puede resultar difícil para un estudiante establecer si un conjunto es subconjunto de otro, en particular es difícil para los alumnos establecer la relación de inclusión entre conjuntos infinitos, pues piensan que los conjuntos infinitos son todos iguales o que no lo son jamás, como reporta el trabajo de Luis Moreno y Guillermina Waldegg (1991).

En consecuencia, los siguientes actos de comprensión, relativos a la apropiación del concepto de conjunto, son relevantes para una adecuada apropiación del concepto de función:

AC2: Identificar y discriminar las relaciones de pertenencia e inclusión entre conjuntos y entre conjuntos y sus elementos.

AC3 Interiorizar tales relaciones y encapsularlas en los símbolos universalmente utilizados para ellas.

Actos de comprensión relevantes y problemas en la apropiación del concepto de regla de correspondencia

El término regla de asociación o de correspondencia no es, propiamente, un término matemático, es tomado del lenguaje ordinario; se puede entender como pauta que determina una asignación y que, de manera implícita, aparea objetos, es en este sentido que se utiliza el término en la definición de función.

Pese a que la definición de función le impone a la regla de correspondencia, la condición de univocidad, esto no restringe la naturaleza de la asignación, es decir, no plantea que la regla de correspondencia deba venir especificada de una u otra forma. En otras palabras, la noción de regla, que sirve como soporte a la definición de función, tienen un carácter general y la única restricción que se le impone es la de ser univoca. Desde esta perspectiva y por el hecho de que el concepto de correspondencia no es trabajado sistemáticamente como un concepto matemático previo, lo usual es que los alumnos tengan ideas espontáneas y no muy claras sobre lo que es regla de correspondencia y, por lo tanto, su concepción puede ser restringida y lejana de la generalidad deseada como soporte del concepto de función. Es común, tal vez como consecuencia de una experiencia previa muy restringida o distorsionada con el concepto de función, como ya se mencionó en la descripción del primer núcleo conceptual (Ver capítulo 6), que se piense en regla de correspondencia como una ley física o matemática que tiene una pauta homogénea de asignación. Esta concepción, puede limitar el concepto personal de función que el alumno puede construir como se verá más adelante. En consecuencia, se destaca el siguiente acto de comprensión y el obstáculo cognitivo que se puede anticipar como su cara opuesta:

AC4: Identificar como regla de correspondencia cualquier forma de asignación o apareamiento entre objetos, independiente de su naturaleza y de la forma como es especificada.

O*2: Pensar en regla de correspondencia como una ley física o matemática que se define mediante una pauta homogénea, una formula, por ejemplo.

ii) Identificación de la forma como se articulan los conceptos soporte y los roles que adoptan, en la constitución del concepto de función e identificación del nuevo proceso -objeto matemático que se estructura con ellos.

En la definición propuesta para el concepto de función, los conceptos conjunto y regla de asociación o correspondencia se articulan desempeñando, cada uno de ellos, un papel. El concepto de conjunto ingresa en la definición desempeñando los papeles de conjunto de partida y conjunto de llegada, elementos que se articulan a través del concepto de regla de correspondencia, es decir, este último ingresa como enlace entre ellos y en el preponderante papel de estructurador del concepto.

Respecto del papel que desempeñan los conjuntos que ingresan en la definición y complementación del concepto de función:

Los papeles que desempeñan los conjuntos que ingresan en la definición general de función propuesta, el uno como conjunto de partida (dominio) y el otro como conjunto de llegada (codominio) son asimétricos, en el sentido que el orden que toman en la definición no puede ser alterado. No es lo mismo una función definida de A en B, que una función definida de B en A. Por su lado el conjunto de rango, definido como conjunto de imágenes de la función, está asociado con el codominio, sin identificarse plenamente con él, puesto que siendo un subconjunto suyo, puede o no coincidir con él totalmente. Álvarez et al documentaron casos de estudiantes que tienen dificultades en la diferenciación de estos roles y consideran indistintamente el conjunto de partida y el conjunto de llegada, confundiendo dominio y codominio, en lo que ellos llamaron el prototipo CS (Cuasiconjuntista simétrica) (Para más detalles ver Álvarez et al, 2001d, 54-56).

Remitiéndose a la definición de función, ella establece explícitamente “a todo elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio” (Ver capítulo 6, descripción del primer núcleo conceptual, definición general de función). Es decir, todos los elementos del dominio deben estar asociados con algún elemento del codominio. Esta es una condición que puede ser pasada por alto por los estudiantes, de modo que identifican como funciones relaciones en las que no todos los elementos del dominio son considerados en la correspondencia o asociación. En la citada investigación, Álvarez et al encontraron que hasta un 50% de estudiantes de primeros semestres presentaban este prototipo de definición personal, denominado por ellos RR (Relación restringida) (54-56).

Curiosamente, en otras ocasiones el estudiante no pasa por alto la anterior condición, pero la extiende gratuitamente al codominio, considerando que todos los elementos del codominio deben ser imagen de algún elemento del dominio, esto también podría estar ligado con la confusión dominio-codominio y lleva a identificar como tales sólo a las funciones que son sobreyectivas. Álvarez et al encontraron estudiantes de primeros semestres de ingeniería y ciencias que disponen de este prototipo (simbolizado en dicha investigación como RS, relación sobreyectiva) de definición personal de función (54-56, 62).

A la luz de las consideraciones presentadas en los cuatro párrafos anteriores, resulta importante en la apropiación del significado matemático de función, el siguiente acto de comprensión:

AC5: Identificar y discriminar los roles de los conjuntos que ingresan en la definición de función: dominio y codominio, considerando su asimetría en la correspondencia que define a la función.

AC6: Discriminar codominio y rango, conceptuando este último como subconjunto del primero.

AC7: Identificar el carácter definitorio que tienen los roles de dominio y regla de correspondencia y el carácter relativo del rol del codominio, cuyo núcleo invariante está asociado con el rango.

Respecto del papel que desempeña el concepto de regla de correspondencia:

La regla de correspondencia es el elemento que, en la definición, estructura el concepto de función articulando los conceptos de dominio y codominio y dándole existencia al rango a través de la determinación de las imágenes.

La apropiación por parte de los alumnos del concepto de correspondencia y del rol que ella juega en la definición presenta diversas clases de problemas.

Para empezar, como se dijo antes, la única condición que se estipula en la definición es su univocidad, sin embargo es común que se le asigne un papel adicional a la regla de correspondencia al imponerle, por parte del sujeto, la biunivocidad, de modo que se consideran como funciones sólo aquellas que son inyectivas (uno a uno). Álvarez et al (54-56, 62) encontraron que porcentajes cercanos al 36% de los estudiantes de primeros semestres de ingeniería y ciencias, tenían este prototipo de definición personal de función (Llamado por ellos CI, cuasiconjuntista inyectiva), aun después de un semestre de instrucción universitaria. Álvarez y Delgado, en su investigación sobre la problemática Tall-Vinner para el caso de función (2001a, 8), encontraron también que muchos estudiantes al definir función inyectiva, lo hacían mediante la definición de función que cita la frase "la regla de correspondencia asocia a cada elemento del dominio un y sólo un elemento del codominio"; sin embargo estos estudiantes tenían éxito en situaciones en que debían identificar funciones inyectivas[3].

Igualmente suele extenderse al codominio la condición que establece que la regla de correspondencia es para todos los elementos del dominio, lo que podría ser una fuente adicional de la errada identificación como tales sólo de funciones sobreyectivas, ya mencionada en párrafos anteriores.

Lo anterior lleva al siguiente acto de comprensión:

AC8: Identificar la condición de univocidad en la regla de correspondencia y discriminarla de las condiciones de inyectividad y sobreyectividad.

O*3: Pensar como regla de correspondencia para funciones sólo las biunívocas o sobreyectivas.

Un aspecto fundamental en la apropiación del concepto de función es ver función como una totalidad nueva, fruto de la articulación de varios elementos: dominio, regla de correspondencia, rango, codominio. Dicha totalidad está presente, ya sea

[3] En este caso se trata de una desvinculación entre el esquema que orienta la acción de identificación y el esquema que orienta la expresión a través del sistema semiótico, en términos de los autores, se trata de la desarticulación entre el concepto imagen y la definición personal del concepto.

que se mire la función como un proceso de cálculo, o que se tome como un objeto que ingresa como insumo en algún proceso matemático (Ver capítulo 5, sección 5.6). En la mayoría de las situaciones problemáticas que enfrenta el alumno, en el nivel escolar de interés en esta investigación, las funciones operan fundamentalmente, con algunas excepciones notables, (Ver capítulo 5, sección 5.6) como procesos, mediante los cuales se calcula valores $f(a)$, $f(g(a))$ o se resuelven ecuaciones como $b = f(x)$,(Ver capítulo 6, problema de base Pb3), por lo que en el aula se tiende a enfatizar el manejo de la regla de correspondencia sobre todo lo demás. Algo similar ocurre con los textos de matemáticas (Ver anexo, "Identificación de demandas…") en la forma de presentar una función: las funciones algebraicas (por ejemplo) se describen sólo mediante la expresión algebraica que las define, con el convenio (tácito) del dominio implícito. De no tomar conciencia el lector de dicho convenio, esto puede contribuir a distorsionar la visión de función como un todo, dejándola en la simple regla de asociación. Estas consideraciones podrían explicar la dificultad que tienen algunos estudiantes para ver el dominio y el rango como conjuntos y su tendencia a verlos como puntos aislados, reportadas en la investigación de Oviedo (2003, 94), como también la propensión muy generalizada en los alumnos a dar sólo la regla de correspondencia con omisión del dominio cuando se les pide definir una función. Se configura un posible obstáculo cognitivo de origen didáctico por oposición al acto de comprensión que debe dar cuenta de la función como una totalidad:

AC9: Identificar la función como una totalidad nueva que se articula con los elementos dados (dominio, regla de correspondencia, rango, codominio)

O*4: Pensar en funciones como reglas de correspondencia exclusivamente.

Un complemento fundamental de la definición de función, es el criterio de igualdad que establece que dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio y sus reglas de correspondencia son tales que, a elementos iguales en el dominio asignan elementos iguales en el codominio (Ver capítulo 6, descripción del primer núcleo conceptual). Este criterio está asociado con actos de comprensión importantes asociados con la apropiación del significado matemático de función.

En primer lugar el criterio introduce, lo que podría llamarse, una dificultad que surge de una aparente contradicción que se deduce del criterio. A pesar de que el concepto de codominio juega un papel muy importante en la definición de función, y se ha asociado con actos de comprensión requeridos para la apropiación de dicho concepto, el criterio de igualdad permite concluir que dos funciones son iguales y sin embargo tener codominios diferentes, esto implica que el codominio de una función puede cambiar, siempre que no involucre el rango, y la función no cambia. En este sentido, toda función se puede hacer sobreyectiva sin modificarla como función. La superación de esta aparente contradicción juega un papel importante en la profundización de AC5 (Identificar y discriminar los roles de los conjuntos que ingresan en la definición de función: dominio y codominio, considerando su asimetría en la correspondencia que define a la función), AC6 (Discriminar codominio y rango, conceptuando este último como subconjunto del primero) y AC7 (Identificar el carácter definitorio que tienen los roles de dominio y regla de correspondencia y el carácter relativo del rol del codominio, cuyo núcleo invariante está asociado con el rango) en el sentido de que, si bien no se contrapone con los roles que se han identificado para dominio, codominio y rango, pone en evidencia el carácter, de alguna manera relativo del codominio y el papel más definitorio del dominio y de la regla de correspondencia que se articula con ella. La aplicación de este criterio para distinguir dos funciones, por ejemplo algebraicas, definidas mediante la misma expresión matemática variable, pero con dominios diferentes juega un papel fundamental para consolidar AC9 (Identificar la función como una totalidad nueva que se articula con los elementos dados (dominio, regla de correspondencia, rango, codominio)) ayudando a crear condiciones para superar el obstáculo que hemos identificado como O*4 (Pensar en funciones como reglas de correspondencia exclusivamente.)

En segundo lugar, el criterio de igualdad, contribuye a la identificación de la dualidad proceso –objeto (Sfard, 1991) que se presenta en muchos conceptos matemáticos y, en particular, en el concepto de función. Como se ha comentado (Ver capítulo 6, descripción del primer núcleo conceptual), la definición de función, enfatiza la concepción de función como proceso: dado un valor en el dominio se le asigna (se calcula) el valor correspondiente en el codominio, concepción que resulta fundamental cuando se opera con funciones. Pero, en muchas situaciones, la función no ingresa explícitamente como un instrumento de cálculo sino como un objeto que es insumo en un proceso matemático en el que la función objeto puede ser transformada para generar otra función, (por ejemplo función- función derivada. Ver capítulo 5, “El concepto de función en los primeros…). Alcanzar tal comprensión de la función como objeto es un proceso que toma tiempo y alcanzarlo es un aporte importante para la adecuada apropiación matemática de teoremas importantes (Ver capítulo 6, descripción del primer núcleo conceptual). Se puede entonces considerar que el estudio y aplicación del criterio de igualdad, puede contribuir a que el alumno alcance el siguiente acto de comprensión:

AC10: Identificar funciones, como procesos o como totalidades estructurales, según las situaciones matemáticas en que sean consideradas.

Los planteamientos anteriores llevan entonces a considerar de importancia el acto de comprensión relativo a la igualdad de funciones:

AC11: Identificar cuándo dos funciones son iguales.

Resalta en todo lo anterior, cómo la generalidad del concepto de función se pierde en la medida en que los conceptos soporte no la poseen; restricciones y/o desadaptaciones matemáticas en la conceptualización de conjunto, de regla de correspondencia, de número real o de variable, se traducen en restricciones en la versión personal que se construye del concepto de función, las cuales pueden mudar a obstáculos didácticos que deben ser superados en el proceso de conceptualización de función.

Consideraciones sobre manifestaciones de problemas relacionados con los procesos de interiorización y encapsulamiento simbólico.

En el marco teórico se planteó que, en el estudio de la comprensión conceptual, además de los dos planos de referencia propuestos por Álvarez (2009), también es importante tomar en cuenta demandas cognitivas, complementarias al proceso de comprensión, derivadas de la interiorización y el encapsulamiento. Se dijo también, siguiendo a Dubinsky, que a través de la interiorización es que un sujeto internaliza acciones externas encapsulándolas en procesos y objetos nuevos, dando lugar a esquemas. (Ver teoría APOE en el marco teórico, sección 2.3). En particular, para efectos de los análisis sobre la apropiación del significado matemático del concepto de función, interesa el resultado de tales procesos, que se concreta en la forma de definición personal de dicho concepto

Antes de continuar es importante recordar que Tall y Vinner enfatizan en que definición personal y definición formal de un concepto son cosas diferentes, y que Álvarez y Delgado proponen:

"…comprender un concepto implica construir un concepto imagen asociado con el concepto, pero agregaremos que esta comprensión se constituye en un concepto personal bien constituido matemáticamente en la medida en que el sujeto dispone de una definición personal estable del concepto, coherente y bien ajustada a la definición matemática del concepto…" (Ver marco teórico, sección 2.2, en particular las definiciones de estabilidad, adaptabilidad y coherencia).

Pero Álvarez y Delgado formularon tal planteamiento para la comprensión de un concepto, en particular el de función, justamente como respuesta a una clase de problemas que ellos identificaron como Problemática Tall-Vinner, relacionados con las "…diferencias entre definición formal y definición personal…" y con "…incoherencias entre los significados… cuando son activados por el sujeto ante demandas cognitivas planteadas por situaciones problemáticas diferentes…" (Álvarez y Delgado, 2001a, 1) y que tienen como centro la definición personal construida por el sujeto como fruto de procesos de interiorización y encapsulamiento.

Dicha problemática fue reformulada por ellos de la siguiente manera:

A. La imagen conceptual construida por un sujeto puede no ser consistente al actuar frente a diferentes situaciones y puede presentar diferentes desadaptaciones respecto a la definición institucional (por ejemplo una imagen conceptual restringida o conflictiva). (9)

Esta situación puede ponerse en evidencia cuando un sujeto:

- Considera como funciones sólo aquellas definidas mediante una expresión analítica o una curva (imagen conceptual restringida).
- Identifica como funciones sólo las que son inyectivas (imagen conceptual conflictiva).
- Opera adecuadamente con funciones definidas mediante una expresión matemática en una variable, pero no puede hacerlo con funciones definidas mediante tablas o parejas ordenadas (la imagen conceptual es restringida y no considera los diversos contextos en que puede construirse una función, igualmente es inconsistente).
- Considera como funciones sólo aquellas definidas mediante una regla de asociación homogénea para todo el dominio (imagen conceptual restringida).

Para los autores, lo que sucede es que el estudiante produce una definición con la que intenta describir la versión personal de concepto que evoca frente a cada situación, o reconstruye, según la situación, la definición que le fue enseñada. La verbalización es entonces “más el resultado de una acción que el orientador de la acción misma,” (6) y no ejerce una influencia activa en las tareas que el sujeto desempeña con respecto al concepto. De modo que produce una definición para cada situación de reconocimiento, manipulación o construcción de funciones a que se vea enfrentado. Estrategias didácticas en que el estudiante inicia el conocimiento de funciones a través de la presentación de funciones prototípicas pueden favorecer la aparición de este problema.

B. La definición que posee el sujeto puede ser estable y estar bien o mal adaptada respecto de la definición institucional y estar aislada de la imagen conceptual. Es decir que aunque verbalice una definición, esta no influya sobre sus acciones.

Se evidencia lo anterior cuando un sujeto

- Expresa una definición de función no acorde con la definición matemática.
- Expresa una definición de función acorde con la definición matemática pero no acepta como tales funciones definidas por partes o mediante reglas de asignación arbitrarias.

En este último caso, en términos de Álvarez y Delgado, se habla de problemas de adaptabilidad y/o incoherencia.

Tanto A como B, remiten a actos de comprensión fundamentales para el proceso de interiorización y encapsulamiento hacia la definición personal de función:

AC12: Identificar la definición formal de función como elemento que controla las tareas cognitivas relacionadas con la construcción e identificación de funciones.

Siguiendo a Vinner (Sección 2.2), se oponen a este acto los hábitos cotidianos de pensamiento que, generalmente, resultan ser exitosos sin consultar ninguna definición formal de los conceptos con que se está trabajando:

O*5: Extender al pensamiento matemático los hábitos de pensamiento cotidiano, en los cuales la definición no existe o no necesita ser consultada.

Como fruto del proceso el estudiante debe construir una definición personal que le permita responder adecuadamente, en cualquier contexto, a tareas relacionadas con la construcción e identificación de funciones:

AC13: Sintetizar una definición personal de función estable, coherente y bien adaptada matemáticamente.

Antes de cerrar los análisis del proceso de apropiación del significado matemático del concepto de función, es importante resaltar el controvertido papel de la definición en el aprendizaje de los conceptos matemáticos con una importante aclaración. No se sostiene aquí que los conceptos matemáticos deben enseñarse a través de la simple presentación de su definición, pero sí que la definición matemática de los conceptos debe constituirse en referente o meta que oriente toda labor de construcción conceptual. Se siguen aquí las ideas de Vinner (1991) y Sierpinska (1992) cuyas citas ya presentes en el marco teórico, no sobra repetir:

"La vida cotidiana impone hábitos y el sujeto no es consciente de la necesidad de consultar la definición formal. En la mayoría de los casos, la referencia a la celda de la imagen del concepto resulta ser exitosa. Este hecho no anima a la gente a hacer referencia a la celda de la definición de concepto. Sólo problemas no rutinarios, en los que imágenes del concepto incompletas puedan llevar a errores, pueden animar a la gente a referirse a la definición del concepto. Esos problemas son escasos y cuando son propuestos los estudiantes lo consideran injusto. Por lo tanto, no hay aparentemente ninguna fuerza que puede cambiar los hábitos de pensamiento común que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos.” (Traducción libre, Vinner, 1991, 73)

“Así, en nuestro intento de definir las condiciones básicas de comprensión del concepto de función, trataremos de guiarnos por una exploración de los referentes de la definición de función. Nos hacemos la pregunta: ¿A qué se refiere en realidad la definición? ¿Qué objetos presentes se pueden identificar, discriminar en medio de ellos? ¿Qué clase de ordenaciones pueden ser encontradas que puedan surgir de la extensión de la realidad por discernimiento, generalizaciones y síntesis?” (Traducción libre, Sierpinska, 1992, 6)

7.3. ACTOS DE COMPRENSIÓN Y PROBLEMAS ASOCIADOS CON EL MARCO INTERPRETATIVO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Como se planteó, en el marco teórico, con el término *marco interpretativo* relativo a un concepto matemático se hace referencia a un conjunto de versiones en contexto de dicho concepto. Este conjunto se puede considerar abierto en el sentido que evoluciona según estadios de formación y de evolución del mismo concepto, por tal razón, en el marco de una propuesta de enseñanza especifica, en un contexto curricular determinado, dicho conjunto requiere ser acotado, y seleccionados sus elementos, con base en consideraciones matemáticas y de aplicación del concepto. Desde esta perspectiva, son elementos de la ETC que se toman como referencia para el estudio del concepto y de las demandas y actos de comprensión que permiten caracterizar lo que significa comprender tal concepto.

Se planteó, también, que esas versiones en contexto constituyen aquello a lo que hace referencia la definición y, por tanto, le dan sentido al concepto y, de esta manera, se erigen como referentes importantes de la comprensión que el sujeto debe construir. En palabras de Sierpinska:

"…en el momento en que la noción es aplicada en un contexto matemático o matematizado, se está usando lenguaje informal y este lenguaje informal trae consigo significados que transcienden la mera lógica de la definición… existen diferentes significados de la noción dependiendo de los contextos… Esto proporciona una imagen más dinámica de una función." (Traducción libre, Sierpinska, 1992, 5)

Pero, hay que agregar que dicho marco interpretativo, que se acota en el contexto de una propuesta de enseñanza, debe tener una *representatividad matemática,* en el sentido de que en el conjunto de versiones en contexto seleccionadas, se debe expresar una variabilidad acorde con la generalidad del concepto, propia del momento de formación que representa la propuesta de enseñanza. Esto implica que la apropiación de dichas versiones, en articulación con la definición del concepto, le permite al alumno construir *una imagen del concepto*, según la terminología de Tall & Vinner, acorde con la generalidad de implicaciones lógicas de su definición. Es decir, debe permitir vislumbrar la extensión del conjunto de objetos que se pueden identificar como casos particulares del concepto.

En la elaboración de un marco interpretativo, representativo del concepto de función, en la transición bachillerato universidad, tal como se ha definido el concepto, interesa poner de relieve la existencia de prototipos de reglas de correspondencia funcional, que juegan un papel importante en la práctica curricular de la secundaria, incluyendo por supuesto la construcción misma del concepto de función, pero sobre las cuales no existe una toma de conciencia como versiones en contexto del concepto de función.

En primer lugar, se puede identificar un conjunto amplio de versiones del concepto de función en el contexto geométrico, que se podrían agrupar como *transformaciones geométricas* en el plano. Se pueden incluir traslaciones, rotaciones, reflexiones, simetrías y homotecias. Aunque no suelen verse de tal manera, son prototipos de funciones con dominio en conjuntos de puntos del plano (en general en R^2) con reglas de asociación de tipo geométrico alejadas de la clásica fórmula, aunque definidas con criterios homogéneos de asociación.

Otra versión en contexto del concepto de función, que se puede incluir en este marco interpretativo, es el concepto de *operación binaria*, alimentado con las operaciones entre números y con operaciones entre funciones numéricas reales. En este caso de operaciones binarias entre números, la función en contexto se establece como una correspondencia que asigna a pares de números reales otro número real bien definido, que representa la suma o el producto de los dos números iniciales, según el caso. Es decir, su dominio es R^2 y su codominio el conjunto de los números reales R.

Cuando se trata de operaciones binarias entre funciones, la regla de correspondencia funciona de la misma manera, pues actúa bajo el mismo concepto de operación binaria, sólo que los objetos que intervienen en la operación ya no son números sino funciones. En este contexto, aspectos fundamentales ligados con la apropiación de esta versión en contexto de función, pasan no sólo por la construcción del conjunto de funciones, con cuyos elementos se construye la operación binaria sino, también, por la abstracción de constituir funciones, vistas como procesos, en funciones vistas como objetos que son insumos en un nuevo proceso.

Finalmente, y como elemento central de este marco interpretativo del concepto general de función, en la transición bachillerato universidad, interesa constituir, más allá del conjunto de funciones elementales, definidas como funciones de R en R (R conjunto de números reales) y con regla de correspondencia definida mediante una expresión matemática variable, el concepto de *función numérica.*

Teniendo en cuenta el contexto curricular en que se trabaja esta tesis (transición de la secundaria a la universidad con destino a carreras de ciencia e ingeniería), se considera representativo el marco interpretativo que se propone para el concepto general de función. En primer lugar, por la variedad de objetos que se consideran en la constitución del dominio y codominio: conjuntos de números reales, de parejas de números reales, de puntos y regiones en el plano, de funciones numéricas y, más allá, la variabilidad de los conjuntos que se constituyen con los objetos considerados para desempeñar el rol de dominio. Y, finalmente, por la variabilidad de reglas de correspondencia, definidas mediante criterios geométricos, expresiones matemáticas variables, ecuaciones, tablas, por partes, por gráficas etc.

Constituyendo el concepto de función numérica

Realizar un análisis detallado de las demandas cognitivas y problemas asociados con la apropiación de dicho marco interpretativo excede el trabajo de la tesis. Por razones epistemológicas de un lado y de otro por la importancia del concepto de función numérica en el estudio del cálculo (Ver capitulo 5). Se centrará entonces la atención en el concepto de función numérica. El proceso puede ser tomado como ejemplo para el estudio de las otras versiones en contexto del concepto de función que se han identificado como parte de su marco interpretativo.

El referente de lo que significa apropiar o comprender el concepto de función numérica requiere, como en el caso de cualquier concepto, acotar y articular, con su definición, un marco interpretativo, en este caso, compuesto por un conjunto representativo de funciones numéricas, que, por supuesto son, a la vez, elementos del marco interpretativo del concepto general de función.

Como elementos centrales de dicho marco interpretativo se proponen las siguientes versiones de funciones numéricas: En primer lugar, el prototipo de funciones definidas por una expresión matemática variable, cuyo dominio se define implícitamente, y a cuyo interior se destacan las funciones elementales:

lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométricas (seno, coseno, secante etc.) y funciones definidas mediante expresiones racionales. Se incluyen, además, sucesiones vistas como funciones de dominio discreto, la función valor absoluto, funciones numéricas definidas por partes y la función de Dirichlet. La variabilidad de las funciones numéricas consideradas en este caso no está en los objetos que van a constituir el dominio y el codominio, pues en todos los casos se está hablando de números reales, sino en los tipos de reglas de correspondencia que pueden dar origen a una función y articuladamente con la variación de dominios que se pueden considerar como elegibles o mejor, que emergen en el estudio de las funciones numéricas en el contexto curricular que nos ocupa. La representatividad de este marco interpretativo se podrá ver en los análisis que siguen a continuación.

Demandas o actos de comprensión requeridos en la apropiación del concepto de función numérica y su relación con la constitución de actos de comprensión requeridos para lograr la síntesis del concepto general de función.

Como ya se ha planteado antes, la comprensión de este concepto, como el de cualquier otro concepto, está referida a la apropiación articulada de su definición y del marco interpretativo que se asocia con el concepto. Se empezará por identificar los actos de comprensión que plantea la apropiación de su definición en relación con la definición general de función y el papel que el marco interpretativo puede jugar en el logro de tales actos de comprensión y en la superación de obstáculos asociados. Al tiempo, se harán algunas consideraciones sobre los actos de comprensión, correspondientes a la apropiación misma de las funciones numéricas que se han propuesto como parte de su marco interpretativo.

El concepto de función numérica se puede considerar una restricción del concepto general de función cuando los conjuntos involucrados en la definición general se restringen a conjuntos numéricos. Al realizar esta sustitución, la definición de función numérica quedaría:

Una función numérica es cualquier asociación entre dos conjuntos numéricos A y B que pueden ser iguales o no, en la que a todo elemento de A le corresponde un único elemento de B. El conjunto A se denomina dominio y el conjunto B se denomina codominio.

Recíprocamente, el concepto general de función se puede ver como una generalización del concepto de función numérica, al sustituir conjuntos numéricos por conjuntos arbitrarios en los roles de dominio y codominio. De hecho, históricamente, el concepto general de función, tal como se definió en esta tesis, se obtiene como una generalización de la definición dada por Dirichlet (ver variación conceptual $\mathbf{V_{11}}$ en adelante, capítulo 4, Estudio histórico crítico), definición que constituye un hito en el proceso de construcción histórica del concepto de función y que correspondería hoy a lo que entendemos por función numérica.

Los hechos anteriores pueden considerarse como un acto de comprensión necesario en la apropiación del marco interpretativo de función numérica, el cual tiene, como cara opuesta, que puede oponerse a él a modo de obstáculo, el hecho de asimilar, implícitamente o explícitamente, el concepto general de función a un concepto restringido de función numérica, tal como ya lo hemos señalado en el caso de identificar, en la práctica, funciones como reglas que se definen mediante expresiones matemáticas variables y de manera homogénea en todo su dominio. De acuerdo con lo anterior, se concreta el acto de comprensión a que se ha hecho alusión y el modo de pensar que puede obstaculizarlo:

AC1(FN)[4]: Identificar el concepto de función numérica como una restricción del concepto general de función o, recíprocamente, identificar el concepto general de función como una generalización del concepto de función numérica y, por lo tanto, reconocer el conjunto de funciones numéricas como un subconjunto propio del conjunto de funciones, que se reconocen como tales, desde la definición general.

AC2(FN): Discriminar las funciones numéricas de funciones en contexto que no lo son.

O*1(FN): Asimilar el concepto de función general con el de función numérica o con un concepto restringido de función numérica.

Es pertinente observar como el conjunto de funciones que se proponen para constituir el marco interpretativo del concepto general de función, y la forma como tal conjunto ha sido estructurado, al convertirse en objeto de trabajo para el alumno, en diferentes situaciones problemáticas, propicia el logro de los actos de comprensión que se identifican y la superación de obstáculos asociados. Las diferentes clases de funciones consideradas propician, de un lado, reconocer funciones que no son numéricas y, por lo tanto, discriminar funciones numéricas de las que no lo son, contribuyendo, a superar la tendencia de identificar función con función numérica.

Todos estos planteamientos señalan que hay una interacción no sólo matemática si no también cognitiva fundamental en la constitución del significado matemático de ambas definiciones que, necesariamente, se proyecta en los actos de comprensión requeridos para constituir uno y otro concepto, al igual que entre los obstáculos que se oponen a tales actos de comprensión.

En esta línea de pensamiento se puede empezar por revisar los actos y obstáculos asociados con el segundo acto de comprensión complejo que se

[4] Con las siglas FN se significa que el acto de comprensión o el obstáculo está referido al concepto de función numérica.

señaló como necesario en la apropiación del significado matemático de la definición general de función:

Identificación de la forma como se articulan los conceptos soporte y los roles que adoptan en la constitución del concepto de función, e identificación del nuevo proceso -objeto matemático que se estructura con ellos.

Con respecto a dicho acto complejo se plantearon los actos de comprensión y obstáculos asociados AC5, AC6, AC7, AC8, AC10, AC11, O*3, O*4 (ver, en este mismo capítulo, el segundo acto de comprensión complejo relativo a la apropiación del significado matemático del concepto de función)

Puesto que la estructura lógica de las dos definiciones (concepto general y función numérica) es la misma, no es difícil observar que tales actos de comprensión deben ser requeridos de igual manera en el proceso de apropiación del concepto de función numérica y que, el mismo tipo de obstáculos deben aparecer en su camino. Esto es más claro aun, al observar que lo que dice la frase que describe cada acto de comprensión o cada obstáculo tiene el mismo sentido, cuando se aplica en ambas definiciones. Las siguientes serían las versiones equivalentes cuando se aplican al concepto de función numérica:

AC3(FN)~AC5[5]: Identificar y discriminar los roles de los conjuntos que ingresan en la definición de función numérica: dominio y codominio, considerando su asimetría en la correspondencia que define a la función.

AC4(FN)~AC6: Discriminar codominio y rango, conceptuando este último como subconjunto del primero.

[5] Con el símbolo ~ se significa la equivalencia entre los actos y obstáculos identificados para la constitución del concepto de función numérica, y los actos y obstáculos identificados para la constitución del concepto general de función.

AC5(FN)~AC7: Identificar el carácter definitorio que tienen los roles de dominio y regla de correspondencia y el carácter relativo del rol del codominio, cuyo núcleo invariante está asociado con el rango.

AC6(FN)~AC8: Identificar la condición de univocidad en la regla de correspondencia y discriminarla de las condiciones de inyectividad y sobreyectividad.

O*2(FN)~O*3: Pensar como regla de correspondencia para funciones numéricas sólo las biunívocas o sobreyectivas.

AC7(FN)~AC9: Identificar la función numérica como una totalidad nueva que se articula con los elementos dados (dominio, regla de correspondencia, rango, codominio).

O*3(FN)~O*4: Pensar en funciones numéricas como reglas de correspondencia exclusivamente.

AC8(FN)~AC10: Identificar funciones numéricas, como procesos o como totalidades estructurales, según las situaciones matemáticas en que sean consideradas.

AC9(FN)~AC11: Identificar cuándo dos funciones numéricas son iguales.

Resulta claro que las consideraciones que se hicieron en torno a estos actos y obstáculos, en el caso del concepto general de función (Ver dicha sección, en este mismo capítulo) son aplicables cuando nos restringimos al concepto de función numérica.

Hay pues un “paralelismo cognitivo” en el sentido de que el constituir tales actos, no parece plantear demandas cognitivas diferentes en una definición que en la otra. En este sentido es importante destacar que lo que plantea la caracterización de comprensión de un concepto, según actos de comprensión, es que las definiciones y los actos de comprensión asociados deben constituirse en los dos niveles mencionados (general- numérica), como parte del proceso de comprensión del concepto general de función. Pero nada se dice del orden, ni del cómo se debe proceder para que el sujeto pueda alcanzarlos. Lo que sí permite concluir este paralelismo cognitivo, en lo que atañe a las definiciones y a los actos de comprensión señalados, es que, sobre el supuesto de que el sujeto haya constituido los conceptos de conjunto y número real, desde una perspectiva cognitiva, es indiferente proceder en el proceso de apropiación por generalización o por particularización

En esta misma dirección se puede advertir que los obstáculos cognitivos asociados proceden fundamentalmente de los problemas inherentes a la apropiación del planteamiento lógico de la definición. Y en el caso de **O*3(FN)** su origen podría tener un componente didáctico.

Actos de comprensión asociados con el reconocimiento de los conceptos soporte.

El reconocimiento de los conceptos soporte, se ha planteado, como acto de comprensión complejo, de partida, en la apropiación del significado matemático del concepto que se expresa en su definición. En esta dirección, y respecto del concepto general de función, se plantearon los actos de comprensión relacionados con el reconocimiento de los conceptos de *conjunto* y *regla de correspondencia*. (Ver la sección citada anteriormente, relativa al primer acto complejo de comprensión en la apropiación del significado matemático del concepto de función)

En tal sección se destacó, en primer lugar, la importancia de que el alumno lograra sintetizar un concepto general de *conjunto* y de *regla de correspondencia* y se sugirieron implicaciones negativas en la apropiación del concepto general de función si tales síntesis no se alcanzaban plenamente. En este sentido se plantearon los actos de comprensión AC1, AC2, AC3, AC4 y los obstáculos cognitivos asociados O*1 y O*2.

Como en el caso de los actos asociados con la construcción del significado matemático de la definición general de función, que se estudiaron en párrafos anteriores, no es difícil ver que estos otros actos de comprensión y obstáculos, cuando se consideran restringidos a conjuntos de números reales y reglas de correspondencia entre ellos, se constituyen también como necesarios para la constitución del significado matemático de función numérica. Y que el obstáculo que allá se identifica, igualmente surge como posible obstáculo para el logro de tales actos de comprensión, en el nivel de la definición de función numérica. Se tendría la siguiente formulación para tales actos paralelos de comprensión, en el nivel de la definición de función numérica:

AC10(FN)~AC1: Identificar, como conjunto numérico, cualquier agrupación, finita o infinita, constituida por números.

O*4(FN)~O*1: Pensar en los conjuntos numéricos solo como colecciones de objetos discretas y/o finitas.

AC11(FN)~AC2: Identificar y discriminar las relaciones de pertenencia e inclusión entre conjuntos y entre conjuntos y sus elementos.

AC12(FN)~AC3: Interiorizar tales relaciones y encapsularlas en los símbolos universalmente utilizados para ellas.

AC13(FN)~AC5: Identificar como regla de correspondencia entre conjuntos numéricos, cualquier forma de asignación o apareamiento entre números, independientemente de la forma como sea especificada.

O*5(FN)~O*2: Pensar, exclusivamente, en regla de correspondencia entre elementos de conjuntos numéricos como una ley física o matemática que se define mediante una pauta homogénea, una formula, por ejemplo.

De nuevo es necesario reiterar, como se hizo en el análisis anterior de actos de comprensión y obstáculos asociados con la apropiación del significado matemático del concepto general de función, que lo que se plantea es que tales actos de comprensión son requeridos, en ambos niveles de la definición de función (general y numérica) a pesar de que eventualmente puedan sintetizarse en un conjunto unificado de actos de comprensión, pero, el planteamiento nada afirma, ni del orden, ni de la forma como se debe proceder para facilitar al sujeto su constitución.

En esta dirección el análisis de estos actos de comprensión y obstáculos asociados, presenta, sin embargo, con relación al análisis anterior, una diferencia trascendental que puede arrojar claridad sobre el porqué de los obstáculos más fuertes, digamos de tipo epistemológico y didáctico, que se presentan en la constitución del concepto de función. Las parejas de actos y el obstáculo que se le opone AC1- O*1 y AC10(FN)-O*4(FN) están asociadas, en el caso de la definición general (la primera) con la constitución del concepto de conjunto y en el caso de la función numérica(la segunda) con el concepto de número real. En este caso, los actos de comprensión que los liga parecen proceder más naturalmente como generalización de conjuntos de números a colecciones arbitrarias que recíprocamente. Esta afirmación se sustenta en el siguiente planteamiento: La construcción del concepto de número real es la vía natural en la secundaria para orientar la construcción de una noción de conjunto amplia y suficientemente general, que incluya, por supuesto, conjuntos infinitos de diversa cardinalidad. O sea que la apropiación del concepto de número real no solo resulta necesaria para apropiar y manejar adecuadamente el concepto de función numérica sino que, no parece posible construir una noción general de conjunto, y por ende del concepto general de función, que incluya conjuntos infinitos, más allá del infinito potencial de los numero naturales, por otra vía. Este hecho tiene su fundamento epistemológico en el mismo desarrollo histórico del concepto de función. En el proceso histórico de construcción hacia el concepto general de función, el camino se inicia con el surgimiento de las funciones numéricas que se expresaban en los estudios de la mecánica a finales del siglo XVI y comienzos del siglo XVII (Ver Capítulo 4, estudio histórico crítico, variación conceptual V4) y, tal como lo plantea Sierpinska, (1992, 15), la visión heterogénea de número que imperó por mucho tiempo, fue sin duda un obstáculo que retardó el surgimiento de tal concepto de función (Ver capítulo 4, estudio histórico crítico, entre preguntas P3 y P4).

Por supuesto, la síntesis del concepto de conjunto, como soporte del concepto general de función, debe ir más allá de conjuntos numéricos de cualquier tipo; esta extensión, en la versión personal del alumno, se puede ir alcanzando en la medida que ingresan, al campo de trabajo del alumno, además de conjuntos de objetos físicos, R^2 (analítico), el plano cartesiano (geométrico) y conjuntos de funciones, entre otros. Se podría decir, por lo tanto, que el currículo de la secundaria ofrece esta posibilidad pero que es desaprovechada. Tales conjuntos no son identificados apropiadamente, como tampoco se estimula su manejo simbólico, ni la reflexión sobre su naturaleza y características matemáticas. Por lo tanto, el alumno no realiza una toma de conciencia sobre su existencia, que le permita incorporarlos en su construcción (imagen del concepto dirían Tall& Vinner) del concepto de conjunto.

Dos conclusiones importantes, en términos de comprensión del concepto de función emergen de estas observaciones:

En primer lugar, la necesidad de ir construyendo, a lo largo del proceso de formación del alumno en la secundaria, un marco interpretativo representativo para el concepto de conjunto, que le permita al alumno alcanzar, al término de sus estudios de secundaria, esa síntesis del concepto de conjunto, apropiada para fundamentar el concepto general de función. La posibilidad existe pero está siendo desaprovechada por las propuestas de enseñanza dominantes en la secundaria.

En segundo lugar, aunque el referente global para la apropiación del concepto de conjunto se configura con una gran variedad de conjuntos específicos de naturaleza diferente, el eje estructurador de dicho proceso es la construcción del sistema de los números reales, que se inicia desde la escuela primaria y culmina al final de la secundaria y, por lo tanto, dicha construcción resulta fundamental no solo como soporte de la construcción del concepto de conjunto sino de los conceptos de función numérica y función.

Pero, al igual que en el proceso de construcción de los referentes del concepto de conjunto, las propuestas dominantes de enseñanza en la secundaria no proveen un proceso adecuado de construcción de número real. Son precarios, tanto el saber matemático como los procesos de pensamiento, que dichas propuestas, ponen en juego en torno a la construcción del concepto de número real y que se proponen al alumno como objeto de estudio. Estos vacíos, en la propuesta curricular de la secundaria, son una de las tantas causas, sino la principal, que explican la deficiente formación en torno al concepto de número real y, por ende, del concepto de función que logran construir los alumnos en secundaria.

Este planteamiento se valida tanto nacional como internacionalmente. Son variados los problemas que en estos ámbitos se han hecho sobre el estudio de los reales en la secundaria.

Hay estudios que reportan que es generalizada la tendencia a considerar como conjuntos numéricos sólo aquellos conformados con números naturales o enteros y de carácter finito. Algunas situaciones de enseñanza perpetúan esta restricción, como omitir en el trabajo con intervalos reales, el estudio de su naturaleza de conjuntos numéricos, tratándolos como simples segmentos de recta. En este mismo sentido se puede citar la investigación de Fischbein (1979) quien identificó obstáculos relativos a la no aceptación, por parte de los estudiantes, de la existencia de infinitos números racionales e infinitos números irracionales en un intervalo, negación que conlleva que los conjuntos de reales son considerados mas como conjuntos discretos que como conjuntos continuos.

Sobre la noción de infinito también se reportan diferentes estudios: Duval, 1983; Fischbein, 1979; Moreno y Waldegg, 1991; Waldegg, 1996. Este último recoge buena parte de los anteriores y reporta que la infinitud de los números está presente en casi todos los estudiantes, tal vez como resultado de la construcción desde etapas tempranas del proceso de conteo, pero que se trata sólo de infinito potencial, en palabras de G. Waldegg, 1996: "…asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente." Waldegg cita, como ejemplo de este, la serie de los números naturales y recalca que se trata del único infinito aceptado por Aristóteles y admitido por la ciencia hasta el siglo XIX. Existe otra connotación del infinito que, según la misma autora, es de tardía aparición y requiere de situaciones conflictivas que poco aparecen a lo largo del bachillerato, se trata del infinito actual, muy asociado con la completez de los números reales, de dificil aparición en el seno del pensamiento matemático del sujeto, de gran importancia en el pensamiento del matemático moderno y vital en la construcción del concepto de función numérica.

Finalmente estudios como los de Artigue M, 1995; Fischbein, 1994; Penalva y Turegano, 1990 muestran que, al ingresar a la universidad, muchos alumnos tiene una concepción de número real que adolece de numerosos vacíos y distorsiones, en otras palabras, no han construido un concepto personal de número real bien adaptado matemáticamente. En el medio local esta afirmación es aplicable a la gran mayoría de los alumnos y la situación es particularmente crítica si se considera que el currículo universitario de las carreras técnicas no provee el espacio para culminar este proceso de construcción. Pruebas aplicadas por Álvarez (2007), muestran que deficiencias semejantes a las reportadas internacionalmente, están presentes en estudiantes colombianos respecto del concepto personal que construyen de número real. Las pruebas aplicadas permiten identificar, entre estudiantes de diferentes colegios de Cali, problemas relativos a la representación e identificación de los números reales, al orden y, muy particularmente, al concepto de densidad; un porcentaje mayoritario de alumnos evidencia fallas en el manejo operativo y tiende a aceptar que un numero como 2,3440 tiene un siguiente y que entre dos números racionales, que definen un intervalo, no existe necesariamente un número irracional.

En conclusión, al terminar la secundaria, la mayoría de los alumnos tienen una visión fragmentada del sistema de los números reales, al pensarlo constituido por una clase desarticulada de números, enteros, fraccionarios, decimales y ocasionalmente irracionales, inmersos en una topología con tendencia a ser discreta, concepción que sin duda limita la comprensión y manejo del concepto de función numérica y por ende del concepto general de función

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto los siguientes actos adicionales de comprensión en la constitución del concepto de número real y, por añadidura, del concepto de conjunto, tal como son requeridos como fundamento del concepto de función:

AC14(FN): Sintetizar en un todo, como sistema, los distintos tipos de números reales, discriminado sus propiedades algebraicas y topológicas.

Acorde con esto:

O*6(FN): Pensar en los números reales como un conjunto discreto de enteros, fracciones racionales, números decimales y algunos irracionales y de igual manera de los conjuntos numéricos.

AC15(FN): Sintetizar la noción de conjunto infinito discriminando la cardinalidad de los números naturales y la de los números reales.

O*7(FN): Pensar el infinito sólo como proceso no acabado o como ausencia de límite o frontera.

Actos de comprensión asociados con la apropiación del concepto de gráfica de una función numérica.

Como un elemento que aporta de manera importante en la apropiación del significado matemático del concepto de función numérica, se incluye el concepto de grafica de una función. Este es un elemento propio de las funciones numéricas. Se define gráfica de una función numérica *f(x)*:

$G(f) = \{(x,y) \in R^2 / y=f(x)\}$

En principio, el concepto mismo de grafica requiere de conceptos soporte, el principal de los cuales es el de sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, que está fundamentado, a su vez, en el concepto de recta numérica, ligada a la constitución del concepto de número real. Se perfilan en consecuencia los siguientes actos de comprensión:

AC16(FN): Identificar la recta numérica como la representación abstracta de una correspondencia biunívoca, que preserva orden, entre los números reales y los puntos de una recta euclidiana.

AC17(FN): Identificar el encuadramiento geométrico de un sistema rectangular de coordenadas cartesianas y el mecanismo mediante el cual se establece una correspondencia biunívoca entre puntos en el plano y parejas de números reales.

En la constitución de estos actos y en el manejo de las representaciones semióticas asociadas con recta numérica se pueden identificar algunos obstáculos cognitivos:

En el caso de la recta numérica y por ende del sistema de coordenadas cartesiana, no es posible construir conceptos personales bien adaptados matemáticamente si se piensa en los reales como “un conjunto discreto de enteros, fracciones racionales, números decimales y algunos irracionales” (O*6(FN)).

Igualmente, las interpretaciones y representaciones que realiza el alumno sobre la recta numérica, o en el plano, cuando grafica, por ejemplo, funciones definidas por partes sobre intervalos reales, presentaran varios tipos de deficiencias como causa de esta concepción de número real. Es relativamente común que los estudiantes consideren que el intervalo real (1,9], por ejemplo, tiene como último elemento a 8, de modo que la gráfica correspondiente sólo es trazada hasta tal valor del dominio.

De otro lado, es pertinente destacar que, por regla general, el estudiante no discrimina entre las representaciones semióticas que se hacen de recta numérica, sistema de coordenadas, gráfica de una función y los objetos abstractos que representan. Como suele ocurrir, en distintas situaciones, el objeto representado termina siendo reducido a su representación llegando incluso a razonar que, si la gráfica de una función no es susceptible de trazarse, entonces no existe. Aunque sin mucha importancia operativa, tal reduccionismo inconsciente se constituye en un obstáculo, que podría considerarse de origen didáctico, en la apropiación del significado matemático de tales conceptos. Resultan pertinentes, consecuentemente, el siguiente acto de comprensión y el siguiente obstáculo cognitivo:

AC18(FN): Discriminar entre los objetos matemáticos: recta numérica, sistema rectangular de coordenadas cartesianas, grafica de una función y sus representaciones semióticas.

O*8(FN): Reducir recta numérica, sistema de coordenadas y gráfica de una función a sus representaciones semióticas.

La grafica de una función numérica, es una representación semiótica de la función[6], usualmente definida mediante expresiones analíticas. Comprender la

---

[6] Como ente abstracto la grafica de una función numérica siempre existe pero, en muchos casos, no es posible construir una representación semiótica apropiada. Ejemplo: el caso de la función de Dirichlet

grafica, implica, en primer lugar, identificar la correspondencia que se establece entre sus partes con su expresión analítica, correspondencia que es mediada por el sistema de coordenadas cartesianas en que se representa. En este sentido pueden presentarse dificultades derivadas de pasar por alto el convenio eje x-dominio, eje y-codominio, lo cual podría ser, también, una manifestación de confusión entre la variable dependiente y la variable independiente. Esta dificultad fue identificada en una investigación realizada en la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina), (Vrancken y otros, 2005, 6) acerca de dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite en un grupo de 49 estudiantes; en las producciones se puede observar que más de la mitad de los 49 estudiantes tiende a confundir los ejes del plano al realizar la gráfica de una función que cumpliera con ciertas especificaciones.

En esa misma línea de análisis, la gráfica de una función numérica es la representación, en otro sistema semiótico, de los pares conformados a partir de la regla de correspondencia de dicha función. Tal representación grafica es de tal potencia representativa que revela en sí misma, por ejemplo, si corresponde o no a una función y si esta es inyectiva o no, a través de criterios bien conocidos. El primero de ellos establece que una gráfica representa una función numérica, si toda recta paralela al eje de y corta la grafica, a lo sumo, en un punto y el segundo, que una gráfica representa una función numérica inyectiva, si toda recta paralela al eje x corta la gráfica, a lo sumo, en un punto (este último criterio se incluye en la ETC descrita en el capítulo 6, identificado como nexo proposicional NP2). Desde esta perspectiva toman sentido los siguientes actos de comprensión, asociados con la apropiación de la gráfica de una función numérica.

AC19(FN): Identificar la correspondencia biunívoca entre pares de números que satisfacen la regla de asociación de la función y puntos de la gráfica. La cual establece, a su vez, una correspondencia entre los elementos constitutivos de la función numérica (dominio, codominio, rango, regla de correspondencia) y sus respectivas representaciones graficas.

AC20(FN): Identificar los criterios gráficos que permiten determinar si una grafica representa una función y si esta es inyectiva o no.

La grafica permite viabilizar, a la vez, una visión sobre el comportamiento global de la función, más allá de una correspondencia puntual entre elementos del dominio y el codominio. Permite visualizar, la forma como cambios en el dominio de la función generan en cambios en el codominio (covariación) dando una forma geométrica a la regla de correspondencia. En este sentido, el estudio de la grafica contribuye a que el sujeto, además de una concepción de función como proceso de cálculo, acceda a una concepción de función como objeto (AC9 y AC10) y a constituir el acto de comprensión relacionado con la identificación de la asimetría de los roles del dominio y del codominio (AC5). En esta dirección se puede pensar también, que el análisis de graficas de funciones, contribuye a dar sentido matemático al concepto de variable independiente y variable dependiente que se origina en las ciencias físicas. Todo lo anterior lleva a plantear que, en el contexto de su marco interpretativo, el reconocimiento de la grafica de una función en correspondencia con su expresión analítica y su diferenciación de las graficas de otras funciones, constituyen actos de comprensión importantes en la apropiación del concepto de función numérica y de versiones particulares del concepto. Se plantean, en consecuencia los siguientes actos de comprensión:

AC21(FN): Identificar la forma de la grafica de una función numérica y ponerla en correspondencia con su expresión analítica.

AC22(FN): Discriminar la grafica de una función de la graficas de otras funciones numéricas

Finalmente cabe resaltar que la representación semiótica marca una a porción reducida de la grafica pero usualmente puede ser suficiente para formarse una idea del comportamiento global de la función. Los sistemas de computación simbólica rompen esta limitación y su incorporación en la enseñanza del concepto de función, potencia el concepto de grafica y le da un dinamismo inusitado.

Actos de comprensión asociados a la apropiación del marco interpretativo de función numérica

De acuerdo con los planteamientos que se han hecho respecto de los dos planos que se deben integrar como referentes de la comprensión de un concepto (significado matemático de la definición- marco interpretativo), la comprensión del concepto de función numérica, como afluente en la apropiación del concepto general de función requiere, consecuentemente, de la apropiación de su marco interpretativo. Se harán algunas consideraciones generales al respecto.

Apropiar dicho marco interpretativo implica apropiar, en relación con la definición de función numérica y, en términos más amplios, con la definición general de función, las distintas versiones de función numérica que han sido propuestas para constituir dicho marco interpretativo.(funciones definidas mediante expresiones matemáticas en una variable, definidas implícita o explícitamente, o por partes, a cuyo interior se enfatizan las funciones elementales (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonometricas), sucesiones, valor absoluto y la función de Dirichlet). Esto significa, en cada caso o prototipo, identificar los elementos que constituyen la función (dominio, codominio, rango, regla de correspondencia) según se establece en la definición. Se plantea entonces para cada una de dichas funciones el siguiente acto de comprensión:

AC23(FN): Identificar, en correspondencia con la definición de función numérica, y por tanto con la definición general, los distintos elementos constitutivos de la función y la univocidad de la regla de correspondencia.

Esta identificación tendrá que darse en el marco de representación analítica de su regla de correspondencia e implica reconocer la función a partir de dicha expresión en conexión con su grafica. Con base en las consideraciones hechas en torno al concepto de grafica, el reconocimiento de la grafica de una función numérica que forma parte de su marco, forma parte de la apropiación de dicha función particular y constituye un aporte a la apropiación tanto del marco interpretativo de función numérica como del concepto general de función. Desde esta perspectiva se proponen el siguiente acto de comprensión

AC24(FN): Identificar y discriminar, en términos su expresión analítica y en correspondencia con su representación grafica, las distintas funciones notables que constituyen el marco interpretativo.

Parte importante de la apropiación del marco interpretativo que se ha propuesto para el concepto de función numérica, es reconocer las funciones elementales como modelos socializados de matematización. Es decir identificar las correspondencia que existe entre este tipos de funciones y fenómenos científicos que pueden ser modelados por ellas. Este reconocimiento implica identificar las regularidades de tales fenómenos científicos o técnicos que permiten ser modelados por este tipo de funciones o cualquier otro tipo de función numérica. El punto remite también a la importancia de establecer en la secundaria, una coherencia curricular externa entre los cursos de matemáticas con los cursos de ciencias naturales y otras asignaturas técnicas. Surge así el siguiente acto de comprensión asociado con la apropiación del marco interpretativo de función numérica.

AC25(FN): Identificar las funciones elementales, o cualquier otra función del marco interpretativo para tal efecto, como modelos socializados de matematización.

8. CONCLUSIONES

1. En esta tesis se hace frente a una problemática relativa al concepto personal de función con que los estudiantes, recién egresados del bachillerato, llegan a la universidad. Dicho concepto personal es insuficiente para responder a las demandas matemáticas que le plantearán los cursos de cálculo diferencial e integral. Varias investigaciones, mencionadas a lo largo de toda la tesis, dan fe de esto y recalcan que se trata de conceptos personales de función, mal adaptados matemáticamente o restringidos, tal vez como consecuencia de propuestas curriculares insuficientes, enmarcadas en situaciones de enseñanza prototípicas que restringen la generalidad del concepto de función y que desconocen las dificultades inherentes a su complejidad.

2. La insuficiencia en las propuestas curriculares puede ser condicionada, entre otras cosas, por la falta de un referente sobre la estructuración de función que da respuesta a las exigencias de los cursos universitarios puesto que ni los lineamientos curriculares, ni los libros de texto para bachillerato dan cuenta de esto.

3. La persistencia de situaciones de enseñanza que desconocen las dificultades inherentes a la complejidad del concepto, pueden tener origen en que, pese a la abundante literatura respecto a las dificultades y obstáculos que comporta la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, no es fácil para el maestro de bachillerato indagar acerca de estos aspectos, pues las investigaciones al respecto se encuentran dispersas y en muchos casos son muy complicadas.

4. El aporte a la búsqueda de soluciones a la problemática descrita en los tres ítems anteriores fue:

4.1 Un estudio histórico crítico del concepto de función, en el que se analizó su proceso evolutivo por medio del estudio de los desequilibrios, entre conocimientos disponibles y dificultades, que dieron lugar a movilizaciones de la noción de función. Este estudio permitió evidenciar la complejidad epistemológica del concepto de función, sintetizada en la aparente simpleza de su definición actual, y concluir que tal definición actual es una generalización de lo que ahora conocemos como función numérica. Esto último tiene particular incidencia en la conformación de lo que en el marco teórico y metodológico se llamó el marco interpretativo del concepto (Ver secciones 2.2, 3.2 y 7.3).

4.2 Un estudio de las demandas matemáticas que los cursos de cálculo diferencial e integral le plantean al concepto de función. Producto de tal estudio es el capítulo 5, que sirve como referente (junto con otros aspectos como la epistemología del concepto) para proponer un saber relativo al concepto de función que debe asumirse como meta de formación al finalizar el bachillerato.

4.3 Una estructura teórico conceptual del concepto de función (Ver capítulo 6), que caracteriza el saber mencionado en el punto anterior y sirve como referente para elaborar propuestas curriculares y/o describir estados de comprensión como posible estrategia de monitoreo a la formación de los egresados de bachillerato.

4.4 Una propuesta de lo que es comprender un concepto matemático, aplicada al concepto de función. Dicha propuesta se esboza en el marco teórico y en el marco metodológico y toma forma en el capítulo 7, como estrategia para describir un estado básico de comprensión del concepto de función. Esta puede ser tomada como referente para replanteamientos teóricos que agencien nuevas propuestas didácticas o investigaciones respecto de otros conceptos matemáticos en este o en otros niveles escolares.

4.5 Los capítulos 6 y 7 se pueden considerar un compendio de problemas notables y obstáculos que suelen presentarse en la apropiación del concepto de función y de los conceptos que lo estructuran. En particular el capítulo 7 da cuenta de la complejidad de las exigencias cognitivas que plantean los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto.

4.6 Una metodología que le otorga fundamentos más científicos a la implementación de propuestas de enseñanza. Esta se puede inferir del desarrollo de los capítulos 5, 6 y 7 en los que se describe el papel del concepto en el contexto curricular posterior al de la investigación, se caracteriza un referente de formación respecto de tal concepto y se describe un estado básico de comprensión y problemas notables en la apropiación del concepto, respectivamente.

5. En el desarrollo del capítulo 7 se identificó que el limitado concepto de función con que llegan los estudiantes a la universidad, puede proceder de limitaciones en la conceptualización de los conceptos soporte conjunto y regla de correspondencia y de la adecuada identificación del papel que juegan en la constitución del concepto de función (Ver sección 7.2, desarticulación detallada de los actos de comprensión complejos i) y ii)). Así que resulta particularmente importante que se tome conciencia de la gran variedad de conjuntos y de reglas de correspondencia que pueden constituirse a lo largo de la educación básica secundaria.

6. La generalidad del concepto de conjunto que los estudiantes deben construir está ligada con la construcción del concepto de número real. En este sentido, en el capítulo 7, se mostró a través de los actos de comprensión y obstáculos AC10(FN)~AC1, O*4(FN)~O*1, AC11(FN)~AC2, y AC12(FN)~AC3, que una insuficiente constitución del concepto de número real y de tal sistema numérico, restringe la constitución del concepto de función numérica y, por ende, del concepto general de función por las razones allí expuestas (Ver en la sección 7.3, Actos de comprensión asociados con el reconocimiento de los conceptos soporte). De modo que en el bachillerato se debe aprovechar el proceso de construcción del concepto de número real, para orientar a los estudiantes hacia una noción de

conjunto general, que incluya conjuntos infinitos de diversa cardinalidad superando la discreción y el infinito potencial de los números naturales.

7. Se dijo al inicio de estas conclusiones que el concepto personal de función con que los estudiantes llegan a la universidad resulta ser muy restringido. Según Álvarez (2009), la comprensión conceptual tiene su referente en la apropiación del significado matemático del concepto y en su articulación con un marco interpretativo suficientemente representativo. Se puede entonces postular, como hipótesis que la ausencia de tal articulación es, en parte, causa de la falta de generalidad del concepto que construyen los estudiantes y de que estos desarrollen habilidades algebraicas pero escasas conceptualizaciones que les permitan superar los obstáculos identificados en el capítulo 7. El bachillerato provee espacios y oportunidades suficientes para la selección de versiones en contexto suficientemente representativas. Sin embargo, como quedó dicho al inicio de la sección 7.3, a lo largo del bachillerato son numerosas las versiones del concepto de función que pasan desapercibidas para maestros y estudiantes, limitando el marco interpretativo a las funciones elementales. Extender dicho marco podría favorecer la constitución de una concepción de función suficientemente amplia, en oposición a la concepción restringida con que suelen llegar los bachilleres a la universidad.

8. Para Sierpinska, el más fundamental de los actos de comprensión del concepto de función es la “identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver” (Traducción libre, 1992, 7), el concepto general de función, en su versión moderna, está alejado de tal identificación. Sólo ciertas versiones en contexto tienen la posibilidad de acercar al estudiante a este acto de comprensión, en particular las funciones numéricas proveen un marco interpretativo propicio a este acto. Parece esto sugerir que, en el proceso de construcción del concepto de función, es mejor proceder construyendo el concepto general de función como una generalización del concepto de función numérica para aprovechar el amplio marco interpretativo que posee el concepto de función

numérica en procesos explicativos de fenómenos que le resultan cercanos al estudiante.

9. En el contexto de la secundaria aparecen numerosas situaciones de ciencias que se modelan a través de funciones: escalas de temperatura, fenómenos térmicos, cinemáticos, dinámicos, hidrostáticos, etc. Articular dichas funciones como base para conformar modelos socializados de matematización, puede contribuir enormemente a fortalecer el papel del marco interpretativo y su articulación con el significado matemático del concepto de función, a la vez que posibilita la integración del trabajo en el área de ciencias con el trabajo de construcción conceptual de función despojando a este último de su imagen de ente abstracto, estático y alejado del mundo cercano.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, J (2009). Estructuras teórico conceptuales y comprensión conceptual en matemáticas. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados.

Álvarez, J. (1998). Mapas conceptuales ajustados. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados. Departamento de matemáticas. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Alvarez, J. (2007). Pruebas aplicadas a estudiantes de grado 11 de varios colegios de Cali. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados.

Álvarez, J. (2005). Una conceptualización operativa de formación matemática como estado. (Desde la perspectiva de las matemáticas). Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. Delgado, C (2001a). La problemática Tall-Vinner. Reformulación operativa en el Caso de función. [Preprint. Departamento de Matemáticas. Centro de estudios avanzados en Psicología, Cognición y Cultura]. Universidad del Valle. Cali. Colombia. 14pp.

Álvarez, J. Delgado, C. et al. (2001b). Documento central del informe final. Documento N°1. Proyecto: Los sistemas de computación simbólica en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas básicas universitarias. Con el apoyo financiero de COLCIENCIAS. Departamento de Matemáticas. Escuela Regional de Matemáticas. Área de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. Delgado, C. et al. (2001d). El problema de la imagen conceptual en el aprendizaje de función. Informe final. Documento N°3. Proyecto: Los sistemas de computación simbólica en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas básicas universitarias. Con el apoyo financiero de COLCIENCIAS. Departamento de

Matemáticas. Escuela Regional de Matemáticas. Área de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. Delgado, C. et al. (2001c). Enseñando una unidad de funciones en la interfase universidad-bachillerato con la ayuda de Mathemática. Documento N°2. Proyecto: Los sistemas de computación simbólica en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas básicas universitarias. Con el apoyo financiero de COLCIENCIAS. Departamento de Matemáticas. Escuela Regional de Matemáticas. Área de Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Álvarez, J. Delgado, C. et al. (2004). Overcoming the of tall vinner problematics in the teaching of the concept of function with the assistance of mathematica. En PME-NA XXVI, octubre 2004, pp. 188-190.

Álvarez, J. Marmolejo, M. (1990). Sobre el bajo aprovechamiento estudiantil en los primeros cursos universitarios de matemáticas en la Universidad del Valle. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. 1, No. 2. Cali, Colombia

Apóstol, T. (1973). Cálculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra líneal. Segunda edición. Editorial Reverté, S.A. Barcelona, España.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, comité latinoamericano de matemática educativa, marzo, año/vol. 1, número 001 ISSN 1665-2436. pp. 40-55.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: P. Gómez (Ed.): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140); México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M et al (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. Journal of Mathematical Behavior, Vol. 16, No 4, pp. 399-343.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 4, p. 53-61.

Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). Cálculo Diferencial e integral. España: Editorial Síntesis.

Bachelard, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique. J. Vrin, París, 1986.

Bagni, G. (2004), Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. En Relime Vol. 7, Num 1, marzo 2004, pp. 5-23.

Balacheff et al. 1997. Theory of Didactical Situations in Mathematics. Brousseau G. Education Library, Kluwer Academic Publishers. Editada y traducida por Nicolas Balacheff et al.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulative symbolic language. En N. Bednarz, C. Kieran y L.Lee (Eds.). (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching (pp. 151-154). Kluwer Academic Publishers.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond Unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra", R. Sutherland et al. (eds.), Perspectives on school Algebra, 177-189. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Bos, H.J.M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. Arch. Hist. Exact. Sci. 14, 1-90.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nicholson, D., (1992) Development of the process Concept of function. Educational Studies in Mathematics, 23 (3), 247 – 285.

Brousseau G. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathematiques vol. 4. Núm. 2, Pp. 165-198. Traducción al español, César Delgado G.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Edición especial CASIO, Prentice Hall.

Carlson, M. P., Oehrtman, M., & Thompson, P. W. (2007). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 150–171). Washington, DC: Mathematical Association of America. Consultado en diciembre de 2007. Disponible en: http://cresmet.asu.edu/media/pdf/pubs/carlson/Oehrtman–Carlson–Thompson_final.pdf

Castañeda A. El discurso escolar. Aspectos de su formación. En CLIME 2005.

Castañeda, A. (2004). Una aproximación a la construcción social del conocimiento. Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión. Tesis de Doctorado. Matematica Educativa, CICATA-IPN. Mexico.

Castro E. (1997). La educación matemática en la secundaria. Coordinador: Luis Rico. Editorial Horsori, Universidad de Barcelona pág 95 -124.

CASTRO, E. et al. (1997): «Sistemas de Representación y aprendizaje de las estructuras numéricas». Enseñanza de las ciencias, 15 (3), 361-371.

Chevallard Y, Bosch M y Gascón J. 1997. Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. I.C.E. Horsori. Universidad de Barcelona.

Colaboradores de Wikipedia. Delta de Dirac [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2010 [fecha de consulta: 16 de enero del 2010]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Delta_de_Dirac&oldid=33076759>.

Colaboradores de Wikipedia. Teoría de distribuciones [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2009 [fecha de consulta: 9 de octubre del 2009]. Disponible en <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_distribuciones&oldid=30457136>.

Cornu B (1981). 'Apprentissage de la Notion de Limite: Modèles Spontanés et Modèles Propres'. En: Comiti, C. & Vergnaud, G. (Eds), Proceedings of the Fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: 322-329.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. (These de doctorat). Universitè de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking. 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Delgado, C et al (2001). Los sistemas de computación simbólica en el aprendizaje y enseñanza de la Matemáticas Básicas Universitarias. Proyecto de investigación. Universidad del Valle, pp. 7-11. Cali- Colombia Ministerio de Educación Nacional 2002. Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas: Proyecto incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media de Colombia. 1 Ed. Bogotá: MEN. 337 pp.

Delgado, C. (1998). Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso. Tesis Doctoral. universitat autónoma de Barcelona. Departament de Didáctica de las Matemàtiques i de les Ciènces Experimentals

Delgado, C. (2003). El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos. En la revista (ISSN 0120-6788): Matemáticas: enseñanza Universitaria, Vol. XI, Nº 1, (2003), pp. 91-127. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Deulofeu, J. Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación, Department de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona. En X JAEM. Ponencia P41, pp. 367-377 .

Devlin, K. The Joy of Sets. Springer-Verlag. New York. (1993).

Drijvers, P. (2001). The concept of parameter in a computer algebra enviroment. H. Chick et al. (eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Vol. 1. The University of Melbourne, Australia, pp, 221-227.

Dubinsky, E. (1992). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking. Tall, D. (Ed.), Kluwer Academic Publisher. London.

Duval R. (1994). Gráficas y Ecuaciones: Articulación de dos registros. Antología de Educación Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México,.

Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, Págs. 173-201). México.

Duval, R, **(**1995), Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals, Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

DUVAL, R. (1993): «Semiosis et noesis». En, Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Ferrari, M. Farfán, R. (2008) Artículo “Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos”en Relime v.11 n.3 México 2008

Ferrari, M. Martínez–Sierra, G. (2003). Construcción de funciones con calculadoras graficadoras. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16. Tomo II (pp. 710–716). México: Grupo Editorial Iberoamérica. ISBN 956–8298–03–7.

Fischbein, E.; Tirosh, D.; Hess, P. (1979). The intuition of infinity. Educational Studies in Mathematics, 10. pp 3-40.

G.H. Moore, “Zermelo´s axiom of choice: its origines, development and influence”, Springer-Verlag, (1982).

GLAESER, G. (1981), ‘Epistémologie des nombres relatifs’, Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), 303-346.

Grattan-Guinnes, The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann, M.I.T. Press, 1970.

Guzmán R, Ismenia. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime Vol. 1, marzo 1998 pp. 5-21

Halmos, P. Naive Set Theory. Springer-Verlag. New York. 1974.

Hitt F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto Real. Revista de Educación Matemática. Vol. 7-No. 1, Abril, México.

Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. Investigaciones en Educación Matemática Vol. I (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Janvier, C. (1987). "Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics". Lawrence Erlabum associates 1987. pp. 27-31.

KAPUT, J. (1987): «Representación Systems and Mathematics». En C. JANVIER (ed.): Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics. New Jersey: Hillsdale, pp. 159-195.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989): «El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica». Enseñanza de las Ciencias, 7, (3), 229-240.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. The College Mathematics Journal, September of 1989, 20(4). Pp 282–300

Kline, M. (1972). Mathematical Thought from Ancient to Moderm Times, Oxford Univ.

Kolma, B. y Hill, D. (2006). Álgebra Lineal. Octava edición. Editorial Pearson Educación. México.

Küchemann, D.E. The understanding of generalised arithmetic by secondary school children. Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London. 1980.

Luzin, N. “Function” (en ruso), The Great Soviet Encyclopedia, v. 59 (ca. 1940), pp 314-334.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

Sierra, M. Vázquez, M. González, T. et al Funciones: traducción entre representaciones. En Aula, 10, 1998, ISSN: 0214-3402 Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca pp. 89-104 © Ediciones Universidad de Salamanca

Monna, A. F. “The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue”. Arch. Hist. Ex. Sci. 9 (1972/73) p.57-84

Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. En: G. Martínez–Sierra (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19(1), (pp. 818–823). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006.

Moore, G. (1982). Zermelo´s Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence. Springer-Verlag.

Moreno, L. Waldegg, G. (1991). “The Conceptual Evolution Of Actual Mathematical Infinity”, Educational Studies in Mathematics, 22. pp 211-231.

Novak, J. y Gowin, D. (1986). Aprendiendo a aprender. Barcelona. España. Ediciones Martínez Roca.

Ochoviet C., Olave M., Testa Y. (2005) Concepciones de los estudiantes acerca de la grafica de una funcion lineal de dominio discreto. CLAME, Vol 19. pp. 485-490.

Oviedo, Lina Mónica Ma. (2003). Las Funciones...un obstáculo para nuestros alumnos trabajo presentado en la Reunión de Educación Matemática UMA 2003. pp. 89-97.

P. J Davis and R. Hersh, The mathematical experience, Birkhäuser, 1981

Penalva, C.; Turégano, P. (1990). Alumnos universitarios ante el infinito: intuición y formalización. Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla.

Planchart O. (2005) La modelación matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza del precálculo. Revista de investigación en Ciencias y Matemáticas 369°. Vol 1, Junio de 2005.

Rico, L., 2000, Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática, Ponencia en el IV SEIEM (Huelva, 2000), U. de Granada, España.

Rüthing, D. “Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki”, Math. Intelligencer 6:4 (1984). pp. 72-77.

Ruiz, L. 1993, Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Publicaciones de la Universidad de Jaén, España.

Salas, S. y Hille, E. (1984). Cálculus de una y varias variables con Geometría analítica. Segunda edición. Editorial Reverté. Caracas, Venezuela.

Sastre, P.; Rey, G.; Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. En la revista (ISSN: 1815-0640): UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Diciembre de 2008, Número 16, páginas 141 – 155

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics. Vol 22, Nº 4, pp. 1-32.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification -- the case of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25). Washington: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A., Viwegier, M. (1989a). How & when attitudes towards mathematics & infinity become constituted into obstacles in students? Proceeding of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Paris, 166-173.

Sierpinska, A. (1997). La compréhension en mathématiques, in Boeck & Larcier, s.a (ed), París, Bruxelles.

Sierpinska, A. (1989b). On 15-17 years old students´ conceptions of functions, iteration of functions and attractive points. Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Preprint, 454.

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión del concepto de función. En E. Dubinski and G. Harel (eds.), The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes, Vol 25, pp. 25-58. Mathematical association of America, Washington, DC, 1992.

Skemp, R. (1980). Psicología del Aprendizaje. Madrid: Editorial Morata.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics teaching 26(3), 9-15.

Skemp, R. R. (1987). The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Skemp, R. (1980): Understanding in mathematics. London: Palmer Press.

Suppes, P. Axiomatic Set Theory. Dover. New York. 1972.

Swokowski, E. (1982). Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed. Prindle, Weber & Schmidt.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Images and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, Vol 12, pp. 151-169.

Tall, D. (1992). Student´s Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Québec, august 1992. Mahematics Education Research Centre. University of Warwick.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning, Macmillan, New York. pp 495-511.

Tall, D. (1996). Function and Calculus , En Bishop A.J. et al. (Eds.) International Handbook of Mathematics Education (pp. 289 – 325). Netherlands: Kluwer Academic Publihers. Telefonos: 2 84 99 11 - 2 82 40 66 EXT. 2717 FAX: 284-1890 Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa• 4/19/95 • Página 1 de 24 Carolyn Kieran Cap–17 The Learning and Teaching of School Algebra Carolyn Kieran

Trujillo, R. (1995). Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico. Tesis de Maestría, DME del Cinvestav-IPN. México.

U. Bottazzini, The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass, Springer-Verlag, 1986.

Ursini S., y Trigueros M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ursini S. (1996). Experiencias preálgebraicas. Educación matemática. Vol. 8 No. 2. pp. 33-40.

Ursini S. Trigueros M. y Lozano D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matemática Vol. 12 No. 2, 27-48.

Usiskin , Zalman. Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. The ideas of Algebra, K -12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of

Mathematics, editado por Arthur F. Coxford y Albert P.Shulte, 8- 19. Reston, Va. : The Council, 1988. pp 8-19.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of functions. Journal for Research in Mathematics Education, 20. pp 356-366.

Vinner S (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Advanced Mathematical thinking. Edited by David Tall. Kluwer Academic Publishers

Vrancken S., Gregorini M., Engler A., Müller D., Hecklein M.(2005) Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. proyecto “Errores y dificultades: organizadores didácticos en el aprendizaje del Cálculo en carreras no matemáticas”, Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Esperanza. Prov. de Santa Fe (Argentina)

Vrancken, S. Gregorini, María I. et al. Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.(On line) Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Esperanza.Prov.deSantaFe(Argentina).http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf. marzo de 2010.

Vygotski, L. S. (1996). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica. Barcelona. (Resumen del ensayo original: Herramienta y símbolo en el desarrollo de los niños. 1930)

Waldegg, G. (1996). “Identificación de Obstáculos Didácticos en el Estudio del Infinito Actual” Revista Mexicana de Investigación Educativa, enero-junio, Vol. 1, número 1. Consejo Mexicano de Investigación Educativa México. pp 107-122

Youschkevitch, A. P. (1976): “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century,” Arch. History Exact. Sci. 16 (1)(1976/77), páginas 7-68.

Youschkevitch, A. P. (1989). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. Serie de Antologías No. 1 Área de Nivel Superior (pp. 99-146). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. Traducción de R. M. Farfán del artículo de 1976: The concepto of function up to the middle of the 19^{th} century. Arch. Hist. Exact. Sci. 16, 36-85.

Zimmermann W. (1990). Visual Thinking in Calcullus. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), Visualization in Teaching and Mathematics (pp. 127-138), MAA Series. USA.

ANEXOS

Anexo A. Parcelación esquemática representativa de un primer curso de cálculo diferencial e integral para carreras de ciencias e ingeniería

I. LÍMITES Y CONTINUIDAD
   1. Introducción al concepto de límite
   2. Definición de límite de una función
   3. Teoremas sobre límites y cálculo de límites
   4. Continuidad

II. DERIVADAS
   1. Introducción al concepto de derivada
   2. Definición de derivada de una función
   3. Reglas de derivación
   4. Regla de la cadena
   5. Derivación implícita

III. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTALES
   1. Función exponencial y función logarítmica
   2. Funciones trigonométricas y sus inversas

IV. APLICACIONES DE LA DERIVADA
   1. Funciones monótonas crecientes y/o decrecientes
   2. Máximos y mínimos relativos de una función

3. Criterios de la primera y de la segunda derivada para la determinación de extremos relativos y absolutos de una función, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad.
4. Trazado de curvas
5. Problemas de aplicación de máximos y mínimos
6. La derivada como una razón de cambio
7. Antiderivadas.

V. LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Área
2. Definición de la integral definida
3. Propiedades de la integral definida
4. El teorema del valor medio para integrales definidas
5. El teorema fundamental del cálculo
6. Métodos de integración

Anexo B. Demandas matemáticas al concepto de función en los primeros cursos universitarios de cálculo.

Diremos que el concepto de función es objeto de una demanda matemática en cuanto cualquier conocimiento, inherente a él, es requerido en la formulación, bien sea, de otro concepto, de un teorema o proposición notable, de un problema o de procesos matemáticos, incluyendo aspectos relativos a representaciones semióticas. La identificación de tales demandas en los primeros cursos universitarios de matemáticas, permite constituir un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos que caractericen el saber matemático que, respecto del concepto de función, se espera posea un estudiante que ingresa a carreras de ciencias e ingeniería y aspira no fracasar.

En esta investigación nos referiremos a demandas que se expresan en el currículo del primer año de carreras de ciencias e ingeniería y que serán identificadas a través del análisis de cursos vertebrales en la formación matemática de sus estudiantes: Cálculo diferencial e integral y álgebra lineal. Para cada uno de ellos se conformó una parcelación esquemática representativa de los cursos ofrecidos por universidades de la región. Luego se analizaron desde la perspectiva de la propia experiencia y desde el enfoque presentado por algunos textos seleccionados entre los utilizados como guía en cada universidad identificando así las demandas matemáticas al concepto de función.

IDENTIFICACIÓN DE DEMANDAS MATEMÁTICAS A LAS QUE ESTÁ SUJETO EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN UN CURSO REPRESENTATIVO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Para la identificación de tales demandas, hemos estudiado diferentes textos que se irán señalando en la medida en que se vayan abordando las temáticas ilustradas en la parcelación esquemática representativa presentada arriba. La selección de los textos se basa en consideraciones de representatividad y "tratamiento de los temas", de acuerdo con nuestra concepción de formación matemática. En cada caso tratamos de dar una visión de la forma como el texto realiza el tratamiento del concepto, teorema etc., en cuyo contexto nos parece pertinente destacar que el concepto de función esta siendo requerido matemáticamente de alguna manera. Los textos citados aparecen en letra cursiva. Tales presentaciones se agrupan convenientemente para el análisis de las demandas identificadas.

I. LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. introducción al concepto de límite

Es tradicional iniciar la presentación de este tema a partir de ejemplos que se introducen, como motivación, del concepto de límite antes de presentar la definición formal que, generalmente viene acompañada de la respectiva interpretación geométrica. Al final se presenta lo que podemos llamar álgebra de límites de funciones con ejemplos de aplicación.

Para el análisis de la sección de límites hemos escogido, como texto de referencia Cálculo con geometría analítica", E. Swokowski.[7] A continuación se reproducen algunos apartes pertinentes en lo relativo al límite de una función:

[7] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982.

Introducción (según Swokowski)(Pág 50)

"En el cálculo y sus aplicaciones a menudo nos interesamos por los valores f(x) de una función f cuando x está muy cerca de un número a, pero no es necesariamente igual a a. De hecho, en muchos casos el número a no está en el dominio de f; esto es f(a) no está definido. Vagamente hablando, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿si x se acerca más y más a a (pero $x \neq a$), f(x) se acerca también cada vez más a algún número L? si la respuesta es sí decimos que el límite de f(x), cuando x tiende a a, es igual a L, y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L . \qquad (2.1)"$$

ANÁLISIS

Al referirse a "una función f" el símbolo f hace referencia a la función como un todo, es decir, a su significado como objeto matemático, incluidos sus conceptos complementarios de dominio y rango debidamente diferenciados y diferenciando a su vez el símbolo f del símbolo f(x) teniendo claridad en cuanto a este último como valor de la función f ("…por los valores f(x) de una función f…"). Es importante también ubicar a f(x) y a x como elementos del rango y del dominio respectivamente. Por tanto aparecen como demandas:

- Representación simbólica del objeto matemático función mediante las letras f, g, F o G.
- Representación simbólica de los elementos del dominio y sus respectivas imágenes en el rango de una función mediante x y f(x) (0 g(x), F(x), G(x))
- Representación simbólica del dominio de una función: dom(f) y de la imagen de una función Im(f).

2. definición de límite de una función

En la presentación del concepto de límite es tradicional introducirlo con un ejemplo particular en el que se toman valores del dominio cada vez más cercanos a un valor específico para observar cómo, al sustituirlos en la función, los valores obtenidos están, a su vez, cada vez más cerca de un valor específico del rango acotando, en ambos casos, a través de intervalos reales cada vez más pequeños que encierran los valores en cuestión. Describimos la forma como procede Swokowsky (Págs 56 y 57):

"2.2 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Volvamos al ejemplo 1 de la sección 1 en donde se vio que $\lim_{x\to 4} \frac{1}{2}(3x-1) = 5.5$ *y consideremos más detalladamente la variación de f(x)=*$\frac{1}{2}(3x-1)$ *cuando x se encuentra cerca de 4. Usando los valores de la función tabulados en la página 53(¿?) llegamos a las siguientes afirmaciones:*

Si 3.9< x <4.1 entonces 5.35< f(x) <5.65

Si 3.99< x <4.01 entonces 4.485< f(x) <5.515

Si 3.99< x <4.001 entonces 5.4985< f(x) <5.5015

Si 3.999< x< 4.0001 entonces 5.49985< f(x) <5.50015

Si 3.99999< x< 4.00001 entonces 5.499985< f(x) <5.00015

Cada una de estas afirmaciones tiene la forma siguiente:

(2.3) *si 4-δ<x< 4+δ, entonces 5.5-ε < f(x) < 5.5+ ε,*

en donde las letras griegas ε (epsilon) y δ (delta) denotan números reales positivos pequeños. Por ejemplo, la primera afirmación se obtiene de (2.3) con δ = 0.1 y ε = 0.15; la segunda con δ = 0.01 y ε = 0.015; para la tercera se escoge δ = 0.001 y ε = 0.0015; etcétera.

Podemos escribir (2.3) en términos de intervalos como sigue:

Si x se encuentra en el intervalo abierto $(4-\delta, 4+\delta)$, entonces $f(x)$ se encuentra en el intervalo abierto $(5.5-\varepsilon, 5.5+\varepsilon)$.

En la figura 2.4 damos una interpretación geométrica en la cual la flecha curva indica la correspondencia entre x y $f(x)$.

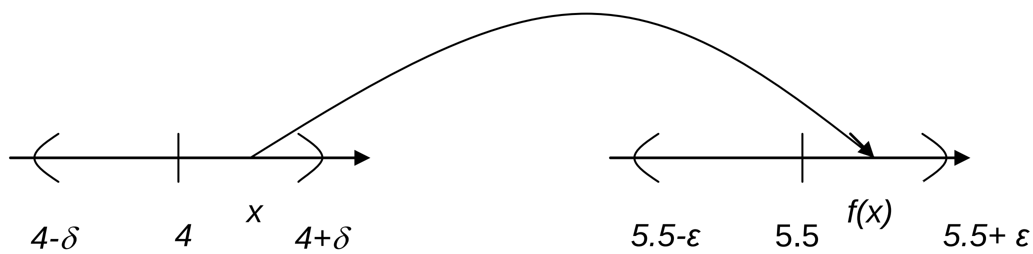


Figura 2.4

Evidentemente (2.3) es equivalente a:

$$\text{Si } -\delta < x-4 < \delta, \text{ entonces } -\varepsilon < f(x)-5.5 < \varepsilon.$$

Empleando valores absolutos esto puede escribirse así:

$$\text{Si } |x-4| < \delta, \text{ entonces } |f(x)-5.5| < \varepsilon .$$

Si en esta afirmación no deseamos incluir lo que sucede en $x=4$, entonces es necesario agregar la condición $0<|x-4|$. Esto nos da:

$$\text{Si } 0<|x-4| < \delta , \text{ entonces } |f(x)-5.5| < \varepsilon .$$

En la definición de límite aparecerá una afirmación de este tipo; sin embargo es necesario que cambiemos un poco nuestro punto de vista. Para llegar a (2.5), primero consideramos el dominio de f y asignamos valores a x cercanos a 4.después observamos la proximidad de $f(x)$ a 5.5. En la definición de límite invertiremos el proceso considerando primero un intervalo abierto $(5.5-\varepsilon, 5.5+\varepsilon)$ y determinando después si existe un intervalo abierto $(4-\delta, 4+\delta)$ en el dominio de f, para el cual (2.5) se cumpla."

(2.6) DEFINICIÓN

Consideremos un intervalo abierto que contiene a a. Sea f una función definida en todos los números del intervalo excepto posiblemente en a y sea L un número real. La afirmación

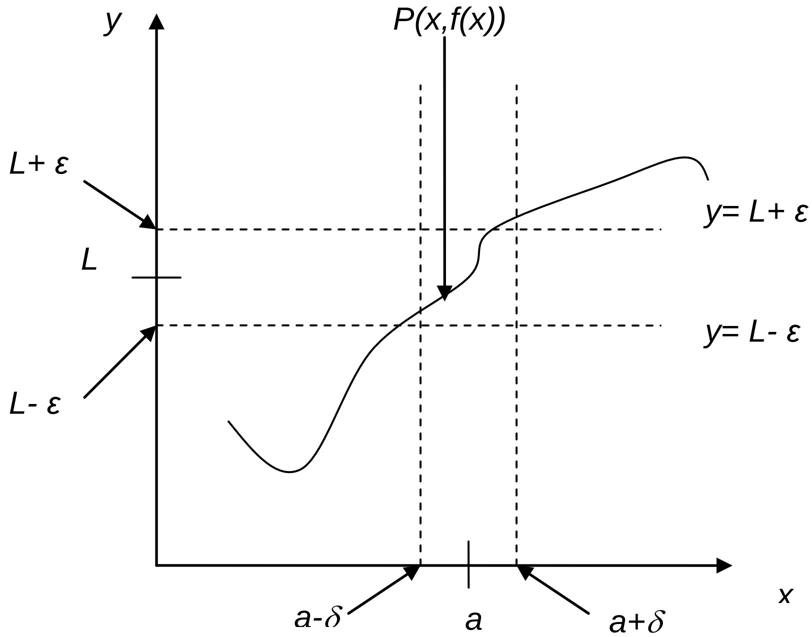
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

Si $0 < |x - a| < \delta$*, entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*"[8]

El anterior análisis introductorio también suele hacerse apoyándose en el contexto gráfico de una función, mostrando la relación existente entre los intervalos en el dominio y en el rango asumiendo nuevamente una función como una asignación, al utilizar símiles en que se considera una función como un aparato que envía (casi "dispara") desde el punto sobre el dominio con coordenada x al punto sobre el rango con coordenada f(x) (representados ambos, dominio y rango, por medio de dos rectas orientadas ya sea ambas horizontales o perpendiculares (plano cartesiano) de modo que la función es representada o bien por flechas o bien por puntos sobre el plano):

[8] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 56.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Figura 2.7” [9]

ANÁLISIS

La función es interpretada como una asignación o correspondencia entre valores de dos conjuntos numéricos a través de los puntos de una curva sobre un plano cartesiano (que indica la asignación de valores de la ordenada a valores de la abscisa), o de flechas que los unen entre dos rectas numéricas horizontales (el dominio y el rango) o entre un valor numérico y otro mediante la sustitución en una fórmula expresada algebraicamente. Es claro entonces que se hace referencia a funciones numéricas.

El concepto de función está sujeto a las siguientes demandas:

---

[9] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 57.

- Concepto de función como regla de correspondencia.
- Concepto de función como conjunto de pares ordenados.
- Cálculo de valores de una función, definida por una expresión algebraica o en el contexto de su representación gráfica, para valores dados en el dominio.
- Conceptos de dominio y rango.
- Representación simbólica: f para el objeto matemático función, f(x) para el valor genérico de la función y f(a) como valor de la función en el valor fijo del dominio a.
- Gráfica de una función.
- Covariación entre variables en el dominio y variables en el rango de una función.

3. teoremas sobre límites y cálculo de límites

Teoremas

Para el cálculo de límites se acostumbra presentar previamente teoremas básicos, acompañados de su respectiva demostración.

A continuación listamos dichos teoremas tal y como son presentados en el texto escogido para esta sección, agrupándolos para efectos de facilitar la presentación de nuestro estudio; posteriormente haremos el análisis correspondiente acompañado de la transcripción de apartes del texto que sean pertinentes para la ilustración de algunas de las demandas identificadas en lo que dice el teorema:

Tipos de funciones y operaciones con funciones: (Swokowski, págs. 62-67)

- *Límite de una constante:*

(2.8) TEOREMA

Si a y c son números reales cualesquiera, entonces

- *Límite de la función lineal:*

"(2.9) TEOREMA

Si a, b y m son números reales, entonces,

(2.11) TEOREMA

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = M$ *, entonces*

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$ *.*

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) \bullet g(x) = L \bullet M$ *.*

El teorema anterior a veces se escribe como sigue:

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(2.12) *(ii)* $\lim_{x \to a} f(x) \bullet g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \bullet \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Donde se supone que los límites indicados existen y $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ *en (iii). Los resultados (i) y (ii) pueden generalizarse a sumas y productos de más de dos funciones.*

En palabras, (2.12) puede enunciarse como sigue:

(i)El límite de una suma es la suma de los límites.

(ii)El límite de un producto es el producto de los límites.

(iii) El límite de un cociente es el cociente de los límites.”[10]

“(2.18)TEOREMA

Si f es un polinomio, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

para todo número real a.

“(2.19)COROLARIO

Si q es una función racional y a está en el dominio de q, entonces

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$$

“(2.20)TEOREMA[11]

Si a>0 y n es un entero positivo, o si a≤ 0 y n es un entero impar positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.\text{ ”}$$

“(2.22)TEOREMA[12]

---

[10] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 64.

[11] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 67.

Si una función f tiene un límite cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

siempre y cuando n sea un entero positivo impar o bien n sea un entero

ANÁLISIS

Respecto a demandas al concepto de función tenemos:

- Representación simbólica del objeto matemático función.
- Representación simbólica para elementos del dominio y de sus imágenes, así como para los conjuntos dominio y codominio.
- En la formulación de los teoremas se hace explícita referencia a funciones numéricas: "*Si a, b y m son números reales…"*
- Definición de las operaciones entre funciones (y sus respectivas restricciones en cuanto al dominio) en el conjunto de las funciones numéricas.

- El concepto de función es exigido en su acepción de objeto, el símbolo f incluye (encapsula) todos los procesos y conceptos complementarios y soporte del concepto de función. Al utilizarlo se asume que el lector evoca todo esto al leer la expresión: "sea la función f". Esto también se hace evidente en la formulación de los teoremas pues se define el límite sobre una operación que actúa sobre una función, es decir, las funciones ya constituyen un conjunto de

[12] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 68.

elementos sobre el que se han definido operaciones, en particular las funciones numéricas.

- Determinación de la imagen de un elemento del dominio mediante cualquiera de las funciones obtenidas a través de las operaciones mencionadas.

- Simbología propia del álgebra de funciones: f+g, f.g y f/g.

- Reconocimiento de los símbolos como representativos de tres nuevas funciones, fruto de las operaciones indicadas.

- Conjunto de funciones numéricas cerrado para la suma, el producto y el cociente.

- Función constante en su expresión algebraica (en este caso simplemente "c", en otros "f(x)=c" y en su representación gráfica a modo de relación entre los puntos de dos rectas:

"…El límite más simple de considerar involucra la función constante definida por f(x)=c, donde c es un número real. Si se representa f geométricamente usando dos rectas coordenadas l y l', entonces todas las flechas que comienzan en l terminan en el mismo punto de l', el punto con coordenada c, como se indica en la figura 2.10.

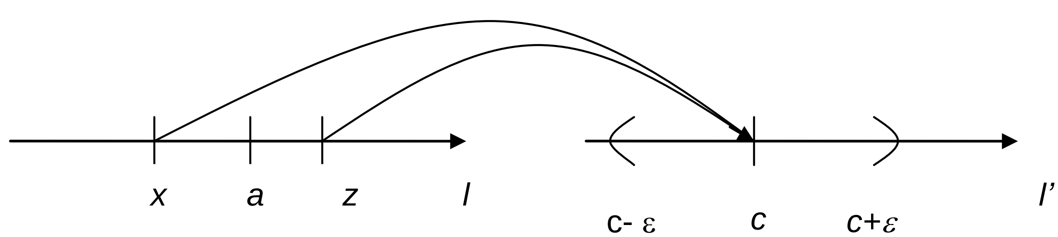


***Figura 2.10"* (pág62)**

- Función lineal en su expresión algebraica (en este caso mx+b, en otros f(x)=mx+b)
- Aunque en el texto seleccionado para esta sección no aparece la interpretación gráfica del límite de la función lineal, la experiencia docente muestra que la representación gráfica es importante en esta parte. Por tanto consideramos como demanda: técnicas para la representación gráfica de funciones y para la interpretación de la gráfica de una función numérica.
- Al asignar el valor cero a m obteniendo un caso particular de la función lineal se está demandando considerar la función lineal como una función de un parámetro (en este caso m), es decir, dependiendo del valor del parámetro se obtiene una u otra función lineal. Estamos pues frente a otra demanda al concepto de función: la función como función de un parámetro (familias de funciones determinadas por la variación de un parámetro)

Esta última demanda se hace evidente en los siguientes apartes del texto:

Demostración. *Si m=0 entonces mx+b=b y la afirmación del teorema se reduce a* $\lim_{x \to a} b = b$*, lo cual se demostró en el teorema (2.8).*

Supongamos que m $\neq$ *0. Definimos f(x)=mx+b y L=ma+b,...”*[13]

El teorema relativo al límite de una función polinómica se acompaña de su respectiva demostración, la cual se apoya en los teoremas del límite del producto y la suma de funciones:

Demostración. *Podemos escribir f(x) en la forma*

$$f(x)=b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$$

[13] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 63.

donde las b_i representan números reales. Usando (2.12) y (2.17 (se hace referencia a que $\lim_{x\to a} cx^n = c\lim_{x\to a} x^n = ca^n$ *)),*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(b_n x^n) + \lim_{x\to a}(b_{n-1}x^{n-1}) + \ldots + \lim_{x\to a} b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \ldots + b_0$$

=f(a).”[14]

Puede observarse que aparece como demanda adicional al concepto de función:

- Función polinómica en su expresión algebraica como la suma de varias funciones.

Como consecuencia del teorema del límite de una función polinómica aparece el corolario 2.19 (límite de una función racional), su demostración se apoya en el cociente de funciones y en el valor numérico de un polinomio. Como demanda a resaltar, aunque ya fue identificada anteriormente, tenemos la referente al dominio de una función y sus respectivas restricciones para la función racional:

“Demostración. *Podemos escribir q(x)=f(x)/h(x) donde f y h son polinomios. Si a está en el dominio de q, entonces h(a)$\neq$0. Usando (2.12) y (2.18),*

$$\lim_{x\to a} q(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)\,.”$$[15]

En cuanto al teorema del límite de la función radical tenemos como demanda adicional:

[14] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 66.

[15] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 66.

- Función radical en su expresión algebraica.
- Representación simbólica para la función radical.
- Valor numérico de la función radical, teniendo en cuenta las respectivas restricciones.

El teorema relativo al límite de funciones que involucran raíces de expresiones algebraicas (teóricamente expresiones algebraicas que representan funciones, aunque no se haga explícita esta afirmación ni el dominio de ellas) no supone demandas adicionales a las mencionadas.

Teorema del emparedado, de la compresión o del sándwich:

Este teorema se presenta acompañado de ejemplos que ilustren su aplicación; su demostración parte de la definición épsilon-delta.
En el texto escogido para el capítulo relativo a límite de una función el teorema se presenta de la siguiente manera:

"…El estudiante principiante no debe dejarse engañar por los ejemplos anteriores. No siempre pueden encontrarse los límites simplemente por sustitución. Como se ilustra en la sección 2, en algunos casos es necesario hacer ciertas manipulaciones algebraicas para obtener un límite. Algunas veces hay que emplear otras herramientas. El siguiente teorema se refiere a tres funciones f, h y g, donde h(x) se encuentra "emparedada" entre f(x) y g(x). si f y g tienen un mismo límite L cuando x tiende a a, entonces, como se enuncia a continuación, h debe tener el mismo límite.

(2.23) TEOREMA[16]

> *Si f(x) ≤ h(x) ≤ g(x) para todo x en un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizás para x=a, y si*
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x),$$
>
> *entonces:*

ANÁLISIS

El texto se limita a citar el teorema sin ilustrar una situación gráfica ni la demostración o justificación, sin embargo, la experiencia docente nos muestra que al enseñar este teorema es costumbre presentarlo a través de la gráfica de tres funciones continuas, donde una de ellas "avanza" entre las otras dos de modo que resulte visualmente claro que si las dos que "emparedan" a la otra se acercan a un límite cuando x tiende a a, entonces la función emparedada debe tender a ese mismo límite. Por tanto, en relación con este teorema encontramos pertinente identificar las siguientes "demandas":

- Técnicas para la representación e interpretación de gráfica de funciones numéricas.
- Relaciones de orden entre funciones.
- Concepción de función como objeto.
- Representación simbólica propia de funciones.

4. Continuidad

[16] E. Swokowski, Cálculo con geometría analítica, Boston, USA, Ed Prindle, Weber & Schmidt, 1982, p. 69.

Al consultar algunos textos universitarios encontramos dos tipos representativos de presentación para el concepto y definición de continuidad; el primero se apoya sobre el concepto de límite y el segundo sobre el concepto de entorno. En ambos casos la aproximación al concepto se hace en el contexto gráfico. A continuación analizamos ambas presentaciones:

-A través del concepto de límite:

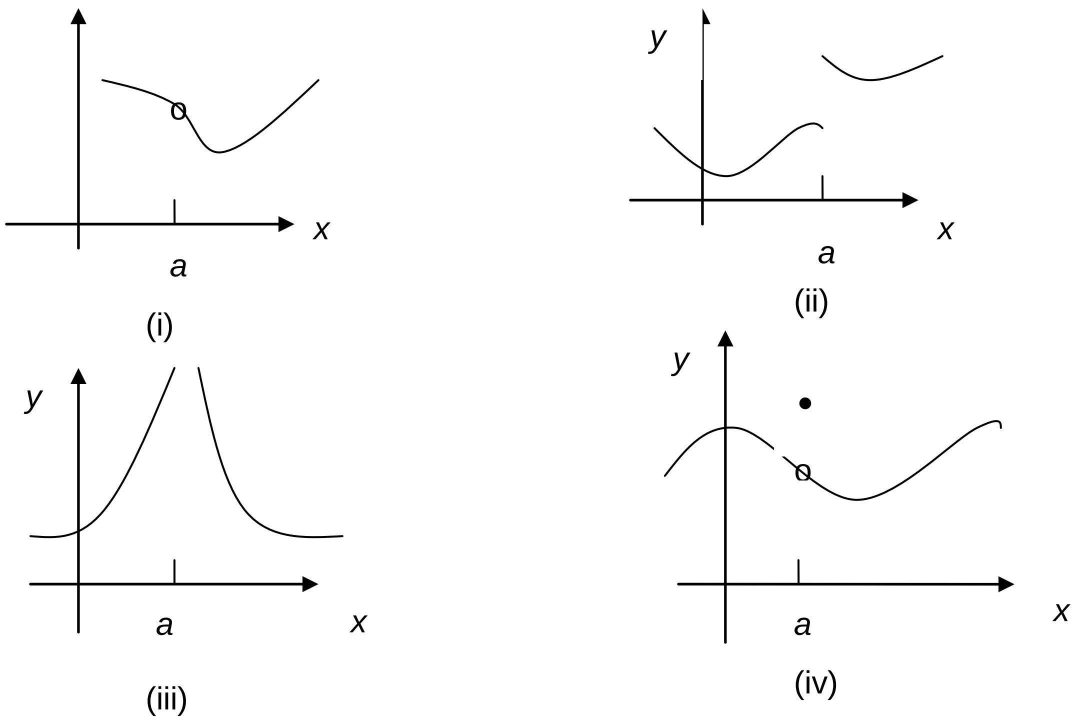
Es tradicional definir continuidad apoyándose en las tres condiciones clásicas que varios textos presentan como lo hace Swokowski (pag 75, 76, 77):

(2.27) DEFINICIÓN

Una función f es continua en un número real a si se satisfacen las tres condiciones siguientes.

- *(i)* *f está definida en un intervalo abierto que contiene a a.*
- *(ii)* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe.*
- *(iii)* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Estas condiciones se ilustran a través de la presentación de gráficas de funciones que no son continuas y exhiben, claramente, el incumplimiento de una o más de las tres condiciones:



ANÁLISIS

El concepto de función es demandado en los siguientes aspectos:

- Funciones numéricas definidas sobre intervalos reales.
- Valor numérico de una función.
- Función como objeto sobre el cual operar.
- Técnicas para la construcción e interpretación de gráficas de funciones numéricas, esto incluye todos los conceptos necesarios para este fin: variable dependiente e independiente, ordenada, abscisa, par ordenado, recta numérica, dominio, codominio, rango.

Los conceptos de variable dependiente y variable independiente resultan particularmente exigidos, poniendo en evidencia lo necesario de la conceptualización de la dependencia entre las variaciones de dos variables (valga la redundancia). Esto se puede identificar en una de las explicaciones que ofrece swokowski en la pag 76:

"...Otra manera de interpretar la continuidad de una función f es decir que una variación pequeña de x produce solamente una variación pequeña de f(x)

-A través del concepto de entorno:

En Apóstol (161), adicionalmente a la definición apoyada sobre el concepto de límite aparece la siguiente:

"Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ *existe un entorno* $N_2(p)$ *tal que*

$$f(x) \varepsilon N_1[f(p)] \text{ siempre que } x \varepsilon N_2(p)."$$

Esta presentación del concepto de continuidad exige del concepto de función:

- Concepción de función como objeto encapsulado en el símbolo *f.*
- Dominio, codominio y rango de una función vistos como subconjuntos de reales, susceptibles de representación sobre la recta numérica.
- Símbolos *f(x)* y *x* representando valores del dominio y del codominio de la función.

En cuanto a ejemplos y ejercicios referentes a continuidad de funciones, con frecuencia se utilizan funciones escalonadas o definidas por partes, como puede verse en el texto de Taylor and Wide (pag 74):

*"**Example 4.** Is the function F specified by*

$$F(x)=-2 \text{ for } x<0,$$

$$F(x)=2 \text{ for } x\geq 0$$

continuous at 0?"

Por tanto tenemos como demanda al concepto de función:

- Funciones escalonadas o definidas a trozos o por partes.

Función compuesta: esta demanda se hace evidente en el siguiente teorema (swokowski pag 80):

"(2.31)

TEOREMA

"Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *y f es continua en b, entonces*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \to a} g(x))"$$

Este teorema se acompaña de su demostración y de algunos ejemplos, pero esto no representa demandas adicionales a las ya identificadas.

Posteriormente se presenta el teorema del valor intermedio para funciones continuas y su corolario respecto a la existencia de ceros de una función. Demanda que no había aparecido hasta el momento (swokowski pag 82):

"(2.37) TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ *y si f(a) ≠ f(b), entonces f toma todos los valores entre f(a) y f(b) en el intervalo* $[a,b]$*.*

...Un corolario del teorema (2.37) es que si f(a) y f(b) tienen signos opuestos, entonces existe un número entre a y b tal que f(c)=0; es decir, f se anula (tiene un cero) en c"

- Ceros de una función

Algunos ejercicios remiten a funciones definidas mediante diferentes reglas (algebraicas) para diferentes partes del dominio (swokowski pag 83 y 84):

*“**30** sea*

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\neq 3 \\ 0 \text{ si } x=3 \end{cases}$$

¿Es f continua en 3? Explique su respuesta”

- Funciones definidas por partes, que es una generalización de las definición a rozos.

II. DERIVADAS

1. Introducción al concepto de derivada

Se suele introducir el concepto de derivada apoyándose en una situación física (generalmente el problema de la determinación de la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve en línea recta) o en una situación geométrica (el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto), en este último caso no identificamos demandas matemáticas al concepto de función adicionales a la identificadas hasta este punto del análisis; en el primer caso hemos identificado las siguientes:

- Variable (tanto dependiente como independiente).
- Relaciones entre variables (en particular variables físicas).
- Expresión algebraica de relaciones entre variables.

Para ejemplificar estas demandas citaremos algunos apartes del texto CALCULUS de Tom M. Apóstol (pags 193,194):

“Sea un proyectil lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45 m por segundo...Sea f(t) la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos

después...Experiencias físicas indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura f(t) viene dada aproximadamente por la fórmula

$f(t)=45t-5t^2$."

2. Definición de derivada de una función

El proceso de solución del problema anterior conduce entonces al límite de un cociente incremental que luego es definido como la derivada de una función y también se establece como la "función derivada". Este proceso demanda del concepto de función:

- Representación gráfica de funciones.
- Sistema simbólico propio de funciones.
- Valores de una función.
- Incremento o variación de una función.

Podemos constatar lo anterior en Apóstol (pag 195, 196):

"...El numerador de este cociente mide la variación de la función...Con lo que la definición formal de f'(x) puede establecerse del siguiente modo:

DEFINICIÓN DE DERIVADA. La derivada f'(x) está definida por la igualdad

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

con tal que el límite exista. El número f'(x) también se denomina coeficiente de variación de f en x."

3. Reglas de derivación

Posteriormente se presentan numerosos ejemplos que ilustran el proceso de encontrar la función derivada de funciones polinómicas, trigonométricas y radicales, concluyendo con los métodos de derivación correspondientes a cada caso, análogamente sucede con la derivada de la función suma, cociente y producto; esto presenta una nueva demanda al concepto de función:

- Álgebra de funciones: esto agrupa todo lo relativo a métodos de simplificación y operatividad entre funciones expresadas algebraicamente.
- Funciones elementales, trigonométricas, exponencial y logarítmica. En particular funciones numéricas expresadas mediante una fórmula.

4. Regla de la cadena

Aunque se trata de una regla mas de derivación, esta suele presentarse aparte de las demás por su carácter de dificultad puesto que requiere una perfecta claridad en cuanto a la composición de funciones. Tanto en su presentación como en su demostración, no identificamos nuevas demandas al concepto de función. En los ejercicios propuestos, no aparecen funciones adicionales a las ya identificadas en secciones anteriores.

5. Derivación implícita

La derivación implícita es una consecuencia de la regla de la cadena, así lo trata Apóstol de modo que, sin dedicarle un apartado especial, lo presenta con un ejemplo (Apóstol pag 219):

*"La ecuación $x^2+y^2=r^2$ se dice que define **y implícitamente** como función de x..."*

Esto no trae consigo demandas adicionales a las ya identificadas mas que la del propio concepto:

- Funciones definidas implícitamente.

III. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTALES

En los cursos de cálculo la función exponencial suele definirse como una integral y la función logaritmo como su inversa. Este tipo de definición asume la función como un objeto sobre el cual ya se opera. En todo caso surgen demandas matemáticas al concepto de función relativas a función como objeto y función como proceso. Las relativas a esta última concepción son prácticamente las mismas ya identificadas. En cuanto al proceso de derivación, es común que sus derivadas se presenten como simples definiciones apoyadas sobre la definición formal de las funciones trascendentes.

1. Función exponencial y función logarítmica

En cuanto a la función logarítmica en los cursos universitarios de cálculo es presentada como la integral de $\frac{1}{x}$ (Apóstol pag 281):

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

con respecto al concepto de función esto tiene como demanda matemática:

- Funciones definidas en términos de otras funciones: en este caso se trata de la función L(x) definida como la integral de otra función, también puede tratarse de la función derivada definida como el límite del cociente incremental de una función. Es importante aclarar que, para efectos de esta investigación, al referirnos a esta demanda, no nos interesan la integral o la derivada como demandas, si no el concepto de la definición de funciones de otras funciones.

Es consecuencia directa de esta definición que la derivada de la función logarítmica sea $\frac{1}{x}$. En esta parte aparece claramente la necesidad de que previamente se haya presentado el primer teorema fundamental del cálculo. Aunque esto no está previsto de esta manera en la parcelación esquemática representativa de un primer curso de cálculo diferencial e integral para estudiantes de ciencias e ingeniería, en que hemos apoyado nuestro estudio, es importante tener en cuenta las posibles demandas matemáticas que dicho teorema puede plantear al concepto de función:

Este teorema se presenta como la conexión entre la integración y la diferenciación a través del concepto de función inversa:

“...El tipo de relación entre estos dos procesos es en cierta forma semejante al que hay entre ‹‹elevar al cuadrado›› y ‹‹extraer la raíz cuadrada››. Si se eleva al cuadrado un número positivo y luego se busca la raíz cuadrada positiva del resultado, se vuelve al número original. Análogamente, si se calcula la integral de una función continua f se obtiene una nueva función (la integral indefinida de f) que después de derivada reproduce la función original f.” (Apóstol pag 247)

Por tanto se demanda:

- Función inversa.

También puede analizarse cómo se asume que la integral o la derivada de una función es otra función, es decir, que las funciones integrables (derivables) empiezan ya a constituirse en un conjunto “cerrado” para la integración (y la derivación) como ya lo fue para la suma, la multiplicación, el cociente y la composición:

- Álgebra de funciones.

En cuanto a los ejemplos y ejercicios referentes a la derivada y utilización de la función logarítmica, estos no presentan demandas adicionales a las descritas anteriormente.

El tratamiento que se le da a la función exponencial ratifica la demanda matemática de la función inversa, puesto que esta es presentada como el resultado del proceso de inversión de la función logarítmica

"...Por consiguiente podemos aplicar el proceso de inversión para definir y como función de x. la función inversa resultante se denomina ***función exponencial, o antilogaritmo****, y se representa por E." (Apóstol pag 296)*

Es de llamar también la atención sobre la relación existente entre las gráficas de funciones inversas y la composición de funciones inversas:

"El dominio de E es todo el eje real; su recorrido es el conjunto de números reales positivos. La gráfica de E, que se representa en la figura 6.6, se obtiene de la gráfica del logaritmo mediante una simetría respecto a la recta y=x. Puesto que L y E son inversas una de otra, se tiene

$L[E(x)]=x$ para todo x y $E[L(y)]=y$ para todo $y>0$." (Apóstol pag 296 y 297)

Por supuesto que esto requiere la inyectividad de las funciones exponencial y logarítmica, a fin de que sea posible la inversión, lo que desemboca también en la sobreyectividad y, por supuesto, en la biyectividad de funciones. Esto claramente nos lleva a identificar como demandas:

- Gráfica de funciones inversas o simetría de gráficas de funciones.
- Composición de funciones inversas.
- Función inyectiva.
- Función sobreyectiva.

En cuanto a la derivada de la función exponencial y sus ejemplos y ejercicios, a nuestro criterio, no presenta nuevas demandas al concepto de función.

2. funciones trigonométricas y sus inversas

En los cursos universitarios de cálculo el trabajo con las funciones trigonométricas parte de la existencia previa de los conceptos relativos a su definición, a sus inversas, a su dominio y a sus gráficas. Así que sus derivadas se determinan a partir de la definición de derivada y de algunas identidades que también se asumen conocidas. Por tanto tenemos como demandas al concepto de función:

- Funciones trigonométricas y sus inversas.

En cuanto a la derivada de las funciones trigonométricas inversas, se determinan tomando como herramienta el teorema referente a la derivada de funciones inversas:

"TEOREMA 6.7. Supongamos f estrictamente creciente y continua en un intervalo [a,b], y sea g la inversa de f. Si existe la derivada f'(x) y no es nula en un punto x de (a,b), entonces la derivada g'(y) también existe y no es nula en el correspondiente punto y, siendo y=f(x). Además, las dos derivadas son reciprocas una de otra; esto es, tenemos

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \text{(Apóstol pag 308 y 309)}$$

Este teorema trae consigo las siguientes demandas que no habíamos considerado hasta ahora:

- Función creciente y función estrictamente creciente (y, por supuesto, lo mismo para decreciente).En general toda la terminología de funciones monótonas, incluyendo versiones restringidas a intervalos incluidos en el dominio de la función.

VI. APLICACIONES DE LA DERIVADA

Las aplicaciones de la derivada, en los textos de cálculo, suelen apoyar su conceptualización inicial en propiedades gráficas de las funciones. También es relativamente común que se utilicen funciones cuya gráfica es físicamente imposible construir para ejemplificar situaciones en que la derivada no es aplicable. Sin embargo llama la atención que conceptos como función creciente, decreciente, máximos y mínimos de una función se presentan amarrados al concepto de derivada, de esa manera el estudiante tiende a asociarlos con tal concepto desligándolos del concepto de función.

1. función creciente y decreciente

La definición de función creciente y decreciente, nos ratifica las demandas relativas a los conceptos de dominio y rango y la representación gráfica de funciones. No consideramos que existan otras demandas al concepto de función. En el texto de Salas y Hille se muestra como ejemplo de función que no es creciente, ni decreciente ni constante, la función de Dirichlet (pag 169):

"4. En el caso de la función de Dirichlet

$$g(x)= \begin{cases} 1, \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no existen intervalos para los que la función crezca o decrezca. Para cualquier intervalo, la función salta entre 0 y 1, un número infinito de veces."

por tanto, tenemos como demanda:

- Función de Dirichlet. Como ejemplificación de funciones definidas por partes, o funciones con reglas de asignación diferentes para diferentes sectores del dominio.

2. máximos y mínimos relativos de una función
3. criterios de la primera y de la segunda derivada

El teorema relativo al criterio de la primera derivada para funciones crecientes y decrecientes, demanda la consideración de la derivada como una función y su sometimiento a criterios de orden, esto no representa novedad en nuestro estudio.

La definición de máximos y mínimos relativos de una función no trae consigo nuevas demandas matemáticas al concepto de función. Sin embargo pensamos que, con la finalidad de desligarlos del concepto de derivada e integrarlos al concepto del que se originan (el concepto de función), es conveniente incluirlos como demanda matemática a tal concepto a fin de incluirlos en la estructura teórico conceptual que propongamos.

- Máximos y mínimos relativos de una función.
- Máximos y mínimos absolutos de una función.

El criterio de la segunda derivada exige, de otra parte, en términos gráficos:

- Tangente a la gráfica de una función en un punto, es decir, se exigen estrategias propias del trazado e interpretación de gráficas de funciones Tal y como podemos constatarlo en Salas y Hille (pág. 176 y 177):

*“**4.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS***

Estrechamente relacionado con el tema que acabamos de estudiar, se encuentra el problema de determinar los valores máximos y mínimos de funciones...

Se dice que una función f posee un máximo local (o relativo) en c sii

$f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

Ilustramos estas nociones en las figuras 4.3.1 y 4.3.2. Una inspección cuidadosa de tales figuras sugiere que los máximos y mínimos locales tienen lugar solamente en aquellos puntos en que la tangente es horizontal [$f'(c)=0$] o donde no existe tangente [$f'(c)$ no existe]. Esto es lo que ocurre efectivamente."

4. trazado de curvas

Luego de expuestas las temáticas anteriores estas son utilizadas en el trazado de curvas, es decir, en el trazado de la gráfica de funciones.

Es costumbre establecer una serie de pasos a seguir en el trazado de las curvas, aplicando los criterios expuestos; esto trae consigo las siguientes demandas al concepto de función:

- intersecciones de la gráfica de una función con los ejes.
- Convexidad y concavidad de la gráfica de una función.
- Funciones pares e impares.
- Asíntotas.
- Dominio y codominio.

Como muestra de lo anterior, citaremos algunos apartes de Apóstol (pág. 231 y 232)

*"**4.18 Trazado de curvas***

...seguidamente es aconsejable situar los puntos (si existen) en los que la curva corta a los ejes coordenados...

Deberíamos también determinar los intervalos en los que f es monótona examinando el signo de f', y determinar los intervalos de convexidad y concavidad...

En este ejemplo, la función es impar, f(-x)=-f(x), con lo cual la gráfica es simétrica respecto al origen.

En el ejemplo anterior, la recta y=x es una asíntota de la curva..."

En el caso de cursos previos al cálculo, tales intervalos y puntos son importantes como elementos integrales de la gráfica de una función y deben abordarse de manera ilustrativa del comportamiento de una función. Por tal razón ratificamos su demanda.

5. problemas de aplicación de máximos y mínimos

Esta parte del cálculo está estrechamente relacionada con la ingeniería y las ciencias y con el surgimiento mismo del cálculo diferencial. La demanda para el concepto de función radica, fundamentalmente, en la expresión, mediante funciones, de problemas relacionados con estas áreas, la utilidad del concepto de función como medio para representar conceptos no matemáticos, es decir, lo que Álvarez ha llamado modelos socializados de matematización. Específicamente citamos las siguientes situaciones en que el concepto de función es demandado como elemento modelador:

- Expresión de perímetros, áreas y volúmenes

*"**27** Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas propano, en forma de un cilindro circular recto con un hemisferio en cada extremo. La capacidad deseada es de 2 m^3. ¿Cuáles son las dimensiones que requieren menor cantidad de acero?"* (Swokowski, pag 185)

- Expresión de fuerzas.

"EJEMPLO 5. Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta...Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible." (Apóstol, pag 235)

- Expresión de distancias, velocidades y tiempos.

*"**19.** Un camión ha de recorrer 300 km en una carretera llana a velocidad constante de x km por hora. Las leyes de circulación prescriben..."* (Apóstol, pag 238)

- Expresión de costos, utilidades e ingresos.

*"**20.** Un fabricante de artículos para alumbrado sabe que puede vender x lámparas de pie por semana a p dólares cada una, donde 5x=375-3p. El coste de producción es ($500+15x+1/5x^2$) dólares. Demostrar que el máximo beneficio se obtiene cuando la producción es de alrededor de 30 unidades por semana."* (Salas y Hille, pag 198)

6. la derivada como una razón de cambio

Este concepto vincula, como su nombre lo indica, la derivada con la razón entre el cambio de dos variables, se trata entonces de interpretarla como un coeficiente de variación. El concepto de función es demandado de manera similar a como ocurre con los problemas de aplicación de máximos y mínimos, pero adicionalmente es importante la demanda que hemos llamado

- covariación: hace referencia a funciones que puedan utilizarse como expresión de relación entre la variación de dos variables. Como puede verse en la siguiente cita en la cual se evidencia que la función derivada es demandada en dichos términos:

“En el caso más general de una función diferenciable y=f(x) la gráfica es una curva. La pendiente

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x)$$

nos sigue dando el coeficiente de variación de y con relación a x, aunque este coeficiente puede variar de un punto a otro.” (Salas y Hille, pag 129).

El concepto de covariación se hace aun más evidente en problemas de aplicación de diferenciales:

*“**23** La arena que chorrea de un recipiente, va formando un montículo cónico cuya altura siempre es igual a su radio. Use diferenciales para estimar el incremento del radio correspondiente a un aumento de 2 cm^3 en el volumen del montículo, cuando el radio mide 10 cm.”* (Swokowski pag 113)

Muchos de las situaciones problema en que se aplica el concepto anterior se refieren a coeficientes de variación por unidad de tiempo, es decir, funciones que expresan dependencia de alguna variable de la variable tiempo. Incluso algunos textos dedican expresamente un capítulo a estas situaciones:

*“**4.8 COEFICIENTE DE VARIACIÓN POR UNIDAD DE TIEMPO***

Vimos que la derivada de una función da su rapidez de variación. Supongamos ahora que f(t) representa alguna magnitud en el instante t. La derivada f’(t) da entonces el coeficiente de variación de la magnitud por unidad de tiempo” (Salas y Hille, pag 208)

Lo anterior nos perfila como demanda al concepto de función:

- Función como expresión de relaciones de dependencia entre una variable y el tiempo: los más comunes como función del tiempo son el volumen, la presión, la posición, la velocidad, la aceleración, la fuerza.

No identificamos nuevas demandas al concepto de función en esta sección.

7. antiderivadas.

Vimos más arriba que la función derivada se puede considerar como función de una función *f*:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La antiderivada es planteada como la función cuya derivada es *f’,* es decir, el problema inverso. Que también suele exponerse: *“Dada una función f, encuentre una función F tal que F’=f.”* (Swokowski pag 199) lo que ratifica la demanda matemática “función de otra función”, identificada anteriormente

Aparece trás de esta aclaración la necesidad de que el alumno se familiarice con la construcción de funciones cuyos dominios sean funciones, como via hacia la construccion de un concepto de función suficientemente general.

En esa misma línea de razonamiento, la no unicidad de las antiderivadas demanda del concepto de función

- El concepto de familias de funciones, demanda identificada anteriormente, pero que se hace aun más evidente en esta sección cuando se dice que la diferencia entre las antiderivadas de una función es una constante *c*:

“Las antiderivadas no son únicas. Como la derivada de una constante es cero, si F es una antiderivada de f entonces lo es también la función G definida por G(x)=F(x)+c para cualquier número c.” (Swokowski pag 200)

VII. LA INTEGRAL DEFINIDA

La construcción del concepto de integral definida trae consigo interesantes demandas al concepto de función. El proceso de sumas de Riemann, la definición de las alturas en tal proceso, etc traen implícitas funciones de dominio discreto que no se evidencian en el trabajo con los estudiantes pero lo dificultan.

Área

El problema del área es utilizado como introducción al concepto de integral, el área se propone como función de un conjunto en la que el dominio es una colección de conjuntos. Esta demanda al concepto de función aun no la habíamos identificado:

- Función de conjunto de conjuntos

"Desde el punto de vista puramente matemático, esto significa que se tiene una función a (función área) que asigna un número real a(S) (él área de S) a cada conjunto S de una cierta colección de conjuntos dada. Una función de esta naturaleza, cuyo dominio es una colección de conjuntos y cuyos valores son números reales, se llama función de conjunto." (Apóstol pag 71)

Se demanda también en esta sección el concepto de función escalonada, función suma, cociente y otras que no mencionamos por haber sido ya identificadas en páginas anteriores de este documento.

1. Definición de la integral definida
2. Propiedades de la integral definida

Apóstol (pag 92) define la integral definida de una función *f* como el área del conjunto de ordenadas de *f* sobre el intervalo de integración

"TEOREMA 1.10 Sea f una función no negativa, integrable en un intervalo [a,b], y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre [a,b]. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

A partir de esta definición aparece el concepto de “función integral” que no es más que una función antiderivada expresada ya como una integral:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

F(x) está definido a partir de la función *f*, es decir, demanda del concepto de función lo que hemos llamado

- función de una función, existe en este caso una manifiesta dependencia de la función F de la función *f,* la función es ahora un objeto matemático, por tanto:
- función objeto matemático, con el cual es posible conformar conjuntos que admiten operaciones y permiten la construcción de funciones definidas a partir de otras funciones. (C: función objeto matemáticos es un termino adoptado por la didáctica propio de la comprensión del sujeto.

Cuando matemáticamente se define por ejemplo suma entre funciones, matemáticamente esta dicho todo, pero desde la perspectiva de la apropiación personal de esta operación el sujeto debe poder visualizar o encapsular las funciónes como totalidades, es decir debe verlas como “objetos”. O sea, verlas como un objeto es una demanda que la apropiación de la operación le plantea al sujeto. Algo parecido ocurre cuando se define función derivada o función integral y esta correspondencia se quiere apropiar como una función cuyo dominio son funciones. En principio la comprensión de estos conceptos por parte del alumno combina una apropiación general del concepto de función con el concepto de derivada o de integral. Esta utilización del concepto de función, para construir la función derivada o integral seguramente se facilita si el estudiante está acostumbrado a construir funciones cuyo dominio sean funciones, y por lo tanto este problema es el que emerge como demanda al concepto de función.

En otros textos se define la integral definida como el límite de las sumas de Riemann, (Swokowski, pag 231)

*“***(5.16) DEFINICIÓN**

Sea f una función definida en un intervalo cerrado [a,b]. ***La integral definida de f desde a hasta b*** *denotada por*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

está dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_i f(wi)\Delta xi$$

siempre que el límite exista.”

En ese caso el concepto función es demandado desde la interpretación geométrica de la integral (más precisamente de la suma de Riemann y de su límite) y se trata del valor de una función como altura de los rectángulos de la partición, lo cual no representa una demanda adicional a las ya identificadas. Se ratifica también la demanda en cuanto a valores máximo, mínimo o valor promedio de una función en un intervalo.

- también puede identificarse como demanda función con dominio discreto, en este caso el dominio son los rectángulos

El concepto de función integrable no demanda tampoco nada adicional con respecto al concepto de función excepto

- función acotada

(Swokowski, pag 232) *“En consecuencia, si f es una función integrable en [a,b], entonces f es acotada en [a,b]*

En cuanto a las propiedades de la integral definida estas se deducen de las propiedades de las sumatorias y de las propiedades mismas de la suma y resta de funciones y de las relaciones de orden entre funciones, eso sí, teniendo muy claro aspectos relativos al dominio de las funciones. Por tanto no identificamos aquí nuevas demandas al concepto de función.

3. El teorema del valor medio para integrales definidas

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales definidas exige conceptos propios de la relación de orden entre funciones (desigualdad de funciones en un mismo intervalo del dominio, función positiva, las cuales son demandas ya identificadas).

El enunciado en si mismo del teorema establece la igualdad entre una integral definida y el producto de un valor de la función por la longitud del intervalo de integración, es demandado entonces el concepto de valor de una función y de su integral en un intervalo:

(Swokowski, pag 240)

*"**(5.29) EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES DEFINIDAS***

Si f es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces existe un número z en el intervalo abierto (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$$

Para efectos de nuestro estudio, nos interesa la demanda relativa al valor de una función, que ya fue identificada anteriormente. Y, en particular función como totalidad en capsulada en f,

4. El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo reviste particular complejidad para los estudiantes, en él se define una nueva función como la integral de otra función y la relación entre las variables es especialmente complicada de establecer. El concepto de función es exigido en su dualidad proceso-objeto.

Swokowski (pag 243) presenta el teorema fundamental del cálculo de la siguiente manera

“(5.31) EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b].

Parte I. *Si se define G como*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo x en [a,b], entonces G es una antiderivada de f en [a,b].

Parte II. *Si F es una antiderivada de f, entonces* ,,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Al definir, en la **Parte I**,

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

como una función con dominio en el intervalo cerrado [a,b] es demandado el concepto general de función y, además, el concepto de función definida a partir de otra función, demandas ya identificadas anteriormente.

La interpretación y demostración del teorema no trae consigo demandas adicionales a las identificadas anteriormente: suma de funciones, igualdad de funciones.

5. Integrales indefinidas

Se trata ahora, básicamente de encontrar antiderivadas para funciones conocidas:

(Taylor and Wade, pág. 284) *"That is, if S is an intervalo or a unión lf intervals and if G is a function for which G'(x)=F(x), x ε S, we write*

$$\int F(x)dx = G(x) + k$$

Where k is any real number, and we call

$$\int F(x)dx$$

an indefinite integral of F(x);*"*

Nuevamente es demandado el concepto de familia de funciones pero ahora con más fuerza, puesto que, entrada la solución de una integral indefinida es una familia de funciones y estas ya constituyen objetos matemáticos.

La determinación de integrales indefinidas viene acompañada de tablas de integrales y métodos de integración, entre ellos escogemos los dos que creemos representativos por cuanto otros métodos no son más que aplicaciones de estos:

-integración por partes

Este método demanda operaciones con funciones (suma, producto, potenciación, radicación de funciones numéricas y/o trascendentes) que ya identificamos como demandas matemáticas al concepto de función y que constituyen un álgebra de funciones. Como muestra de una de estas integrales citamos a Taylor and Wade (pág. 290):

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - k$$

-integración por sustitución o por cambio de variable

La integración por sustitución es aplicable para aquellas integrales indefinidas en que la función a integrar es la derivada de una función compuesta. Obviamente tenemos este concepto como demanda al concepto de función, pero teniendo en cuenta todas las restricciones relativas al dominio de las funciones compuestas:

(Swokowski pág. 251)

"suponga que F es una antiderivada de una función f, de manera que F'=f. Además suponga que g es otra función derivable tal que g(x) está en el dominio de F para todo x en algún intervalo cerrado [a,b]. Podemos ahora considerar la función compuesta definida por F(g(x)) para todo x en [a,b]. Aplicando la regla de la cadena y el hecho de que F'=f obtenemos

$D_x F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x).$

Esto a su vez nos da la fórmula de integración

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Por lo demás no identificamos nuevas demandas al concepto de función en esta última sección de la parcelación esquemática representativa en que nos hemos apoyado.