ESTADOS DE COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI ASOCIADOS CON EL CONCEPTO DE DERIVADA

GIOVANNI MOISÉS ÁLVAREZ SERNA
Código: 0303359

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

ESTADOS DE COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI ASOCIADOS CON EL CONCEPTO DE DERIVADA

GIOVANNI MOISÉS ÁLVAREZ SERNA, 1977
Código: 0303359

Informe final de investigación, como requisito para optar por el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática

DIRECTORES
Jairo I. Álvarez Gaviria, PhD
César A. Delgado García, PhD

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 21 de Octubre de 2011

ESTUDIANTE: GIOVANNI MOISÉS ALVAREZ SERNA - CODIGO: 0303359

TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:

"ESTADOS DE COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI ASOCIADOS CON EL CONCEPTO DE DERIVADA"

DIRECTOR DE TESIS: Profesor JAIRO IVÁN ALVAREZ GAVIRIA

EVALUADORES: Profesor LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO
Profesor EVELIO BEDOYA MORENO

COMENTARIOS DE LOS JURADOS

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
2011 OCT. 21
COORDINACIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

APROBADO X
APLAZADO ____
RECHAZADO ____

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. JAIRO IVÁN ÁLVAREZ GAVIRIA
Director de Tesis

Prof. LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO
Jurado - Evaluador

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
Jurado - Evaluador

A Dios por acompañarme en cada uno de mis pasos y darme fortaleza,

A mi amada esposa Mónica, gracias por su paciencia, apoyo y amor incondicional,

A mi preciosa hija María Juliana, que alegra cada día con su sonrisa y dulzura,

Al nuevo ser que está en gestación, otra bendición para mi vida,

A mis padres Moisés y Rosalba por su preocupación, colaboración y buen ejemplo,

A mi hermana Rosmery y mis sobrinos Karen y Juan Esteban, los quiero mucho,

A mi tía Arcely Toro, por su preocupación para conmigo y su cariño sincero.

AGRADECIMIENTOS

Mi más amplio agradecimiento para el PhD. Jairo I. Álvarez Gaviria, por su valiosa orientación en todo momento y su apoyo para la conclusión de este trabajo, al PhD César A. Delgado García por sus enseñanzas, ambos directores de este trabajo de investigación. Así mismo quiero expresar mi reconocimiento a mis compañeros y amigos Ginno Campaña Castellanos y María Cristina Velasco Narváez por sus valiosos aportes para mejorar la presente investigación.

A la Pontificia Universidad Javeriana seccional Cali por la colaboración brindada en muchos aspectos de este proceso. Y claro esta a mi Universidad del Valle.

Culmino este proyecto gracias al apoyo que me otorgaron y al cariño que me inspiran mi esposa Mónica Rincón, mi hija María Juliana, mi nuevo bebe, mis padres Moisés y Rosalba, mi hermana Rosmery y mis sobrinos Karen y Juan Esteban, mi tía Arcely y mis suegros Fernando y Zoraida.

También tengo siempre presentes a todos mis familiares y amigos, a mis maestros, compañeros, estudiantes y a quienes siempre me han enseñado algo, los cuales son muchos y no podría enumerarlos íntegramente.

CONTENIDO

RESUMEN

En este trabajo se caracterizaron estados de comprensión, alcanzados por estudiantes de ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana seccional Cali (Javeriana-Cali), asociados con el concepto de derivada.

Para lograr este propósito se caracterizó una Estructura Teórico Conceptual (ETC), asociada con el concepto de derivada, subyacente en la propuesta del texto de Larson (2006), que se utiliza como guía para la enseñanza del concepto Derivada. Esta estructura se tomó como referencia para identificar el conjunto de actos de comprensión que la apropiación de dicha estructura le plantea al alumno y, mediante el cual, se caracteriza la comprensión básica de derivada en dicho contexto curricular. Con base en estos elementos, se construyó un instrumento de observación que finalmente se aplicó a un grupo de estudiantes. Utilizando los conceptos de planos y ejes de referencia para la comprensión de un concepto y de estado de comprensión, se caracterizaron, desde una perspectiva teórica, los posibles estados de comprensión y, desde una perspectiva empírica, con base en las producciones de los alumnos, los estados de comprensión que realmente alcanzaron los estudiantes de la población objeto de estudio.

Dichos análisis revelan que en la población de estudiantes de la Javeriana, están presentes problemas similares a los que se reseñan en la literatura internacional respecto del aprendizaje del concepto de derivada, en particular no tienen una interpretación conceptual de derivada, su identificación es operacional, su aprendizaje presenta vacíos en la apropiación de las versiones físicas y geométricas de la derivada y de su articulación con las versiones analíticas. Igualmente se identifican trazas de algunos de los problemas epistemológicos asociados con el desarrollo histórico del concepto de derivada.

Palabras Clave: Estructura teórico conceptual, actos de comprensión, estados de de comprensión.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo, inscrito en la línea de investigación Formación Matemática en Contextos Curriculares, de la maestría en Educación énfasis en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, está relacionado con aquellos estudios que abordan la problemática referida a la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos básicos, en especial del cálculo diferencial e integral.

El desarrollo de este proyecto se orientó a identificar en qué medida los estudiantes de Ingeniería de la Javeriana-Cali apropian el concepto de derivada después de tomar un primer curso de cálculo, que es enseñado utilizando el texto de Larson et al. (2006). Como es bien sabido, el cálculo diferencial se construye en términos del concepto de derivada, por lo que las deficiencias en su aprendizaje van a repercutir negativamente en el aprendizaje del cálculo, asignatura central del currículo de las carreras de ingeniería. El interés por realizar este estudio, como se indica en la sección de antecedentes, tiene que ver con los bajos niveles de comprensión que se están evidenciando en nuestros cursos de cálculo, lo que a su vez parece ser expresión de una realidad internacional, tal como se desprende de estudios realizados por diferentes autores (Cantoral, 1988; Dolores, 1998; Orton, 1977; Sierpinska, 1985). Al caracterizar, en términos matemáticos y cognitivos los problemas que se presentan en el aprendizaje de la derivada, entre nuestros alumnos, podremos intentar ajustes en nuestra enseñanza que propicien entre ellos una mejor comprensión de los temas del cálculo.

La motivación inicial para afrontar un trabajo en este campo y en particular con el concepto de derivada, las preguntas mediante las cuales formulamos el problema de investigación y los objetivos mediante los cuales se operacionalizan aparecen en el capítulo 1.

En el capítulo 2, se presentan los planteamientos teóricos y conceptuales desde los cuales formulamos el problema y abordamos su solución. Estos planteamientos toman como fundamento las referencias bibliográficas: Álvarez y Delgado (2001), Álvarez (2009), Sierpinska (1992), Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991).

Siguiendo a (Álvarez, 2009) se describe que es una Estructura Teórico Conceptual (ETC). "El concepto de ETC se podría entender como un planteamiento de corte epistemológico, respecto de los elementos constitutivos del discurso matemático" y, desde esta perspectiva define un constructo mediante el cual se puede caracterizar un saber matemático que subyace a una propuesta de enseñanza. En nuestro caso, la propuesta de enseñanza sobre la derivada y está referida al Texto de Larson et al. (2006).

Siguiendo a (Álvarez y Delgado, 2001; Sierpinska, 1992; Tall y Vinner, 1981 y Vinner, 1991), se trabajan los planteamientos sobre el papel de la definición en la comprensión de un concepto y sobre lo que en definitiva significa comprender un concepto. Elementos de estos planteamientos subyacen a los planteamientos en (Álvarez, 2009), que afirman que una ETC puede funcionar como un referente de sentido y significado matemático de un concepto y que la comprensión de un concepto puede estar referida a una ETC que se identifica para tal fin. En este sentido, la comprensión de un concepto es relativa y puede variar según la ETC de referencia. Introduciendo conceptos como *planos de comprensión, estados de comprensión*, que no son otra cosa que conjuntos estructurados de actos de comprensión, *marco interpretativo*, Álvarez, J., afirma que la comprensión de un concepto se puede caracterizar como un conjunto de actos de comprensión, entendidos como demandas cognitivas, que la apropiación de la ETC, le plantea al sujeto que aprende. Y que tales conjuntos de actos de comprensión se pueden estructurar en dos planos de referencia para la comprensión del concepto, uno referido a la comprensión de la definición y el otro a la apropiación del marco interpretativo. La metodología que se pone en marcha para aplicar estos planteamientos al caso de derivada, se describe en el capítulo 3.

El desarrollo que conduce a la determinación de los estados de comprensión que los alumnos de ingeniería de la Javeriana-Cali alcanzan respecto del concepto de derivada, después de estudiar un curso de cálculo con el texto Larson et al. (2006), pasa por las siguientes fases:

- La identificación de la ETC subyacente a la propuesta de enseñanza del texto, que se realiza en el capítulo 4 y con lo cuál se materializa el logro del objetivo 1.

- La construcción del instrumento mediante el cual se proponen indicadores que permitan inferir si un estudiante, según sus respuestas, ha alcanzado o no un determinado acto de comprensión y la verificación de pertinencia de la situación problemática, todo lo cual se realiza en el capítulo 5. Estos indicadores articulados con los planteamientos referentes a los planos de comprensión de un concepto, permiten identificar los posibles estados de comprensión a los que puede acceder el sujeto.

- El análisis de las producciones de los alumnos, en los cuales se confrontan que estados de comprensión alcanzan realmente los estudiantes. Este desarrollo se consigna en el capítulo 6, logrando así el segundo objetivo del presente trabajo.

Finalizamos el desarrollo de este trabajo describiendo los resultados obtenidos y las conclusiones en el capítulo 7.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. Antecedentes

Este trabajo de investigación tuvo su motivación inicial en la preocupación por el bajo nivel académico de los estudiantes de los primeros cursos de cálculo universitario que dirijo como docente en la Javeriana-Cali, a raíz de la poca comprensión de conceptos matemáticos. Esta motivación fue afianzada con la lectura de reportes internacionales sobre el tema.

El problema se plantea en torno a la realidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el ámbito universitario en nuestro país, para buscar explicaciones al fenómeno de los bajos niveles de comprensión conceptual que se pone en evidencia cuando los estudiantes son retados a usar los conceptos en tareas no rutinarias. Se trata entonces de indagar por las variables ligadas, bien a la naturaleza del conocimiento matemático o, bien al funcionamiento cognitivo o a la transposición didáctica, para establecer algunas de las causas de este fenómeno didáctico.

En mí práctica profesional he podido evidenciar algunas manifestaciones del fenómeno que acabamos de plantear. Por ejemplo, al realizar cálculos que involucran el concepto de derivada:

Ejemplo 1: Cuando a los estudiantes se les pide, hallar la derivada de la función $y = x^{2x}$, muchos de ellos, al indagarlos, han obtenido entre otros, los siguientes resultados: $1)\ y' = 2x.x^{2x-1}$ o $2)\ y' = 2x^{2x}$. En las respuestas se observa que los estudiantes no analizan las características que tiene dicha función y realizan generalizaciones abusivas de reglas que son válidas, bien para funciones polinómicas (primer caso) o para funciones exponenciales (segundo caso).

Ejemplo 2: Al interrogar a los estudiantes, ¿cuál es la derivada respecto a x de una de las funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 9$?, algunos responden $y' = 2x + 2y = 0$. Aquí podemos observar que los estudiantes aplican las reglas de diferenciación mecánicamente, de nuevo realizando generalizaciones abusivas, sin ser concientes del problema. Sin embargo, al cambiar la representación inicial de la ecuación por $x^2 + [f(x)]^2 = 9$, la respuesta de muchos cambia por $2x + 2f(x)f'(x) = 0$ donde $f'(x) = -x/f(x)$, obteniendo una respuesta correcta. Esta vez notamos la potencia que tiene la representación en las acciones del sujeto, pero el problema de fondo se podría ubicar en la comprensión del concepto de función, sus relaciones con el concepto de ecuación y la forma como se pueden hacer transformaciones en su forma de representación.

Los ejemplos llamaron mi atención, pues permiten poner en evidencia que la apropiación de un concepto, en muchas ocasiones, es la aplicación ciega de un algoritmo, pues no contempla la clase de funciones que de acuerdo a la definición son derivables de una u otra forma, además surge la inquietud respecto a la inercia que lleva a usar un cálculo sin consultar las condiciones para ser realizado.

No se trata de un simple descuido, pues es un comportamiento observado en colectivos de estudiantes (no sólo de nuestro país) que a pesar de las explicaciones y recomendaciones caen en el error y además tienden a aceptar las respuestas como una rutina que no requiere validación y por ello las aceptan, sin que ello lleve a preocupación.

Lo anterior puede estar siendo determinado tanto por las dificultades intrínsecas al conocimiento mismo (los obstáculos epistemológicos) como aquellos que son propios de los fenómenos asociados a la transposición didáctica (como el método de enseñanza, el enfoque, la influencia de los textos, etc.), que también pueden obstaculizar o incluso dejar de lado la comprensión de los conceptos.

En relación con nuestro problema, algunas investigaciones internacionales (Cantoral, 1988; Sierpinska, 1985) han contribuido a reconocer las dificultades en la comprensión de los conceptos básicos del cálculo, reportando que en sus cursos los estudiantes logran un dominio *razonable* de los algoritmos para calcular límites y derivadas, pero tienen dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada y éstas son aún mayores en la resolución de problemas.

Algunas dificultades ligadas al concepto de derivada, según Dolores (1998), que han sido detectadas por los investigadores son:

- ✓ *La concepción griega de tangente desarrollada por los estudiantes desde sus estudios primarios*. Dificulta la formación de este concepto por la vía geométrica (Cantoral, 1988; Dolores, 1989), ya que puede obstaculizar el paso de una concepción *global* a una concepción *local* (propiedad fundamental del cálculo), puede dificultar la aceptación de que la recta tangente, además de *tocar*, pueda *cortar* a la curva y ser tangente en la *zona* del corte. El carácter estático de la determinación de la tangente en la Geometría Euclidiana, pues es dada como un lugar geométrico, también puede dificultar el arribo a una concepción dinámica como sucesión de secantes.
- ✓ *Las consideraciones de la derivada como un límite.* En Orton (1977), se han obtenido evidencias de lo difícil que es comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga *realmente* la tangente. A partir del estudio de los obstáculos epistemológicos, en el plano histórico y con grupos pequeños de estudiantes, en Sierpinska (1985) se señala que los estudiantes manifiestan cierta tendencia a evadir los procesos infinitos, son proclives a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, consideran el límite sólo como una *aproximación*, presentan serios obstáculos con el manejo de la simbología matemática utilizada, consideran que el límite se obtiene simplemente evaluando la función en el punto deseado.

Tomando en cuenta las dificultades mencionadas, Dolores (1998), realizó un estudio que tratara de reflejar lo que realmente los estudiantes *aprenden* acerca del concepto de derivada en sus cursos normales. Para tal efecto se diseñó y aplicó un cuestionario el cual contiene 8 preguntas que, para el análisis de las respuestas, fueron organizadas en dos grupos: el primero explora ideas precedentes a la derivada, y el segundo, explora ideas directamente relacionadas con este concepto. En el primer grupo se explora la cuantificación simple de la variación y la velocidad media, el segundo grupo de preguntas explora las ideas de los estudiantes acerca de la derivada como un límite, como pendiente de tangentes y como velocidad instantánea.

Los resultados que se obtuvieron de la aplicación del cuestionario muestran una escasa presencia en los estudiantes de las ideas relativas a la variación, pues solamente el 24% contestó correctamente a las preguntas que se refieren a la cuantificación de la variación y a la velocidad media. Los estudiantes se mostraron incapaces de reconocer que, mediante la posición límite de la secante (tangente), se puede obtener la derivada de una función a partir del esquema comúnmente utilizado por los profesores de cálculo; en cambio, casi el 50% de los estudiantes contestaron que la derivada *se mide* en dos puntos y no en uno solo; solamente el 17.8% la contestaron correctamente. La mayoría manifiestan confusiones entre la derivada en un punto y el valor de la función en el mismo; los procesos infinitos parecen estar ausentes en sus concepciones sobre la derivada y, además, también se notan confusiones entre la pendiente de la tangente y la velocidad instantánea con el valor de la función.

De todo lo anterior resulta importante, tanto desde la perspectiva del desarrollo de la Educación Matemática como disciplina, como desde las necesidades que plantea la búsqueda de maneras más efectivas y eficientes para la enseñanza de las matemáticas en nuestro medio, explorar, con cierta sistematicidad, la mediación del texto en la construcción de significados en el aula.

En esta dirección pretendemos, en primer lugar, estudiar y analizar la presentación del concepto de derivada en el texto de Larson, que sirve de guía en cursos de cálculo en diferentes universidades, en particular en las carreras de ingeniería de la Javeriana-Cali. Y, en segundo lugar, contrastar este análisis con lo que realmente están construyendo los alumnos después de haber estudiado un curso de cálculo diferencial.

La importancia de nuestra investigación, sobre el texto escolar y su mediación en la construcción de significados, radica en los elementos que puede aportar a las líneas de investigación que trabajan en diseños de ingeniería didáctica en torno a los conceptos del cálculo y en particular a aquellas que se ocupan de los problemas sobre la comprensión de la derivada.

2. Planteamiento del problema

El concepto de derivada es central en los programas de un primer curso de cálculo universitario y, a pesar de los esfuerzos por mejorar su enseñanza, los estudiantes logran calcular derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el porqué de esos algoritmos y el significado del concepto. La gran mayoría no logra asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación. Este problema no es exclusivo de nuestro país, se presenta a nivel mundial, documentados por reconocidos autores (Cantoral, 1988; Dolores, 1998; Tall y Giraldo, 2002).

El problema planteado tiene una explicación generalizada por parte de muchos profesores, en la que a veces el estudiante es el único protagonista, ya sea por descuido o por los inadecuados métodos que adoptan para el estudio del cálculo diferencial. Ahora, esta explicación ingenua tiende ha cambiar, gracias a los resultados de las investigaciones en Educación Matemática que muestran varias de las causas que provocan la escasa comprensión del concepto de derivada. Así, por ejemplo: 1) En el terreno epistemológico, dificultades ligadas a la naturaleza misma del objeto matemático. 2) Las relativas a las distintas formas de representación semiótica que se utilizan en el cálculo, en especial la simbólica y la gráfica. 3) Un aprendizaje algorítmico centrado en lo operativo (reglas generales de derivación), con muy poca consideración por lo conceptual, minimizando su significado geométrico y reduciendo casi totalmente su relación con los problemas de la variación.

Esta causa puede estar siendo determinada por un énfasis equivocado en la enseñanza del cálculo y estas causas motivan nuestra investigación con los alumnos de ingeniería y el texto utilizado como guía en el curso cálculo diferencial en la Javeriana-Cali. Específicamente queremos caracterizar una estructura teórico conceptual (ETC) subyacente a la presentación del concepto de derivada en el texto y caracterizar estados de comprensión alcanzados por estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, asociados al concepto de derivada después de estudiar el curso de cálculo diferencial, utilizando el texto de Larson como guía. Nos interesa verificar si entre nuestros estudiantes se presentan las mismas restricciones y desadaptaciones que las reportadas internacionalmente, y, en qué medida, estos problemas pueden tener su origen en las restricciones que impone, a la enseñanza y al aprendizaje, la elección y seguimiento de un determinado texto en el desarrollo del curso.

Las preguntas de nuestro problema de investigación se concretan de la siguiente manera:

- ✓ ¿Qué grados de comprensión alcanzan los estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, asociados al concepto de derivada después de estudiar el curso de cálculo diferencial, guiado por el texto "Cálculo, de Larson, Hostetler, Edwards, octava edición" y cómo se pueden caracterizar tales grados de comprensión?

- ✓ ¿Cómo se podrían caracterizar los referentes matemáticos que permitan determinar los grados de comprensión que alcanzan los alumnos, asociados al concepto de derivada después de estudiar un curso, guiado por el texto "Cálculo, de Larson"?

- ✓ ¿Qué significa alcanzar una comprensión básica de derivada?

3. Objetivos de la investigación

3.1 Objetivo general.

Identificar los niveles de apropiación que alcanzan estudiantes de la Javeriana-Cali respecto al concepto de derivada cuando estudian un primer curso de cálculo y proveer información empírica que permitan reorientar los énfasis de la enseñanza de tal concepto en la Javeriana-Cali y, en general, a nivel universitario.

3.2 Objetivos específicos.

1. Caracterizar una ETC, subyacente a la propuesta de enseñanza del concepto de derivada en el texto "Cálculo, de Larson, Hostetler, Edwards, octava edición" [1], que sirva como referencia para:
   i) Caracterizar un estado básico de comprensión de derivada deseable, en estudiantes que toman un primer curso de cálculo.
   ii) Establecer estados de comprensión en alumnos de la Javeriana-Cali que estudian dicho texto.

2. Identificar y caracterizar estados de comprensión alcanzados por estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, asociados al concepto de derivada después de estudiar el curso de cálculo diferencial, utilizando el texto de Larson como guía.

[1] Texto de referencia para el curso Cálculo diferencial en la Javeriana-Cali a partir del primer periodo del año 2009.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo tiene como propósito presentar los planteamientos teóricos que ayudarán a entender el desarrollo de la investigación al estudiar la problemática planteada. Como se ha planteado en la formulación del problema, interesa determinar qué grado de comprensión alcanzan los estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, asociado al concepto de derivada después de estudiar el curso de cálculo diferencial, guiado por el texto de Larson et al. (2006) y cómo se pueden caracterizar los referentes matemáticos que permitan determinar los grados de comprensión que alcanzan dichos alumnos.

La tesis, en la formulación del problema y en su desarrollo metodológico, se apoya en los planteamientos consignados en (Álvarez, 2009), en el que se introduce el concepto de *Estructura Teórico Conceptual* (ETC) y se hacen planteamientos en torno al papel que pueden cumplir las ETC como referente en la comprensión de un concepto. Con este fin se introducen los términos *planos y ejes de referencia para la comprensión de un concepto* y *estados de comprensión* y se caracteriza la comprensión de un concepto, desde la perspectiva de las matemáticas, como un conjunto de actos de comprensión que se estructuran según dos planos de referencia: el significado matemático del concepto, dado por la definición, y el marco interpretativo del mismo. Tales planteamientos tienen puntos de contacto e inspiración con los planteamientos que aparecen en Sierpinska (1992), sobre comprensión de un concepto, en especial sobre obstáculos epistemológicos y actos de comprensión y, en Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991) sobre el papel de la definición en la comprensión de un concepto y concepto imagen como requisito en la apropiación personal del mismo. Planteamientos a los que se hace referencia en este marco teórico. Se presentan también algunas consideraciones sobre los conceptos de *definición personal estable*, *definición personal bien adaptada matemáticamente* y *definición personal coherente* introducidas por Álvarez y Delgado (2001) con el fin de ampliar algunos de los planteamientos de Tall y Vinner en lo concerniente al estudio de problemas que se presentan en el aprendizaje conceptual y que se agrupan bajo la denominación "La problemática Tall-Vinner".

1. La definición en la comprensión conceptual

Una pregunta central al tratar de entender que significa comprender un concepto está relacionada con el papel de la definición en dicha comprensión. En esta sección interesa explorar diversos planteamientos sobre dicha relación. Nos centramos principalmente en los planteamientos de (Álvarez y Delgado, 2001; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Shlomo Vinner afirma que el conocimiento de la definición matemática del concepto, por sí sola, no garantiza su comprensión, pero es importante en los procesos de solución de situaciones problema en contextos técnicos como el matemático y por tal razón es necesario que los estudiantes adquieran conciencia de la importancia de consultar la definición formal del concepto en dichos procesos (Vinner, 1991).

En sus trabajos se apoya en lo que denomina, junto con David Tall, *concept image* (concepto imagen C.I), *"la estructura cognitiva total, en la mente de un individuo, asociada con cierto concepto matemático, constituida por todas las representaciones mentales, descripciones verbales, procesos y propiedades asociadas a dicho concepto"* (Tall y Vinner, 1981). El cual en interacción con la definición interviene en la formación del concepto en la estructura cognitiva del sujeto y en dicho proceso diferencia entre contextos cotidianos y contextos técnicos.

Destaca que en contextos cotidianos, usualmente no acudimos a la definición de los términos presentes en ella para comprender una frase. Esto sucede porque en dichos contextos los términos no los hemos conocido a través de una definición, si es que la tienen, si no a través de su uso. Los contextos técnicos, por el contrario, imponen situaciones en las que no consultar la definición puede llevar a resultados inadecuados.

Afirma además, que cuando se intenta enseñar un concepto a partir de su definición y de ejemplos, se pueden generar algunas desadaptaciones en el aprendizaje conceptual, puesto que el C.I que construye el sujeto con frecuencia no refleja todos los aspectos del concepto, pero esta situación puede superarse si se tiene conciencia de la necesidad de una interacción de largo plazo entre la definición y el C.I, favorecida por la presentación de suficientes situaciones y ejemplos que cubran toda la generalidad de la definición.

Un problema de enseñanza de las matemáticas subyace en estos planteamientos, sobre la definición y el pensamiento matemático, relacionado con tratar de cambiar los hábitos de pensamiento en los alumnos, trabajando situaciones que hagan que sus acciones consulten la definición.

De acuerdo con los planteamientos anteriores Tall y Vinner afirman que:

> "La comprensión de un concepto está referida a la construcción de un concepto imagen por parte del alumno" (Tall y Vinner, 1981)

Pero debido a la complejidad e inmensidad de esta estructura (C.I) y a su continuo desarrollo a lo largo de los años es difícil conocerla en su totalidad, sólo se puede dar cuenta de ella cuando los individuos se ven enfrentados a una situación que involucra cierto concepto matemático a través del *concepto imagen evocado* (C.I.E) definido como *"la porción del concepto imagen la cual es activada en un caso particular"*. Este C.I.E puede diferir, aunque involucre el mismo concepto, dependiendo de la situación a la cual se vea enfrentado el estudiante.

Otra definición dada por los autores, (y que desempeña un papel importante en el estudio de problemas relacionados con la comprensión conceptual) se refieren a la definición personal en contraste con la definición institucional de un concepto *"la verbalización que utiliza un sujeto para dar su propia explicación del C.I.E"* esta se conoce como definición personal del concepto (D.P), la cual puede diferir de la *"definición del concepto socialmente establecido y compartido* *por la comunidad matemática”* definido como definición formal o institucional del concepto (D.F).

Así los tipos de problemas que son estudiados por Tall y Vinner respecto a la comprensión conceptual, utilizando los conceptos definidos anteriormente se resumen de la siguiente manera:

- ✓ El C.I mirado como un todo puede presentar incoherencias, al activarse o ponerse en juego en diferentes situaciones.

- ✓ Entre el C.I que construye el sujeto y el concepto matemático institucional se pueden presentar desadaptaciones relativas a la forma en que el sujeto apropia el significado socialmente compartido del concepto matemático.

- ✓ Es frecuente que los estudiantes no dispongan de la D.P de un concepto matemático que han estudiado; pero aún en el caso de tenerla, y aún si la definición que verbalizan concuerda con la D.I, ella puede estar desarticulada del correspondiente C.I sin que tenga efectos en la acción del sujeto.

En su trabajo, que toma como punto de partida los planteamientos de Tall y Vinner, (1995) (Álvarez y Delgado, 2001) hacen referencia a los problemas que presenta el conocimiento conceptual como “Problemática Tall – Vinner”.

Al estudiar está problemática con el concepto de función se encontraron otros tipos de problemas, los cuales permiten introducir los términos que presentaremos a continuación, ya que en nuestro trabajo encontramos algunos de estos problemas con el concepto de derivada.

Una D.P relativa a un concepto matemático, es *estable* en la medida en que la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones. Una D.P estable se llama *bien adaptada matemáticamente* si es equivalente a la D.F del concepto. La *coherencia* de la definición se refiere al grado de articulación que tiene la D.P con la acción del sujeto, es decir con el C.I.E, cuando el estudiante argumenta y opera con el concepto. Es decir, la definición controla la acción del estudiante en las situaciones pertinentes. Se dice que la definición es *global* cuando está referida a distintos contextos y *local* cuando está referida a un solo contexto o situación.

Los autores afirman que una D.P estable, bien o mal adaptada, no necesariamente es coherente, y por otro lado una D.P estable mal adaptada puede ser coherente.

De todo lo anterior para Álvarez y Delgado el papel de la definición es central, pues la convierte en un elemento que da coherencia a las distintas partes del concepto personal que son evocadas en diferentes contextos, por lo que es importante la articulación entre la definición personal y el concepto personal como un todo. De esta manera proponen un afinamiento del planteamiento de Tall y Vinner sobre la comprensión de un concepto.

> "Comprender un concepto implica construir un concepto imagen asociado con el concepto, bien constituido matemáticamente, en la medida que el sujeto dispone de una definición personal estable del concepto, coherente y bien adaptada a la definición matemática del concepto." (Álvarez y Delgado, 2001)

2. Obstáculos epistemológicos y actos de comprensión

Anna Sierpinska plantea que la comprensión de un concepto no es un proceso continuo al afirmar que, "Solamente cuando hemos visto ejemplos de lo que es y de lo que no es el objeto definido, cuando podemos decir que éste es y ése o aquel no es, cuando tenemos conciencia de sus relaciones con otros conceptos, cuando advertimos que estas relaciones son análogas a otras que nos son familiares, cuando descubrimos la posición que el objeto tiene en una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones, entonces podemos afirmar que hemos comprendido alguna cosa respecto al concepto" (Sierpinska, 1992). Por lo tanto cree que, al hablar acerca de comprensión en matemáticas, debe concentrarse en los cambios cualitativos importantes relacionados con el conocimiento matemático en la mente humana, saltos desde viejas formas de conocimiento a nuevas formas de conocimiento. Para la autora, existen dos maneras complementarias de mirar dichos saltos.

"Si, conocemos de una nueva manera, al contemplar nuestras viejas formas de conocimiento, lo que vemos son cosas que nos impedían conocer de este nuevo modo. Algunas de estas formas pueden ser calificadas como obstáculos epistemológicos. Pero si, en lugar de contemplar los errores del pasado, concentramos nuestra mirada sobre lo que está frente de nosotros, podemos describir el salto como una nueva manera de conocer". (Sierpinska, 1992)

A lo primero lo llama el acto de superación de una dificultad o un obstáculo; a lo segundo, un acto de comprensión. Y ambas son complementarias porque ninguna de ellas, por si sola, da cuenta del salto; ambas son necesarias para explicar lo que sucedió. Por lo que concluye que "al tratar de describir lo que significa comprender un concepto matemático ambas visiones son necesarias: Actos de comprensión y actos de superación de dificultades u obstáculos".

Como los obstáculos epistemológicos son inevitables en la construcción de la comprensión de los conceptos, es importante conocer cuales subsisten en sujetos actuales, para ayudar a estudiar la comprensión que un estudiante puede tener de dicho concepto.

Estos conceptos juegan un papel importante en los planteamientos en (Álvarez, 2009), que se presentan al final del marco teórico, al elaborar su interpretación de la comprensión conceptual referida a estructuras teórico conceptuales. Para Álvarez la comprensión de un concepto se caracteriza mediante actos de comprensión, entendidos como demandas cognitivas que la apropiación de la ETC de referencia le plantea al sujeto que aprende.

Siguiendo otros autores, Sierpinska identifica los siguientes actos de comprensión.

- ✓ La *identificación* de un objeto entre otros objetos. El resultado de este acto es la aparición, como imagen principal, de lo que hasta el momento ha sido sólo fondo, haciéndose merecedor de interés y estudio. Si ya tiene un nombre, lo hace digno de la posición de término científico, o de tener un nombre, si no lo ha tenido.

- ✓ La *discriminación* entre dos objetos. Nos hace conscientes de la existencia de dos objetos distintos. Notamos tanto sus diferencias como sus propiedades relevantes.

- ✓ La *generalización* como acto que nos hace conscientes de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones. Descubrimos nuevas posibilidades de interpretación y consideramos irrelevantes algunos supuestos.

- ✓ La *síntesis* en su papel de reconocimiento de relaciones entre hechos aislados, conllevando a que hechos, propiedades, relaciones, objetos son agrupados en totalidades consistentes.

Sierpinska plantea finalmente, contrariando la opinión de Hoyles y Noss (1986), que *usar* (aplicación de un concepto) no es un acto de comprensión, pero si una condición necesaria para que cualquier acto de comprensión ocurra.

Es pertinente citar, finalmente, el siguiente planteamiento de Sierpinska en torno a lo que significa comprender un concepto.

> "Comprender un concepto significará ser capaces de hacer frente a las preguntas, ¿qué dice la definición del concepto?, ¿a qué hace alusión la definición? y a la diversidad de relaciones entre las respuestas." (Sierpinska, 1992)

No es muy difícil observar que hay una convergencia, entre este planteamiento y los planteamientos de Vinner, en torno al papel de la definición en la comprensión conceptual. En el sentido de que el conocimiento de la definición matemática no es suficiente para garantizar la comprensión de un concepto y que es fundamental que el sujeto construya un C.I. Pero que a la vez, es fundamental que la definición controle las actuaciones del sujeto cuando enfrenta situaciones problemáticas que requieren del concepto.

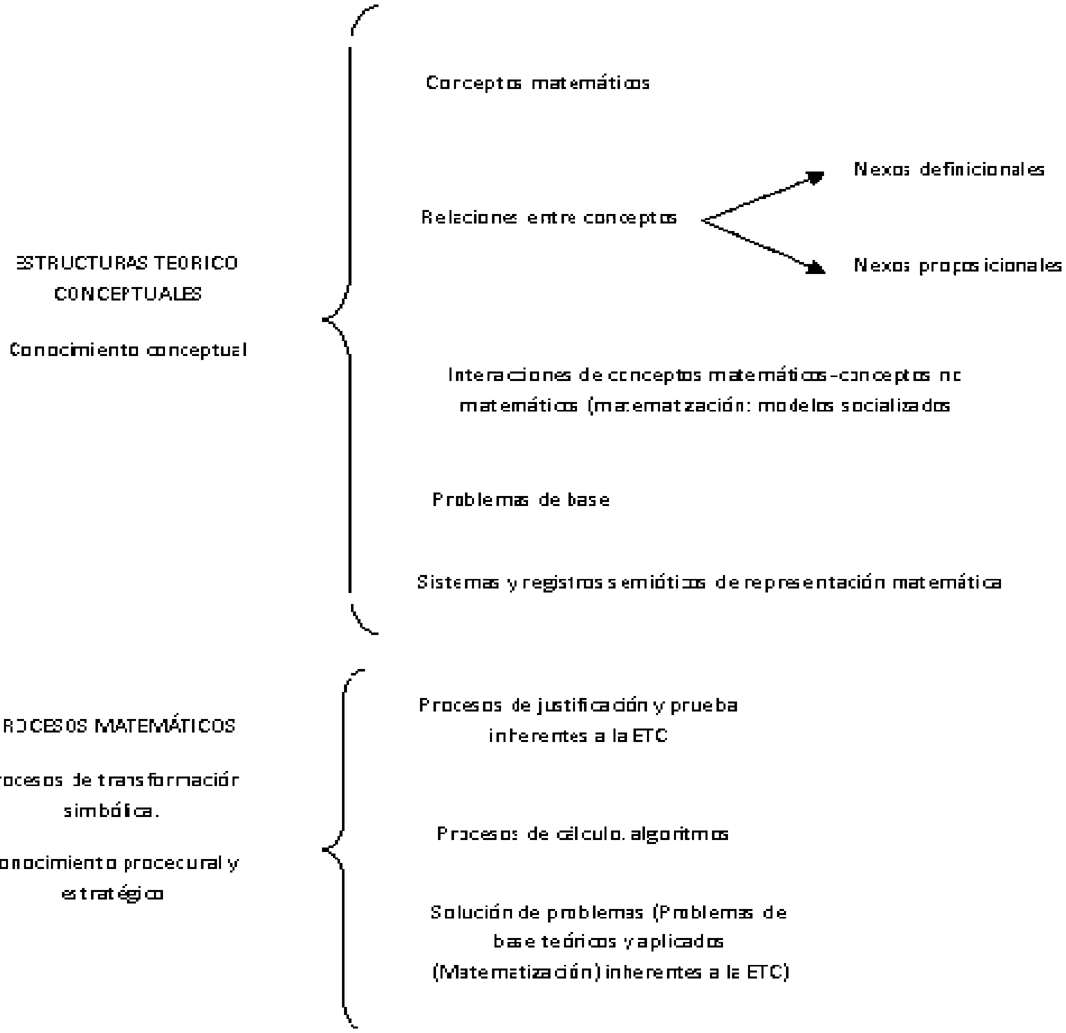
Este equilibrio *definición-a lo que hace alusión la definición, definición-imagen del concepto* que desde perspectivas diferentes comparten Sierpinska y Vinner, subyace también en los planteamientos de (Álvarez, 2009), concernientes al concepto de plano de referencia para la comprensión de un concepto, como conjunto conexo de actos de comprensión y, especialmente, a la identificación de dos planos de referencia para caracterizar la comprensión de un concepto desde las matemáticas: Uno referido a la definición del concepto y el otro a su marco interpretativo.

3. Estructuras teórico conceptuales

> "La comprensión de un concepto se puede caracterizar como un conjunto de actos de comprensión, entendidos como demandas cognitivas, que la apropiación de una ETC, le plantea al sujeto que aprende. Tales conjuntos de actos de comprensión se pueden estructurar en dos planos de referencia para la comprensión del concepto, uno referido a la comprensión de la definición y el otro a la apropiación del marco interpretativo." (Álvarez, 2009)

Según el profesor Jairo Álvarez, *una estructura teórico conceptual matemática (ETC)* es un conjunto estructurado de conceptos, problemas y procesos matemáticos, mediante la cual se caracteriza un saber matemático presente en un discurso matemático específico, en nuestro caso, con fines didácticos.

Los elementos constitutivos de una ETC se describen en el siguiente cuadro.



En estas estructuras se destacan dos relaciones entre los conceptos, los *nexos definicionales* que se refieren a las relaciones que se establecen entre conceptos, y los *nexos proposicionales* como aquellas relaciones que se dan entre proposiciones, conocidos usualmente en matemáticas como lemas, corolarios y teoremas.

La construcción de un concepto muchas veces exige la introducción previa de otros conceptos que sólo entran en juego para preparar el camino de ese concepto, por tal razón Álvarez afirma que: “Los conceptos no vienen aislados. Forman *núcleos* con base en los cuales se van formando *estructuras conceptuales* amplias. La definición o elaboración de conceptos se apoya en otros conceptos (conceptos componentes o de soporte). Esta concatenación es fundamental en la construcción del conocimiento matemático.”

Otro elemento importante de una ETC lo constituyen los *problemas de base*: “Están referidos a los problemas que se espera el alumno esté en capacidad de resolver al culminar el estudio del tema considerado.”

En la propuesta de Álvarez acerca de la descripción de un estado básico de comprensión respecto de un concepto matemático, los problemas de base son centrales en lo que él ha llamado el marco interpretativo de los conceptos de la ETC.

Estos pueden ser de orden teórico, es decir, aquellos problemas que el estudiante debe resolver como muestra de que ha apropiado la estructura teórico conceptual o que se convertirán en soporte para conceptos matemáticos posteriores. Los hay también surgidos desde otras disciplinas, en este caso se trata de problemas prototípicos que se enmarcan en modelos socializados de matematización que inscriben a la ETC en una práctica científica o tecnológica específica.

Aparecen también como elementos de una ETC los *sistemas semióticos de representación matemática*: “…hacen referencia al conjunto de símbolos, figuras y gráficas (registros semióticos), con sus reglas de manejo, que se ponen en juego en el discurso matemático para designar o representar conceptos y participar en la expresión de los nexos definicionales y proposicionales y, por supuesto, en la representación semiótica de los procesos matemáticos…”

Para Álvarez el estudio de tales sistemas y registros semióticos es de gran utilidad en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ETC y de los procesos matemáticos expresados en ellas.

Sugiere Álvarez, para describir las ETC, la técnica de los mapas conceptuales matemáticos con el fin de facilitar su análisis y discusión (Álvarez, 1998). Este concepto se inspira en los mapas conceptuales de Novak y Gowin (1986).

3.1 ETC como referentes del sentido y significado conceptual en matemáticas

Álvarez propone tales estructuras como referentes del sentido y significado matemáticos de los conceptos matemáticos y de la comprensión que logra un sujeto de tales conceptos: "La comprensión, como fenómeno subjetivo, tiene su referente en los significados matemáticos e interpretativos en contexto, que se expresan en dichas estructuras, y que se presentan ante el sujeto como demandas cognitivas. La comprensión, en su mejor sentido, se entiende como la apropiación de dichos significados, en cuyo proceso el sujeto construye sus versiones personales de tales estructuras." (C.I, al decir de Tall y Vinner) (Álvarez, 2009)

Respecto de tales versiones personales aclara que pueden estar bien o mal adaptadas matemáticamente. Y como se dijo en un principio, ve la apropiación de conceptos más como la apropiación de estructuras teórico conceptuales (que enmarcan el concepto), lo que implica que la comprensión de un concepto siempre está referida implícitamente a una ETC que se toma como referencia.

Dicha apropiación, entonces plantea demandas cognitivas que él entiende como actos de comprensión en el sentido de Sierpinska, y por tanto tal apropiación representa actos como: "…identificar objetos o procesos matemáticos, o discriminar entre ellos, identificar o reconocer conexiones entre entidades matemáticas, generalizar, sintetizar articulaciones que generan nuevas totalidades u objetos (etc.)"

La pregunta ¿Qué significa comprender un concepto matemático? adquiere entonces un referente caracterizable desde la perspectiva de las matemáticas "mediante un conjunto de demandas cognitivas, es decir como un conjunto de actos de comprensión requeridos por la apropiación de la ETC que sirve de referencia al concepto. La comprensión que alcanza el sujeto (su estado de comprensión personal) estará determinado por sus respuestas a tales demandas.”

Siguiendo estas ideas Álvarez propone *planos de referencia para la comprensión conceptual*: “Un plano de referencia es un conjunto articulado de demandas o actos de comprensión que se consideran necesarios para apropiar aspectos parciales de la ETC que sirve de referencia al concepto.”

Destaca dos planos en particular, uno relativo al conjunto de actos de comprensión requeridos por la apropiación del significado matemático del concepto, el cual puede ser presentado mediante una definición, no necesariamente la formal. En este primer plano las demandas cognitivas (los actos de comprensión) están asociadas con el reconocimiento de los conceptos soporte y con la identificación de su articulación y del papel en la generación del nuevo concepto, así como del fruto de dicha articulación. Siendo la definición la que da la manera en que se articulan los conceptos soporte y el papel que desempeñan en la construcción del nuevo concepto, es entonces la que se constituye en referente para este primer plano.

El otro plano está relacionado con los actos de comprensión, o demandas cognitivas, requeridos en la apropiación de versiones notables en contexto del concepto y con la identificación de las correspondencias entre tales versiones y la versión matemática del concepto. Es a estas versiones que Álvarez llama marco interpretativo del concepto.

Las versiones en contexto surgen de interacciones entre el concepto y conceptos, matemáticos o no matemáticos, siendo en estos últimos que se manifiesta la participación de las matemáticas en la construcción conceptual de otras ciencias y en sus aplicaciones en la vida cotidiana y en el conocimientos científico y/o técnico. Esto hace parte de lo que Álvarez ha llamado la faz externa del conocimiento matemático y que ejemplifica de la siguiente manera: “Por ejemplo, respecto de conceptos como *integral definido* y *derivada* de una función, los conceptos de *trabajo* y *rapidez*, que son conceptos de la física, son versiones en contexto, respectivamente, de dichos conceptos y por lo tanto pertenecen a su marco interpretativo. Pero son también versiones en contexto, de los mismos conceptos matemáticos, pero al interior de las matemáticas, los conceptos de área debajo de una curva y pendiente de una recta tangente. En realidad estos últimos conceptos han sido, en gran medida, generadores históricos de los conceptos de integral y derivada."

Álvarez recalca que los dos planos de referencia constituyen una unidad dialéctica en el desarrollo histórico del concepto, por cuanto las versiones en contexto constituyen aquello a lo que se refiere la definición y le da sentido al concepto y, "por tanto constituyen referentes de comprensión que el sujeto debe integrar en el proceso de su construcción personal."

Afirma también que los marcos interpretativos son abiertos, pero se acotan y se construyen en el contexto de enseñanza desde la importancia matemática y la significación en la práctica matemática que tengan las versiones notables.

Recomienda, igualmente, que al estudiar estados de comprensión debe prestarse especial atención a demandas cognitivas que proceden de procesos de abstracción reflexiva que dan lugar a la interiorización de acciones externas y a encapsulamientos de procesos y objetos en símbolos.

Hay una aclaración de suma importancia en el documento de Álvarez, la elaboración de una ETC para caracterizar lo que significa comprender un concepto en contextos curriculares es un elemento de importancia para la fundamentación de propuestas didácticas, pero no plantea estrategias de enseñanza: "Lo que se plantea es que, para comprender un concepto, no importa cómo, el sujeto debe constituir, los actos de comprensión identificados y mediante los cuales se concreta el planteamiento sobre lo que significa comprender dicho concepto."

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta investigación es de tipo exploratorio, mediada por un dispositivo que nos permita identificar y caracterizar estados de comprensión que alcanzan los estudiantes de ingeniería sobre el concepto de derivada. En la construcción de dicho dispositivo y en la caracterización de dichos estados de comprensión, juega un papel fundamental el concepto de ETC.

La población objeto de estudio que participó en nuestro trabajo de investigación, estuvo conformada por 61 alumnos de ingeniería de la Javeriana-Cali que estudiaron el curso de cálculo diferencial en el primer semestre del año 2009, bajo la modalidad de una enseñanza tradicional, utilizando el texto de Larson como guía, a los cuales se les aplicó el instrumento de indagación después de estudiar la temática asociada con el concepto de derivada.

En el desarrollo de este proyecto consideramos tres fases. La primera fase se centró en la caracterización de una ETC asociada con el concepto de derivada, que se propone como fundamento matemático en la propuesta didáctica que se comunica en el texto guía. La segunda se focalizó en la construcción del instrumento de observación, el cual fue conformado por 9 situaciones, cada una de las cuales confronta, de alguna manera, uno o varios de los actos de comprensión agrupados en los planos de referencia para la comprensión de acuerdo con la caracterización y análisis de la ETC que se identificó en la primera fase. Finalmente, en la tercera fase se analizaron las producciones escritas por los estudiantes para dar respuesta a cada una de las situaciones propuestas en el instrumento de observación diseñado en la segunda fase. A continuación se describen aspectos centrales de las tres fases.

1. Con relación al objetivo 1

Para caracterizar la ETC, subyacente a la propuesta de enseñanza del concepto de derivada en el texto de Larson, inicialmente se hizo una revisión de los contenidos que desarrolla el texto, restringida con la temática para el curso Cálculo Diferencial de las carreras de Ingeniería de la Javeriana-Cali orientada a identificar, especialmente, conceptos objeto de estudio de la propuesta, conceptos soporte, y sus nexos definicionales que dieron lugar a la identificación de varios puntos críticos[2], de los cuales se trabajó con sólo uno de ellos (alcanzar el logro del objetivo 2, con todos los identificados desbordaría una tesis de maestría). Seleccionando el concepto de derivada, incluyendo su marco interpretativo, no solo por ser justamente el concepto central en la temática objeto de estudio, sino porque, como se pone en evidencia en el análisis de la ETC subyacente a tal concepto, en el texto de Larson (Ver capitulo 4), son reconocidas, las desadaptaciones y vacíos que presenta en el aprendizaje de los alumnos respecto de este concepto. Finalmente los elementos centrales de la ETC respecto del punto crítico, se representaron de forma esquemática, a través de mapas conceptuales matemáticos (Álvarez, 1998).

Nos preocupamos, luego, por la identificación y estudio de las demandas matemáticas y cognitivas sobresalientes que le plantea al alumno la construcción de la ETC, es decir, a la identificación y anticipación de posibles problemas que pueda enfrentar el alumno para alcanzar el estado propuesto de formación como se indica en (Álvarez, 2007). Fue así como se focalizaron procesos constructivos que debe realizar el estudiante y se realizó una revisión del estado del arte relacionada con el concepto de derivada con el fin de identificar problemas epistemológicos que han sido objeto de estudio y resultados de investigaciones didácticas sobre el tema.

El producto de todo este trabajo derivó en la agrupación de demandas, entendidas como actos de comprensión en lo que se define como planos de referencia para la comprensión del concepto derivada.

[2] Un punto crítico, en una ETC objeto de estudio, es un concepto, proposición (teorema), problema de base que, por razones matemáticas de fundamentación o aplicación, se le otorga una relevancia en la apropiación personal de la ETC por parte del alumno y, en esta medida, se selecciona para confrontar su comprensión por parte del alumno. Por regla general, un punto crítico le plantea al alumno demandas cognitivas especiales para su apropiación, cuya respuesta deficiente se expresa en diversos tipos de desadaptaciones matemáticas (Álvarez, 2007).

2. Con relación al objetivo 2

Con el fin de caracterizar los estados de comprensión alcanzados por estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, asociados al concepto de derivada después de estudiar el curso de cálculo diferencial, utilizando el texto de Larson como guía se elaboró y aplicó un instrumento de observación y se analizarán los resultados obtenidos.

A partir del estudio realizado de la ETC, se definieron los planos de referencia para la comprensión del concepto derivada; éstos permitieron elaborar situaciones que se incorporaron, en principio, en una prueba piloto y después de un análisis se afinaron y ajustaron, para así conformar finalmente el instrumento de observación que finalmente se aplicó, verificando su pertinencia, a una cohorte de estudiantes que terminaron el primer curso de cálculo en la Javeriana-Cali, en el año 2009, utilizando el texto de Larson.

El instrumento de observación agrupó 9 situaciones problemáticas, que tomaron como referencia, para su confrontación, los actos de comprensión que se identifican en la comprensión básica de derivada. La resolución de estas situaciones provee indicadores que permitieron inferir, a partir de las respuestas del alumno, si tales estudiantes han alcanzado los actos de comprensión que son confrontados. El análisis de pertinencia para cada situación, se puede observar en el Capitulo 5. Para esto se puso en juego a un solucionador y así se pudo determinar la pertinencia de cada situación para caracterizar los estados de comprensión que finalmente se identificaron.

CAPÍTULO 4

CARACTERIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEÓRICO CONCEPTUAL DE REFERENCIA EN LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL TEXTO DE LARSON ASOCIADA CON EL CONCEPTO DE DERIVADA

En esta sección se presenta una primera aproximación a la descripción matemática de la Estructura Teórico Conceptual (ETC) que subyace en la propuesta de enseñanza asociada con el concepto de Derivada en el texto de Larson (2006), con el cual se estudia la temática asociada a la derivada en el curso Cálculo Diferencial en la Pontificia Universidad Javeriana, Seccional Cali (Javeriana-Cali).

Con este fin, se identifica en la propuesta de enseñanza, plasmada en el texto y restringida con la temática para el curso Cálculo Diferencial de las carreras de Ingeniería de la Javeriana-Cali, los conceptos que ingresan como objeto de estudio; en particular sus nexos definicionales, símbolos, representaciones semióticas utilizadas y conocimiento matemático de soporte.

En la siguiente tabla se presenta la parcelación temática que en la Javeriana-Cali se tiene en cuenta para el curso Cálculo Diferencial, lo que permite tomar en cuenta los siguientes capítulos del texto: Capítulo 2 (pág.95 a 162. 6 secciones), Capítulo 3 (pág.163 a 197, 209 a 228 y 235 a 241. 7 sec.), Capítulo 5 (pág.322 a 331, 352-353, 362-363, 374 a 379. 4 sec.), Capítulo 8 (pág.567 a 577. 1 sec.).

Medida de ángulos
Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas
Identidades y ecuaciones trigonométricas
Ley de senos y cosenos
Sucesiones
Sucesiones monótonas y convergentes
Límite de una función y cálculo de límites
Continuidad de funciones
Función derivada
Propiedades de la derivada
Regla de la Cadena

Derivación Implícita
Derivadas de exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas
Regla de L'Hopital
Teorema del Valor Medio
Razones relacionadas
Extremos de una función
Bosquejo de curvas
Optimización
Diferenciales
Cálculo de Antiderivadas

1. Conceptos que ingresan como objeto de estudio.

En la propuesta de enseñanza del concepto de Derivada en el texto de Larson y restringida con la propuesta de la Javeriana-Cali para las carreras de Ingeniería, se pueden identificar los siguientes conceptos que se proponen como objeto de estudio:

Recta tangente $\left(L_{m_{\tan}}\right)$, función derivada $\left(f\,'(x)\right)$, función derivable, derivada puntual $\left(f\,'(c)\right)$, velocidad media $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, velocidad instantánea $\left(v(t)\right)$, segunda derivada $\left(f\,''(x)\right)$, derivadas de orden superior, aceleración $\left(a(t)\right)$, función implícita, ritmo de cambio $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, extremos, extremos relativos, punto crítico, concavidad, punto de inflexión, diferenciales $\left(dx,\ dy\right)$.

Entre los conceptos que se han identificado como objeto de estudio aparecen los conceptos de velocidad media, función implícita, extremos y extremos relativos, posiblemente en otras propuestas, estos conceptos podrían pensarse como conocimiento de soporte, pero no se han tomado como tal, ya que en el texto no se asumen disponibles por el estudiante al momento de estudiar los capítulos de derivada, esto se infiere a raíz del énfasis que se hace en el texto tanto en la teoría y ejemplos como en el trabajo que se le propone al estudiante en las secciones de ejercicios.

En nuestro estudio se exploraron varios puntos críticos. La exagerada demanda de trabajo que, con relación a una tesis de maestría, implicaría adelantar el logro del objetivo 2, con varios puntos críticos, llevó a la conclusión de trabajar con un solo punto crítico. Se seleccionó el concepto de derivada incluyendo su marco interpretativo, no solo por ser justamente el concepto central en la temática objeto de estudio, sino porque, como se pone en evidencia en el análisis de la ETC subyacente a tal concepto, en el texto de Larson (Ver capitulo 4), son reconocidas, las desadaptaciones y vacíos que presenta el aprendizaje de los alumnos respecto de este concepto, y el entronque que algunas de tales desadaptaciones tienen con obstáculos de origen epistemológico. Para efectos de análisis, los conceptos objeto de estudio, se agrupan en dos conjuntos, así:

- **Función derivada y conceptos relacionados:** Función derivada, derivada puntual y función derivable.
- **Conceptos relativos al marco interpretativo del concepto de función derivada:** Recta tangente, ritmo de cambio y velocidad instantánea.

1.1 Función derivada y conceptos relacionados

(Función derivada, derivada puntual y función derivable)

1.1.1 Descripción matemática

1.1.1.1NEXOS DEFINICIONALES

D1) Función derivada y D2) derivada puntual: Se define (pág. 99) como sigue:

Definición de la derivada de una función

La **derivada** de f en x viene dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

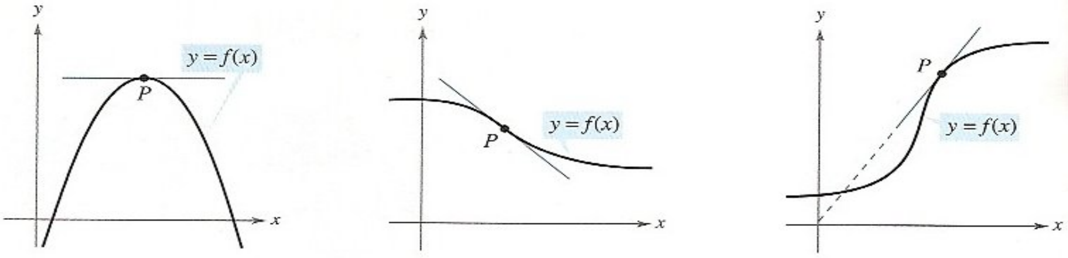
Observar que la derivada de una función de x también es una función de x. Esta "nueva" función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto.

Cabe anotar que en otros textos, la definición de derivada puntual se separa tajantemente de la definición función derivada, utilizando un simbolismo diferente. Aquí se puede plantear que el autor define la *derivada en un punto* y la *función derivada*, de forma simultánea, y lo hace explícito en los ejemplos y ejercicios, tal como se puede observar en el ejemplo 4 (Pág. 100), ya que primero se encuentra la función derivada para cierta función $f(x)$ y después se calcula la pendiente de la gráfica en el punto $(1,1)$ reemplazando el valor de $x=1$ en la derivada obtenida, aunque en principio no simbolice la derivada puntual como $f'(1)$.

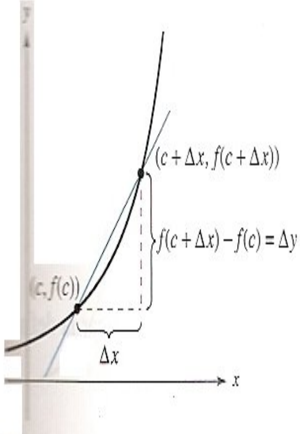
En esta misma sección, para efectos de explicar la relación entre continuidad y derivabilidad, usa una forma alternativa para definir la derivada en un punto (pág. 101), haciendo la observación del anclaje de la variable *x* de dicha definición en el punto *c*. Cabe anotar que esta definición, a la postre, es la que más utiliza el autor para la demostración de muchos teoremas.

Además el autor resalta la derivación como una operación fundamental del cálculo, y antes de iniciar el estudio del cálculo (capítulo 2), el texto contiene la sección 1.1 (pág. 45) titulada "Una mirada previa al cálculo", en la cual se hace una breve introducción al "problema de la recta tangente", resaltando la intervención del concepto límite, que luego se retoma para relacionarlo con el concepto de función derivada, sección 2.1 (pág. 96 y 97), esto se hace respondiendo a una pregunta y apoyándose en la representación gráfica, que explora algunos mitos acerca de las rectas tangentes en funciones, luego definiendo el concepto de recta tangente apoyado en el concepto de pendiente de una recta, en particular de una secante y después, trabajando dos ejemplos del cálculo de pendientes en puntos particulares de funciones de la siguiente manera:

> ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto *P* es la recta perpendicular al radio que pasa por *P*.
>
> Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto *P* si toca a la curva en *P* sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto *P*, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.



Recta tangente a una curva en un punto
Figura 2.2



Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$
Figura 2.3

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante*** que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

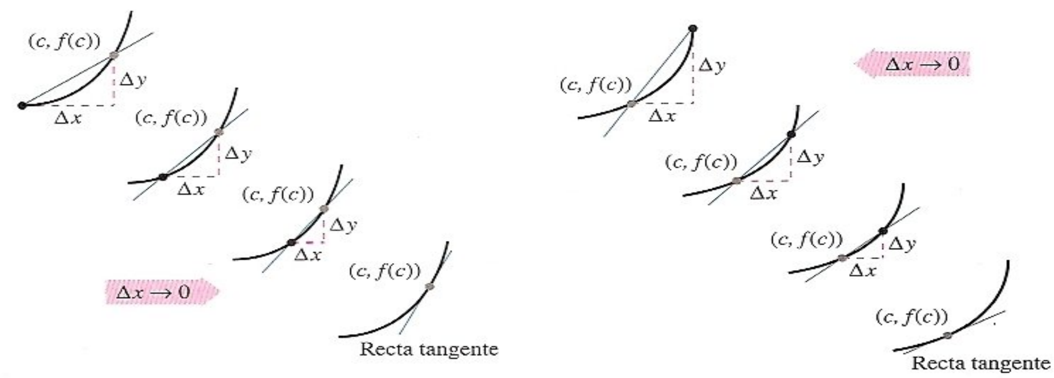
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en y}}{\text{Cambio en x}}.$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}. \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente incremental o de diferencias**. El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en x** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el **cambio** (o incremento) **en y**.

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener aproximaciones más y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 2.4.



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

D3) Función derivable:

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en x si su derivada en x existe, y **derivable en un intervalo abierto (a, b)** si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.

En el texto, esta definición, a diferencia de otras, no se resalta encerrada en un cuadro, y además consta de dos partes definidas en el intermedio de párrafos; la primera, derivable en un intervalo abierto (pág. 99), inmediatamente después de la definición de la derivada de una función y la segunda, derivable en un intervalo cerrado (pág. 101), cuando se da la fórmula alternativa de la derivada.

La forma no rigurosa como se define este concepto, da lugar a algunos casos que los estudiantes puede que no identifiquen y que tienen implicaciones en las demandas cognitivas que la definición impone sobre el alumno, como por ejemplo la función y su derivada pueden tener dominios diferentes, casos de los que nos ocuparemos en los análisis didáctico y cognitivo.

1.1.1.2 Conocimiento matemático de soporte y sus símbolos:

De la revisión del texto, con relación al primer conjunto de conceptos, se identifica el conocimiento soporte, algunos son objeto de estudio en la propuesta y otros que se asumen apropiados por el alumno, además sus respectivos símbolos:

Función numérica (f), punto del plano $(P(c, f(c)))$, intervalo abierto con extremos a y b $((a,b))$, intervalo cerrado con extremos a y b $([a,b])$, diferencia en x (Δx), diferencia en y

(Δy), cociente de diferencias ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$), limites laterales, límite de una función ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), gráfica de una función (forma operativa).

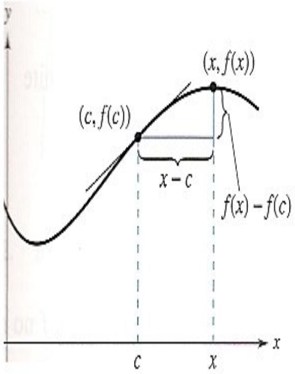
1.1.1.3**Registros de representación asociados**:

Las definiciones que pertenecen a este primer grupo, están dadas apoyándose en conversiones entre diferentes registros de representación, en particular los registros simbólico y gráfico. Por ejemplo, la definición del concepto de función derivada se apoya alternadamente del registro verbal escrito y el simbólico, este último se utiliza para dar otras notaciones más comunes para la derivada de una función $y = f(x)$, tales como:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y].$$

Dando la interpretación en el registro verbal escrito, por ejemplo la notación dy/dx que se lee como "derivada de y respecto a x", esta notación es conveniente utilizarla cuando en muchos casos la función utilice otra variable independiente distinta de x. Además de estas notaciones, en los ejemplos se utiliza el símbolo $f'(c)$, como notación funcional de la derivada en un punto, aclarando que su resultado es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(c, f(c))$, pero no se dan las representaciones para las derivadas puntuales correspondientes a las demás notaciones.

Otro caso en el que podemos observar el cambio de registros de representación, se presenta a continuación, cuando se da una fórmula alternativa de la derivada puntual donde además del registro verbal escrito y simbólico, también hace presencia de manera importante el registro gráfico:



Cuando x tiende a c, la recta secante se aproxima a la recta tangente
Figura 2.10

La siguiente forma alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Fórmula alternativa de la derivada.

siempre que dicho límite exista (ver la figura 2.10) (en el apéndice A se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas). Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

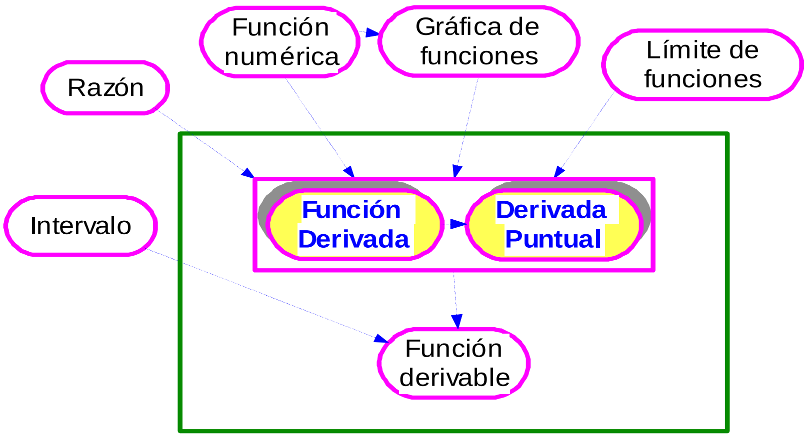
$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente.

Cabe anotar que en mi práctica, como docente, he evidenciado que los estudiantes, al utilizar esta forma equivalente, cometen menos errores algebraicos al calcular el cociente de diferencias que cuando trabajan con la definición primaria donde deben calcular la expresión $f(x+h)$, lo cual no les permite llegar a la estimación correcta de la derivada, pues ese cálculo no es necesario en la definición equivalencia, aunque ésta trae sus propias dificultades, una de ellas es que necesita el uso de la factorización.

1.1.1.4 **Visión esquemática de los Nexos Definicionales y conceptos soporte**

Después del análisis anterior se presenta en la siguiente figura una visión esquemática de los nexos definicionales para el primer grupo. En óvalos se encierran un concepto, mientras que en rectángulo se encierran un grupo de conceptos. Las líneas punteadas determinan las relaciones entre conceptos por medio de nexos definicionales y por fuera del rectángulo más grande aparecen conceptos soporte que no son trabajados dentro de las secciones que incluyen el estudio de la derivada.



1.1.2 Demandas matemáticas

Muchas de las demandas se descargan sobre D1, pues, como se dijo anteriormente, D2 se define simultánea e implícitamente con D1. Las definiciones se expresan como el límite cuando h se aproxima a cero del cociente de diferencias de f en x con incremento en h, es decir, las demandas matemáticas para acceder al concepto están determinadas por el concepto de límite y el cociente de diferencias que tiene diversas interpretaciones. Así el concepto de límite de una función se perfila como un concepto que vale la pena confrontar en el aprendizaje del alumno.

Además se destacan las demandas asociadas con representaciones analíticas que se expresan también en representación en lenguaje verbal escrito y representaciones gráficas; por lo tanto la elaboración e interpretación gráfica asociada con la expresión analítica de la definición es parte inherente e importante de la demanda matemática que plantea la apropiación de tal definición.

La interpretación de los símbolos $f'(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$, y equivalentes, plantea una demanda matemática asociada con la apropiación de la definición de derivada de una función. El aspecto, quizás más exigente de esta demanda, esta relacionada con el encapsulamiento del signo que, como es común en los símbolos matemáticos, participa, en su interpretación, de la dualidad proceso objeto, según las circunstancias.

En la sección de ejercicios se puede observar el énfasis en tratamientos y conversiones entre registros de representación: Primero, la conversión del registro analítico al gráfico (sección 2.1, ejercicios 3, 4 y 53 a 55) donde se le pide al lector que identifique y trace en una figura dada, imágenes de valores, distancias entre puntos, entre otras, todas ellas cantidades relacionadas con el cociente de diferencias inmerso en el nexo definicional D1 y graficar una función dadas características específicas. Segundo, la manipulación de la definición D1 y su forma alternativa en el registro analítico (ejercicios 5 a 10, 33 a 36 y 71 a 79), donde se pide determinar la derivada de algunas funciones mediante el proceso del límite. Tercero, trabajo solamente con el registro gráfico (ejercicios 37 a 40 y 43 a 46) donde dadas las gráficas de varias funciones y sus derivadas, se pide seleccionar las gráficas que se relacionen, así como graficar la derivada de algunas funciones dadas sus gráficas.

Se considera que la manera de proponer los ejercicios en el texto, crea las condiciones para que el alumno pueda construir el proceso de cálculo de una derivada de una función y la interpretación de los símbolos del cociente de diferencias inmerso en la definición.

1.1.3 Demandas cognitivas:

De todo lo anterior, y centrando el análisis en los conceptos D1 y D2, se puede afirmar que la construcción de dichos conceptos, por parte de los estudiantes, necesita del conocimiento soporte de razón, función numérica, gráfica y límite de funciones. Además se deben tener en cuenta las demandas cognitivas asociadas con el manejo analítico y sus interpretaciones geométricas. En particular se le demanda al estudiante: 1) Reconocer los conceptos soporte y los roles que ellos juegan para construir el nuevo concepto; es decir, dar significado a los distintos términos en el cociente de diferencias involucrado en el límite e identificar la secuencia operativa que resulta de la composición del cociente de diferencias, los valores de la función definida por tal cociente y el límite de tal función cuando su variable tiende a cero. 2) Reconocer y discriminar los dos conceptos, productos de la articulación de los conceptos soporte, *derivada en un punto* y *función derivada* (definidos por el autor de forma conjunta), es decir, reconocer el primer producto como un número y el segundo como una función, además se debe disponer del método para calcular una derivada en un punto o la función derivada. 3) Interiorizar la secuencia operativa de la definición y sus productos y encapsular tales productos en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente con los términos función derivada y derivada en un punto. En conclusión, la comprensión de estos nexos supone que los estudiantes sean conscientes de las demandas exigidas en su construcción, tanto local como globalmente y es una comprensión básica, acorde con el nivel matemático del texto y con el tipo de problemas, que según la propuesta de enseñanza, se espera que el alumno pueda resolver.

En mi práctica como docente he evidenciado que los estudiantes, al utilizar la forma equivalente $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, para el cálculo de una función derivada, cometen menos errores algebraicos que cuando trabajan con la definición D1, pues en el desarrollo del cociente de diferencias de la definición equivalente, no deben calcular la expresión $f(x+\Delta x)$ que aparece en D1, pero cabe anotar que trae sus propias dificultades, una de ellas la necesidad de factorizar.

Algunas dificultades ligadas al concepto de derivada, relacionadas con lo dicho hasta el momento, que han sido documentadas por investigadores internacionales y que se deben tener en cuenta para el aprendizaje del concepto son:

- La fundamentación del cálculo fue el problema principal que quedó sin resolver a lo largo de todo el siglo XVIII. La mayor parte de los que aplicaban el cálculo de Leibniz llegaron a convencerse de una manera o de otra de que la respuesta a la pregunta ¿*Existen cantidades infinitamente pequeñas*? era “sí”…Leibniz ya tenía sus dudas acerca de la existencia de cantidades infinitamente pequeñas…En el cálculo de fluxiones de Newton también había un problema de fundamentación que planteaba el uso de incrementos “pequeños” de las respectivas variables. (Grattan–Guinness, 1980)

- Los estudiantes logran un dominio *razonable* de los algoritmos para calcular límites y derivadas, pero tienen dificultades significativas en la conceptualización de los procesos subyacentes al límite en la noción de derivada y éstas son aún mayores en la resolución de problemas. (Cantoral, 1988; Sierpinska, 1985; Vinner, 1983)

- *Las consideraciones de la derivada como un límite.* En Orton (1977) se han obtenido evidencias de lo difícil que es comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga *realmente* la tangente. A partir del estudio de los obstáculos epistemológicos, en el plano histórico y con grupos pequeños de estudiantes, en Sierpinska (1985) se señala que tanto en el plano del desarrollo histórico de las ideas matemáticas relativas al límite como en los estudiantes de hoy día, existe la tendencia a evadir los procesos infinitos; En general se nota que son proclives a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, consideran el límite sólo como una *aproximación*, presentan serios obstáculos con el manejo de la simbología matemática utilizada y consideran que el límite se obtiene simplemente evaluando la función en el punto deseado.

- El significado cotidiano de la palabra "límite", que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona. La fuerza de la geometría de las formas, que impide a los alumnos identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su topología subyacente. Esto hace que para los alumnos sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos numérico y geométrico en el proceso de límite. **(**Cornu, 1991; Delgado, 1998; Sierpinska, 1985).

- La doble dimensión que tiene los conceptos; proceso-objeto, u, operacional-estructural. Esta doble dimensión pone de manifiesto la complementariedad de ambos aspectos; tanto a nivel cognitivo como en el desarrollo histórico conceptual de los objetos matemáticos. (Sfard, 1991).

- Existen conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los alumnos y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferini-Mundy y Graham, 1994).

- Se conseguirá una comprensión completa de la idea de derivada cuando se reconozca y reconstruya cada una de las ideas de razón, límite y función en diferentes contextos. (Zandieh, 2000).

- Existen dificultades en dotar de significado gráfico a la derivada de la función en un punto, $f'(a)$, al confundirlo con la ordenada en $x = a$, $f(a)$. (Azcarate, 1990).

- Las dificultades de los estudiantes, en relacionar el modo gráfico y el modo analítico, también se ponen de manifiesto cuando, en contextos eminentemente gráficos, los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997).

- Es de gran importancia la integración de los significados de la noción de derivada en un punto ($f'(a)$) y la función derivada ($f'(x)$). (Badillo, 2003).

1.2 Conceptos relativos al marco interpretativo[3] del concepto de función derivada.

(Recta tangente, ritmo de cambio, velocidad instantánea)

1.2.1 Descripción matemática:

1.2.1.1NEXOS DEFINICIONALES

> **D4) Recta tangente:** A su pendiente también se le denomina pendiente de la gráfica de f en $x=c$, este concepto es utilizado para hacer la introducción al concepto de función derivada como se presentó en el nexo definicional D1, el texto lo define de la siguiente manera (pág. 97):

[3] *Marco interpretativo* del concepto de función derivada está referido a aquellos conceptos que se definen como derivadas, es decir, versiones en contexto, del concepto de derivada.

Definición de la recta tangente con pendiente m

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces, la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

Cabe destacar que esta definición está referida a la recta tangente, pero la atención se centra en la definición de la pendiente de la recta tangente y por lo tanto en el límite del cociente de diferencias.

D5) Ritmo de cambio: No se define en las secciones que tienen que ver con la derivada, sino que se hace referencia a éste (pág. 113) de la siguiente manera:

Ritmos o velocidades de cambio

Ya se ha visto que la derivada se utiliza para calcular pendientes. Pero también sirve para determinar el ritmo de cambio de una variable respecto a otra, lo que le confiere utilidad en una amplia variedad de situaciones. Por citar sólo algunas, son ejemplos los ritmos de crecimiento de poblaciones, los ritmos de producción, los de flujo de un líquido, de la velocidad y de la aceleración.

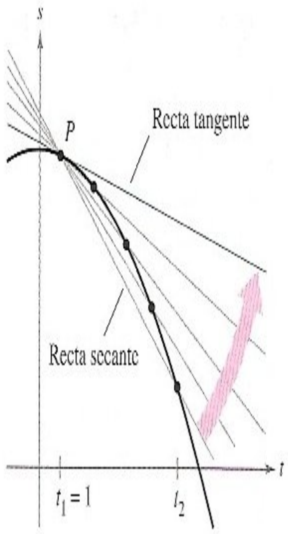
Un uso frecuente de los ritmos de cambio consiste en describir el movimiento de un objeto que va en línea recta. En tales problemas, la recta del movimiento se suele representar en posición horizontal o vertical, con un origen marcado en ella. Sobre tales rectas, el movimiento hacia la derecha (o hacia arriba) se considera de dirección positiva y el movimiento hacia la izquierda (o hacia abajo) de dirección negativa.

En realidad este nexo se encuentra al inicio del texto (pág. 12) cuando se trabajan los modelos lineales, donde se hace una interpretación de la pendiente de una recta en ese sentido, como sigue:

Razones y ritmos o velocidades de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como una *razón* o como una *proporción,* o bien como una *tasa, ritmo o velocidad* de cambio. Si los ejes x y y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una **razón** o **proporción**. Si los ejes x y y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **tasa, ritmo** o **velocidad de cambio**. Al estudiar cálculo, se encontrarán aplicaciones relativas a ambas interpretaciones de la pendiente.

D6) Velocidad instantánea: Se define (pág. 114) como sigue:



La velocidad media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la recta secante. La velocidad instantánea en t_1 es igual a la pendiente de la recta tangente
Figura 2.20

Supongamos que en el ejemplo anterior se quisiera encontrar la velocidad *instantánea* (o velocidad, sin más) del objeto cuando $t = 1$, al igual que la pendiente de la recta tangente puede aproximarse utilizando las pendientes de rectas secantes, se puede aproximar la velocidad en $t = 1$ por medio de las velocidades medias durante un pequeño intervalo $[1, 1 + \Delta t]$ (ver en la figura 2.20). Se obtiene dicha velocidad calculando el límite cuando Δt tiende a cero. Al intentar hacerlo se puede comprobar que la velocidad cuando $t = 1$ es de -32 pies por segundo.

En general, si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su **velocidad** en el instante t es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Función velocidad.

En otras palabras, la función velocidad es la derivada de la función posición. La velocidad puede ser positiva, cero o negativa.

Lo anterior aparece luego de enunciar cinco reglas de derivación, como uno de los múltiples ritmos de cambio en donde la derivada es de gran utilidad, apoyándose en el concepto de velocidad media y comparando el trabajo hecho con la pendiente de la recta tangente.

La velocidad instantánea está definida vía derivada, extendiendo este concepto a una clase más amplia de objetos que la relativa al concepto inicial, es decir, un concepto que está por fuera de la matemática, está siendo presentado por una definición matemática. En conclusión, es la manera como las matemáticas aportan al desarrollo del conocimiento científico en la construcción de algunos conceptos. Es así como pensamos que tanto el concepto de pendiente de una recta tangente y velocidad se perfilan como conceptos que vale la pena confrontar en el aprendizaje del alumno.

1.2.1.2 **Conocimiento matemático de soporte y sus símbolos:**

Adicional al conocimiento matemático de soporte que se presentó para el primer grupo de conceptos tenemos:

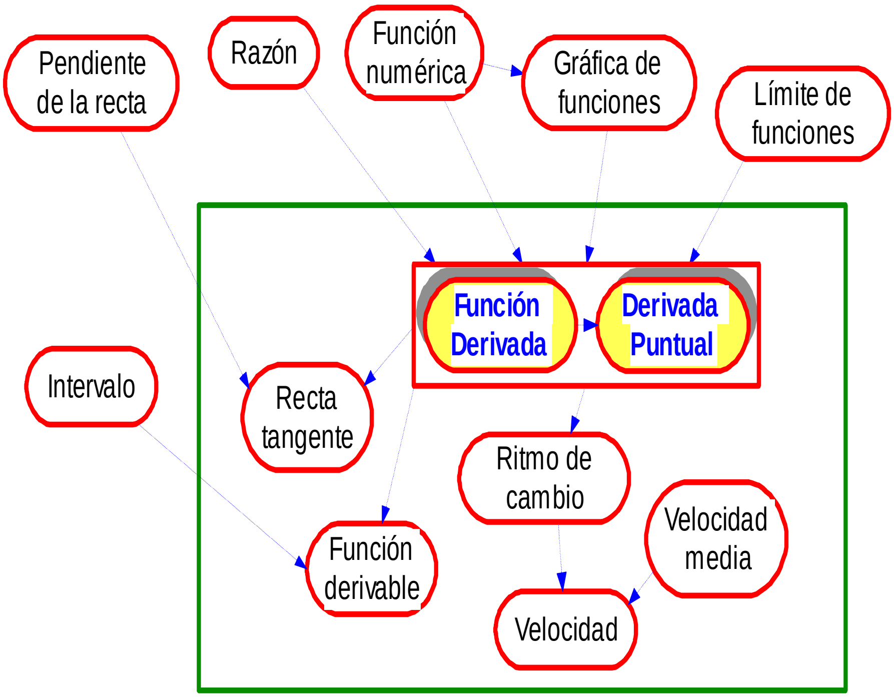
Pendiente de la recta (m), ecuación de la recta punto-pendiente $\left(y - y_1 = m(x - x_1) \right)$, recta horizontal, función posición de un objeto $\left(s(t) \right)$.

1.2.1.3 **Registros de representación asociados.**

Las definiciones que pertenecen a este segundo grupo están dadas a través de los conceptos de soporte, los convenios notacionales presentes en cada definición y las conversiones entre registros de representación, enfatizando en el registro gráfico. Por ejemplo para los nexos definicionales D4 y D6, se procede con un discurso que se desarrolla paralelamente, de un lado, en un registro de representación analítica y de otro en un registro de representación gráfica, o sea, hay un juego permanente de conversiones entre ambos registros de representación; es así como, el nexo definicional D4 está antecedido por la gráfica de una curva en varias figuras, que muestran como el cambio en la variable x permite aproximaciones de la recta tangente a una curva y los símbolos que se utilizan para cada una de estas definiciones son respectivamente $m = f'(c)$ y $v(t) = s'(t)$.

1.2.1.4 **Visión esquemática de los Nexos Definicionales y conceptos soporte**

La siguiente visión esquemática de la sub-estructura que se toma como referencia para el análisis del punto critico seleccionado permite ver que ésta se construye a partir de la definición matemática del concepto y de su marco interpretativo (pendiente, velocidad). Se puede observar, también, el conocimiento de soporte de la ETC, según se identifica en el texto de Larson, y que ha servido de referencia para la elaboración del instrumento que se aplicará a los estudiantes.



1.2.2 **Demandas matemáticas**:

De nuevo, como para el primer grupo de conceptos, se destacan las demandas asociadas con representaciones analíticas que se expresan también en representación en lenguaje verbal escrito y gráfica, por ejemplo, la definición de pendiente de una recta tangente introducida al referirse al problema de la recta tangente, se acompañada de una explicación minuciosa que relaciona las respectivas representaciones, analítica, gráfica y en lenguaje verbal y que luego es utilizada para definir D1 como una generalización del cálculo de pendientes de rectas tangentes en cualquier punto de una función y la razón de cambio de una función, por lo tanto la interpretación geométrica asociada con la expresión analítica de la definición es parte importante de la demanda matemática que plantea la apropiación de tal interpretación.

En la sección de ejercicios, primero se pide estimar pendientes de curvas, dada la gráfica, en un plano cuadriculado, de la función y la recta tangente en un punto, luego se pide determinar pendientes y ecuaciones de rectas tangentes a la gráfica de funciones en puntos dados conocida la regla de asignación de algunas funciones, mediante el proceso del límite; esto se hace prácticamente hasta el ejercicio 66, dándole prioridad al significado geométrico de la definición, sobre el significado físico, pues para este último, aunque se dejen varios ejercicios, todos están de la mitad hacia arriba.

1.2.3 Demandas cognitivas:

Para la comprensión de D4 y D6 es necesario, además de lo dicho para D1 y D2, reconocer la definición de derivada en cada situación, ya que estas versiones en contexto son las que le dan sentido al concepto y deben estar articuladas con la versión matemática, dicha articulación se expresa como una conversión entre dos registros de representación semiótica y, mediante la cual, se expresan relaciones de correspondencia entre objetos y procesos en los dos marcos de representación. También se debe tener en cuenta las demandas que proceden de otros procesos de abstracción reflexiva ligados a la interiorización de acciones y encapsulamientos de procesos y objetos en símbolos que se proponen para tal fin y que determinan el paso de la apropiación de significados hacia la constitución de representaciones mentales estables y flexibles. En conclusión, el estudiante debe: 1) Reconocer que el proceso de aproximación a la recta tangente, en un punto de la curva, se realiza mediante las rectas secantes ancladas en dicho punto. 2) Identificar la secuencia operativa que resulta de la composición de las operaciones involucradas en la definición en el registro analítico, con el proceso gráfico de las pendientes de rectas secantes (o velocidades medias) ancladas en un punto. Además identificar y distinguir el límite de tal cociente de diferencias cuando su variable tiende a cero en el registro analítico, con el proceso gráfico de límite de las pendientes de rectas secantes (o velocidades medias) ancladas en un punto. 3) Identificar la función de: Pendientes de rectas tangentes a una curva o pendientes de una curva o velocidad, con la función derivada. Y el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva o el valor de la pendiente de una curva o la velocidad, en un punto, como la derivada de la función en dicho punto. 4) Interiorizar el proceso múltiple y sus productos, y encapsular en el símbolo $f'(x)$, articuladamente, con los términos función de pendientes de rectas tangentes o función de pendientes de una curva o función velocidad y en el símbolo $f'(c)$, con los términos pendiente de la recta tangente o pendiente de una curva o velocidad instantánea en el punto $x = c$.

En mi práctica, como docente, he evidenciado que los alumnos, al estudiar la definición de pendiente de la recta tangente a una función en un punto, centran su atención en el énfasis que el autor del texto hace sobre la relación que existe entre las rectas secantes ancladas en un punto y la recta tangente en dicho punto y aunque esta relación existe, es necesario que a los alumnos se les enfatice en la relación entre *la pendiente* de dichas rectas secantes y *la pendiente* de la recta tangente, es decir, la aproximación, no de la recta tangente como tal, sino de *la pendiente* de la recta tangente mediante el límite de rectas secantes.

Algunas dificultades ligadas con lo dicho hasta el momento, que han sido documentadas por investigadores internacionales son:

- *La concepción griega de tangente desarrollada por los estudiantes desde sus estudios primarios*. Dificulta la formación de este concepto por la vía geométrica (Cantoral, 1988; Dolores, 1989), ya que puede obstaculizar el paso de una concepción *global* a una concepción *local* (propiedad fundamental del cálculo), puede dificultar la aceptación de que la recta tangente, además de *tocar*, pueda *cortar* a la curva y ser tangente en la *zona* del corte. El carácter estático de la determinación de la tangente en la Geometría Euclidiana, pues es dada como un lugar geométrico, también puede dificultar el arribo a una concepción dinámica como sucesión de secantes.

- Existe una escasa presencia en los estudiantes de las ideas relativas a la variación, pues los resultados que se obtuvieron de la aplicación de un cuestionario muestran que solamente el 24% contestó correctamente a las preguntas que se refieren a la cuantificación de la variación y a la velocidad media. (Dolores, 1998)

- La enseñanza actual se apoya tanto en una concepción dinámica del límite, basada en exploraciones gráficas y numéricas, como en técnicas de naturaleza algebraica (Artigue, 1995). Esto permite a los alumnos resolver simples, pero a su vez interesantes, problemas de variación y optimización.

2. Planos de referencia para la comprensión del concepto derivada

De acuerdo a lo anterior se presenta a continuación los actos de comprensión, entendidos como demandas cognitivas que la apropiación de la ETC de referencia le plantea al alumno, estructurados en lo que Álvarez (2009) denomina *planos de referencia para la comprensión*, en este caso para el concepto de derivada.

1. *Significado matemático de derivada:* Tiene que ver con la apropiación del significado matemático del concepto derivada, comunicado mediante el nexo definicional D1. Aquí se debe tener en cuenta como se articulan los conceptos soporte y los roles que ellos juegan para construir el nuevo concepto, además de la identificación y discriminación de los productos que dicha articulación genera. En conclusión, el estudiante debe:

   a) Reconocer (local y globalmente) en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones (cociente de diferencias, valores de la función definida por tal cociente y limite de tal función cuando su variable tiende a cero).

b) Reconocer y discriminar, los dos productos del proceso matemático de la definición y establecer la relación entre ellos. *Una función* (la función derivada. Proceso múltiple) y *un número* (el valor de la derivada puntual o valor de la función derivada en un punto).

c) Interiorizar el proceso múltiple y sus productos, y encapsular en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente, con los términos función derivada y derivada en un punto.

2. *Versiones de derivada en contexto:* Las versiones en contexto (en este caso la geométrica y la física) definen el marco interpretativo del concepto derivada que le dan sentido al concepto y las cuales deben estar articuladas con la versión matemática. La articulación se expresa como una conversión entre dos registros de representación semiótica y, mediante la cual, se expresan relaciones de correspondencia entre procesos y productos en los dos marcos de representación. Aquí se debe tener en cuenta las demandas que proceden de otros procesos de abstracción reflexiva ligados a la interiorización de acciones y encapsulamientos de procesos y objetos en símbolos que se proponen para tal fin y que determinan el paso de la apropiación de significados hacia la constitución de representaciones mentales estables y flexibles. En conclusión, el estudiante debe:

a) Reconocer, en el marco del triángulo curvilíneo asociado en un punto arbitrario de la gráfica de una función, el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente, distinguiendo en el mismo contexto, el proceso de límite asociado de las pendientes de las rectas secantes a la pendiente de la recta tangente.

b) Identificar la correspondencia entre: (i) Los objetos, *cociente incremental* y *pendiente de la recta secante*, y (ii) Los procesos de *aproximación con paso al límite de las pendientes de las secantes a la pendiente de la recta tangente* y el de *cociente incremental a la derivada* (la variable incremento tiende a cero), valorada en la abscisa correspondiente al punto de tangencia.

c) Identificar la correspondencia entre: (i) *La pendiente de la recta tangente* en un punto (o velocidad instantánea) con *la derivada* en dicho punto, y (ii) *La función de pendientes de rectas tangentes* a la curva (o función velocidad) con *la función derivada*.

d) Interiorizar el proceso múltiple y sus productos, y encapsular en el símbolo $f'(x)$ (o equivalentes), articuladamente, con el término función de pendientes de rectas tangentes a la gráfica de una función f (o función de pendientes de una curva o función velocidad). Y en el símbolo $f'(c)$ (o equivalentes), con el término pendiente de la recta tangente a la gráfica de f (o pendiente de una curva o velocidad instantánea) en el punto $x = c$.

Estos actos de comprensión caracterizan un estado básico deseable de comprensión del concepto de derivada, para estudiantes de ingeniería, al término de un primer curso de cálculo referida a una ETC del texto de Larson, la cual es bastante general, aplicable a todos los textos de cálculo.

CAPÍTULO 5

CONSTRUCCIÓN DEL INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN

A continuación se presentan las 9 situaciones problemáticas que se agrupan en el instrumento de observación, incluyendo los análisis de pertinencia que se elaboraron teniendo en cuenta las demandas notables y problemas que la apropiación personal de la ETC de referencia le plantea al alumno. Tales demandas y problemas, identificadas en el estudio y análisis de dicha ETC de referencia, se agruparon en dos planos de referencia para la comprensión del concepto derivada (capitulo anterior). Las que a su vez permitirán caracterizar *estados de comprensión,* que alcanzan los alumnos con relación al concepto derivada.

1. Situaciones diseñadas, solución y análisis de pertinencia según planos de referencia para la comprensión

Situación 1)

Dé la **definición de la derivada de una función** f **en** x. Utilice la definición para calcular la derivada de la función $g(x) = \dfrac{3}{x}$ en $x = 2$. Determine la función g'.

Métodos de solución:

Método 1:

Paso1: La definición de la derivada de una función es: La derivada de una función f en x viene dada por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Paso2: Utilizando la definición, la derivada de la función $g(x)=\frac{3}{x}$ en $x=2$ sería:

$$g'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2+h}-\frac{3}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{6-6-3h}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3h}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{2h(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{2(2+h)}=\frac{-3}{4}.$$

Paso3: Por reglas de derivación o por definición, la función g' estaría dada por $g'(x)=-\frac{3}{x^2}$.

Análisis de pertinencia.

Al escribir: *La definición de la derivada de una función* f *en* x *viene dada por* $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *siempre que exista ese límite. Para todos los* x *para los que exista este límite,* f' *es una función de* x ” como respuesta a la primera pregunta (*dé la definición de la derivada de una función* f *en* x), es necesario poner en juego la expresión simbólica mediante la cual se establece la definición institucional de derivada, expresada en términos del símbolo que se utiliza para representar la función involucrada, en este caso f. Para ello se necesita pasar por la apropiada interpretación matemática de la pregunta, que supone el reconocimiento de los términos función y derivada, estableciendo la relación que se da entre ellos en el contexto de la pregunta, es decir, la forma como la función, representada por f, ingresa en la definición de la derivada. Esta acción permite inferir que se realiza el reconocimiento global de la secuencia de operaciones mediante la cual se establece la definición simbólica de derivada, que aparece como uno de los actos de comprensión establecidos en el proceso de apropiar el significado matemático del concepto de derivada (referente plano 1a). Sin embargo, cabe la posibilidad que dicho reconocimiento sea memorístico, que no incluye el significado de las distintas expresiones simbólicas que se articulan en la definición. La respuesta a la segunda pregunta pone a prueba el posible carácter memorístico de la respuesta.

La respuesta que se consigna en el primer paso del proceso de cálculo, que conduce a la respuesta de la segunda pregunta, supone la apropiada interpretación matemática de la pregunta (*utilice la* *definición para calcular la derivada de la función* $g(x)=\frac{3}{x}$ *en* $x=2$), y que implica, en, primer lugar, discriminar que lo pedido es la derivada en un punto y no la función derivada. Es decir, discriminar la existencia de los dos productos en la definición de derivada, lo que define un segundo acto de comprensión en el proceso de la apropiación del significado matemático del concepto de derivada y que tiene como referente el plano 1b. En segundo lugar, que para calcular la derivada de g en 2, se debe utilizar la definición que se escribió en la respuesta a la primera pregunta y no reglas de derivación, reconociendo una función específica g, que define la expresión $g(x)=\frac{3}{x}$ y a la cual se debe transferir el rol de f en la definición dada. La toma de conciencia sobre esta transferencia (en el caso de un solucionador específico), es un primer indicio de que la respuesta mencionada no es memorística.

El segundo paso, en el proceso de cálculo, indica que en la interpretación de la pregunta 2, al reconocer la función g, también se reconoce, en la expresión que la define, la forma como funciona su regla de cálculo o de correspondencia.

La secuencia de transformaciones posteriores, que modifica la expresión matemática interna, manteniendo sin efecto el significado del símbolo límite, hasta el último paso, permite redondear, (en el caso de un solucionador particular), la inferencia de que la respuesta mencionada no es memorística y que existe una coherencia matemática que liga la expresión simbólica mediante la cual el solucionador expresa la definición de derivada y las acciones que se ponen en juego para responder a la pregunta 2. Es decir, que se da reconocimiento global y local de la secuencia de operaciones mediante la cual se establece la definición simbólica de derivada.

Finalmente, al escribir, "*que al repetir para un c general, en lugar de 2, el proceso anterior la función* g' *estaría dada por* $g'(c)=-\frac{3}{c^2}$", en la interpretación matemática de la pregunta (*determine la función* g') se ha reconocido en g' el convenio mediante el cual se denota la función derivada de una función dada, aplicado, en este caso, a la función g y su separación frente a la derivada puntual en $x = 2$. Se puede decir, por lo tanto, (en el caso de un solucionador particular), que ha interiorizado los procesos asociados con las definiciones de función derivada y derivada puntual y los ha encapsulado en los símbolos correspondientes, lo que constituye el tercer referente (plano 1c) en la apropiación del significado matemático del concepto de derivada.

Una observación importante, en los análisis anteriores, es que en el proceso de resolución exitoso del ítem, aparecen, como apoyo fundamental, varios conocimientos matemáticos de soporte, que no son objeto de estudio en el tema de la derivada. En la interpretación de la pregunta 1, y por lo tanto en la respuesta, resulta fundamental el concepto de función y la forma como se representa simbólicamente. Sin reconocer el concepto de función la pregunta no toma sentido. En la respuesta de la pregunta 2, para poder ejecutar apropiadamente los dos primeros pasos se hace necesario reconocer en $g(x) = \frac{3}{x}$, la forma como se define una función mediante una expresión matemática variable y como funciona su regla de correspondencia. Finalmente, los pasos posteriores al 2, en la cadena de cálculos que se realiza para calcular la derivada de g en $x = 2$, aunque nada tienen con la definición misma de derivada, son indispensables para alcanzar una respuesta concreta y correcta e implican que se debe disponer de un manejo apropiado de fracciones algebraicas. Este aspecto es importante en el momento de analizar las producciones de los alumnos e intentar determinar las posibles causas de las fallas o errores que se puedan presentar.

Los análisis anteriores permiten concluir la pertinencia del ítem 1, para confrontar en el alumno, la apropiación del significado matemático del concepto de derivada y que se señala en las casillas correspondientes de la tabla de pertinencia.

Método 2:

<u>Paso1</u>: La definición de la derivada de una función es: La derivada de una función f en x viene dada por $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Paso2: Utilizando la definición en x, la derivada de la función $g(x)=\frac{3}{x}$ sería:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{x+h}-\frac{3}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3x-3x-3h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{x(x+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{x(x+h)}=\frac{-3}{x^2}.$$

Paso3: De donde reemplazando por $x=2$ en está última, $g'(2)=\frac{-3}{(2)^2}=-\frac{3}{4}$.

Método 3:

Paso1: La definición alternativa de la derivada de una función es: La derivada de una función f en c es $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ siempre que dicho límite exista.

Paso2: Usando la definición alterna, la derivada de la función $g(x)=\frac{3}{x}$ en $c=2$ sería:

$$g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{6-3x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-3}{2x}=\frac{-3}{4}.$$

Paso3: Por reglas de derivación o repitiendo para un c general, en lugar de 2, el proceso anterior la función g' estaría dada por $g'(c)=-\frac{3}{c^2}$.

Cabe aclarar que con esta definición alterna también se puede realizar el procedimiento descrito en la forma 2.

Respuestas: ***)** La derivada de $g(x)=\frac{3}{x}$ en $x=2$ es: $g'(2)=-\frac{3}{4}$.

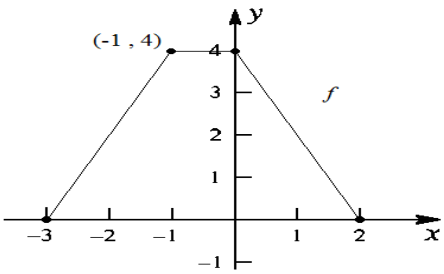
*) La función g' estaría dada por $g'(x)=\frac{-3}{x^2}$.

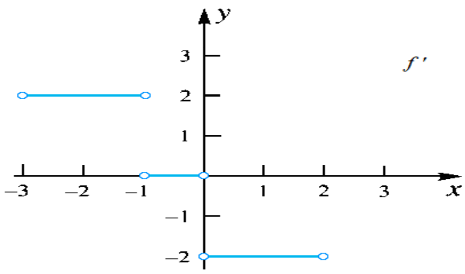
Análisis de pertinencia métodos 2 y 3.

Las identificaciones, discriminaciones, interiorizaciones y encapsulamientos que se harían teniendo en cuenta las estrategias de solución denominadas método 2 y 3, serían las mismas realizadas en el método 1, aunque el orden en los cálculos sean diferentes, por ejemplo en el método 2, lo que se calcula primero es la función derivada de g y luego la derivada puntual en $x = 2$, mientras que en el método 3 se sigue el mismo orden del método 1, aclarando que la fórmula alterna de la derivada sólo se da y se utiliza en el texto, para determinar si una función es o no derivable en un punto, razón por la cual puede ser probable que ningún estudiante la utilice en su procedimiento de justificación.

Situación 2)

Utilice la gráfica de la función f (dada al lado izquierdo), para trazar la gráfica de la función $f\,'$ (al lado derecho). Defina analíticamente $f\,'(x)$ y calcule $f\,'(-1)$. Justifique sus respuestas.





Métodos de solución:

Método 1:

Paso 1: La pendiente m de la recta que contiene al segmento que une los puntos $(-3, 0)$ y $(-1, 4)$, y que forma parte de la gráfica de f, está dada por la expresión $m = \dfrac{4-0}{-1-(-3)} = \dfrac{4}{2} = 2$, es decir que $f\,'(x) = 2$ para x en el intervalo $(-3, -1)$. Por lo tanto, la gráfica de $f\,'$ en el intervalo $(-3, -1)$ es el segmento de recta (por encima del eje x con ordenada constante 2) que se representa en la gráfica de la derecha, sin incluir sus valores extremos pues en dichos puntos la gráfica de f no tiene una recta tangente.

Paso2: La pendiente m de la recta que contiene al segmento que une los puntos $(-1,4)$ y $(0,4)$, y que forma parte de la gráfica de f, está dada por la expresión $m=\frac{4-4}{0-(-1)}=\frac{0}{1}=0$, es decir que $f'(x)=0$ para x en el intervalo $(-1,0)$. Por lo tanto la gráfica de f' en el intervalo $(-1,0)$ es el segmento de recta (sobre el eje x con ordenada constante 0) que se representa en la gráfica de la derecha sin incluir sus valores extremos pues en dichos puntos la gráfica de f no tiene una recta tangente.

Paso 3: La pendiente m de la recta que contiene al segmento que une los puntos $(0,4)$ y $(2,0)$, y que forma parte de la gráfica de f, está dada por la expresión $m=\frac{0-4}{2-0}=\frac{-4}{2}=-2$, es decir que $f'(x)=-2$ para x en el intervalo $(0,2)$. Por lo tanto la gráfica de f' en el intervalo $(0,2)$ es el segmento de recta (por debajo del eje x con ordenada constante -2) que se representa en la gráfica de la derecha sin incluir sus valores extremos pues en dichos puntos la gráfica de f no tiene una recta tangente.

Paso 4: El método anterior no calcula los valores de la función f' en $x=-3,\ -1,\ 0$ y 2, pues en los puntos $(-3,0), (-1,4), (0,4)$ y $(2,0)$ la gráfica tiene un punto angular o anguloso, es decir, no tiene una recta tangente y por lo tanto f' no está definida en dichos valores de x, y así los puntos respectivos no hacen parte de la gráfica de f' y los trazos en dichos puntos serán representados por puntos abiertos. Consecuentemente las derivadas puntuales $f'(-3),\ f'(-1),\ f'(0)$ y $f'(2)$ no existen.

En conclusión, la gráfica de la función f' quedaría como aparece arriba al lado derecho de la gráfica de f y su regla de correspondencia está dada por la expresión $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -2 & \text{si} \quad 0<x<2 \end{cases}$ y $f'(-1)$ no existe.

<u>Respuestas</u>: *) $f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -2 & \text{si} \quad 0<x<2 \end{cases}$ *) $f'(-1)$ <u>No existe</u>.

Análisis de pertinencia.

Para escribir los pasos 1, 2, 3 en el proceso de solución, se ha debido interpretar apropiadamente la primera parte del problema (*Utilice la gráfica de la función f, para trazar la gráfica de la función f'*), lo cual implica reconocer, el concepto de función (no tendría sentido la pregunta sin este reconocimiento), y en el símbolo f' la función derivada de f.

Implica, de otro lado, asociar, para efectos de su cálculo, la función derivada de f (f') con la función de pendientes de rectas tangentes en la gráfica de f, que por la configuración de la gráfica de la función f mediante segmentos rectilíneos resulta constante a trozos, igual a la pendiente del correspondiente segmento rectilíneo, en el trozo indicado del dominio de f. Esta asociación es uno de los actos de comprensión que demanda la apropiación del significado geométrico de la derivada y que tiene como referente el plano 2c.

El éxito de la acción que conduce al trazado de la gráfica de f' depende de la utilización y adecuada aplicación de la fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta y a la interpretación geométrica, en los trozos considerados del dominio de f, de la expresión analítica $f'(x)=k$, k constante.

La estrategia de cálculo utilizada, anticipa que en los pasos 1, 2, 3 no se calculan los valores de f' en los puntos donde $x = -3,\ -1,\ 0\ \text{ y }\ 2$, y que dichos puntos requieren de un tratamiento diferente. La indicación de que "es necesario calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica f en $x = -3,\ -1,\ 0\ \text{ y }\ 2$", supone la identificación en el contexto geométrico, de la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica con derivada en el valor correspondiente en el dominio de f, lo que a su vez representa un segundo acto de compresión que se ha asociado con la apropiación del significado geométrico de la derivada (referente plano 2c). La discriminación sobre una gráfica entre puntos que tienen y no tienen tangente, que permite determinar que la gráfica de f no tiene una recta tangente en los puntos $(-3,0), (-1,4), (0,4)$ y $(2,0)$, y la asociación entre pendiente de la tangente y derivada en un punto, permiten la conclusión de que $f'(-3), f'(-1), f'(0)$ y $f'(2)$ no existen.

La respuesta a la segunda parte del problema (*Defina analíticamente* $f'(x)$ *y calcule* $f'(-1)$), simplemente capitaliza los resultados obtenidos en el proceso de trazado de la gráfica, a partir del reconocimiento de lo representado por los símbolos $f'(x)$ y $f'(-1)$ e implica poner en juego el esquema semiótico de definición analítica, por partes, de una función.

Es importante destacar que en el proceso de solución exitosa del problema ingresa un conocimiento soporte que vale la pena identificar: i) El concepto de función, el reconocimiento de su gráfica y el simbolismo g, $g(a)$ para representar, respectivamente, una función como un todo y como un valor de ella en un punto de su dominio. ii) El concepto de pendiente de una recta y la fórmula que permite calcularla mediante las coordenadas de dos puntos sobre ella. iii) La interpretación gráfica de la expresión analítica $f'(x) = k$. iv) El esquema semiótico mediante el cual se define una función a trozos.

Es también pertinente observar que en el proceso de solución se hace necesario discriminar entre lo que representan matemáticamente, en el marco de la definición de derivada, los símbolos f', o $f'(x)$ y $f'(-1)$, $f'(0)$, discriminación asociada al acto de comprensión en la apropiación del significado matemático de la definición de derivada (referente plano 1b). De otro lado, la coherencia entre las acciones realizadas para el cálculo de la función f' y los valores tipo $f(a)$ y las asociaciones correspondientes a la función de pendientes y pendiente de la tangente en un punto dado de la gráfica indican, en el caso de un solucionador particular la adecuada interiorización y encapsulamiento. Y que son referentes en la apropiación tanto del significado matemático como geométrico del concepto de derivada.

Método 2:

El problema también se puede resolver sin poner en juego las correspondencias descritas en el eje de referencia 2c. Considerando el mismo número de pasos del método 1, pero utilizando la pendiente de cada segmento de recta calculada (pasos 1, 2 y 3), para hallar la respectiva ecuación en el dominio dado, y así determinar analíticamente la regla de correspondencia de la función f a trozos, luego calcular f' utilizando las reglas de derivación y por último analizar las derivadas puntuales en $x=-3,\ -1,\ 0$ y 2 (paso 4), ya sea utilizando la formula alternativa de derivada o recurriendo a la gráfica de la función f dada.

Cabe aclarar que para determinar analíticamente la regla de correspondencia de la función f a trozos, podría no ser necesario hacer referencia a la pendiente de cada segmento, sino calcular directamente la ecuación de cada uno de ellos utilizando la formula $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, pero esto podría indicar la ausencia del concepto básico de pendiente de una recta.

Aplicando dicho proceso, tal como se indicó, se tiene que $f(x)=\begin{cases} 2x+6 & \text{si} \quad -3\le x<-1 \\ 4 & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ -2x+4 & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$, y

$f'(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ 0 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -2 & \text{si} \quad 0<x<2 \end{cases}$, la cual no está definida en $x=-3,\ -1,\ 0$ y 2 pues la función f no es derivable en dichos valores ya que los límites laterales en cada valor son diferentes:

Para $x=-3$, $\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{(2x+6)-0}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{2(x+3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3^+}2=2$, mientras que $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$ no existe, debido a que f no está definida para $x<3$.

Para $x=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{(2x+6)-4}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2(x+1)}{x+1}=2$, mientras que $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{4-4}{x+1}=0.$

Para $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4-4}{x}=0$, mientras que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(-2x+4)-4}{x}=-2.$.

Para $x=2$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(-2x+4)-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}-2=-2$, mientras que $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ no existe, debido a que f no está definida para $x>2$.

Cabe resaltar que la no derivabilidad de la función f en los valores ya mencionados, se puede concluir recurriendo a la gráfica de la función f dada, ya que su gráfica no tiene una recta tangente en los puntos $(-3,0),(-1,4),(0,4)$ y $(2,0)$. Así utilizando cualquiera de las alternativas, se concluiría que $f'(-1)$ no existe y la gráfica de la función f' quedaría como aparece al lado derecho de la gráfica de f.

Análisis de pertinencia método 2.

Como en el método 1, los planteamientos iniciales del proceso de solución señalan el reconocimiento del concepto de función, y del símbolo f' como la función derivada de la función f, además la utilización y adecuada aplicación de una fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta, así como la gráfica de una función lineal a trozos. Pero a diferencia de éste, no se pone en juego la correspondencia entre la función de pendientes de rectas tangentes a la curva con la función derivada (referente 2cii), en su reemplazo, se utilizan y aplican fórmulas para calcular ecuaciones de rectas y así definir correctamente los trozos de la función f con sus respectivos dominios que harán parte de la expresión analítica de la regla de correspondencia de la función. Por otro lado, es necesario el reconocimiento de f como una función numérica definida a trozos, lo cual conduce a que la función derivada se calcule por partes, por derivación directa mediante reglas, y al mismo tiempo, que los valores de $x = -3, -1, 0$ y 2 no deben pertenecer a su dominio ya que en dichos valores la función derivada no existe, lo cual puede suponer, de un lado, si se utiliza la formula alternativa de la derivada, el reconocimiento global y local de la representación analítica de la definición de derivada y la secuencia operativa que se debe poner en juego y que constituye el primer acto de comprensión asociado con la apropiación del significado matemático de la derivada (referente 1a) y por ende requiere de la disponibilidad del concepto de límite y del esquema de cálculo con funciones definidas a trozos y, por implicación, una apropiación del significado matemático de la definición de derivada. Y del otro lado, si se recurre a la gráfica de la función f, la identificación en el contexto geométrico, de la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica con derivada en el valor correspondiente en el dominio de f, lo que a su vez representa un acto de compresión que se ha asociado con la apropiación del significado geométrico de la derivada (referente 2ci).

Las consideraciones anteriores permiten concluir que la pertinencia del ítem 2, para confrontar en el alumno la apropiación que ha realizado del concepto de derivada, presenta variaciones según el método de solución utilizado. Ambos métodos requieren de la apropiación parcial del significado matemático de la derivada en lo que respecta a los referentes 1b) y 1c). Mientras que en el método 1, se ponen en juego, además, otros actos de comprensión relacionados con la interpretación geométrica de la derivada, referentes 2cii y 2d. Por su parte el método 2, podría suponer la apropiación del significado matemático al poner en juego los otros actos de comprensión agrupados en el referente 1a) o la apropiación parcial del significado geométrico de la derivada en lo que respecta al referente 2ci. Tal como se indica en la matriz de pertinencia.

Situación 3)

Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x-4 & \text{si} \quad x\leq 2\\ 4-2x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$. Determine, de ser posible, la función $\dfrac{dy}{dx}$ y los valores de $f'(0)$ y $f'(2)$. Justifique sus respuestas.

Métodos de solución:

Método 1:

Puesto que f es una función definida a trozos calculamos su función derivada $\dfrac{dy}{dx}$ también a trozos, aplicando la definición de derivada.

Paso 1: Aplicamos la definición para valores x en el dominio de f tales que $x<2$,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-4-(2x-4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-4-2x+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2.$$

Paso 2: Aplicamos la definición para valores x en el dominio de f tales que $x>2$,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-2(x+h)-(4-2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-2x-2h-4+2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h}=\lim_{h\to 0}-2=-2.$$

Paso 3: Aplicamos la definición para $x=2$,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(2x-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}2=2 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(4-2x)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-2=-2.$$

Como los limites laterales no coinciden, la función no es derivable en $x=2$.

De donde podemos concluir que $\frac{dy}{dx}=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<2 \\ -2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$, la cual no está definida en $x=2$. Consecuentemente, $f\,'(2)$ no existe y como $f\,'(0)$ es el valor de la función $\frac{dy}{dx}$ en $x=0$ se puede concluir que $f\,'(0)=2$.

Análisis de pertinencia.

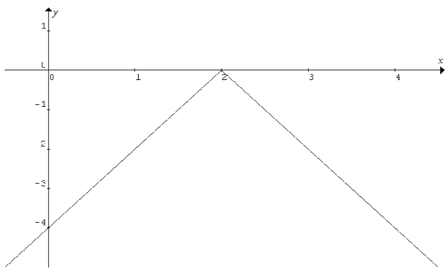
Los planteamientos iniciales en el proceso de solución señalan, explícitamente, de un lado, el reconocimiento del símbolo $\frac{dy}{dx}$ como la función derivada de la función f y, de otro, el reconocimiento de f como una función numérica definida a trozos, lo cual conduce a que la función derivada se calcule por partes. Los pasos en los que se estructura el plan de solución de la situación permiten inferir con toda claridad que se realiza el reconocimiento global y local de la representación analítica de la definición de derivada y la secuencia operativa que se debe poner en juego y que constituye el primer acto de comprensión asociado con la apropiación del significado matemático de la derivada (referente 1a). Los procesos de cálculo pasan por la interpretación del rol de la función f en dicha expresión y la forma como se calcula con ella, según su definición a trozos. El paso 3 en el que se calcula el valor de la función derivada en $x=2$, permite inferir que se reconoce que los valores de la función f siguen reglas diferentes a la izquierda y derecha de 2 y, por lo tanto, el cálculo del límite que define derivada en 2, no se puede aplicar como en los pasos 1 y 2, por lo que se aplica el método de los límites laterales. Es decir, este proceso de cálculo requiere de la disponibilidad del concepto de límite y del esquema de cálculo con funciones definidas a trozos y, por implicación, una apropiación del significado matemático de la definición de derivada.

La respuesta $f\,'(0)=2$, permite inferir que se identifica lo representado por los símbolos $\frac{dy}{dx}$ y $f\,'$, y que $f\,'(0)$ se reconoce como el valor puntual de la derivada en 0. En la respuesta "$f\,'(2)$ no existe", se capitaliza el resultado del paso 3, mediando de nuevo las identificación de lo representado por los símbolos $\frac{dy}{dx}$ y f', y que $f'(2)$ se reconoce como representación de un posible valor puntual de la derivada en 2. El proceso de solución utilizado supone, por lo tanto, la discriminación de los dos productos de la definición de derivada, lo que constituye el segundo acto de comprensión que se asocia con la apropiación del significado matemático de la derivada (referente 1b). Es claro también, a posteriori, que en el caso de un solucionador particular que utilizara esta manera de enfrentar el proceso de solución de la situación 3, ha debido realizar los procesos de abstracción reflexiva contemplados en el referente 1c, relacionados con la apropiación del significado matemático de derivada.

Es importante destacar la importancia del conocimiento soporte requerido para que el proceso de solución tenga éxito. En primer lugar el concepto de función y la apropiación del concepto de límite. En segundo lugar la disponibilidad del esquema de definición, por partes, de una función numérica.

Método 2:

El problema también se puede resolver sin poner en juego la definición de derivada. Considerando el mismo número de pasos del método 1, pero tendiendo en cuenta que “la función f es una función definida a trozos y cada trozo es un polinomio de grado uno, entonces la función es derivable en todo punto excepto posiblemente en $x = 2$”, por lo que la función derivada $\frac{dy}{dx}$ de f puede calcularse aplicando fórmulas de derivación según las expresiones que definen las diferentes partes de la función f (en los pasos 1 y 2) y analizando separadamente su valor en $x = 2$ (paso 3), para lo cual se recurre a la gráfica de la función f.



Aplicando reglas de derivación, tal como se indicó, se tiene que $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, la cual no está definida en $x = 2$ pues la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto $(2,0)$ y por consiguiente no es derivable en $x = 2$. Es decir $f'(2)$ no existe y puesto que $f'(0)$ es el valor de la función $\frac{dy}{dx}$ en 0 se puede concluir que $f'(0)=2$.

Análisis de pertinencia método 2.

Como en el método anterior, los planteamientos iniciales del proceso de solución señalan el reconocimiento del símbolo $\frac{dy}{dx}$ como la función derivada de la función f y, de otro, el reconocimiento de f como una función numérica definida a trozos, lo cual conduce a que la función derivada se calcule por partes, pero en este caso, el proceso de cálculo, pasos 1 y 2, no pasa por la aplicación de la definición de derivada, sino por la derivación directa mediante reglas (polinomios). En el paso 3 tampoco se recurre a la definición de derivada y al cálculo del límite involucrado mediante límites laterales. En este caso se recurre a la construcción de la gráfica de la función f reconociendo que las expresiones que definen sus trozos corresponden a líneas rectas que se cortan en el punto $(2,0)$ tal como se indica en la gráfica. El argumento utilizado para concluir sobre la no existencia de la derivada en $x=2$, plantea explícitamente el reconocimiento de la correspondencia entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto correspondiente, que constituye un acto de comprensión asociado con la apropiación parcial de la interpretación geométrica de la derivada (referente 2ci).

Como en el método de solución 1, el seguimiento posterior de las respuesta dada permite inferir que se identifica lo representado por los símbolos $\frac{dy}{dx}$ y f', y que $f'(0)$ se reconoce como el valor puntual de la derivada en 0, y que por lo tanto se discriminan los dos productos de la definición de derivada, que constituye el segundo acto de comprensión que se asocia con la apropiación del significado matemático de la derivada (referente 1b). Igualmente, que en el solucionador particular se ha debido realizar los procesos de abstracción reflexiva contemplados en el referente 1c, relacionados con la apropiación del significado matemático de derivada.

En este caso, el conocimiento soporte que se debe poner en juego no incluye el concepto de límite, pero emerge el proceso de construcción de la gráfica de f que implica el reconocimiento de la gráfica de sus trozos a partir de sus correspondientes expresiones analíticas.

Otras alternativas de solución: Es posible identificar tres alternativas más de solución de este ítem. El que podríamos llamar **método 3,** podría tomar como base el método 1, es decir siguiendo los mismos pasos 1 y 2, pero en el paso 3, en lugar de definir el cálculo de la derivada en $x = 2$, utilizando la definición, se definiría mediante consideraciones geométricas, paso 3 del método 2 para este caso, es decir recurriendo a la gráfica de la función f. En este caso el proceso de solución supone actos de comprensión relacionados con los referentes 1a, 1b, 1c; implicaría, adicionalmente, un acto de comprensión asociado con la apropiación parcial de la interpretación geométrica de la derivada (referente 2ci).

El que llamaríamos **método 4,** toma como base el método 2, pero, en lugar de definir el cálculo de la derivada en $x = 2$ mediante consideraciones geométricas, se definiría siguiendo el mismo procedimiento del método 1, es decir en forma analítica y no se necesitaría recurrir a la gráfica de la función f. En este caso el proceso de solución supone actos de comprensión relacionados con los referentes 1a, 1b, 1c; implicaría, adicionalmente, conocimientos sobre cálculo de derivadas de polinomios.

El método que llamaríamos **método 5,** sería una aproximación radicalmente geométrica y partiría de la construcción de la gráfica de f. A partir del reconocimiento de $\frac{dy}{dx}$ como la función derivada y su identificación con f', la función derivada se calcularía siguiente los tres pasos indicados pero en cada caso apoyándose en la interpretación geométrica de la derivada. De esta manera los actos de comprensión involucrados estarían asociados a los referentes, 1b, 1c, 2c, 2d.

Las consideraciones anteriores permiten concluir que la pertinencia del ítem 3; para confrontar la apropiación que el estudiante ha realizado del concepto de derivada, presenta variaciones según el método de solución utilizado. Todos los métodos requieren de la discriminación de los dos productos en la definición de derivada (referente 1b), y los procesos de abstracción reflexiva que se asocian con el referente 1c (ambos relacionados con la apropiación del significado matemático de la derivada). En el método 1, se pone en juego todos los actos de comprensión relacionados con el significado matemático de la derivada. En el método 2, además de los que forman parte del núcleo común se pone en juego el acto de comprensión que asocia pendiente y derivada puntual (referente 2ci). En el método 3 igual que en el método 1 y adicionalmente el acto de comprensión que asocia pendiente y derivada puntual (referente 2ci). En el método 4 igual que en el método 1. En el método 5, además de los que forman parte del núcleo común se pone en juego los actos de comprensión relacionados con las versiones en contexto (referentes 2c y 2d). Este espectro de la pertinencia de la situación 3, según el método de solución se puede visualizar en la matriz de pertinencia.

Hay también variaciones en el conocimiento de soporte requerido en cada método.

Situación 4)
La recta tangente a la gráfica de una función $y = g(x)$ en el punto $(2,-3)$ pasa por el punto $(5,6)$. Encontrar $g(2)$ y g' en $x = 2$. Justifique sus respuestas.

Método de solución:

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = g(x)$, en el punto $(2,-3)$, está dada por la derivada de g, g', en $x = 2$, basta calcular la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto de tangencia $(2,-3)$ y el punto $(5,6)$ utilizando la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, de donde $g'(2) = \dfrac{6-(-3)}{5-2} = \dfrac{9}{3} = 3$. Y puesto que $(2,-3)$ es el punto de tangencia a la gráfica, la ordenada -3 da el valor de g en la abscisa 2. Esto es $g(2) = -3$.

<u>Respuestas</u>: ***)** $g(2) = -3$ y ***)** g' en $x = 2$ es 3.

Análisis de pertinencia.

En el proceso de solución de la situación, al identificar la pendiente de la recta tangente en el punto $(2,-3)$ con la derivada de la función g en $x=2$, $g'(2)$, y calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(2,-3)$ y que pasa por el punto $(5,6)$, se observa como explícito el acto de comprensión i) incluido en el proceso de apropiar las versiones en contexto del concepto de derivada (referente plano 2c). Y teniendo en cuenta además la identificación de $g(2)$ como el valor de la función g en 2, y g' en $x=2$ como el valor de la función derivada de g en 2, se hace visible igualmente, el reconocimiento de g' como la función derivada de g y su distinción de la derivada puntual $g'(2)$, que constituye el acto de comprensión mediante el cual se define el plano de referencia para la comprensión 1b (discriminación de los dos productos de la definición de derivada).

En segundo lugar, el reconocimiento de los símbolos g' y $g'(2)$, constituye por lo menos, un indicio parcial de que se han realizado los procesos de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en los planos de referencia 1c y 2d.

En conclusión, el ítem 4, se puede considerar pertinente para confrontar parcialmente en el alumno la apropiación de la interpretación geométrica del concepto de derivada, en particular, la identificación de derivada en un punto, con la pendiente de la recta tangente en dicho punto (referente plano 2ci) y el proceso de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en (plano 1c y 2d). Esta pertinencia del ítem frente a la confrontación se registra en la Tabla de pertinencia.

Es importante destacar que, tanto en la interpretación del problema, como en la solución exitosa, hay una presencia importante del conocimiento que hemos denominado "de soporte" tales como: "función definida como $y=g(x)$", "gráfica de una función", "$g(2)$ como el valor de la función g en 2" y "pendiente de una recta y fórmula para calcularla con base en las coordenadas de dos puntos sobre ella".

En el proceso de solución se pueden identificar varios actos de comprensión que se realizan poniendo en juego conocimiento soporte. Tal es el caso de los actos de comprensión de "discriminar" entre la información dada (situación, contexto del problema) y la pregunta que debe resolver en dicho contexto (dándole sentido al problema), "sintetizar" una representación personal de la recta tangente a la gráfica de la función g, a partir del reconocimiento del significado de las expresiones "función definida como $y = g(x)$", "recta tangente a la gráfica de una función", "punto $(2,-3)$ como coordenadas del punto de tangencia", "puntos de coordenadas $(2,-3)$ y $(5,6)$ como determinantes de la recta tangente" y "reconocimiento" de $g(2)$ como el valor de la función g en 2.

El acto de "identificar" pendiente de la recta tangente en el punto $(2,-3)$ con la derivada de la función g en 2", organiza la acción del sujeto que implica el cálculo de la pendiente. Igualmente, el "identificar" el rol de las ordenadas y las abscisas en la configuración de la fórmula también es un acto de comprensión, fundamental para poder realizar el cálculo correcto.

Se observa, de otro lado, que el concepto de "recta tangente a la gráfica de una función", la forma como se ubica el punto de tangencia respecto a la gráfica y la recta tangente como punto común" están relacionados con la definición de pendiente de la recta tangente que se formaliza mediante la derivada y que viene a ajustar el concepto de tangente que todos nos formamos en el estudio de la geometría euclidiana.

Situación 5)

La distancia, medida en pies, que recorre un cuerpo en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $s(t) = 5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos. Responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta:

a) ¿Cuál es la fórmula para la función *velocidad* del cuerpo en caída libre?

Método de solución:

Como la función velocidad esta definida por la función derivada de la función posición $s(t)$, entonces la función velocidad está dada por $v(t) = s'(t) = 10t$, medida en pies por segundo.

Respuesta: La función velocidad es $v(t) = 10t$, medida en pies por segundo.

b) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo en el tercer segundo?

Método de solución:

Utilizando la función velocidad determinada en el literal a), se puede calcular la velocidad del cuerpo en el tercer segundo como $v(3) = 10 * 3 = 30$ pies por segundo.

Respuesta: La velocidad del cuerpo en el tercer segundo es de 30 pies por segundo.

c) ¿Cuál es la *velocidad media* del cuerpo entre el tercer y cuarto segundo?

Método de solución:

Como la velocidad media está dada por la fórmula $\frac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, entonces la velocidad media del cuerpo entre el tercer y cuarto segundo será $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{90 - 45}{1} = 45$ pies por segundo.

Respuesta: La velocidad media del cuerpo entre el tercer y cuarto segundo es de 45 pies por segundo.

Análisis de pertinencia.

En la respuesta a la pregunta a) (*¿Cuál es la fórmula para la función velocidad del cuerpo en caída libre?*) planteada por la situación, se hace explícita, la identificación de la correspondencia entre la función velocidad y la derivada de la función posición $s(t)$, acto de comprensión ii) incluido en el proceso de apropiar las versiones en contexto del concepto de derivada (referente plano 2c). Cabe aclarar que en la respuesta no es indispensable introducir el símbolo $s'(t)$, pero en el caso de ser utilizado, se puede inferir el reconocimiento y encapsulamiento en el símbolo $s'(t)$, con el término función derivada de $s(t)$ o función velocidad $v(t) = s'(t)$, que constituye el acto de comprensión mediante el cual se define el plano de referencia para la comprensión 2d.

Al responder la pregunta b) (*¿Cuál es la velocidad del cuerpo en el tercer segundo?*), se puede inferir la identificación de la correspondencia entre la función velocidad en el tercer segundo, con el valor de la derivada de la función posición en $t = 3$, que constituye el acto de comprensión i) incluido en el proceso de apropiar las versiones en contexto del concepto de derivada (referente plano 2c). Además cabe destacar que fundamentalmente un acto de comprensión recae sobre el concepto soporte de función, especialmente en el cálculo de imágenes a través de la regla de correspondencia dada analíticamente.

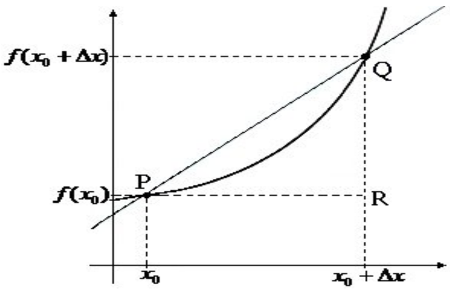
Por último, al responder la pregunta c) (*¿Cuál es la velocidad media del cuerpo entre el tercer y cuarto segundo*?), se observa la identificación de la fórmula que define la velocidad media de un cuerpo, resaltando que, el identificar en dicha fórmula el papel que juegan tanto los dos valores del tiempo, como sus imágenes, es decir las respectivas distancias recorridas en dichos tiempos, es un acto de comprensión fundamental para realizar el cálculo correcto de la velocidad media pedida. De esta manera este ítem confronta solamente conocimiento que se ha denominado "de soporte".

En conclusión, la situación 5, se puede considerar pertinente para confrontar parcialmente en el alumno la apropiación de la interpretación física del concepto de derivada, en particular, la identificación de derivada con la velocidad (referente plano 2cii) y dependiendo de las producciones de los estudiantes, el proceso de interiorización y encapsulamiento al que se hace referencia en el plano 2d. Esto se encuentra registrado en la tabla de pertinencia.

De otro lado, se puede observar que en la solución de los ítems b) y c); de esta situación, como se dijo anteriormente, aparece la identificación de varios actos de comprensión que se realizan poniendo en juego conocimiento soporte: “función” especialmente en el cálculo de imágenes a través de la regla de correspondencia dada analíticamente, disponibilidad y adecuada aplicación de la fórmula para el cálculo de la velocidad media de un cuerpo.

Situación 6)

Teniendo en cuenta que el dibujo que aparece a continuación se utiliza para explicar el porque la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto se define como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $(*)$, si este límite existe. Seleccione la respuesta correcta o responda cada pregunta, en cualquier caso justifique claramente:



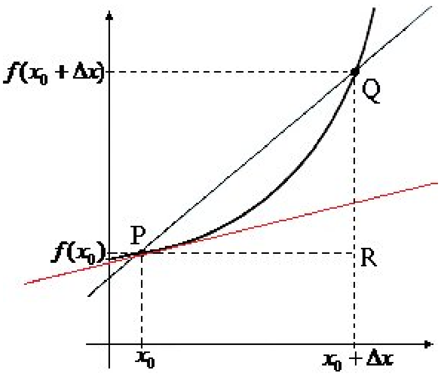
a) ¿En qué punto de la gráfica, la fórmula $(*)$ da la derivada de la función?

i) En P. ii) En Q. iii) En P y Q. iv) En R.

Justificación 1 de la elección: En la gráfica según la fórmula, cuando $\Delta x \to 0$, se tendrá que $x_0 + \Delta x \to x_0$, de donde $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ y así el punto Q tiende al punto P, por lo que la fórmula $(*)$ dará la derivada de la función en el punto P.

Justificación 2 de la elección: Ya que la expresión $(*)$, se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en un punto, en este caso $\mathrm{P}(x_0 \, , f(x_0))$.

b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la expresión $(*)$ que define la derivada de una función en un punto? De su representación gráfica en el dibujo dado.



Respuesta y Justificación:

La expresión $(*)$, se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente (recta representada en color rojo en el dibujo) a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $\mathrm{P}(x_0 \, , f(x_0))$. Ya que la recta que pasa por P y Q es una recta secante cuya pendiente podemos calcular sustituyendo en la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, de donde $m_{\sec} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ y así, en el límite cuando $\Delta x \to 0$ se tendrá que $x_0 + \Delta x \to x_0$ y $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$ de donde, el punto Q tiende al punto P, lo que implica que la recta secante PQ se aproxima a la recta tangente a la gráfica de la función f en P y, consecuentemente, la pendiente de la recta secante se aproximará cada vez más a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P, siendo está la posición límite.

c) ¿Cuándo Δx *tiende a* 0 qué pasa con el cociente $\Delta y / \Delta x$?

i) Se anula.

ii) Es un número *infinitamente pequeño.*

iii) Tiene por límite un número.

iv) Se indetermina.

Justificación de la elección: Como la pregunta propuesta es equivalente a ¿Qué pasa con $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$?, y según el enunciado de la situación, dicho límite define la derivada de la función $y = f(x)$ en un punto, en este caso el punto $\mathrm{P}(x_0, f(x_0))$, entonces el número que da el valor de la derivada de la función f, en el punto P será el límite de $\Delta y / \Delta x$ cuando Δx *tiende a* 0.

d) La derivada definida anteriormente, se obtiene si en el cociente $\Delta y / \Delta x$ ...

i) $\Delta x = 0$.

ii) $\Delta x \approx 0$.

iii) Δx *es un número infinitamente pequeño.*

iv) Ninguno de los anteriores.

Justificación de la elección: La derivada de la función f en un punto, definida en el enunciado del problema, requiere del concepto de límite, el cual se entiende como el número al cual tiende $\Delta y / \Delta x$ cuándo Δx tiende a 0, como a su límite, es decir sin alcanzar el 0, esta interpretación no se compagina con ninguna de las tres primeras opciones y, por lo tanto la opción correcta es la iv).

Análisis de pertinencia.

Cuando para la pregunta 6a (*¿En qué punto de la gráfica, la fórmula* (*) *da la derivada de la función?*), se selecciona la opción i) (*En* P), y se tiene en cuenta la justificación denominada 1, se puede inferir, de un lado, que se realiza el reconocimiento global, mediado por la representación gráfica, de la secuencia de operaciones mediante la cual se establece la definición simbólica de derivada, que aparece parcialmente, como uno de los actos de comprensión establecidos en el proceso de apropiar el significado matemático del concepto de derivada (referente plano 1a). De otro lado, el reconocimiento, como límite, de la definición de derivada de una función en un punto, (uno de los productos de la definición de derivada) pues ello implica que debe ser un número, acto parcial de comprensión requerido para la apropiación del significado matemático de la derivada (referente 1b). Además dicha justificación se apoya fuertemente en el concepto de límite de una función numérica en un punto dado de su dominio, identificación del desplazamiento del punto genérico Q hacia el punto P mediante la interpretación geométrica sobre la gráfica de f, de las expresiones $x_0 + \Delta x \to x_0$, y $f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0)$, lo que supone, como soporte, la interpretación analítica del símbolo $f(x_0 + \Delta x)$. Ahora, teniendo en cuenta la justificación denominada 2, se pueden inferir los mismos actos de comprensión descritos para la justificación 1 (referentes plano 1a y 1b), pero dichos reconocimientos están mediados por la identificación de la correspondencia entre la fórmula $(*)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto (referente plano 2ci).

Cuando se responde a la pregunta 6b (*¿Cuál es la interpretación geométrica de la expresión* $(*)$ *que define la derivada de una función en un punto?*) que la expresión $(*)$, se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$, cabe la posibilidad que dicho reconocimiento sea memorístico, que no incluya las identificaciones de las correspondencias expresadas en algunos planos de referencia para la comprensión de las versiones de derivada en contexto. Este carácter memorístico se descarta cuando dicha respuesta se justifica, pues es explícito el reconocimiento del proceso de límite de las rectas secantes a la recta tangente en el punto P de anclaje, y en la discriminación de este proceso de límite, del límite asociado con la aproximación de la pendiente de las rectas secantes a la pendiente de la recta tangente, reconocimiento y discriminación que definen un primer conjunto de actos de comprensión asociados con la interpretación geométrica de la derivada (referente 2a). Además se puede inferir, el reconocimiento de la correspondencia entre el cociente incremental y la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P y Q, y entre el proceso de aproximación de la pendiente de la recta secante a la pendiente de la recta tangente en el punto P, y el reconocimiento de la secuencia de operaciones en la representación analítica de la definición, reconocimientos que definen actos de comprensión que tiene como referentes los planos 2b y 1a. La justificación reconoce finalmente la correspondencia entre la derivada en el punto P dada por la expresión $(*)$ y la pendiente a la gráfica de la función en dicho punto (referente 2ci).

Adicionalmente la justificación se apoya en algunos conocimientos de soporte, en particular, i) reconocimiento de las coordenadas de un punto en el plano, ii) concepto de pendiente aplicado a la recta secante que pasa por los puntos P y Q, iii) el concepto de límite de una función numérica en un punto dado de su dominio, iv) identificación del desplazamiento del punto genérico Q hacia el punto de anclaje P mediante la interpretación geométrica sobre la gráfica de f, de las expresiones $x_0 + \Delta x \to x_0$, y $f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$, lo que supone, como soporte, la interpretación analítica del símbolo $f(x_0+\Delta x)$, v) reconocimiento y trazado de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

La justificación de la respuesta seleccionada (opción iii): (*Tiene por límite un número*), a la pregunta 6c (*¿Cuándo Δx tiende a 0 qué pasa con el cociente $\Delta y / \Delta x$?*), se fundamenta en el concepto de límite y en el reconocimiento, como límite, de la definición de derivada de una función en un punto, (uno de los productos de la definición de derivada) pues ello implica que debe ser un número. En esta manera de sustentar la respuesta elegida no ingresan consideraciones geométricas. Se requiere de actos parciales de comprensión requeridos para la apropiación del significado matemático de la derivada (referentes planos 1a y 1b), parcialidad que se registra en la tabla de pertinencia, resaltando el papel importante que juega la apropiación del concepto soporte de límite de una función numérica en un punto dado de su dominio.

En la justificación de la respuesta seleccionada en d), se hace explícito el reconocimiento de la operación límite, aplicado sobre la función que define el cociente incremental cuando Δx tiende a cero (definición puntual de derivada), el concepto de límite hace el resto. De alguna manera lo que se pide es, como es la variación de Δx cuando se escribe que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existe.

Cabe resaltar el papel fundamental que juegan varios conocimientos matemáticos de soporte, tanto en las interpretaciones de las preguntas, como en las respuestas, resulta central el concepto de límite del cociente incremental, pues sin dicho concepto las preguntas no toman sentido.

Además de conceptos como distancia, función, razón, pendiente de una recta y gráfica de funciones.

Situación 7)

Diga si la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ tiene recta tangente en los puntos $(2,-14)$ y/o $(3,11)$, en caso afirmativo encuentre la ecuación de la recta tangente en él o los puntos indicados.

Método de solución:

La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ tendrá recta tangente en los puntos $(2,-14)$ y/o $(3,11)$, si la derivada de la función f existe en $x=2$ y/o $x=3$, pues dicha existencia de las derivadas puntuales definen cada una de las pendientes de las rectas tangentes en los puntos dados. Como al calcular la derivada se obtiene $f'(x) = 4x^3 - 16x$, para la cual tanto $f'(2)$ y $f'(3)$ existen, entonces la gráfica de la función tiene recta tangente en los puntos dados. Además como $f'(2) = 0$ y $f'(3) = 60$ representan las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(2,-14)$ y $(3,11)$ respectivamente, entonces las ecuaciones de las rectas tangentes se determinan utilizando la fórmula punto-pendiente de una recta dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$. Así:

- La recta tangente que pasa por $(2,-14)$ y tiene pendiente $m=0$ está dada por:
  $y+14=0(x-2)$, por lo tanto $y=-14$.

- La recta tangente que pasa por $(3,11)$ y tiene pendiente $m=60$ está dada por:
  $y-11=60(x-3)$, por lo tanto $y=60x-169$.

<u>Respuestas</u>: *) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(2,-14)$?

NO: ______. SI: __X__. Ecuación: $\underline{y=-14}$.

***)** ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(3,11)$?

NO: ______. SI: __X__. Ecuación: $\underline{y=60x-169}$.

Análisis de pertinencia.

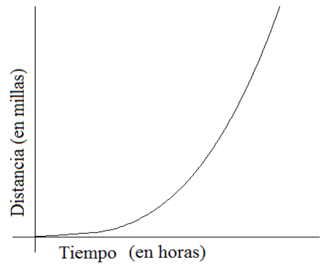
En el proceso de solución de la primera parte de la situación (*Diga si la gráfica de la función* $f(x)=x^4-8x^2+2$ *tiene recta tangente en los puntos* $(2,-14)$ *y/o* $(3,11)$), al identificar las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(2,-14)$ y $(3,11)$ con la derivada de la función f en $x=2$ y $x=3$, se puede inferir claramente que se produce el acto de comprensión i) que hace parte del proceso de apropiar las versiones en contexto (versión geométrica) del concepto de derivada (referente plano 2c). Se puede inferir adicionalmente la discriminación entre los dos productos de la definición, función derivada y derivada puntual (referente plano 1b), pues se calcula la función derivada y se utiliza para calcular derivadas puntuales. Es interesante agregar que la discriminación de los dos productos se puede inferir aun así el solucionador no recurriera a la utilización de los símbolos $f'(x)$, $f'(2)$ y $f'(3)$, realizando la interiorización y encapsulamiento apropiados, por lo menos parcialmente. Cabe aclarar que aunque el uso de estos símbolos no es indispensable en el proceso de solución de la situación, en caso de ser empleados, por ejemplo, teniendo en cuenta la identificación de $f'(2)$ y $f'(3)$ como el valor de la función derivada de f en $x=2$ y $x=3$, permite inferir que se han realizado los procesos de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en los planos de referencia 1c y 2d.
Al responder la segunda parte de la situación (*en caso afirmativo encuentre la ecuación de la recta tangente en el o los puntos indicados*), además de inferir los actos de comprensión descritos en el plano de referencia 2c, el proceso de cálculo de las ecuaciones de las rectas tangentes, conlleva los actos de comprensión de identificar la fórmula que permite calcular la ecuación de la recta tangente y los roles que desempeñan la pendiente y las coordenadas del punto en la constitución de la fórmula.

En conclusión, la situación 7, se puede considerar pertinente para confrontar en el alumno la apropiación de la interpretación geométrica del concepto de derivada (referente plano 2ci), la identificación y discriminación de los objetos función derivada y derivada puntual (referente plano 1b) y dependiendo del procedimiento que utilice un solucionador, el proceso de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en los planos 1c y 2d. Esta pertinencia del ítem frente a la confrontación se registra en la tabla de pertinencia.

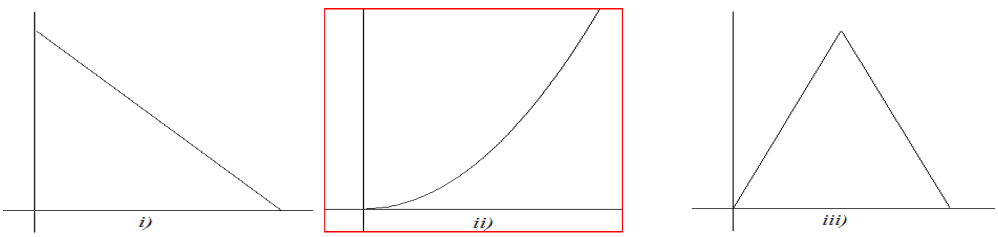
Por otro lado, el conocimiento soporte involucrado en el proceso de solución de la situación que aparece como apoyo fundamental es: recta tangente a la gráfica de una función, cálculo de imágenes a través de la regla de correspondencia de una función dada analíticamente e identificación de la fórmula y el papel que juega la pendiente y un punto para determinar la ecuación de una recta.

Situación 8)

La siguiente gráfica representa la distancia recorrida, en millas, por el conductor de un móvil que conduce durante cierto tiempo, en horas, para llegar a su destino.



a) ¿Cuál de las siguientes gráficas, da una representación más apropiada de la función velocidad:



b) **Justifica** la repuesta escogida y por qué la NO ELECCIÓN de las otras dos opciones.

Justificación:

La elección de la gráfica *ii)* como respuesta correcta, se debe a que la gráfica dada, representa una función posición, y como la gráfica a seleccionar debe ser, la que de las tres, represente apropiadamente la función velocidad, se tuvo en cuenta que la función velocidad es una función derivada, para este caso, la derivada de la función posición. Pero a su vez, la función derivada define también, para la gráfica de la función, la función de pendientes de las rectas tangentes a la gráfica. Eso quiere decir, que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función posición, en un punto, da la velocidad del móvil en el instante dado por la abscisa de dicho punto. O sea, que las ordenadas de la función velocidad vienen dadas por los valores de las pendientes de las rectas tangentes. Por lo tanto, el comportamiento de dicha función velocidad lo dará el comportamiento de las pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la función posición, las cuales son positivas y crecientes a medida que el tiempo aumenta, es decir que la gráfica de la función velocidad debe ser positiva y siempre creciente.

La no elección de las otras dos gráficas *i)* y *iii)*, se debe al hecho que la gráfica de la función velocidad, como se dijo anteriormente, debe ser siempre creciente, y ninguna de las dos gráficas cumple con esta condición.

Análisis de pertinencia.

Realmente la elección que se pide hacer en el ítem a), por sí sola no permitiría confrontar ninguno de los planos de referencia para la comprensión del concepto de derivada que se han definido, pues se podría seleccionar una opción sin necesidad de realizar ningún tipo de análisis, simplemente actuando al azar. Mientras que en la justificación de la elección que se pide en el ítem b), se observa la asociación de la función derivada de la posición, con la función velocidad y a la vez con la función de pendientes. Esta asociación, involucra, por partida doble, uno de los actos de comprensión que demanda la apropiación del significado en contexto (físico y geométrico) de la derivada y que tiene como referente el plano 2cii. Pero el argumento relevante que conduce a la justificación correcta de la elección de la opción ii), depende de la interpretación de los signos y el comportamiento de las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función posición en su dominio, asociándolas además adecuadamente con las derivadas puntuales en dicho dominio, acto de comprensión que se ha asociado con la apropiación del significado geométrico de la derivada (referente plano 2ci). Las dos asociaciones descritas anteriormente requieren implícitamente, el reconocimiento y la discriminación de los objetos, función derivada y derivada en un punto, actos de comprensión que tienen como referente el plano 1b.

Se resalta que en el proceso de justificación de la situación ingresa el conocimiento soporte de pendiente de una recta, en particular la identificación y comparación gráfica del signo de muchas de ellas.

Las consideraciones anteriores permiten concluir la pertinencia de la situación 8 para confrontar en el alumno, la apropiación de las versiones en contexto del concepto derivada, referente 2c, y la apropiación parcial de su significado matemático, tal como se indica en la matriz de pertinencia.

Situación 9)
Sea A el área de un círculo de radio r variable:

a) Determine el ritmo de cambio del área respecto al radio.

Método de solución:

El ritmo de cambio del área respecto al radio se interpreta como la derivada del área A respecto al radio r, y se puede representar como $\frac{dA}{dr}$. Como el área A de un círculo de radio r está dado por la fórmula $A = \pi r^2$, al derivar el área A respecto del radio se obtiene que $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(A) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$.

<u>Respuesta</u>: El ritmo de cambio del área respecto al radio es $2\pi r$.

b) Si el radio del círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros.

Método de solución:

Si el radio r cambia con el tiempo, quiere decir que se puede identificar como función del tiempo, y por lo tanto, la función ritmo de cambio respecto del tiempo está definida por su función derivada respecto del tiempo, que se puede representar como $\frac{dr}{dt}$. En este caso, la función es constante e igual a 3, es decir $\frac{dr}{dt} = 3 \; {}^{\text{cm}}\!/\!{}_{\text{min}}$. De otro lado, como el área A del círculo es función del radio, según la fórmula $A = \pi r^2$, por composición de funciones, se puede concluir que también A es función del tiempo y la función ritmo de cambio esta definida por su derivada respecto del tiempo, que se puede representar como $\frac{dA}{dt}$. Aplicando la regla de la cadena se obtiene que $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt}$. Cuando el radio es de 6cm, reemplazando en la expresión anterior, se tendrá que $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=6} = 2\pi(6)(3) = 36\pi$, es decir que el área aumenta a razón de 36π cm^2/min cuando el radio es de 6cm.

<u>**Respuesta**</u>**:** Cuando el radio es de 6cm, el área aumenta a razón de 36π cm^2/min**.**

Análisis de pertinencia.

Al escribir: "*El ritmo de cambio del área respecto al radio se interpreta como la derivada del área A respecto al radio r*" como parte de la solución a la primera pregunta (*Determine el ritmo de cambio del área respecto al radio*), se hace explícita la identificación de la correspondencia entre la función ritmo de cambio del área respecto al tiempo y la derivada de la función área, que corresponde al acto de comprensión ii) incluido en el proceso de apropiar la interpretación física que hace parte de las versiones en contexto del concepto de derivada (referente plano 2c). Además, la utilización del símbolo $\frac{dA}{dr}$ o equivalentes, para representar la derivada del área respecto al radio, y definir a la vez el ritmo de cambio del área respecto al radio, permite inferir que se han realizado procesos de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en los planos de referencia 1c y 2d.

Al responder la segunda parte de la situación (*Si el radio del círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros*), son explícitas las identificaciones que se hacen entre la funciones derivadas del radio respecto del tiempo (representada como $\frac{dr}{dt}$) y del área respecto del tiempo (representada como $\frac{dA}{dt}$) y las funciones ritmo de cambio del radio y el área, respectivamente, correspondientes al acto de comprensión 2cii, que también identificamos en la resolución de la pregunta a). Además al calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros, se infiere la identificación entre la derivada puntual y el ritmo de cambio instantáneo (referente plano 2ci). La utilización apropiada de los símbolos $\frac{dr}{dt}, \frac{dA}{dt}$ y la doble interpretación que se asocia con ellos, remite a los procesos de interiorización y encapsulamiento que se mencionan en los planos de referencia 1c y 2d.

Se resalta que en el proceso de solución de la situación ingresa el conocimiento soporte de “área del círculo en términos del radio”, “función” (identificación A (área) como función de r, identificación de A (área) y r (radio) como funciones del tiempo), composición de funciones.

En conclusión, la situación 9, se puede considerar pertinente para confrontar en el alumno la apropiación de la interpretación física del concepto de derivada (referente plano 2c) y los proceso de interiorización y encapsulamiento a que se hace referencia en los planos 1c y 2d. Esta pertinencia de los ítems frente a la confrontación se registra en la tabla de pertinencia.

2. Matriz de pertinencia.

Esta matriz de 14×7, se realizó teniendo en cuenta el análisis de pertinencia de cada una de las situaciones que hacen parte del instrumento de observación principal, aquí se puede leer de forma resumida cuál o cuáles son los planos de referencia para la comprensión que están siendo confrontados en cada uno de los ítems del instrumento, por ejemplo: El símbolo x que está en la entrada (1,1) de la matriz, significa que el *plano de referencia 1a)* se confronta en el **ítem 1** del instrumento sin importar los diferentes procedimientos para la solución correcta de la situación, mientras que el símbolo [x] que aparece en la entrada (3,1) significa que el *plano de referencia 1a)* se confronta en el *ítem 3* pero dependiendo del procedimiento utilizado en la respuesta correcta de la situación, y el símbolo x_ que está en la entrada (7,1), sin corchetes, significa que sólo una parte del *plano de referencia 1a)* se confronta en el *ítem 6a* del instrumento, sin importar los diferentes procedimientos para la solución correcta de la situación. Las letras, que en todos los casos acompañarán este último símbolo, representan la parte del plano de referencia para la comprensión que está siendo confrontado, así, la letra g en la entrada (7,1) significa que *la parte del plano 1a)* que se confronta en el *ítem 6a*, es aquella donde se debe reconocer *globalmente* en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones. La letra n en la entrada (7,2), significa que *la parte del plano 1b)* que se confronta en el *ítem 6a*, es aquella donde se debe reconocer y discriminar, como objeto, el *número* (derivada puntual) que resulta del proceso matemático de la definición. Por otro lado, las letras i y ii, en las entradas (3,6) y (5,6) respectivamente, significan que *la parte del plano 2c)* que se confronta en los *ítems 3 y 5a*, es aquella donde se deben identificar las correspondencias, *i) pendiente de la recta tangente* en un punto – *derivada* en dicho punto, y *ii) función de pendientes de rectas tangentes* a la curva – *función derivada*. Por último, las letras que se encuentran entre paréntesis, *(p)*, *(v)* y *(r)*, como en la entrada (5,6), significan que la versión de derivada en contexto que confronta el ítem, es la geométrica (como *pendiente*), letra *(p)*, y la física (como *velocidad* o *ritmo* de cambio), letras *(v)* y *(r)*.

	Plano 1 Significado Matemático de la derivada			Plano 2 Versiones de derivada en contexto			
	1a	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**2d**
Ítem 1	x	x	x				
Ítem 2	[x]	x	x			[x]	[x]
Ítem 3	[x]	x	x			[x]_*i*	[x]
Ítem 4		x	x			x_*i*	x
Ítem 5a						x_*ii(v)*	x*(v)*
Ítem 5b						x_*i(v)*	[x]*(v)*
Ítem 6a	x_*g*	x_*n*				[x]_*i*	
Ítem 6b	x			x	x	x_*i*	
Ítem 6c	x_*g*	x_*n*					
Ítem 6d	x_*g*						
Ítem 7		x	[x]			x_*i*	[x]
Ítem 8		x				x*(p-v)*	
Ítem 9a			x			x_*ii(r)*	x
Ítem 9b			x			x*(r)*	x

Observando la matriz de pertinencia así construida, se puede determinar que el plano 1a) está confrontado completamente en 4 ítems (1, 2, 3 y 6b), aclarando que la confrontación en los ítems 2 y 3 depende del método de solución usado, mientras lo que respecta a uno de los actos de comprensión que lo definen, particularmente el de "reconocer *globalmente* en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones" se confronta en 3 ítems más (6a, 6c y 6d), es decir, en 7 ítems en total. El plano 1b) es confrontado completamente en 6 ítems (1, 2, 3, 4, 7 y 8), mientras lo que respecta al acto de comprensión "reconocer como objeto, el *número*, resultado del proceso matemático de la definición" se confronta en 2 ítems más (6a y 6c), es decir, 8 ítems en total. Por su parte el plano 1c) es confrontado totalmente en 7 ítems (1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b). Así los ítems diseñados para confrontar el significado matemático del concepto derivada (plano 1), cumplen su propósito, lo que permitirá realizar inferencias plausibles en las producciones de los estudiantes respecto a los actos de comprensión que lo caracterizan, resaltando que la variedad de ítems que confrontan cada uno de los aspectos, permitirá constatar, complementar o refutar las inferencias que se hagan sobre alguno de ellos en particular.

En lo que respecta al plano 2 podemos decir que: El plano 2c) es el más confrontado, completamente se confronta en 3 ítems (2, 8 y 9b), mientras lo que respecta a los actos de comprensión *i* y *ii* que lo definen, se confrontan en 6 ítems más para el primero (3, 4, 5b, 6a, 6b y 7) y 2 ítems más para el segundo (5a y 9a). El plano 2d) es confrontado en 8 ítems (2, 3, 4, 5a, 5b, 7, 9a y 9b), aunque aclarando que en 4 de ellos dicha confrontación depende del proceso de solución que se utilice. Por su parte los planos 2a) y 2b) se confrontan en el ítem 6b, pero es suficiente para realizar inferencias en las producciones de los estudiantes sobre si se han alcanzado los actos de comprensión que los definen, aclarando que no habría forma de contrastar dichas inferencias por ser sólo un ítem el que lo confronta. Así los ítems diseñados confrontan correctamente los actos de comprensión que definen las versiones en contexto del concepto derivada (plano 2).

En conclusión, las 9 situaciones que hacen parte del instrumento principal diseñado, confrontan apropiadamente los aspectos que se han identificado necesarios en el aprendizaje del alumno respecto al concepto de derivada de una función incluyendo su marco interpretativo.

Por otro lado la matriz de pertinencia también permite identificar muchos focos de información, el escoger algunos de ellos, depende de lo que interese analizar en las producciones de los estudiantes, por ejemplo uno de esos focos, observando horizontalmente la matriz, es que los ítems 2, 3, 4, 6b y 7, confrontan la mayor cantidad de planos de referencia para la comprensión (4 o 5 planos), pero a pesar de esto en las situaciones 3 y 7, la confrontación de algunos planos depende del método de solución usado, es decir que si no se utiliza un método en particular, la situación en realidad podría confrontar 2 planos. Esta lectura de la matriz sugeriría que los análisis de las producciones de los alumnos comiencen por las respuestas dadas a algunos de los ítems mencionados.

Como nuestro interés es confrontar el aprendizaje del alumno respecto al concepto de derivada de una función, incluyendo su marco interpretativo, se debe tener en cuenta por un lado, la apropiación del significado matemático del concepto derivada comunicado mediante el nexo definicional D1 (referente plano 1), y por el otro su marco interpretativo (versiones en contexto, la geométrica y la física) (referente plano 2), así que, teniendo en cuenta la matriz de pertinencia, se centrará el análisis en las producciones de los estudiantes para dar respuesta a las preguntas de los siguientes ítems:

- ✓ Ítem 1, pues es el que confronta por completo el plano 1. Los demás ítems (2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9) que confrontan aspectos del mismo plano, servirían para clarificar las conclusiones que a partir de la primera situación se den.

- ✓ Ítems 6b, 2, 7, 5a y 9b que confronta la mayor cantidad de planos del segundo aspecto, los tres primeros referidos a la versión geométrica y los dos últimos referidos a la versión física.

Todo lo anterior permitirá inferir si los alumnos han superado apropiadamente el conjunto de actos de comprensión identificados en los planos de referencia y que son requeridos para alcanzar una adecuada comprensión del concepto derivada.

La forma como se utilizará la información almacenada en la matriz de pertinencia, vista de manera vertical, será la siguiente: Supongamos por ejemplo que, analizando las producciones de los estudiantes para dar respuesta a las preguntas del ítem 1, surgen algunas inferencias referentes al significado matemático del concepto derivada, particularmente las relacionadas con el plano 1b, entonces dichas inferencias se podrán clarificar (complementar o ratificar) analizando los otros ítems que confrontan el mismo plano, para este ejemplo, otros 5 ítems, que hacen que el plano haya sido suficientemente confrontado, como lo son los ítems 2, 3, 4, 6a, 6c, 7 y 8.

CAPÍTULO 6

CARACTERIZACIÓN DE ESTADOS DE COMPRENSIÓN RESPECTO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

A continuación se caracterizan los posibles estados de comprensión respecto del concepto derivada según los dos planos de referencia para dicha comprensión definidos en el capítulo 4 (pp.43-45), basados en los indicadores que provee el instrumento. Cada estado se representa mediante una pareja de letras mayúsculas, la primera de ellas indicará el estado de comprensión respecto del significado matemático de la definición de derivada (plano de referencia 1) y la segunda indicará el estado de comprensión respecto a la apropiación de su marco interpretativo (plano de referencia 2). De acuerdo a lo anterior y con el fin de dar claridad a dicha caracterización, se explica por separado, lo que significa según el instrumento utilizado, alcanzar los estados de comprensión A, B, C y D en cada uno de los dos planos de referencia, utilizando los actos de comprensión que se estructuran según sus ejes de referencia. Así el estado de comprensión AA concreta la caracterización del estado deseable de comprensión básica.

1. Caracterización de estados de comprensión respecto del significado matemático.

Estado A.

A.1 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 1a[4].

Indicadores:

- Exhibe la definición del concepto derivada y la aplica correctamente (ítem 1).
- Identifica apropiadamente los puntos interiores del dominio donde la función dada no es derivable (ítem 3).

[4] Reconocer (local y globalmente) en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones.

(No se da crédito especial a la no identificación de derivabilidad en los puntos de frontera de la función puesto que en el texto no se trabaja suficientemente el concepto de derivabilidad lateral)

- Selecciona la opción correcta y justifica apropiadamente (ítems 6c, d).

A.2 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 1b[5].

Indicadores:

- Identifica correctamente los símbolos asociados con la función derivada y con la derivada puntual según las preguntas que se realizan (ítems 1, 2, 3, 4).

Estado B.

B.1 Alcanza parcialmente actos de comprensión caracterizados en 1a.

Indicadores:

- Exhibe la definición del concepto derivada y la aplica correctamente (ítem 1).
- Identifica apropiadamente los puntos interiores del dominio donde la función dada no es derivable (ítem 3).

  (No se da crédito especial a la no identificación de derivabilidad en los puntos de frontera de la función puesto que en el texto no se trabaja suficientemente el concepto de derivabilidad lateral)

- Selecciona la opción incorrecta y/o no justifica apropiadamente (ítems 6c, d).

B.2 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 1b.

Indicadores:

- Identifica correctamente los símbolos asociados con la función derivada y con la derivada puntual según las preguntas que se realizan (ítems 1, 2, 3, 4).

Estado C.

C.1 Alcanza aproximaciones a los actos de comprensión caracterizados en 1a.

Indicadores:

- Exhibe la definición del concepto derivada y puede o no aplicarla correctamente (ítem 1).

---

[5] Reconocer y discriminar, los dos productos del proceso matemático de la definición y establecer la relación entre ellos. *Una función* (la función derivada.) y *un número* (el valor de la derivada puntual o valor de la función derivada en un punto)

- No identifica los puntos interiores del dominio en donde la función dada no es derivable (ítem 3).
- Selecciona la opción incorrecta y/o no justifica apropiadamente (ítems 6c, d).

C.2 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 1b.

Indicadores:

- Identifica correctamente los símbolos asociados con la función derivada y con la derivada puntual según las preguntas que se realizan (ítems 1, 2, 3, 4).

Estado D.

D.1 No alcanza los actos de comprensión caracterizados en 1a.

Indicadores:

- No exhibe la definición del concepto derivada (ítem 1).
- No identifica los puntos interiores del dominio en donde la función dada no es derivable (ítem 3).
- Selecciona la opción incorrecta y/o no justifica apropiadamente (ítems 6c, d).

D.2 Alcanza parcialmente los actos de comprensión caracterizados en 1b.

Indicadores:

- Alcanza la identificación de función derivada y derivada puntual como cálculo de f' y $f'(a)$ mediante reglas de derivación (ítems 1, 2, 3, 4).

2. Caracterización de Estados de Comprensión respecto del marco interpretativo.

Estado A.

A.1 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2a[6]*.*

[6] Reconocer, en el marco del triángulo curvilíneo asociado en un punto arbitrario de la gráfica de una función, el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente, distinguiendo en el mismo contexto, el proceso de límite asociado de las pendientes de las rectas secantes a la pendiente de la recta tangente.

Indicadores:

- Responde correctamente y justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

A.2 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2b[7].

Indicadores:

- Responde correctamente y justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

A.3 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2c[8].

Indicadores:

- Construye la gráfica de la derivada utilizando las correspondencias entre derivada puntual (función derivada) pendiente de la recta tangente (función de tangentes) (ítem 2).
- Identifica pendiente de la recta tangente como interpretación geométrica de derivada puntual y justifica correctamente (ítem 6b).
- Resuelve problemas utilizando la correspondencia derivada puntual-pendiente de la recta tangente (ítems 4, 7).
- Selecciona la opción correcta y justifica apropiadamente utilizando las correspondencias derivada puntual–pendiente de la recta tangente–velocidad instantánea y función derivada–función de pendiente de rectas tangentes–función velocidad (ítem 8).
- Resuelve utilizando las correspondencias derivada puntual–velocidad y función derivada–función velocidad (ítem 5).
- Calcula apropiadamente los ritmos de cambio (ítem 9).

Estado B.

B.1 No alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2a.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o vacíos en la justificación de su respuesta (ítem 6b).

---

[7] Identificar la correspondencia entre: (i) Los objetos, *cociente incremental* y *pendiente de la recta secante*, y (ii) Los procesos de *aproximación con paso al límite de las pendientes de las secantes a la pendiente de la recta tangente* y el de *cociente incremental a la derivada* (la variable incremento tiende a cero), valorada en la abscisa correspondiente al punto de tangencia.

[8] Identificar la correspondencia entre: (i) *La pendiente de la recta tangente* en un punto (o velocidad instantánea) con *la derivada* en dicho punto, y (ii) *La función de pendientes de rectas tangentes* a la curva (o función velocidad) con *la función derivada*.

B.2 No alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2b.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o vacíos en la justificación de su respuesta (ítem 6b).

B.3 Alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2c.

Indicadores:

- Construye la gráfica de la derivada utilizando las correspondencias entre derivada puntual (función derivada) pendiente de la recta tangente (función de tangentes) (ítem 2).
- Identifica pendiente de la recta tangente como interpretación geométrica de derivada puntual y no justifica correctamente (ítem 6b).
- Resuelve problemas utilizando la correspondencia derivada puntual-pendiente de la recta tangente (ítems 4, 7).
- Selecciona la opción correcta y justifica apropiadamente (ítem 8).
- Resuelve utilizando las correspondencias derivada puntual–velocidad y función derivada–función velocidad (ítem 5).
- Calcula apropiadamente los ritmos de cambio (ítem 9).

Estado C.

C.1 No alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2a.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o no justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

C.2 No alcanza los actos de comprensión caracterizados en 2b.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o no justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

C.3 Alcanza algunos actos de comprensión caracterizados en 2c.

Indicadores: (Cumple con algunos de los indicadores señalados, desde una perspectiva tanto conceptual como operativa)

- Construye la gráfica de la derivada utilizando las correspondencias entre derivada puntual (función derivada) pendiente de la recta tangente (función de tangentes) (ítem 2).

- Resuelve problemas utilizando la correspondencia derivada puntual-pendiente de la recta tangente (ítems 4, 7).
- Selecciona la opción correcta y justifica apropiadamente (ítem 8).
- Resuelve utilizando las correspondencias derivada puntual–velocidad y función derivada–función velocidad (ítem 5).
- Calcula apropiadamente los ritmos de cambio (ítem 9).

Estado D.

D.1 No alcanza actos de comprensión caracterizados en 2a.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o no justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

D.2 No alcanza actos de comprensión caracterizados en 2b.

Indicadores:

- Respuesta incorrecta y/o no justifica apropiadamente su respuesta (ítem 6b).

D.3 Alcanza algunos actos de comprensión caracterizados en 2c, parcialmente.

Indicadores: (Vacíos o fallas en todos de los indicadores geométricos o físicos. Cuando cumple con algunos lo hace desde una perspectiva operativa)

- Construye la gráfica de la derivada utilizando las correspondencias entre derivada puntual (función derivada) pendiente de la recta tangente (función de tangentes) (ítem 2).
- Resuelve problemas utilizando la correspondencia derivada puntual-pendiente de la recta tangente (ítems 4, 7).
- Selecciona la opción correcta y justifica apropiadamente (ítem 8).
- Resuelve utilizando las correspondencias derivada puntual–velocidad y función derivada–función velocidad (ítem 5).
- Calcula apropiadamente los ritmos de cambio (ítem 9).

3. Estados de comprensión respecto del concepto derivada.

De acuerdo con el planteamiento inicial, los estados de comprensión respecto del concepto derivada, se representan como parejas ordenadas de letras, que denotan los planos de referencia (significado matemático – marco interpretativo). Por análisis combinatorio, los posibles estados de comprensión serían: AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC y DD. De donde los estados CA y DA son inviables, ya que alcanzar el estado de comprensión A, referido al marco interpretativo, requiere el logro de todos los actos de comprensión que lo caracterizan, entre los cuales se encuentran los agrupados en los ejes de referencia 2a y 2b, los cuales no se lograrían con los actos de comprensión que se alcanzan en los estados C y D referidos al significado matemático.

4. Descripción y análisis de los estados de comprensión respecto del concepto de derivada que realmente alcanzan los alumnos

El análisis de las producciones de los alumnos revela que varios de los estados de comprensión identificados, no se presentan en la práctica; en particular no se presentan los estados AA, AB, AC, AD, BA, BB, BD, CB, CC, DB y DC. Por lo tanto los estados de comprensión, que se presentaron en la práctica son los estados BC, CD y DD. Para caracterizar estos estados de comprensión, se toman como referencia los estados de comprensión A, B, C y D, que se definieron para cada uno de los dos planos que sirven como referencia para la comprensión del concepto de derivada, plano 1 (Significado matemático de la definición) y plano 2 (Apropiación del marco interpretativo). Se realiza también un contraste con el estado básico de comprensión de derivada deseable AA, con este fin, se inicia el análisis realizando una caracterización de dicho estado de comprensión. La documentación empírica de cada uno de estos estados, identificados en la práctica, se realiza mediante el análisis detallado de las producciones de un alumno, que se toma como representante del grupo de estudiantes que alcanza dicho estado, incluyendo algunas consideraciones de las variaciones que se presentan en torno a este representante. Este análisis aparecerá al final de la caracterización de los estados de comprensión mencionados.

4.1 Análisis del estado de comprensión AA.

Se sustenta en la caracterización del estado A respecto del significado matemático de derivada y el estado A respecto de su marco interpretativo, descritos anteriormente. Es el estado básico de comprensión del concepto de derivada que se establece como deseable en alumnos que estudien un primer curso de cálculo utilizando el texto de Larson.

Con relación al significado matemático: De acuerdo a lo anterior, teniendo en cuenta los actos de comprensión que se definen en el plano de referencia 1, según ejes de referencia 1a y 1b, y las situaciones que se utilizan para confrontar la comprensión del alumno, un estudiante habrá alcanzado el estado de comprensión A, respecto del significado matemático de la definición de derivada si:

Reconoce global y localmente, en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones, en el sentido de disponer de una definición simbólica de derivada, bien adaptada matemáticamente, que utiliza e interpreta adecuadamente cuando se ve confrontado a usar la definición en el cálculo de una función derivada (reconocimiento que pone en juego al resolver las preguntas del ítem 1).

Igualmente, interpreta de forma apropiada lo que pasa en dicho proceso de límite (ítems 6a y 6b) y es consiente de la condición de derivabilidad de una función, por lo tanto identifica y justifica puntos de no derivabilidad en el cálculo de la derivada de una función cuando la función está definida por partes (ítem 3) (hasta aquí eje 1a).

Asimismo, reconoce y discrimina los dos productos del proceso matemático de la definición y establece la relación entre ellos, es decir, es consiente que la definición produce independientemente dos objetos diferentes, una función (la función derivada) y un número (la derivada puntual), pero que están relacionados, pues la segunda es un valor particular de la primera (ítems 1, 2, 3, 4, 6a, 6c, 7 y 8) (hasta aquí eje 1b).

Con relación al marco interpretativo: De acuerdo con los actos de comprensión que se definen en el plano de referencia 2, ejes 2a, 2b y 2c, y según las situaciones que se utilizan para confrontar la comprensión del alumno, un estudiante habrá alcanzado el estado de comprensión A respecto del marco interpretativo si:

Reconoce los procesos de aproximación geométricos, rectas secantes a la recta tangente y pendiente de la recta secante a la pendiente de la recta tangente, (eje 2a) y su articulación con el proceso de aproximación del cociente incremental a la derivada puntual, fundamentado en la correspondencia, pendiente de recta secante – cociente incremental, (eje 2b). Reconocimiento que pone en juego al resolver las preguntas de los ítems 6a y 6b. Además de la identificación de la correspondencia entre los productos de los procesos de aproximación anteriores, productos geométricos – analíticos, (eje 2c), que pone en juego al resolver distintos ítems (2, 4, 6b, 7, 8 y 9).

Con relación al conocimiento matemático de soporte: Para alcanzar el estado de comprensión AA un estudiante debe disponer de un conocimiento matemático de soporte apropiado para resolver los ítems con los cuales se confronta la comprensión del alumno. Este conocimiento actúa, en gran parte, de manera integrada para los ítems que confrontan tanto el significado matemático como el marco interpretativo del concepto derivada. Dentro del conocimiento que hace parte del núcleo común, podemos identificar el reconocimiento del simbolismo f y $f(a)$ para representar, respectivamente, una función como un todo y como un valor de ella en un punto de su dominio, en particular aplicado a funciones algebraicas definidas mediante una expresión matemática variable definida en forma homogénea o a trozos, reconocimiento de su dominio y manejo apropiado de su regla de correspondencia, interpretaciones en el contexto de una gráfica de función e interpretación apropiada de lo que pasa en el proceso de límite.

Respecto de este núcleo común se puede observar, sin embargo, que aspectos relativos al concepto de límite tales como: El reconocimiento del simbolismo de límite, la aplicación apropiada en el manejo del cálculo de límites de funciones algebraicas y la interpretación apropiada de lo que pasa en el proceso de límite. Y aspectos algebraicos tales como: El manejo de fracciones algebraicas y la determinación del dominio de una función y el cálculo de valores de funciones algebraicas definidas a trozos, juegan un papel más destacado en el contexto del significado matemático, mientras que aspectos tales como: El análisis y construcción de la gráfica de una función, concepto y cálculo tanto de la ecuación como la pendiente de una recta y la fórmula para el área del círculo, juegan un papel más destacado en los aspectos concernientes al marco interpretativo.

4.2 Análisis del estado de comprensión BC.

Se sustenta en la caracterización del estado B respecto del significado matemático de derivada y el estado C respecto de su marco interpretativo, descritos anteriormente. Es el estado de comprensión más alto en la población de estudiantes que participó en la prueba. Fue alcanzado aproximadamente por 13.12% de dicha población (8 de los 61 estudiantes). Su representante es el estudiante numerado 6.

La comprensión de un estudiante que alcanza el estado BC se caracteriza en términos generales por una comprensión cercana al estado ideal AA, en lo relativo al significado matemático, y una comprensión baja respecto a la apropiación del marco interpretativo.

Con relación al significado matemático, un estudiante que alcanza el estado de comprensión B, prácticamente alcanza todos los actos de comprensión que caracterizan el estado ideal A, excepto por deficiencias en la interpretación del concepto de límite en que se soporta el concepto de derivada. Mientras calcula el límite del cociente incremental para la función propuesta en el ítem 1, no interpreta de forma apropiada lo que sucede en dicho proceso de límite, lo que marca una contradicción en torno a la comprensión respecto a dicho concepto.

Con relación al marco interpretativo, un estudiante que alcanza el estado de comprensión C, no accede a los actos de comprensión relativos a los procesos aproximativos en el marco geométrico (ejes de referencia 2a y 2b). Con relación al eje de referencia 2c, alcanza los actos de comprensión asociados con lo geométrico, pero presenta vacíos o fallas con algunas variaciones, asociados con la interpretación física (velocidad, ritmos de cambio). Ver análisis de las producciones del representante de este estado, estudiante 6. Cabe destacar que, por lo menos un estudiante, está por encima de nuestro representante, en la medida en que alcanza el acto de comprensión relacionado con la correspondencia entre función deriva y función velocidad, mediado por reglas de derivación.

Con relación al conocimiento matemático de soporte, un estudiante que alcanza este estado de comprensión, dispone básicamente del mismo conocimiento soporte que exhibe un estudiante que alcanza el estado ideal AA, excepto por deficiencias en la comprensión del concepto de límite, aquí descritas. Estas deficiencias debilitan el logro de los actos de comprensión que se agrupan en el eje de referencia 1a (reconocimiento local y global de la secuencia operativa en la definición) y en los ejes de referencia 2a y 2b (procesos de aproximación geométricos).

4.3 Análisis del estado de comprensión CD.

Se sustenta en la caracterización del estado C respecto del significado matemático de derivada y el estado D respecto de su marco interpretativo, descritos anteriormente. Este estado de comprensión fue alcanzado por aproximadamente 40.98% de los estudiantes que participo en la prueba (25 de los 61 estudiantes). Su representante es el estudiante numerado 54.

La comprensión de un estudiante que alcanza el estado CD se puede describir como una comprensión con diferencias considerables con relación al estado ideal AA, tanto en lo relativo al significado matemático, como a la apropiación del marco interpretativo.

Con relación al significado matemático, un estudiante que alcanza el estado de comprensión C, logra los actos de comprensión que se agrupan en el eje de referencia 1b, pero exhibe deficiencias notables en los actos de comprensión referente 1a, pues aunque esboza una definición de derivada que puede o no desarrollar con éxito (ítem 1), en ningún caso es consciente de los puntos de no diferenciabilidad de la función, como tampoco interpreta lo que sucede en el proceso de límite, lo que marca la misma contradicción que se reseño en el análisis de estado de comprensión BC.

Con relación al marco interpretativo, un estudiante que alcanza el estado de comprensión D, no accede a los actos de comprensión relativos a los procesos aproximativos en el marco geométrico (ejes de referencia 2a y 2b). Con relación al eje de referencia 2c, no alcanza los actos de comprensión asociados con lo geométrico o físico, desde una perspectiva conceptual (ítems 2, 4 y 8), pero los alcanza desde una perspectiva operativa, es decir, liga derivada puntual con pendiente de recta tangente o velocidad instantánea, sólo cuando media un calculo de f' mediante reglas de derivación (ítems 7, 9).

Con relación al conocimiento matemático de soporte, un estudiante que alcanza este estado de comprensión, presenta deficiencias, no sólo en la comprensión del concepto de límite, sino las relacionadas con su manejo algebraico. Estas deficiencias junto con vacíos en: 1) el reconocimiento del simbolismo f y $f(a)$ para representar, respectivamente, una función como un todo y como un valor de ella en un punto de su dominio, 2) la identificación del dominio de una función, 3) el manejo de operaciones y simplificaciones de expresiones algébricas, impiden la apropiación tanto de su significado matemático como de su marco interpretativo. Aunque con relación al marco interpretativo, en algunos casos, son capaces de analizar y construir la gráfica de una función, calcular tanto de la ecuación como la pendiente de una recta y recordar la fórmula para el área del círculo.

4.4 Análisis del estado de comprensión DD.

Se sustenta en la caracterización del estado D respecto tanto del significado matemático de derivada como a su marco interpretativo, descritos anteriormente. Es el estado de comprensión más bajo en la población de estudiantes que participó en la prueba, el cual fue alcanzado por 45.90% de dicha población (28 de los 61 estudiantes). Y cuyo representante es el estudiante numerado 6.

La comprensión de un estudiante que alcanza el estado DD se puede describir como una comprensión algorítmica del concepto deriva, que no alcanza prácticamente ninguno de los actos de comprensión que caracteriza el estado ideal AA, tanto en lo relativo al significado matemático, como a la apropiación del marco interpretativo.

Con relación al significado matemático, un estudiante que alcanza el estado de comprensión D, logra parcialmente los actos de comprensión relacionados con el eje de referencia 1b, pero a través de la identificación de función derivada como cálculo de $f\,'$ mediante reglas de derivación y derivada puntual como valor particular de dicha función.

Con relación al eje de referencia 2c, no alcanza los actos de comprensión asociados con lo geométrico, desde una perspectiva conceptual (ítems 2, 4), pero los alcanza desde una perspectiva operativa, es decir, asocia derivada puntual con pendiente de recta tangente, sólo cuando media un calculo de $f\,'$ mediante reglas de derivación (ítems 7, 9).

Cabe resaltar que la ausencia de lo conceptual referido al concepto de derivada, obliga a estos estudiantes a buscar una expresión analítica para la regla de correspondencia que le permita aplicar una regla de derivación para calcular tanto la pendiente de una recta tangente como una velocidad instantánea, este estado de comprensión, le permitiría resolver con éxito algunas de las situaciones planteadas en el instrumento de observación.

Con relación al conocimiento matemático de soporte en un estudiante que alcanza este estado de comprensión, no se tendrían elementos suficientes para concluir sobre su apropiación, a excepción de la no interpretación de lo que sucede en el proceso de límite, ya que en sus respuestas no exhibe dicho conocimiento. Por lo tanto, el no alcanzar los actos de comprensión agrupados en los planos de referencia 1 y 2, no podría atribuirse a uno en particular, más bien a la forma como se deben articular para construir el concepto derivada.

5. Análisis de las producciones de los estudiantes respecto a los planos de referencia para la comprensión.

En adelante se presenta la documentación empírica de cada uno de los estados, identificados en la práctica, realizando un análisis detallado de las producciones de un alumno, que se toma como representante del grupo de estudiantes que alcanza dicho estado. Los resultados del análisis se presentan en una tabla, al inicio del mismo, que tiene las mismas características que la Matriz de Pertinencia. En cada celda de la tabla se recoge un resultado de síntesis sobre el desempeño del alumno en el ítem que se indica en la fila y el acto (o los actos) de comprensión a que alude la columna que codetermina la celda. Los siguientes son los convenios notacionales para interpretar los resultados que se presentan en la tabla sobre dicho desempeño.

Convenios para la lectura de la tabla de síntesis del desempeño del alumno.

Si en la celda aparece el símbolo (z), donde z es el mismo símbolo que aparece en la matriz de pertinencia, quiere decir que el alumno realizó un proceso de resolución del ítem que permite inferir que el alumno ha alcanzado el o los actos de comprensión a que alude la celda respecto de la comprensión del concepto de derivada.

Si en la celda aparece el símbolo P(z), incluyendo entre paréntesis el mismo símbolo z que aparece en la matriz de pertinencia, quiere decir que el alumno realiza un proceso de resolución del ítem que permite inferir que el alumno ha alcanzado parcialmente el o los actos de comprensión a que alude la celda respecto de la comprensión del concepto de derivada, por ejemplo podría obtener respuestas acertadas pero sin la debida sustentación y por lo tanto se pueden realizar inferencias incompletas o parciales sobre si el alumno ha alcanzado o no el o los actos de comprensión a que se alude en la celda.

Si en la celda aparece el símbolo N(z), incluyendo entre paréntesis el mismo símbolo z que aparece en la Matriz de Pertinencia, quiere decir que el alumno realiza un proceso de resolución del ítem que no permite hacer inferencias, sobre si el alumno ha alcanzado, el o los actos de comprensión a que se alude en la celda.

Si los símbolos anotados aparecen con un asterisco (z)*, P(z)*, N(z)* quiere decir que se identifica algún tipo de problema (obstáculo, desadaptación matemática, vacío) asociado con la comprensión del alumno, o en general alguna observación relevante al respecto que puede ser leída en los análisis correspondientes que aparecen mas abajo (texto limitado por dos asteriscos) y que sirven de sustento a los resultados que se presentan en la tabla y a la síntesis asociada con ella sobre la comprensión del alumno respecto del concepto de derivada.

Si en la celda aparece el registro -----, quiere decir que el alumno no contestó el ítem y que no hay información que pueda ser analizada.

En cuanto a los símbolos (z), en negrilla y cursiva, que aparecen en celdas en las cuales no se reporta ningún registro en la matriz de pertinencia quiere decir que en la solución del ítem que incluye la celda, el alumno realizó algún tipo de solución en la que, sin ser necesaria, introdujo información que permite hacer inferencias respecto del acto de comprensión que codetermina la celda.

5.1 Análisis de las producciones alumno 6, representante del estado de comprensión BC.

	Plano 1			**Plano 2**			
	Eje 1a	**Eje 1b**	**Eje 1c**	**Eje 2a**	**Eje 2b**	**Eje 2c**	**Eje 2d**
Ítem 1	(x)*	(x)	(x)				
Ítem 2		(x)*	(x)			([x])*	([x])
Ítem 3	([x])*	(x)*	(x)			N([x]_*i*)	N([x])
Ítem 4	***(x)***	(x)	(x)			P(x_*i*)*	(x)*
Ítem 5ª						-----	-----
Ítem 5b						-----	-----
Ítem 6a	(x_*g*)	(x_*n*)				([x]_*i*)	
Ítem 6b	P(x)*			P(x)*	P(x)*	N(x_*i*)	
Ítem 6c	N(x_*g*)*	N(x_*n*)*					
Ítem 6d	N(x_*g*)*						
Ítem 7		P(x)*	([x])			P(x_*i*)*	([x])*
Ítem 8		N(x)*				N(x(*p*-*v*))*	
Ítem 9a			(x)			(x_*ii*(*r*))*	(x)*
Ítem 9b			(x)			(x(*r*))*	(x)*

De acuerdo con la tabla anterior y los análisis sobre los cuales se sustenta, se puede inferir que el estudiante (6):

A] Respecto del significado matemático del concepto de derivada. Ha logrado el estado de comprensión B, que se ha identificado como cercano al estado deseable de compresión básica A, del significado matemático de la derivada, según se expresa en su definición. En efecto:

i) Con relación a los actos de compresión agrupados en el eje de referencia 1a, se puede concluir que el estudiante los reconoce parcialmente, pero la falta de apropiación profunda del concepto de límite, obstaculiza, en algunas ocasiones, el reconocimiento total.

ii) Respecto al conjunto de actos de comprensión que se agrupan en el eje de referencia 1b, hay registros suficientes que permiten concluir que el estudiante reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, pero en ciertas situaciones, existen dificultades asociadas con la determinación del dominio de la función derivada (ya sea por las limitaciones en la compresión del concepto límite o la confusión que le genera la definición de punto crítico).

iii) Referente a los actos de compresión, agrupados en el eje de referencia 1c, se puede inferir que interioriza el proceso múltiple y sus productos, y encapsula en símbolos apropiados los términos función derivada y derivada en un punto.

B] Respecto de la apropiación de las versiones en contexto del concepto de derivada, alcanza el estado de comprensión C, pues no ha logrado plenamente los actos de comprensión que hemos identificados como requeridos para alcanzar la interpretación de la derivada en los contextos que se utilizaron para definir su marco interpretativo. El estudiante posee una versión de la derivada en el contexto geométrico no muy bien estructurada y no posee su interpretación en el contexto físico, conclusión a la que se pudo llegar teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

i) Las respuestas que da el estudiante a los ítems que confrontan los actos de comprensión que se reseñan como ejes 2a y 2b, y las limitaciones del instrumento de observación, en cuanto a la cantidad de ítems que los confrontaron, no permite decir con certeza si el estudiante logra dichos actos objeto de análisis, pero vislumbran el problema de reconocer el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente.

ii) Existen registros suficientes en los cuales identifica las correspondencias entre la pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada en dicho punto, y la función de pendientes de rectas tangentes a la curva con la función derivada, y encapsulado en símbolos apropiados dichos términos (ejes 2c y 2d), pero a veces existen dificultades en reconocer algunos puntos en donde la derivada no existe, al no existir recta tangente.

iii) Caso opuesto a la versión geométrica, pues de los 5 ítems que confrontaban la apropiación de la versión física del concepto, el estudiante no responde a 2 de ellos y responde inadecuadamente a uno.

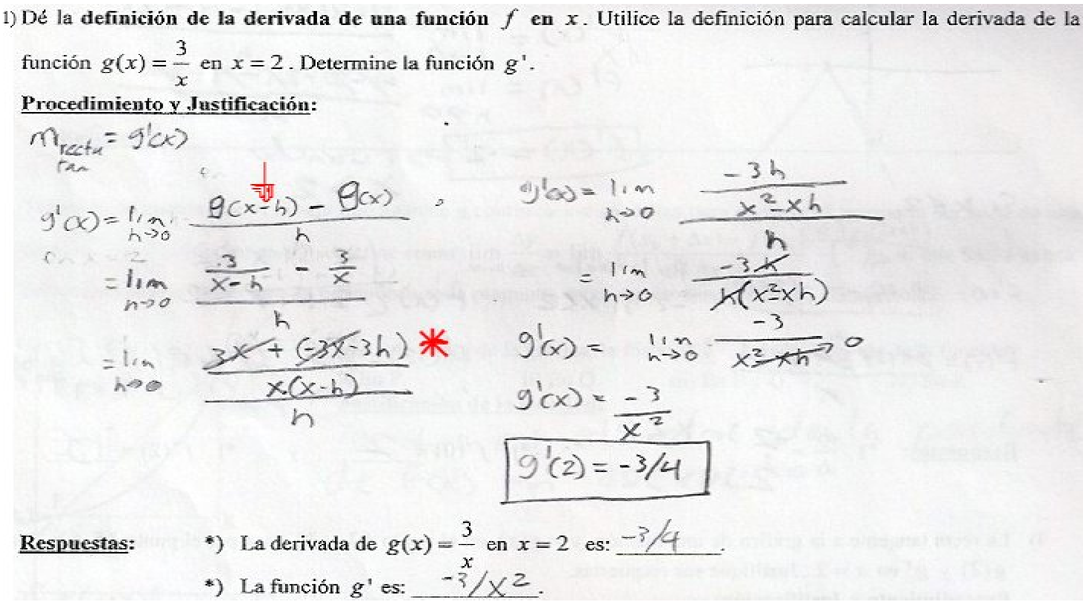
C] Cabe añadir que el estudiante dispone del conocimiento soporte necesario para alcanzar los actos de compresión relacionados con este plano, excepto por las limitaciones mencionadas respecto a la comprensión del concepto de límite.

EN CONCLUSION: El alumno no alcanza plenamente la comprensión del concepto de derivada respecto de la ETC que hemos propuesto como referencia. Así el estado de comprensión alcanzado es el caracterizado como BC, en el cual existen deficiencias tanto en la apropiación del concepto de límite, como de las versiones en contexto de la derivada que se utilizaron para definir su marco interpretativo, especialmente en el contexto físico en el que tal interpretación es prácticamente inexistente. Este es uno de los estados de comprensión más alto que se encuentra en la población de estudiantes cuyas producciones fueron analizadas. Agregando que entre los errores que comete el estudiante, el más significativo se da cuando se pretende reconocer la derivabilidad de una función en puntos “angulosos”, donde en algunos casos la falta de fundamentación del concepto soporte límite incide en ellos.

Análisis específico respecto a cada eje de referencia.

Eje de referencia 1a.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 1, 3, 6a, 6b, 6c y 6d que confrontan actos de comprensión agrupados en el eje de referencia 1a: La producción del estudiante para dar respuesta a los ítems señalados se muestra en las figuras 1.1 (sin tener en cuenta la flecha y el asterisco añadidos), 2.1 y 3.1:



1) Dé la **definición de la derivada de una función** f **en** x. Utilice la definición para calcular la derivada de la función $g(x)=\frac{3}{x}$ en $x=2$. Determine la función g'.

Procedimiento y Justificación:

$m_{\text{recta tan}} = g'(x)$

$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x-h)-g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3}{x-h} - \frac{3}{x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{3x} + (\cancel{-3x}-3h)}{x(x-h)}}{h}$

$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3h}{x^2-xh}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}(x^2-xh)}$

$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{x^2-\cancel{xh}}$

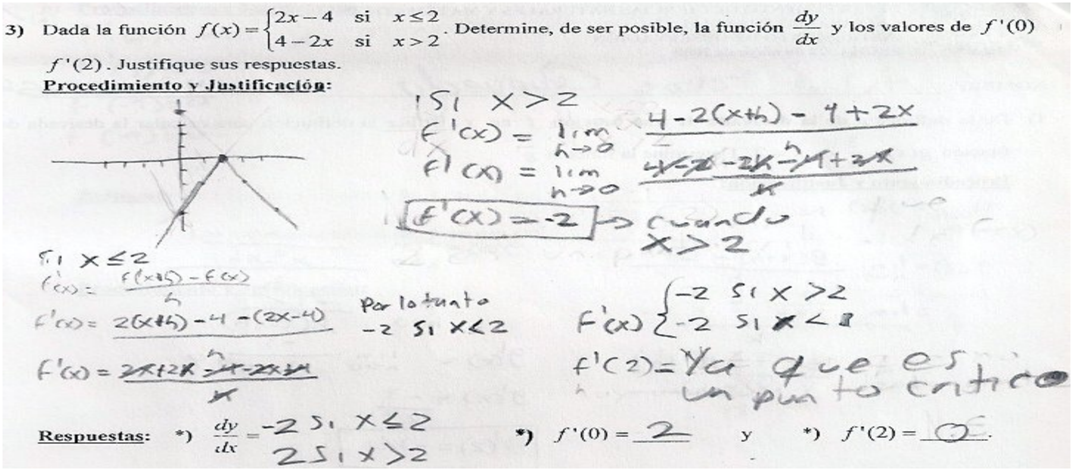
$g'(x) = \frac{-3}{x^2}$

$\boxed{g'(2) = -3/4}$

Respuestas: *) La derivada de $g(x)=\frac{3}{x}$ en $x=2$ es: $-3/4$.

*) La función g' es: $-3/x^2$.

Figura 1.1



3) Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x-4 & \text{si} \quad x\le 2\\ 4-2x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$. Determine, de ser posible, la función $\frac{dy}{dx}$ y los valores de $f'(0)$ $f'(2)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

Si $x>2$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{4-2(x+h)-4+2x}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}\cancel{-2x}-2h\cancel{-4}\cancel{+2x}}{\cancel{h}}$

$\boxed{f'(x)=-2}$ → cuando $x>2$

Si $x\le 2$

$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x)=\frac{2(x+h)-4-(2x-4)}{h}$

$f'(x)=\frac{\cancel{2x}+2\cancel{h}\cancel{-4}\cancel{-2x}\cancel{+4}}{\cancel{h}}$

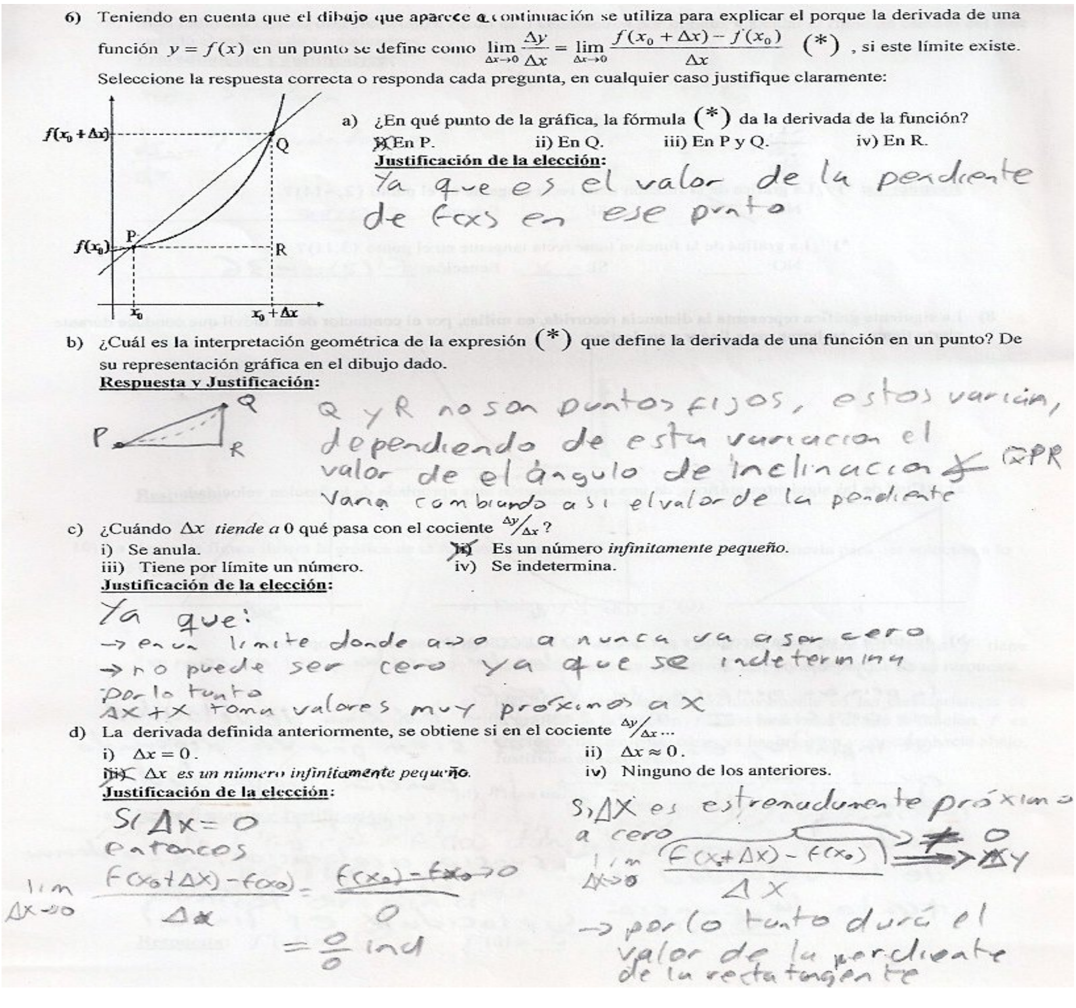
Por lo tanto -2 si $x<2$

$f'(x)\begin{cases}-2 & \text{si } x>2\\ -2 & \text{si } x<2\end{cases}$

$f'(2)=$ Ya que es un punto critico

Respuestas: *) $\frac{dy}{dx}=$ -2 si $x\le 2$, 2 si $x>2$ *) $f'(0)=$ 2 y *) $f'(2)=$ 0.

Figura 2.1



6) Teniendo en cuenta que el dibujo que aparece a continuación se utiliza para explicar el porque la derivada de una función $y=f(x)$ en un punto se define como $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $(*)$, si este límite existe.

Seleccione la respuesta correcta o responda cada pregunta, en cualquier caso justifique claramente:

a) ¿En qué punto de la gráfica, la fórmula $(*)$ da la derivada de la función?
i) En P. ii) En Q. iii) En P y Q. iv) En R.

Justificación de la elección:

Ya que es el valor de la pendiente de f(x) en ese punto

b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la expresión $(*)$ que define la derivada de una función en un punto? De su representación gráfica en el dibujo dado.

Respuesta y Justificación:

P Q R

Q y R no son puntos fijos, estos varían, dependiendo de esta variación el valor de el ángulo de inclinación $\measuredangle$ QPR varia cambiando así el valor de la pendiente

c) ¿Cuándo Δx *tiende a* 0 qué pasa con el cociente $\Delta y/\Delta x$?
i) Se anula. ii) Es un número *infinitamente pequeño.*
iii) Tiene por límite un número. iv) Se indetermina.

Justificación de la elección:

Ya que:
→ en un límite donde $a\to 0$ a nunca va a ser cero
→ no puede ser cero ya que se indetermina
por lo tanto
$\Delta x+x$ toma valores muy próximos a X

d) La derivada definida anteriormente, se obtiene si en el cociente $\Delta y/\Delta x$...
i) $\Delta x=0$. ii) $\Delta x\approx 0$.
iii) Δx *es un número infinitamente pequeño.* iv) Ninguno de los anteriores.

Justificación de la elección:

Si $\Delta x=0$ entonces

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0)-f(x_0)\to 0}{0}$

$=\frac{0}{0}$ ind

Si ΔX es extremadamente próximo a cero

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\ne 0$ → Δy

→ por lo tanto dará el valor de la pendiente de la recta tangente

Figura 3.1

Ítem 1 (fig. 1.1):

- El procedimiento seguido para dar respuesta a las preguntas planteadas es equivalente con el método 2, utilizado por el solucionador ideal, excepto que no responde la primera pregunta, pero utiliza la definición en el cálculo de g' para responder la tercera pregunta, este modo de proceder permite inferir que el estudiante logra los actos de comprensión objetos de análisis y descritos en el análisis de pertinencia del método 2 para esta situación.
- El no dar la definición de la derivada de una función f en x, exigida en la primera pregunta, pero escribirla para la función g', permite inferir que el alumno no ve necesaria la respuesta a la primera pregunta, pues cree que es suficiente con haberla escrito para la función g cuando determinó g'; indica, además, que posee una definición personal del concepto.
- Al escribir la definición de derivada para la función g (*sin advertir que el límite debe existir*) se comete un error de signo en la expresión interna (identificado en la fig. 1.1 con una flecha), sin embargo lo escrito en los ítems 3 (fig. 2.1) y 4 (fig. 5.1) donde la definición también se utiliza, permite inferir que el error, que resulta compensado con un error algebraico (identificado en al fig. 1.1 con un asterisco), puede tomarse como asintomático y por lo tanto el estudiante dispone también del conocimiento soporte requerido e identificado en el análisis de pertinencia de esta situación.

Ítem 3 (fig. 2.1):

- El procedimiento seguido para dar respuesta a las preguntas planteadas es equivalente con el método 3 utilizado por el solucionador ideal, lo que permite inferir que el estudiante logra los actos de comprensión objetos de análisis y descritos en el análisis de pertinencia del método 3 para esta situación.
- *Al utilizar la definición para calcular la derivada de la función f dada a trozos, sin que el ítem se lo exija* (al igual que en el ítem 4 figura. 5.1), permite inferir que la definición

personal del concepto derivada que posee el alumno, tiene cierto grado de estabilidad[9], es coherente[10] y está bien adaptada matemáticamente[11].

- *En el proceso de resolución seguido por el estudiante se puede inferir la toma de conciencia sobre el problema de derivabilidad de la función f en $x = 2$, el cual intenta sortear utilizando el registro gráfico de la función, que fue fundamental para lograr un relativo éxito en la respuesta al ítem 2 (ver figura 4.1, ovalo rojo) y llenar algunos vacíos utilizando el registro analítico, pero que esta vez lo lleva a la justificación incorrecta de la derivada puntual en $x = 2$ al confundirse en la definición de punto crítico. Se puede inferir, además, que dichos vacíos utilizando el registro analítico pasan por la no toma de consciencia en la variación del h en la noción de límite, es decir, la derivada está condicionada por la comprensión del concepto de límite.*

Ítems 6a, 6b, 6c y 6d (fig. 3.1):

- En el ítem 6a se selecciona y justifica correctamente la respuesta siguiendo la justificación 2 dada por el solucionador ideal.
- *Aparentemente no se responde a la pregunta del ítem 6b, pero en realidad se hizo al justificar la elección del ítem 6a, quizá por tal razón el estudiante no vio la necesidad de repetir lo escrito y solamente dio una justificación en donde identifica correctamente las variaciones de los puntos **Q, R** y el ángulo en el punto **P** dada por la interpretación gráfica de la fórmula que se le da en el ítem, pero no da la representación gráfica de dicha interpretación.*
- Con la forma de proceder del estudiante en los dos primeros ítems, se confirma el logro de los actos de comprensión objetos de análisis y descritos en el análisis de pertinencia ítems 6a-justificación 2 e ítem 6b.

---

[9] Una definición personal, relativa a un concepto, es estable en la medida en que la persona verbaliza una definición sobre el concepto en forma consistente y equivalente en diferentes situaciones. (Álvarez-Delgado, 2001).

[10] La coherencia de la definición se refiere al grado de articulación que tiene la definición personal con la acción, es decir, con el concepto imagen evocado. Se dice global cuando está referida a distintos contextos, y local, a uno sólo. (Álvarez-Delgado, 2001).

[11] Una definición personal estable se llama bien adaptada o bien ajustada matemáticamente si es equivalente a la definición institucionalizada. (Álvarez-Delgado, 2001).

- *En el ítem 6c la elección de la respuesta es incorrecta, pues no se toma el límite como el número al cual tiende el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Y la justificación, aunque plantea argumentos correctos, exhibe dificultades en la compresión del concepto límite.*
- En el ítem 6d pasa algo similar al ítem 6c, es decir, se guarda cierta coherencia entre las elecciones y justificaciones dadas.
- El estudiante con su forma de proceder en los ítems 6c y 6d, *muestra dificultades en la compresión del concepto límite pues algunas veces piensa en el límite como un valor aproximado y extremadamente pequeño, dificultad que se puede comparar con la dificultad que se tuvo en el cálculo, tanto de Leibniz como de Newton, y que tenía que ver con el problema de la fundamentación del cálculo, el cual quedó sin resolver a lo largo de todo el siglo XVIII.*

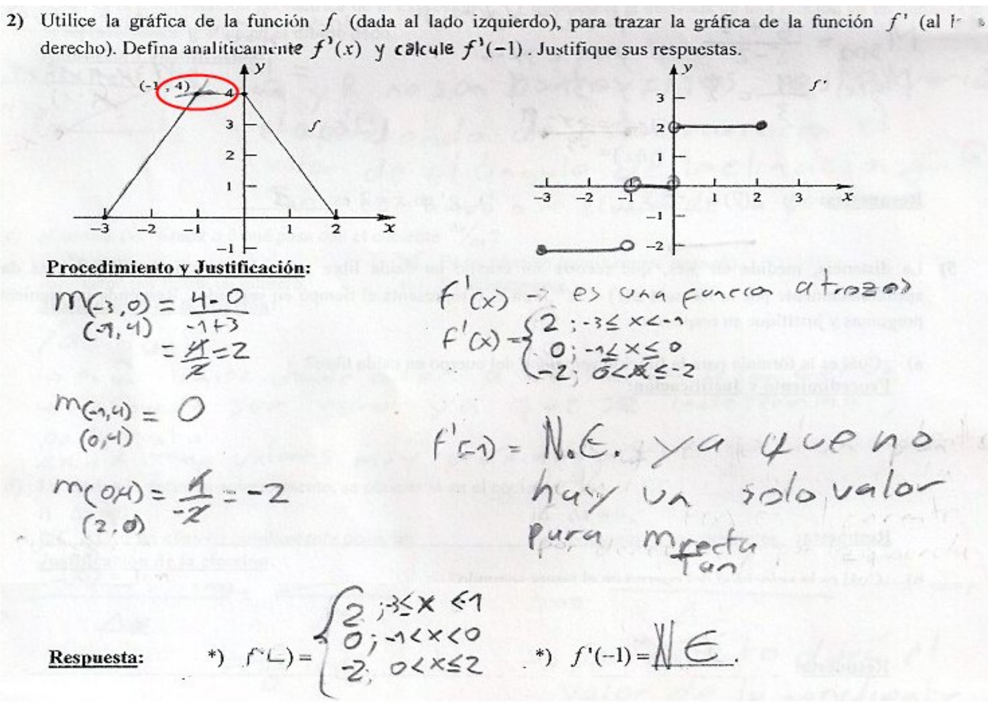
> El problema principal que quedó sin resolver a lo largo de todo el siglo XVIII fue el de la fundamentación del cálculo. Que ahí había un problema era cosa bien sabida, lo cual no era muy sorprendente cuando uno se para a considerar la cantidad de propiedades obviamente contradictorias consigo mismas que se le atribuían al concepto fundamental del cálculo, el de diferencial… Esto nos conduce a la siguiente cuestión fundamental del cálculo, tal como la vieron muchos matemáticos desde Leibniz: ¿Existen cantidades infinitamente pequeñas? La mayor parte de los que aplicaban el cálculo de Leibniz llegaron a convencerse de una manera o de otra de que la respuesta es <<sí>>… Leibniz ya tenía sus dudas acerca de la existencia de cantidades infinitamente pequeñas… Así pues, su pregunta fundamental era: ¿Se puede garantizar que es seguro el uso de cantidades infinitamente pequeñas en el cálculo? A esta pregunta Leibniz no le encontró una respuesta satisfactoria.
> Newton afirmaba que su cálculo no dependía de la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas; su concepto fundamental era el de fluxión,… en el uso concreto del cálculo fluxional, lo que es importante no son las fluxiones en sí (de hecho quedan indeterminadas), sino sus razones… Newton explicaba además que la razón de las fluxiones $\dot{y}/\dot{x}$ es igual a la <<primera>> o a la <<última>> de las razones de los incrementos o decrementos de y y de x respectivamente… considera la razón Ec/CE cuando Ec y CE disminuyen ambos hacia cero o aumentan ambos desde cero. En el primer caso habla de su *razón última*, que alcanzan justamente antes de desvanecerse en el cero o la nada, y en el segundo caso habla de su *razón primera*, que es la que tienen justamente al llegar al ser, nada más surgir del cero a de la nada. (Grattan-Guinness, 1980, pp.116-118)

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este eje de referencia se puede concluir que el estudiante los reconoce parcialmente, pero la falta de apropiación profunda del concepto de límite, condiciona en algunas ocasiones, el reconocimiento total.

Eje de referencia 1b.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 6a, 6c, 7 y 8 que confrontan aspectos del eje de referencia 1b: La producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 1, 3, 6a y 6c se mostró en las figuras 1.1, 2.1 y 3.1. La producción para los ítems 2, 4, 7 y 8 se muestra a continuación respectivamente en las figuras 4.1, 5.1, 6.1 y 7.1:


2) Utilice la gráfica de la función f (dada al lado izquierdo), para trazar la gráfica de la función f' (al lado derecho). Defina analíticamente $f'(x)$ y calcule $f'(-1)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$m_{(-3,0)(-1,4)} = \frac{4-0}{-1+3} = \frac{4}{2} = 2$

$m_{(-1,4)(0,4)} = 0$

$m_{(0,4)(2,0)} = \frac{4}{-2} = -2$

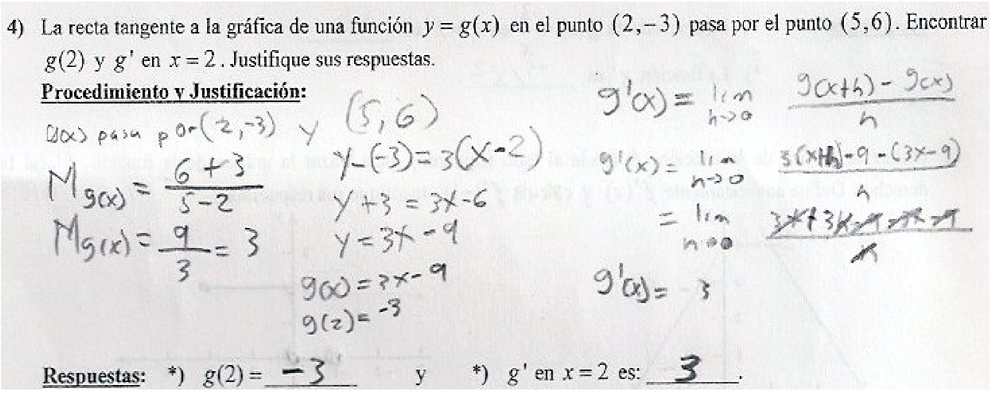
$f'(x)$ → es una función a trozos

$f'(x) = \begin{cases} 2; & -3 \le x < -1 \\ 0; & -1 \le x \le 0 \\ -2; & 0 < x \le 2 \end{cases}$

$f'(-1) =$ N.E. ya que no hay un solo valor para $m_{recta\ tan}$

Respuesta: *) $f'(x) = \begin{cases} 2; & -3 \le x < -1 \\ 0; & -1 < x < 0 \\ -2; & 0 < x \le 2 \end{cases}$ *) $f'(-1) =$ N.E.

Figura 4.1



4) La recta tangente a la gráfica de una función $y = g(x)$ en el punto $(2,-3)$ pasa por el punto $(5,6)$. Encontrar $g(2)$ y g' en $x = 2$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

g(x) pasa por (2,-3) y (5,6)

$M_{g(x)} = \frac{6+3}{5-2}$

$M_{g(x)} = \frac{9}{3} = 3$

$y-(-3) = 3(x-2)$

$y+3 = 3x-6$

$y = 3x-9$

$g(x) = 3x-9$

$g(2) = -3$

$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

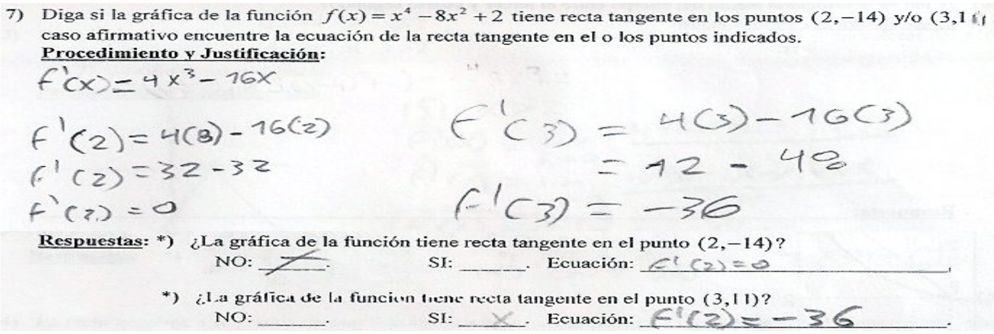
$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)-9-(3x-9)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x+3h-9-3x+9}}{h}$

$g'(x) = 3$

Respuestas: *) $g(2) =$ __-3__ y *) g' en $x = 2$ es: __3__.

Figura 5.1



7) Diga si la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ tiene recta tangente en los puntos $(2,-14)$ y/o $(3,11)$. En caso afirmativo encuentre la ecuación de la recta tangente en el o los puntos indicados.

Procedimiento y Justificación:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(2) = 4(8) - 16(2)$

$f'(2) = 32 - 32$

$f'(2) = 0$

$f'(3) = 4(3) - 16(3)$

$= 12 - 48$

$f'(3) = -36$

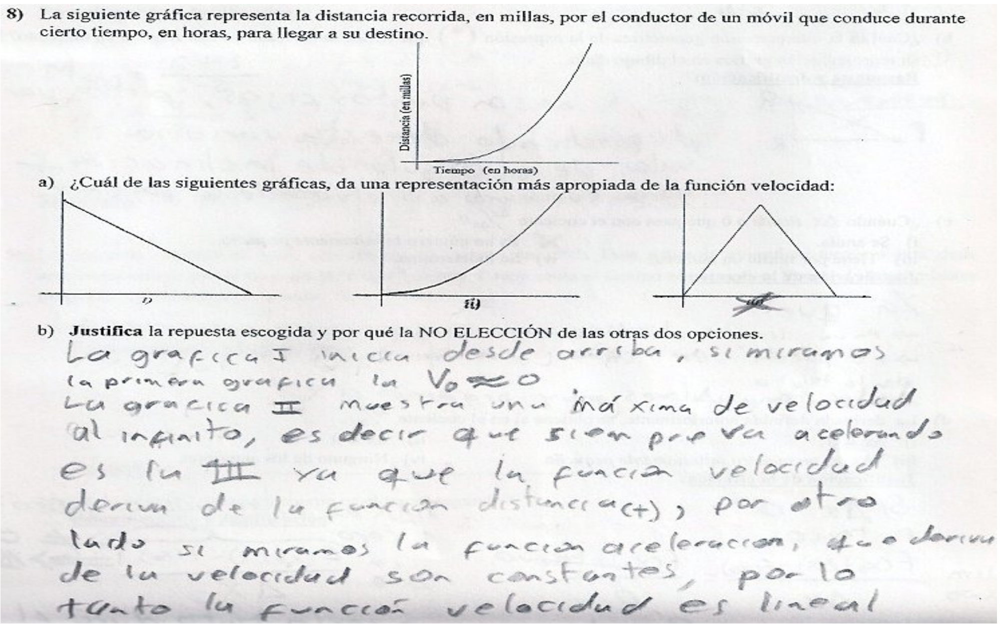
Respuestas: *) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(2,-14)$?

NO: __✗__. SI: ______. Ecuación: $f'(2) = 0$

*) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(3,11)$?

NO: ______. SI: __✗__. Ecuación: $f'(2) = -36$

Figura 6.1



8) La siguiente gráfica representa la distancia recorrida, en millas, por el conductor de un móvil que conduce durante cierto tiempo, en horas, para llegar a su destino.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas, da una representación más apropiada de la función velocidad:

b) **Justifica** la repuesta escogida y por qué la NO ELECCIÓN de las otras dos opciones.

La grafica I inicia desde arriba, si miramos la primera grafica la $V_0 \approx 0$

La gracica II muestra una máxima de velocidad al infinito, es decir que siempre va acelerando es la III ya que la funcion velocidad deriva de la funcion distancia(+), por otro lado si miramos la funcion aceleracion, que deriva de la velocidad son constantes, por lo tanto la funcion velocidad es lineal

Figura 7.1

Ítems 1, 2, 3, 4 y 7:

- En los ítems 1, 2 y 3 (figs. 1.1, 4.1 y 2.1) se sigue un procedimiento equivalente al utilizado por el solucionador ideal, y aunque no pase lo mismo en los ítems 4 y 7 (figs. 5.1 y 6.1), en todos ellos primero se determina la función derivada y luego la derivada puntual reemplazando en dicha función el valor de x dado, sin importar que en el enunciado de la pregunta se le pida primero o solamente el cálculo de la derivada en un punto, ver por ejemplo ítems 1 y 4, esto permite inferir que el estudiante logra los actos de comprensión que son objetos de análisis.
- En las respuestas a los ítems 2 (fig. 4.1) y 3 (fig. 2.1), donde se reconoce la derivada como una función, *existen dificultades asociadas con su dominio, en el ítem 2 una de las dificultades se da al graficar la función derivada, pues aunque existen 4 valores en donde la función no es derivable, no se reconocen 2 de ellos, particularmente los extremos $x=-3$ y $x=2$, lo que hace que en la gráfica de la derivada existan sus imágenes, este hecho tiene que ver con que la derivada está condicionada por la comprensión del concepto de límite* (dificultad reconocida en el análisis del ítem 3 para el plano 1a), pero en este caso solamente se falla en los valores en donde uno de los límites laterales no existe. *La otra dificultad se observa en la incongruencia del dominio entre la gráfica de la función derivada y su regla de correspondencia escrita analíticamente, dificultad que radica en el cambio de registros.*

Ítems 6a, 6c y 8:

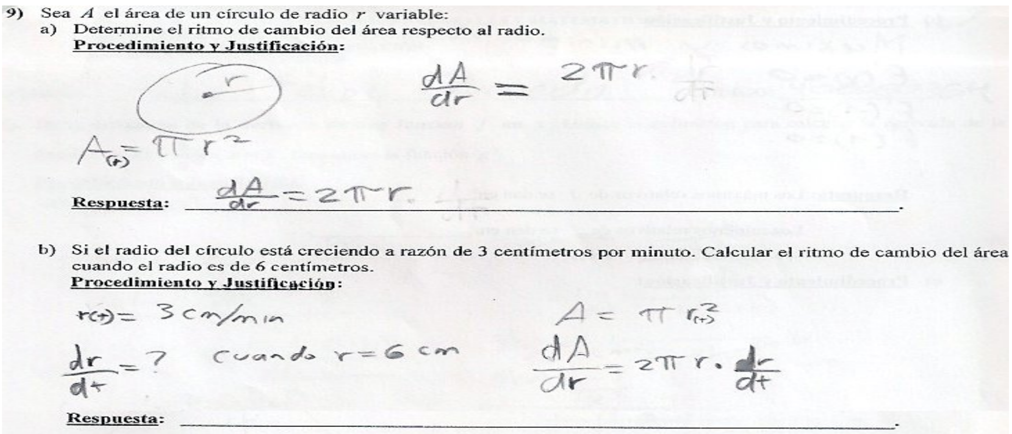
- Como se dijo anteriormente, en el ítem 6a (fig. 3.1) se selecciona y justifica correctamente la respuesta siguiendo la justificación 2, dada por el solucionador ideal, es decir que se ratifica la inferencia del reconocimiento de la derivada puntual como un número, identificada en los ítems anteriores. Mientras que las selecciones equivocadas y las justificaciones inadecuadas en los ítems 6c (fig. 3.1) y 8 (fig. 7.1) no permiten realizar inferencias sobre los actos de compresión objetos de análisis.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que el estudiante reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, pero en ciertas situaciones, existen dificultades asociadas con la determinación del dominio de la función derivada.

Eje de referencia 1c.

Ahora se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b, los cuales confrontan aspectos del plano de referencia 1c: La figura 8.1 que aparece a continuación muestra la producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 9a y 9b, las otras producciones se encuentran en figuras anteriores.


9) Sea A el área de un círculo de radio r variable:
a) Determine el ritmo de cambio del área respecto al radio.
Procedimiento y Justificación:

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$

$A_{(r)} = \pi r^2$

Respuesta: $\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$

b) Si el radio del círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros.
Procedimiento y Justificación:

$r_{(t)} = 3\,cm/min$ $A = \pi r_{(t)}^2$

$\frac{dr}{dt} = ?$ cuando $r = 6$ cm $\frac{dA}{dr} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$

Respuesta:

Figura 8.1

Ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b:

- En el ítem 1 (fig. 1.1) a pesar de que se le pide calcular la derivada puntual en los términos "calcular la derivada de la función $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$ y determinar la función g'", el estudiante las representa respectivamente como $g'(2)$ y $g'(x)$. También lo hace cuando se escriben formas equivalentes para la función derivada, tal es el caso de la respuesta al ítem 3 (fig. 2.1) en la cuál se le pide determinar la función $\frac{dy}{dx}$ y el estudiante escribe $f'(x)$, y en la interpretación de expresiones dadas en lenguaje verbal en los ítems 9a y 9b (fig. 8.1) donde al hablarle en términos de ritmo de cambio del área respecto al radio y razón de cambio del radio respecto al tiempo, escribe respectivamente $\frac{dA}{dr}$ y $\frac{dr}{dt}$.

- En el ítem 2 (fig. 4.1) procede de forma “inversa” al punto anterior, es decir, interpreta correctamente los símbolos dados en el enunciado $f'(x)$ y $f'(-1)$ con los términos función derivada y derivada puntual.
- Lo analizado en los puntos anteriores permite inferir que el estudiante ha logrado los actos de compresión objetos de análisis, mientras que los procedimientos utilizados en los ítems 4 (fig. 5.1) y 7 (fig. 6.1) no permiten realizar inferencias sobre dichos actos de compresión.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que el estudiante interioriza el proceso múltiple y sus productos, y encapsula en símbolos apropiados los términos función derivada y derivada en un punto.

Teniendo en cuenta los análisis anteriores, podemos inferir respecto al significado matemático de la derivada (plano 1) que, el estudiante (6) posee una definición personal que coincide con la institucional (sin precisar la necesidad de que el límite exista); expresa la fórmula contenida en la definición, interpreta y calcula correctamente las imágenes contenidas en el cociente de diferencias, identifica y discrimina, como objetos, los dos productos del proceso matemático subyacente en la definición, relacionándolos adecuadamente, además ha interiorizado el proceso múltiple y sus productos, y los ha encapsulado en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente, con los términos función derivada y derivada en un punto. Es así como considerando las exigencias en cada uno de los planos y las cuales se le plantean en las situaciones analizadas, el estudiante alcanza el estado de comprensión B, respecto del significado matemático de la derivada, pero vacíos identificables en la apropiación del concepto soporte límite, del cual tiene un dominio algebraico, pero le falta la fundamentación matemática de más fondo, en cuanto a la necesidad de que los límites laterales existan y sean iguales, para la existencia de la derivada (tratada de superar con la utilización del registro gráfico) o pensar en el límite como un valor aproximado, no le permite alcanzar el estado de comprensión A respecto del significado matemático de la definición.

Ejes de referencia 2a y 2b.

Se analizan en adelante los ítems relacionados con los ejes que hacen parte de las versiones de derivada en contexto, comenzando por las respuestas del estudiante al ítem 6b (fig. 3.1), que confronta aspectos de los ejes de referencia 2a y 2b:

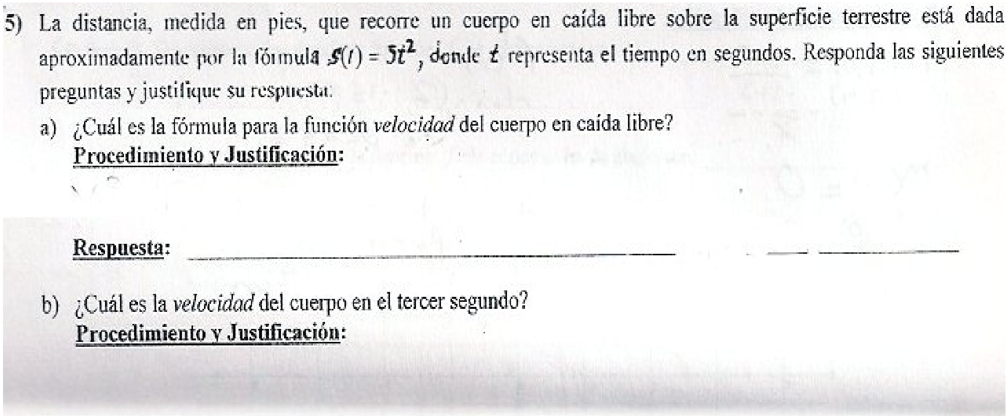
- Como se destacó en el análisis de esta situación para el plano de referencia 1a, aparentemente el estudiante no responde a la pregunta, pero en realidad lo hizo parcialmente al justificar la elección del ítem 6a (fig. 3.1), pues le faltó realizar la gráfica pedida, pero *se observa el reconocimiento de variaciones importantes en la gráfica (estática), dados por la fórmula (*), y por lo tanto es muy probable, pero no absolutamente seguro (pues no hay otros ítems que confronten este aspecto), que el estudiante disponga de los actos de compresión aquí analizados, pero tenga limitaciones en explicarlos verbalmente. Por lo que el problema puede ubicarse en la conversión entre representaciones. En este caso, de las representaciones mentales del sujeto a la manera como representa semióticamente tales representaciones mentales; es decir, el estudiante puede tener representaciones mentales apropiadas en un momento dado y, sin embargo, no tener la forma de expresión adecuada en términos del lenguaje verbal.*

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en estos ejes de referencia no se puede decir con certeza si el estudiante los logra, pero vislumbran el problema de reconocer el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente.

Eje de referencia 2c.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 6a, 6b, 7, 8, 9a y 9b que confrontan aspectos del eje de referencia 2c: Las figuras 4.1, 2.1, 5.1, 3.1, 6.1, 7.1 y 8.1, antes presentadas, muestran la producción del estudiante para dar respuestas a los ítems 2, 3, 4, 6a, 6b, 7, 8, 9a y 9b. Aclarando que el estudiante no respondió las preguntas de los ítems 5a y 5b, como se observa en la siguiente figura:



5) La distancia, medida en pies, que recorre un cuerpo en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $s(t) = 5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos. Responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta:

a) ¿Cuál es la fórmula para la función *velocidad* del cuerpo en caída libre?

Procedimiento y Justificación:

Respuesta: ______________________

b) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo en el tercer segundo?

Procedimiento y Justificación:

Figura 9.1

Ítems 2, 3, 4, 6a, 6b y 7:

- Al seguir un procedimiento equivalente al del solucionador ideal para dar respuesta al ítem 2 (fig. 4.1), se puede inferir que el estudiante identifica las correspondencias descritas en el plano de compresión objeto de análisis, pues *define analíticamente la función derivada utilizando el cálculo del valor de la pendiente para cada trozo de la función f dada gráficamente y, aunque no identifique dicha correspondencia sólo en los extremos del intervalo, pues en puntos interiores donde esto pasa, la representación gráfica es fundamental para dar la respuesta correcta (ver ovalo rojo, fig. 4.1), las dificultades se pueden atribuir al vacío descrito en análisis anteriores (ítem 3 para el plano 1a) respecto al concepto de límite.*
- El logro del acto de compresión i) objeto de análisis se confirma al observar la respuesta equivalente a la del solucionador ideal para el ítem 6a (fig. 3.1), y sigue siendo válida aun cuando *el procedimiento para dar respuesta al ítem 4 (fig. 5.1) no sea correcto, pues lo que sucede realmente es que el estudiante interpreta la función de forma equivocada como la recta tangente.*
- *En el ítem 7 (fig. 6.1), se infiere que el estudiante actúa mecánicamente ante este tipo de preguntas pues aunque deriva y reemplaza correctamente en los puntos dados, no reconoce que una tangente es horizontal, pues en su respuesta dice que no hay recta tangente y sin

embargo escribe la derivada puntual calculada como la ecuación, lo que parece estar ligado con lo realizado en el ítem 3, en el que asocia que la función cuando la derivada es cero, no existe recta tangente en el punto, resultando un esquema erróneo, y en la otra respuesta aunque dice que si existe rectan tangente, tampoco da la ecuación correcta y vuelve a escribir la derivada puntual calculada.*

- El procedimiento seguido para dar respuesta a los ítems 3 (fig. 2.1) y 6b (fig. 3.1) no permite realizar inferencias con relación al eje objeto de análisis.

Ítems 5a, 5b y 8:

- El no responder a los ítems 5a y 5b (fig. 9.1) y *el verbalizar que la derivada de la función distancia es la velocidad, pero no conectar esto con lo pedido, dando respuestas inadecuadas al ítem 3 (fig. 7.1)*, no permite realizar inferencias con relación a los actos de comprensión objeto de análisis.

Ítems 9a y 9b (fig. 8.1):

- *En el ítem 9a aunque cambie correctamente la expresión dada en el registro verbal al analítico y a medias en el ítem 9b, por lo analizado hasta ahora en la versión física del concepto, podemos inferir que se logra actuando memorísticamente y por tal razón no responde a la pregunta planteada en este último ítem.*

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este eje de referencia se puede concluir que existen registros suficientes en los cuales identifica las correspondencias entre la pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada en dicho punto, y la función de pendientes de rectas tangentes a la curva con la función derivada, pero a veces existen dificultades en reconocer algunos puntos en donde la derivada no existe, al no existir recta tangente.

Eje de referencia 2d.

Por último, se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 7, 9a y 9b, en lo que concierne a los aspectos del eje de referencia 2d:

Ítems 2, 3, 4 y 7:

- De la producción del estudiante para los ítems 2 y 4 (figs. 4.1 y 5.1), se puede inferir el logro de los actos de compresión objeto de análisis y referidos a la interpretación geométrica del concepto derivada, *aclarando que en el ítem 7 (fig. 6.1), si bien el procedimiento de resolución comienza por buen camino, pues encuentra la función derivada y luego reemplaza apropiadamente los valores de x determinando las derivadas puntuales correctas, no las asocia con las pendientes de las rectas tangentes en dichos valores y aunque este hecho parece ir en contravía de la inferencia realizada, no es tal el caso, pues como se dijo en el análisis para el plano 2c el problema parece estar ligado con lo realizado en el ítem 3 (fig. 2.1), donde el resultado cero para la derivada puntal vuelve a desviar la atención del estudiante hacia la utilización incorrecta de la definición de valor crítico*, por lo demás el procedimiento utilizado para dar respuesta al ítem 3 no permite realizar inferencias con relación al plano objeto de análisis.

Ítems 5a, 5b, 9a y 9b:

- La verbalización que hace correctamente en el ítem 8 (fig. 7.1) y algunas asociaciones correctas en la situación 9 (fig. 8.1), no tienen incidencia sobre la acción del estudiante para dar respuestas a dichos ítems, *por lo que se infiere que el estudiante no ha realizado los encapsulamientos referidos a la interpretación física, ratificando dicha inferencia al no dar ninguna respuesta a los ítems 5a y 5b (fig. 9.1).*

Conclusiones:

- ✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este eje de referencia se puede concluir que ha encapsulado en símbolos apropiados los términos pendiente de la recta tangente en un punto y función de pendientes de rectas tangentes a una curva.

Teniendo en cuenta los análisis anteriores respecto a las versiones de derivada en contexto (plano 2), el estudiante (6) alcanza el estado de comprensión C respecto de la apropiación del marco interpretativo del concepto derivada que le da sentido al concepto, pues, aunque tiene un dominio aceptable de la versión geométrica, se observan algunas dificultades, pero definitivamente no hay un dominio de la versión física.

Como conclusión general, de acuerdo a lo analizado en todos los ítems, se puede afirmar que el estudiante 6 alcanza el estado de comprensión BC. En donde las deficiencias en la compresión conceptual de ciertos aspectos ya descritos, recaen básicamente sobre conocimiento soporte y la dificultad para exteriorizar verbalmente lo que piensa. A pesar de esto, logra reconocer variaciones dadas por la fórmula (*) en la gráficas estática del ítem 6, que según los reportes de investigación internacionales ya referenciados, es algo que la mayoría de estudiantes no logra. Además se revela un notorio dominio de la versión geométrica sobre la versión física que puede ser consecuencia del énfasis que hacen no sólo los textos, sino los docentes.

En relación con el conocimiento soporte que el estudiante pone en juego para responder a las preguntas de los ítems se puede inferir que: Reconoce en una situación el concepto de función y su dominio, esboza algunas funciones gráficamente y sabe como funciona la regla de correspondencia que la define analíticamente, incluyendo funciones a trozos; maneja apropiadamente las operaciones con fracciones algebraicas, utiliza y aplica adecuadamente la fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta y ecuación de una recta, traza la gráfica de una función a trozos. Pero existen vacíos en el concepto de límite, particularmente límites laterales y algunas veces el límite se piensa como un valor aproximado y extremadamente pequeño. En algunas ocasiones el estudiante puede tener representaciones mentales apropiadas y, sin embargo no tener la forma de expresión adecuada en términos del lenguaje verbal, por lo que el problema puede ubicarse en la conversión entre representaciones.

5.2 Análisis de las producciones alumno 54, representante del estado de comprensión CD.

	Plano 1			Plano 2			
	Eje 1a	**Eje 1b**	**Eje 1c**	**Eje 2a**	**Eje 2b**	**Eje 2c**	**Eje 2d**
Ítem 1	P(x)*	P(x)*	N(x)*				
Ítem 2		(x)*	(x)*			N(x)*	N(x)
Ítem 3	N(x)	(x)*	(x)*			N(x_*i*)	N(x)
Ítem 4		N(x)	N(x)			N(x_*i*)	N(x)
Ítem 5a						N(x_*ii(v)*)*	N(x*(v)*)
Ítem 5b						N(x_*i(v)*)*	N(x*(v)*)
Ítem 6a	N(x_*g*)*	N(x_*n*)				N(x_*i*)	
Ítem 6b	-----			-----	-----	-----	
Ítem 6c	N(x_*g*)*	N(x_*n*)*					
Ítem 6d	N(x_*g*)*	N(x_*n*)*					
Ítem 7		(x)*	(x)			P(x_*i*)*	P(x)*
Ítem 8		N(x)				N(x(*p-v*))	
Ítem 9a			P(x)*			N(x_*ii(r)*)*	P(x)*
Ítem 9b			(x)*			(x*(r)*)*	(x)*

De acuerdo con la tabla anterior y los análisis sobre los cuales se sustenta, se puede inferir que el estudiante (54):

A] Respecto del significado matemático del concepto de derivada. Ha logrado el estado de comprensión C, identificado en los análisis. En efecto:

i) Con relación a los actos de compresión agrupados en el eje de referencia 1a, puede reconocer globalmente la secuencia de operaciones en la representación analítica de la definición de derivada, pero no hay un reconocimiento local de la misma, debido a la no apropiación del concepto de límite y vacíos en otros conceptos soporte, descritos en el análisis.

ii) Respecto al conjunto de actos de comprensión que se agrupan en el eje de referencia 1b, reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, en muchas ocasiones mediada por reglas de derivación, no identificando la derivabilidad de una función en un punto.

B] Respecto de la apropiación de las versiones en contexto del concepto de derivada, alcanza el estado de comprensión D, es decir:

i) No logra los actos de comprensión agrupados en 2a y 2b, es decir, no reconoce la variación y el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente (su posición límite), resultados que son similares a los obtenidos en otras investigaciones, particularmente comentadas en el análisis de estos mismos ejes para el estudiante 24.

ii) Con relación a los actos de compresión agrupados en el eje 2c, identifica las correspondencias entre la pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada en dicho punto, cuando éstas están referidas a interpretaciones geométricas que involucran la aplicación de reglas de derivación, no identifica dichas correspondencias referidas a interpretaciones físicas (velocidad instantánea y función velocidad), reconociendo que existe una leve identificación, también desde una perspectiva operativa, cuando la función velocidad se expresa en términos de razones o ritmos de cambio.

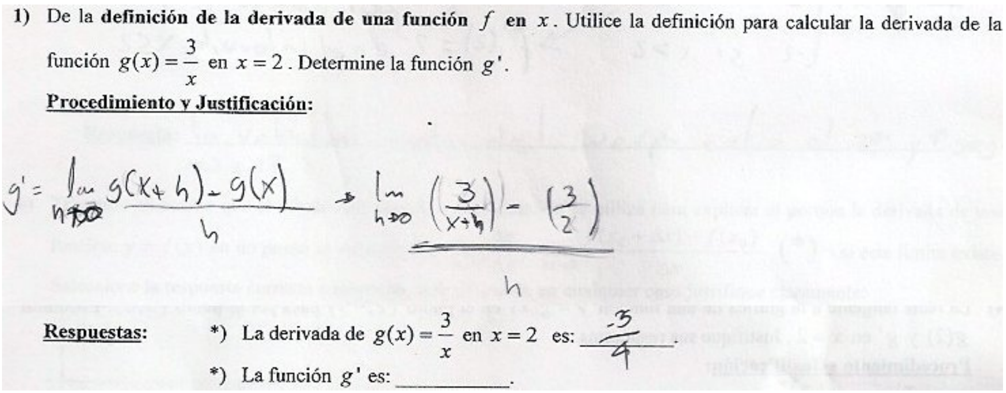
C] En relación con el conocimiento soporte que el estudiante pone en juego para responder a las preguntas de los ítems se puede inferir que: Reconoce en una situación el concepto de función, pero no identifica su dominio, esboza algunas funciones gráficamente y sabe como funciona la regla de correspondencia que la define analíticamente incluyendo funciones a trozos, no muestra un manejo de las operaciones con fracciones algebraicas, pero utiliza y aplica adecuadamente la fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta y ecuación de una recta, y existen vacíos en el concepto de límite.

EN CONCLUSION: El alumno alcanza el estado de comprensión caracterizado como CD, en el cual existen deficiencias, tanto en la apropiación del concepto de límite, como de las versiones en contexto de la derivada que se utilizaron para definir su marco interpretativo, especialmente en el contexto físico en el que tal interpretación es prácticamente inexistente. Agregando que el logro de algunos actos de comprensión agrupados en 1b y 2c, se desplaza hacia una perspectiva operativa.

Análisis específico respecto a cada eje de referencia.

Eje de referencia 1a.

Las producciones del estudiante para dar respuesta a los ítems 1, 3, 6a, 6b, 6c y 6d que confrontan los actos de comprensión agrupados en este eje de referencia se muestran en las figuras 1.2, 2.2 y 3.2:



1) De la **definición de la derivada de una función** f **en** x. Utilice la definición para calcular la derivada de la función $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$. Determine la función g'.

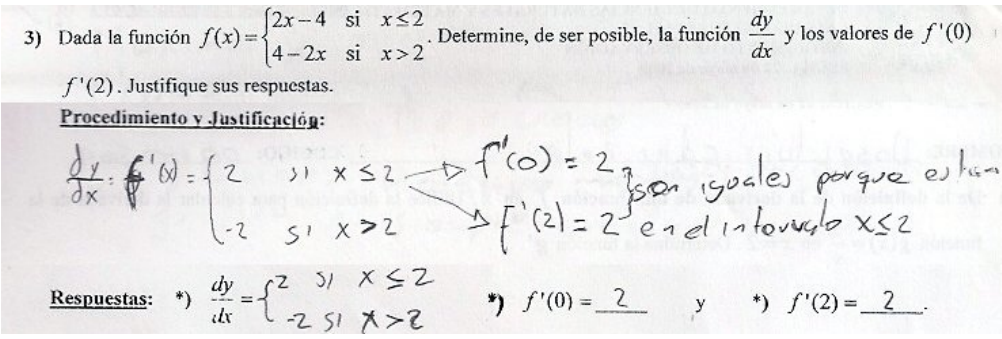
Procedimiento y Justificación:

$$g' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{3}{x+h}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)}{h}$$

Respuestas: *) La derivada de $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$ es: $\frac{-3}{4}$

*) La función g' es: __________.

Figura 1.2



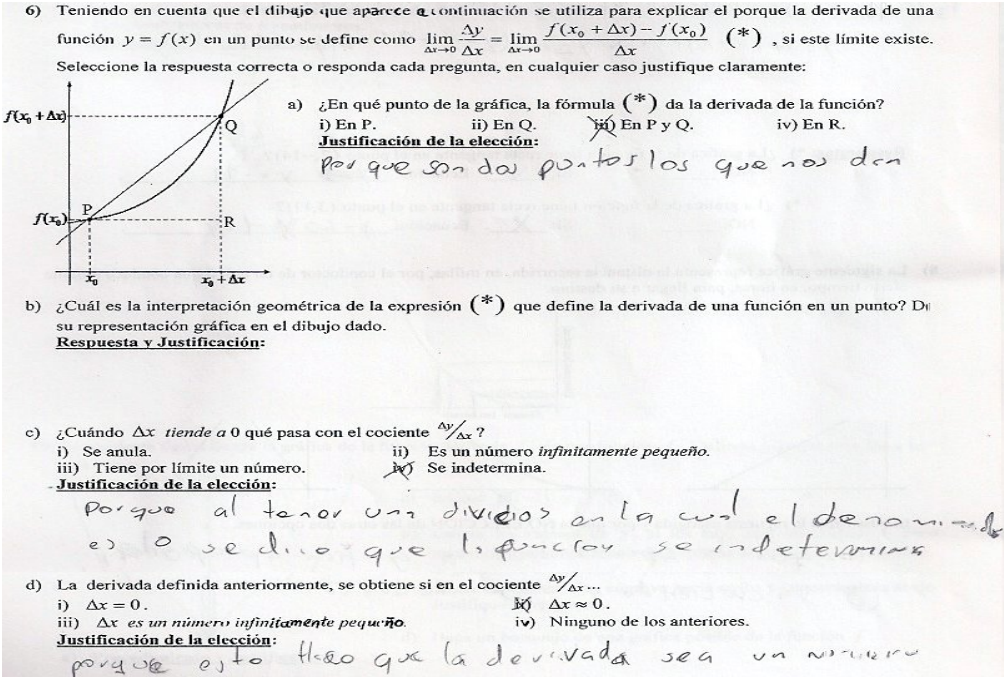
3) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \le 2 \\ 4-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Determine, de ser posible, la función $\frac{dy}{dx}$ y los valores de $f'(0)$ $f'(2)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$$\frac{dy}{dx} : f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \to f'(0) = 2 \\ \to f'(2) = 2 \end{matrix} \Big\} \text{son iguales porque están en el intervalo } x \le 2$$

Respuestas: *) $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ *) $f'(0) =$ 2 y *) $f'(2) =$ 2.

Figura 2.2



6) Teniendo en cuenta que el dibujo que aparece a continuación se utiliza para explicar el porque la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto se define como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $(*)$, si este límite existe.

Seleccione la respuesta correcta o responda cada pregunta, en cualquier caso justifique claramente:

a) ¿En qué punto de la gráfica, la fórmula $(*)$ da la derivada de la función?

i) En P. ii) En Q. iii) En P y Q. iv) En R.

Justificación de la elección:

Por que son dos puntos los que nos dan

b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la expresión $(*)$ que define la derivada de una función en un punto? D su representación gráfica en el dibujo dado.

Respuesta y Justificación:

c) ¿Cuándo Δx *tiende a* 0 qué pasa con el cociente $\Delta y / \Delta x$?

i) Se anula. ii) Es un número *infinitamente pequeño.*

iii) Tiene por límite un número. iv) Se indetermina.

Justificación de la elección:

Porque al tener una división en la cual el denominador es 0 se dice que la función se indetermina

d) La derivada definida anteriormente, se obtiene si en el cociente $\Delta y / \Delta x$ ...

i) $\Delta x = 0$. ii) $\Delta x \approx 0$.

iii) Δx *es un número infinitamente pequeño.* iv) Ninguno de los anteriores.

Justificación de la elección:

porque esto hace que la derivada sea un número

Figura 3.2

- En el ítem 1 (fig. 1.2), el estudiante da la respuesta sólo a una de las tres preguntas planteadas (pregunta dos), pero no da justificación alguna sobre como la obtuvo, aunque se puede inferir que fue con la utilización de las reglas de derivación. Además escribe la definición de derivada, no como respuesta a la primera pregunta, sino al tratar de determinar g' y en dicho proceso realiza un segundo paso que no desarrolla. Esto permite inferir, de un lado, que el estudiante no ve necesaria la respuesta a la primera pregunta, pues cree que con haberla escrito para la función g es suficiente. De otro lado, que no hay reconocimiento local de la secuencia de operaciones involucrada en la definición, pues en el segundo paso que escribe, no calcula correctamente una de las imágenes que aparece en el numerador del cociente de diferencias y no modifica la secuencia de operaciones interna en la definición. Por lo tanto, logra parcialmente los actos de comprensión objetos de análisis, en particular el referido al reconocimiento global de la secuencia de operaciones en la representación analítica de la definición de derivada, ya que establece la relación que se da entre la función y su derivada al ingresar la función representada por g, en dicha definición.

- La última inferencia se podría corroborar cuando el estudiante escribe la justificación de su elección en el ítem 6d (fig. 3.2), a pesar de que la elección sea incorrecta, pues esto se puede deber posiblemente a la asignación de un significado equivalente a los símbolos $\Delta x \approx 0$ y $\Delta x \to 0$, este último que aparece en la fórmula $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ dada en el enunciado de la situación.
- El ítem 6c (fig. 3.2) por su parte permitiría reafirmar de un lado el no reconocimiento local de dicha secuencia al responder que la derivada de la función se da en los puntos P y Q. Y del otro, el problema de significado que el estudiante asigna a ciertos símbolos, en este caso Δx tiende a 0 equivalente con $\Delta x = 0$.
- Las respuestas dadas a los ítems 3 (fig. 2.2) y 6a (fig. 3.2) no permiten realizar inferencias sobre los actos de compresión que se analizan en este plano. Al igual que el ítem 6b (fig. 3. 2), debido a que el estudiante no lo responde.

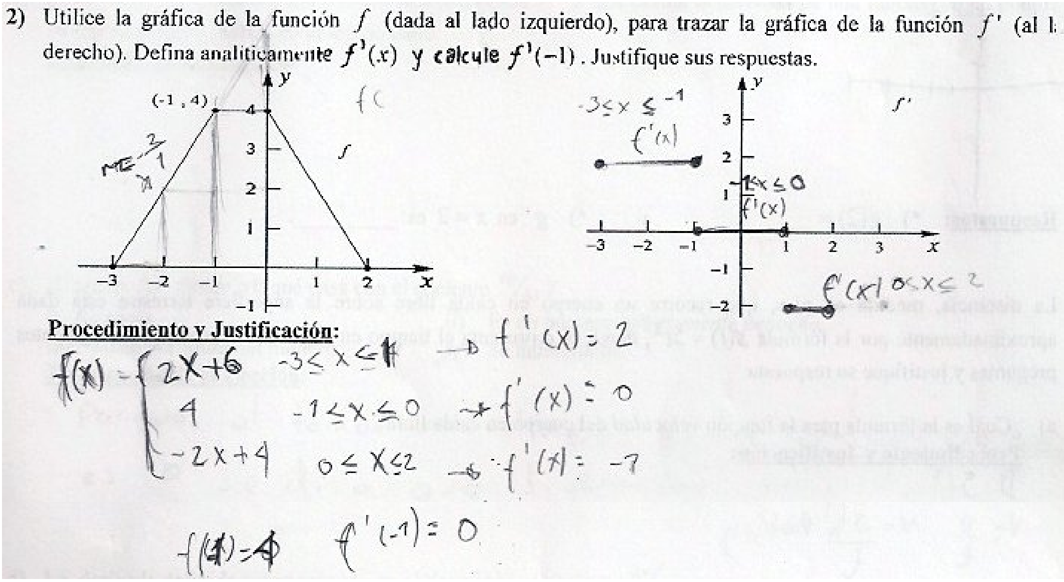
Conclusiones:

✓ El estudiante alcanza aproximaciones a los actos de comprensión objetos de análisis, es decir, puede reconocer globalmente la secuencia de operaciones en la representación analítica de la definición de derivada, pero no hay un reconocimiento local de la misma.

✓ Con relación al conocimiento soporte que el estudiante pone en juego para responder cada una de las preguntas se puede inferir que: Reconoce en una situación el concepto de función y aunque calcula incorrectamente una imagen en el ítem 1, hay registros suficientes para decir que sabe como funciona la regla de correspondencia que la define analíticamente incluyendo funciones a trozos. Los vacíos en la apropiación del concepto de límite y en el manejo de fracciones algebraicas, que son conocimiento soporte confrontado por las situaciones aquí analizadas, influyen en el logro de los actos de comprensión analizados.

Eje de referencia 1b.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 6a, 6c, 7 y 8 que confrontan aspectos del plano de referencia 1b: La producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 1, 3, 6a y 6c se mostró en las figuras 1. 2, 2.2 y 3.2. La producción para los ítems 2, 4, 7 y 8 se muestra a continuación respectivamente en las figuras 4.2, 5.2, 6.2 y 7.2:

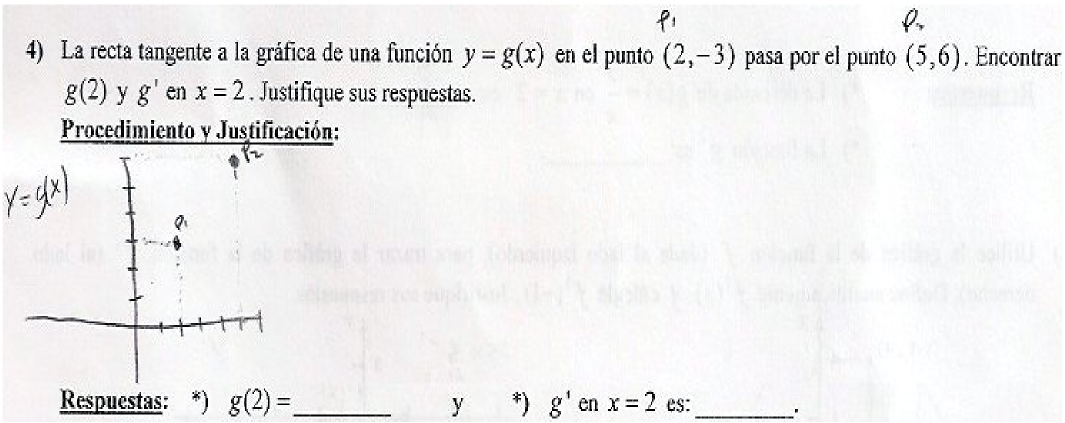

2) Utilice la gráfica de la función f (dada al lado izquierdo), para trazar la gráfica de la función f' (al l. derecho). Defina analíticamente $f'(x)$ y calcule $f'(-1)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6 & -3 \le x \le -1 \\ 4 & -1 \le x \le 0 \\ -2x+4 & 0 \le x \le 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \to f'(x) = 2 \\ \to f'(x) = 0 \\ \to f'(x) = -2 \end{matrix}$$

$f(-1) = 4 \quad f'(-1) = 0$

Figura 4.2

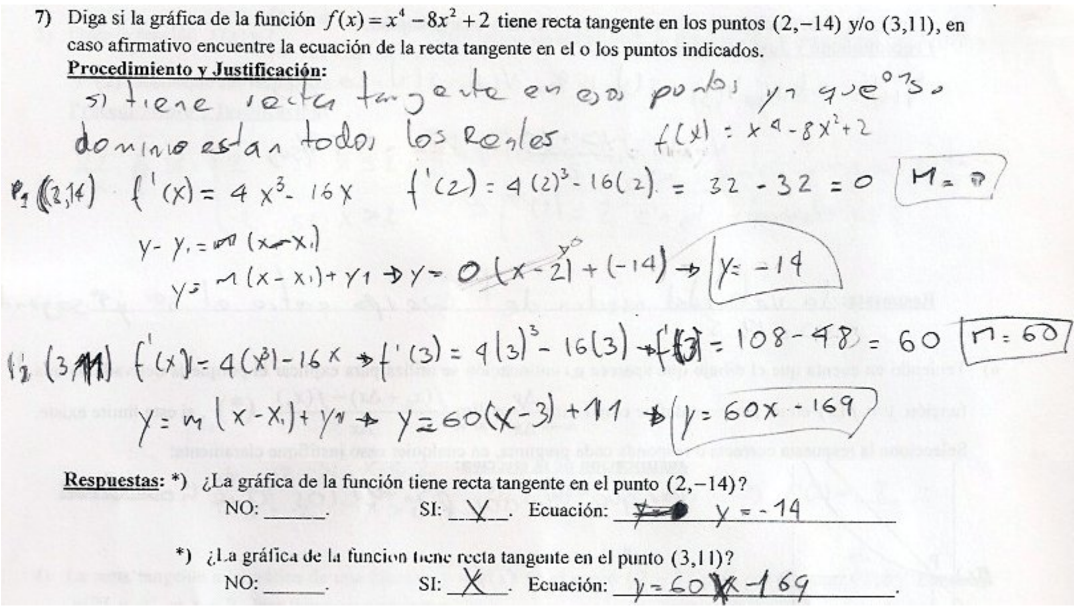

4) La recta tangente a la gráfica de una función $y = g(x)$ en el punto $(2, -3)$ pasa por el punto $(5, 6)$. Encontrar $g(2)$ y g' en $x = 2$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$y = g(x)$

Respuestas: *) $g(2) =$ ________ y *) g' en $x = 2$ es: ________.

Figura 5.2



7) Diga si la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ tiene recta tangente en los puntos $(2,-14)$ y/o $(3,11)$, en caso afirmativo encuentre la ecuación de la recta tangente en el o los puntos indicados.

Procedimiento y Justificación:

si tiene recta tangente en esos puntos ya que su dominio estan todos los Reales $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

$P_1\ (2,14)$ $f'(x) = 4x^3 - 16x$ $f'(2) = 4(2)^3 - 16(2) = 32 - 32 = 0$ $\boxed{M = 0}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = m(x - x_1) + y_1 \Rightarrow y = 0(x - 2) + (-14) \rightarrow \boxed{y = -14}$

$P_2\ (3,11)$ $f'(x) = 4(x^3) - 16x \Rightarrow f'(3) = 4(3)^3 - 16(3) \Rightarrow f'(3) = 108 - 48 = 60$ $\boxed{m = 60}$

$y = m(x - x_1) + y_1 \Rightarrow y = 60(x - 3) + 11 \Rightarrow \boxed{y = 60x - 169}$

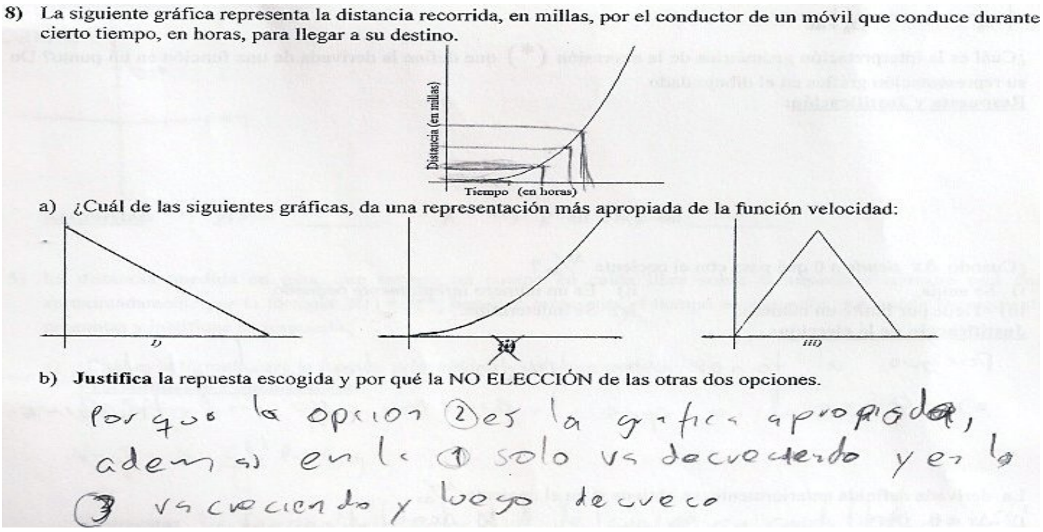
Respuestas: *) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(2,-14)$?

NO: ______. SI: __X__. Ecuación: ~~y=0~~ y = -14

*) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(3,11)$?

NO: ______. SI: __X__. Ecuación: y = 60x - 169

Figura 6.2



8) La siguiente gráfica representa la distancia recorrida, en millas, por el conductor de un móvil que conduce durante cierto tiempo, en horas, para llegar a su destino.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas, da una representación más apropiada de la función velocidad:

b) **Justifica** la repuesta escogida y por qué la NO ELECCIÓN de las otras dos opciones.

porque la opcion 2 es la grafica apropiada, ademas en la 1 solo va decreciendo y en la 3 va creciendo y luego decrece

Figura 7.2

Ítems 1, 2, 3 y 7:

- En la producción del estudiante, para dar respuesta a los ítems 2, 3, y 7 (figs. 4.2, 2.2 y 6.2 respectivamente), se puede observar que hace la diferencia entre lo que representan matemáticamente los símbolos $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ y $f'(-1)$, $f'(0)$, pues siempre determina primero la función derivada y luego la utiliza para calcular derivadas puntuales, lo que permite inferir que el estudiante logra los actos de comprensión que son objetos de análisis.

- Cabe aclarar que en la poca producción para responder el ítem 1 (fig. 1.2), el estudiante, sin justificar de donde la obtiene, da una respuesta correcta para la derivada puntual exigida y en la producción del ítem 6d (fig. 3.2), sin ser necesario, introdujo cierta información que permite ratificar la inferencia del reconocimiento, como número, del proceso matemático de la definición.
- Es importante señalar que en las respuestas a los ítems 2 (fig. 4.2) y 3 (fig. 2.2), donde se reconoce la derivada como una función, existen dificultades asociadas con su dominio. En el ítem 2 la dificultad se observa en la gráfica elaborada de la función derivada, pues al indicar la existencia de las imágenes $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$, el estudiante no reconoce los 4 valores en donde la función f no es derivable. Mientras que en el ítem 3, la dificultad se observa en la regla de correspondencia escrita analíticamente para f' al incluir en el dominio a $x = 2$, valor en el cual f no es derivable. Estos hechos tienen que ver con que la derivada está condicionada por la comprensión del concepto de límite. Por otro lado en el ítem 2, es evidente la necesidad que tienen algunos estudiantes de tener una función como una regla de correspondencia en forma analítica para poder calcular así la función derivada.

Ítems 4, 6a, 6c y 8 (figs. 5.2, 3.2 y 8.2):

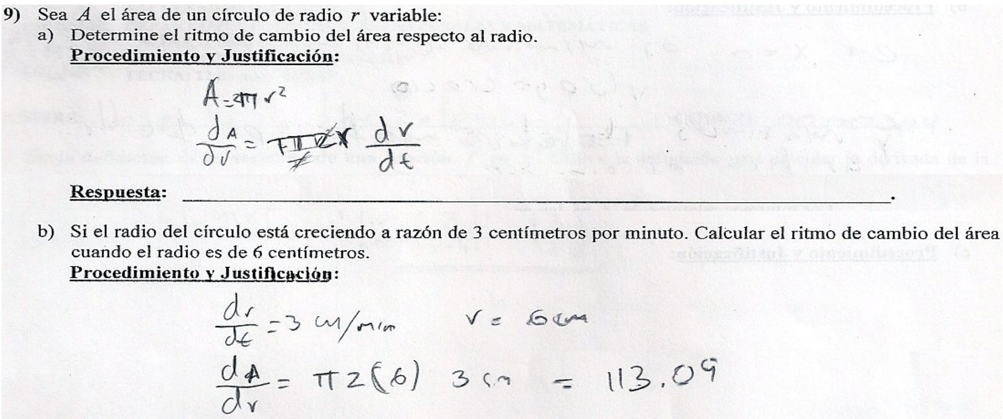
- Lo realizado para dar respuesta a estos ítems no permite inferir, con relación a los actos de comprensión, objetos de análisis, pero esto no va en contra vía con la inferencia hecha antes, pues aunque el estudiante debe hacer uso de dichos actos de comprensión en los ítems aquí analizados, éstos no se manifiesten, pues en realidad las respuestas están condicionadas por las conversiones entre registros de representación y la comprensión a priori de otros conceptos, en particular el concepto de límite en el ítem 6a, y el concepto de velocidad en el ítem 8. Además de los problemas de significado que el estudiante asigna a ciertos símbolos ya analizados en 1a.

Conclusiones:

- ✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que el estudiante reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, en algunas ocasiones mediada por reglas de derivación, además no identifica la no derivabilidad de una función en un punto.

Eje de referencia 1c.

Ahora se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b, los cuales confrontan aspectos del plano de referencia 1c: La figura 8.2, que aparece a continuación, muestra la producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 9a y 9b, las otras producciones se encuentran en figuras anteriores.



9) Sea A el área de un círculo de radio r variable:

a) Determine el ritmo de cambio del área respecto al radio.

Procedimiento y Justificación:

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dr} = \pi 2r \frac{dr}{dt}$

Respuesta: ______________________________.

b) Si el radio del círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros.

Procedimiento y Justificación:

$\frac{dr}{dt} = 3\ cm/min \qquad r = 6cm$

$\frac{dA}{dr} = \pi 2(6)\ 3cm = 113.09$

Figura 8.2

Ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b:

- En el ítem 3 (fig. 1.2) donde se le pide determinar la función $\frac{dy}{dx}$, el estudiante escribe la forma equivalente $f'(x)$, también lo hace en el ítem 7 (fig. 6.2) para determinar las pendientes de las rectas tangentes en puntos dados y utiliza otras formas para representar la derivada, en la interpretación de expresiones dadas en lenguaje verbal en los ítems 9a y 9b (fig. 8.2), donde al hablarle en términos de ritmo de cambio del área respecto al radio y razón de cambio del radio respecto al tiempo, escribe respectivamente $\frac{dA}{dr}$ y $\frac{dr}{dt}$. Lo que permite inferir según los análisis de pertinencia para estos ítems, que el estudiante ha logrado los actos de compresión objetos de análisis. Cabe aclarar que en el proceso de cálculo de la razón de cambio $\frac{dA}{dr}$, no se observa una toma de consciencia sobre el significado de dicho símbolo, pues deriva respecto al tiempo y no respecto al radio, lo que presume que en cierto sentido el proceso para calcular dichas razones de cambio se realiza de forma mecánica.

- La inferencia anterior, sobre el logro de los actos de comprensión objetos de análisis, se ratifica al observar lo escrito en el ítem 2 (fig. 4.2), donde procede de forma "inversa", es decir, interpreta correctamente los símbolos dados en el enunciado, $f'(x)$ y $f'(-1)$, con los términos función derivada y derivada puntual.
- La inferencia no se ve alterada por la no respuesta a los ítems 1 (fig. 1.2) y 3 (fig. 2.2), donde el estudiante debe hacer uso de dichos actos de comprensión, pues en el primero la respuesta está condicionada por la simplificación de expresiones algebraicas, las cuales según análisis en 1a, no logra, y en la segunda, a un análisis previo que depende de la conversión entre registros de representación.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que el estudiante interioriza el proceso múltiple y sus productos, y encapsula en símbolos apropiados los términos función derivada y derivada en un punto, además de un resultado por reglas de derivación.

Teniendo en cuenta los análisis anteriores, podemos inferir, respecto al significado matemático de la derivada (plano 1), que el estudiante (54) alcanza el estado de comprensión C. Es capaz de expresar la fórmula contenida en la definición de derivada en términos del símbolo utilizado para la función original, reconociendo como funciona su regla de correspondencia, pero incapaz de modificar la expresión matemática interna en dicha definición y tiene problemas de asociación de significado, particularmente con el símbolo $\Delta x \to 0$, logra un reconocimiento global pero no local de la secuencia de operaciones en la definición, pero reconoce y discrimina los dos productos del proceso matemático subyacente en la definición, relacionándolos adecuadamente, además ha interiorizado el proceso múltiple y sus productos, y los ha encapsulado en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente, con los términos función derivada y derivada en un punto, mediado en ocasiones por reglas de derivación. Es así como considerando las exigencias en cada uno de los planos y las cuales se le plantean en las situaciones analizadas, el estudiante alcanza el estad de compresión C respecto del significado matemático de la derivada, en donde vacíos identificables en la apropiación del concepto soporte límite, del cual tiene un dominio algebraico, pero le falta la fundamentación matemática de más fondo, para la derivabilidad de una función en un punto y los problemas de asociación de significado ya descritos, junto con los problemas de conversiones entre registros de representación, no permite que alcance un estado de comprensión mayor del significado matemático de la definición.

Ejes de referencia 2a y 2b.

Se analizan en adelante los ítems relacionados con los planos que hacen parte de las versiones de derivada en contexto, comenzando por las respuestas del estudiante al ítem 6b (fig. 3.2), que confronta aspectos de los ejes 2a y 2b:

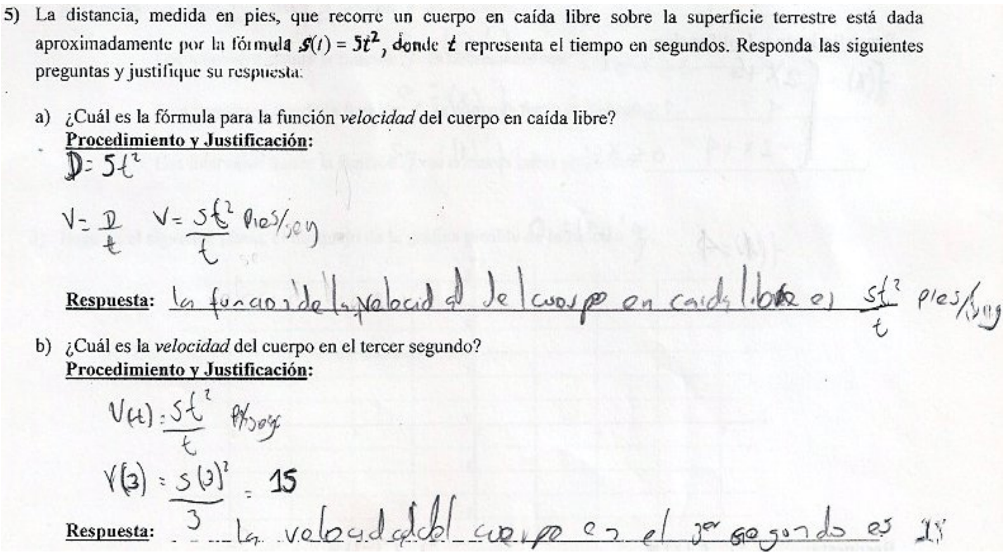
- El estudiante no da respuesta al ítem analizado y además, si se tiene en cuenta la respuesta al ítem 6a (fig. 3.2), se puede inferir que no logra los actos de comprensión objeto de análisis. Anotando que, aunque el estudiante reconoce y discrimina los dos productos de la definición (análisis 1b), y utiliza correctamente la derivada para calcular la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función (ítem 7, fig. 6.2), no es capaz de realizar las correspondencias a nivel geométrico de procesos y productos.

Conclusiones:

✓ El estudiante no logra los actos de comprensión agrupados en 2a y 2b, es decir, no reconoce la variación y el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente (su posición límite), resultados que son similares a los obtenidos en otras investigaciones, particularmente comentadas en el análisis de estos mismos ejes para el estudiante 24.

Eje de referencia 2c.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 6a, 6b, 7, 8, 9a y 9b que confrontan aspectos del eje 2c: Las figuras 4.2, 2.2, 5.2, 3.2, 6.2, 7.2 y 8.2 antes presentadas, muestran la producción del estudiante para dar respuestas a los ítems 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9. La figura 9.2 siguiente, muestra la respuesta del alumno a las preguntas de los ítems 5a y 5b.



5) La distancia, medida en pies, que recorre un cuerpo en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $s(t) = 5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos. Responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta:

a) ¿Cuál es la fórmula para la función *velocidad* del cuerpo en caída libre?
Procedimiento y Justificación:
$D = 5t^2$
$V = \frac{D}{t}$ $V = \frac{5t^2}{t}$ pies/seg
Respuesta: la función de la velocidad de el cuerpo en caída libre es $\frac{5t^2}{t}$ pies/seg

b) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo en el tercer segundo?
Procedimiento y Justificación:
$V(t) = \frac{5t^2}{t}$ pies/seg
$V(3) = \frac{5(3)^2}{3} = 15$
Respuesta: la velocidad del cuerpo en el 3er segundo es 15

Figura 9.2

Ítems 2, 3, 4, 6a, 6b y 7:

- El procedimiento seguido para dar respuesta al ítem 2 (fig. 4.2), no permite inferir si el estudiante logra identificar las correspondencias objeto de análisis, pues para calcular la derivada de la función f, dada gráficamente en este ítem, primero calcula su regla de correspondencia en forma analítica, siendo necesario el cálculo del valor de la pendiente para cada trozo de la función; al calcularlas, no se identifican con las derivadas en los intervalos correspondientes, mientras que en el ítem 7 (fig. 6.2) lo hace al calcular la derivada puntual y llamarle al número resultado, m, pero se infiere que lo hace desde una perspectiva operativa, pues es uno de los ejercicios a los que más hace referencia el texto.

- La inferencia se confirma al no responder adecuadamente las preguntas de los ítems 4 (fig. 5.2) y 6a (fig. 3.2) donde los actos de comprensión son requeridos. Mientras que el procedimiento seguido para dar respuesta al ítem 3 (fig. 2.2) y la no respuesta al ítem 6b (fig. 3.2) no permite realizar inferencias con relación al eje 2c objeto de análisis.

Ítems 5a, 5b y 8:

- Los procedimientos, fuera de contexto, seguidos para dar respuesta a los ítems 5a y 5b (fig. 9.2) y la selección de la respuesta correcta en el ítem 8 (fig. 7.2) sin una justificación clara, permiten ratificar las inferencias anteriores e inferir además que el estudiante no posee los actos de comprensión objeto de análisis con relación a la interpretación física del concepto derivada.

Ítems 9a y 9b (fig. 8.2):

- Aunque en el ítem 9b cambie la expresión dada en el registro verbal al analítico y calcule correctamente lo pedido, lo realizado en 9a y lo analizado hasta ahora en la versión física del concepto, permite inferir que se logra actuando desde una perspectiva operativa (memorísticamente) y por tal razón se confirma la inferencia hecha en el análisis para los ítems 5a, 5b y 8.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de comprensión agrupados en este eje, se puede concluir que identifica las correspondencias entre la pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada en dicho punto, cuando la pregunta se formula de manera equivalente al ítem 7, es decir que identifica las correspondencias descritas en 2c, cuando éstas están referidas a interpretaciones geométricas que involucran un la aplicación de reglas de derivación, no identificando dichas correspondencia referidas a interpretaciones físicas (velocidad instantánea y función velocidad), reconociendo que existe una leve identificación desde una perspectiva operativa cuando la función velocidad se expresa en términos de razones o ritmos de cambio.

Eje de referencia 2d.

Por último se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 7, 9a y 9b, en lo que concierne a los aspectos del eje 2d:

- En concordancia con lo analizado hasta el momento, el logro de los actos de comprensión asociados se alcanza desde una perspectiva operativa.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que ha encapsulado, en símbolos apropiados, los términos pendiente de la recta tangente en un punto y función de pendientes de rectas tangentes a una curva, desde una perspectiva operativa.

Teniendo en cuenta los análisis anteriores respecto a las versiones de derivada en contexto (plano 2), el estudiante (54) alcanza el estado de comprensión D, respecto de la apropiación del marco interpretativo, pues cuando logra, en algunas ocasiones, los actos de comprensión, lo hace desde una perspectiva operativa, en donde se observa el no reconocimiento de la versión física, cuando se habla en términos de velocidad, pues la asocia con fórmulas vistas en el bachillerato.

Como conclusión general, con lo analizado en todos los ítems, se puede afirmar que el estudiante 54 alcanza un estado de comprensión CD. No interpreta lo que sucede en el proceso de límite, lo que imposibilita el logro de los actos de comprensión agrupados en 1a, 2a y 2b. Tampoco es consciente de los puntos de no diferenciabilidad de una la función, y el logro de los actos de comprensión agrupados en 1b y 2c, se desplaza hacia una perspectiva operativa.

En relación con el conocimiento soporte, que el estudiante pone en juego para responder a las preguntas de los ítems, se puede inferir que: Reconoce en una situación el concepto de función, pero no identifica su dominio; esboza algunas funciones gráficamente y sabe como funciona la regla de correspondencia que la define analíticamente incluyendo funciones a trozos; no muestra un manejo de las operaciones con fracciones algebraicas, pero utiliza y aplica adecuadamente la fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta y ecuación de una recta, y existen vacíos en el concepto de límite, además de la asignación de significados incorrectos a los símbolos que éste utiliza.

5.3 Análisis de las producciones, alumno 24, representante del estado de comprensión DD.

	Plano 1			**Plano 2**			
	Eje 1a	**Eje 1b**	**Eje 1c**	**Eje 2a**	**Eje 2b**	**Eje 2c**	**Eje 2d**
Ítem 1	N(x)*	(x)*	(x)*				
Ítem 2		(x)*	(x)			P(x)*	P(x)
Ítem 3	N(x)*	(x)*	(x)			N(x_*i*)*	N(x)*
Ítem 4		(x)*	(x)			N(x_*i*)*	N(x)*
Ítem 5a						N(x_*ii(v)*)	N(x*(v)*)
Ítem 5b						N(x_*i(v)*)	N(x*(v)*)
Ítem 6a	-----	-----				-----	
Ítem 6b	N(x)*			N(x)*	N(x)*	N(x_*i*)*	
Ítem 6c	N(x_*g*)*	N(x_*n*)*					
Ítem 6d	N(x_*g*)*						
Ítem 7		(x)	(x)			P(x_*i*)*	P(x)
Ítem 8		N(x)*				N(x(*p-v*))	
Ítem 9a			(x)*			(x_*ii(r)*)*	(x)*
Ítem 9b			(x)*			(x*(r)*)*	(x)*

De acuerdo con la tabla anterior y los análisis sobre los cuales se sustenta, se puede inferir que el estudiante (24):

A] Respecto del significado matemático del concepto de derivada. Ha logrado el estado de comprensión D, que se puede caracterizar como un estado de comprensión algorítmico del significado matemático de la derivada, mediado por reglas de derivación. En efecto:

i) Con relación a los actos de compresión agrupados en el eje de referencia 1a, se puede concluir que no reconoce globalmente la definición de derivada como un límite de cociente de diferencias, pero la forma de proceder para dar respuesta a las preguntas de los ítems analizados no permite realizar inferencias respecto al reconocimiento local de la secuencia operativa de la definición. Sin embargo se puede observar que asocia la derivada con las reglas de cálculo.

ii) Respecto al conjunto de actos de comprensión que se agrupan en el eje de referencia 1b, reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, pero a través de la su relación con procesos de aplicación de reglas de derivación. Cabe resaltar que la no se identifican los puntos de no derivabilidad de una función.

iii) Referente a los actos de compresión agrupados en el eje de referencia 1c, se puede inferir que logra parcialmente los actos de compresión objetos de análisis, pues no interioriza el proceso múltiple en la definición de derivada, pero ha interiorizado términos relacionados con función derivada y derivada en un punto y los ha encapsulado en los símbolos apropiados.

B] Respecto de la apropiación de las versiones en contexto del concepto de derivada, alcanza el estado de comprensión D, es decir:

i) No logra los actos de comprensión agrupados en los planos de referencia 2a y 2b, es decir, no reconoce la variación y el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente (su posición límite), resultados que son similares a los obtenidos en otras investigaciones. (Orton, 1977)

ii) Con relación a los actos de compresión agrupados en el eje 2c, identifica parcialmente las correspondencias con la derivada puntual y la función derivada referidas a interpretaciones geométricas (Pendiente de la recta tangente en un punto y la función de pendientes de rectas tangentes), pero a través de la su relación con procesos de aplicación de reglas de derivación. Y no identifica dichas correspondencias cuando están referidas a interpretaciones físicas (velocidad instantánea y función velocidad).

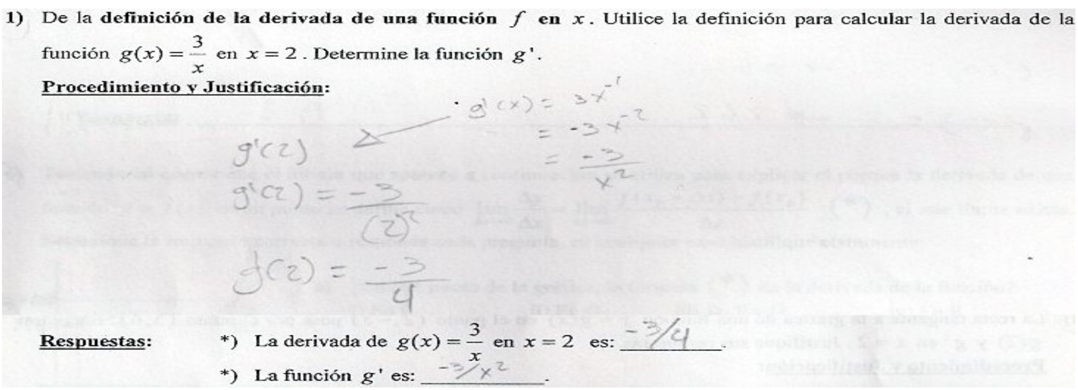
C] Con relación al conocimiento matemático de soporte, no se tendrían elementos suficientes para concluir sobre su apropiación, a excepción de la no interpretación de lo que sucede en el proceso de límite, ya que en sus respuestas no exhibe dicho conocimiento. Por lo tanto, el no alcanzar los actos de comprensión agrupados en los planos de referencia 1 y 2, no podría atribuirse a uno en particular, más bien a la forma como se deben articular para construir el concepto derivada.

EN CONCLUSION: El alumno alcanza el estado de comprensión caracterizado como DD. Es el estado de comprensión más bajo que se encuentra en la población de estudiantes cuyas producciones fueron analizadas, pues tiene éxito en algunas situaciones, a través de la relación con procesos de aplicación de reglas de derivación, por medio de los cuales logra relacionar los términos “pendiente” o “tangente” con los símbolos adecuados, pero sin una fundamentación conceptual, mientras que las correspondencias referidas a la versión física, no se logra cuando al estudiante se le habla en términos de “velocidad”, y logra un reconocimiento memorístico cuando se le habla en términos de “razón de cambio”.

Análisis específico respecto a cada eje de referencia.

Eje de referencia 1a.

Las producciones del estudiante para dar respuesta a los ítems 1, 3, 6a, 6b, 6c y 6d que confrontan este eje de referencia se muestran en las figuras 1.3, 2.3 y 3.3:



1) De la **definición de la derivada de una función** f **en** x. Utilice la definición para calcular la derivada de la función $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$. Determine la función g'.

Procedimiento y Justificación:

$g'(x) = 3x^{-1}$
$= -3x^{-2}$
$= \frac{-3}{x^2}$

$g'(2)$

$g'(2) = \frac{-3}{(2)^2}$

$g(2) = \frac{-3}{4}$

Respuestas: *) La derivada de $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$ es: $-3/4$.

*) La función g' es: $-3/x^2$.

Figura 1.3

3) Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x-4 & \text{si} \quad x\le 2\\ 4-2x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$. Determine, de ser posible, la función $\frac{dy}{dx}$ y los valores de $f'(0)$ y $f'(2)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$f'(x)=\begin{cases}2 & x\le 2\\ -2 & x>2\end{cases}$

$f'(0)=2 \to 0\le 2$

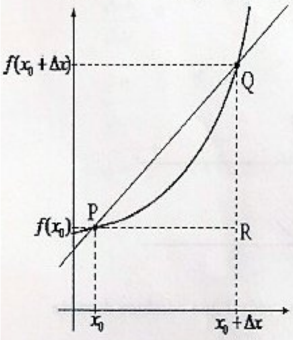
$f'(2)=2 \to 2\le 2$

Respuestas: *) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}2, & x\le 2\\ -2 & x>2\end{cases}$ *) $f'(0)=$ 2 y *) $f'(2)=$ 2.

Figura 2.3

6) Teniendo en cuenta que el dibujo que aparece a continuación se utiliza para explicar el porque la derivada de una función $y=f(x)$ en un punto se define como $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $(*)$, si este límite existe.

Seleccione la respuesta correcta o responda cada pregunta, en cualquier caso justifique claramente:



a) ¿En qué punto de la gráfica, la fórmula $(*)$ da la derivada de la función?

i) En P. ii) En Q. iii) En P y Q. iv) En R.

Justificación de la elección:

b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la expresión $(*)$ que define la derivada de una función en un punto? De su representación gráfica en el dibujo dado.

Respuesta y Justificación:

el límite del cociente sobre Δx de la recta de la función de $x+\Delta x$ y la función de x

c) ¿Cuándo Δx *tiende a* 0 qué pasa con el cociente $\Delta y/\Delta x$?

i) Se anula. ii) Es un número *infinitamente pequeño*.

iii) Tiene por límite un número. iv) Se indetermina.

Justificación de la elección:

definición de derivada

d) La derivada definida anteriormente, se obtiene si en el cociente $\Delta y/\Delta x$...

i) $\Delta x=0$. ii) $\Delta x\approx 0$.

iii) Δx *es un número infinitamente pequeño*. iv) Ninguno de los anteriore.

Justificación de la elección:

definición

Figura 3.3

Ítem 1 (fig. 1.3):

- El estudiante no responde la primera pregunta, es decir, no da la definición de la derivada de la función exigida, ni la utiliza para responder la pregunta 2.
- Al responder la pregunta 3, el estudiante calcula g' utilizando las reglas de derivación; procedimiento correcto puesto que en la pregunta no se pide calcular la derivada por un método particular. Pero utiliza este cálculo para responder la pregunta 2, sin importar que no sea por el método exigido.
- Esta forma de proceder permite inferir que el estudiante no tiene una definición personal de derivada, no hay por lo tanto un reconocimiento global de la definición como un límite de cociente de diferencias, pero no se pueden hacer inferencias respecto al reconocimiento local de la secuencia operativa de la definición. Se puede observar adicionalmente una actitud muy generalizada en los estudiantes, donde lo que importa es el resultado por encima de un método, aun cuando se pueda entender una pregunta se responde con lo que se sabe.

Ítem 3 (fig. 2.2)

- La estrategia de solución seguida es coherente con lo realizado en el ítem 1, pues determina la derivada de la función a trozos utilizando las reglas de derivación, procedimiento equivalente con el método 2 utilizado por el solucionador ideal, pero pasa por alto el problema de derivabilidad que tiene la función en $x = 2$. Así dicha estrategia no pone en juego los actos de comprensión objetos de análisis.

Ítems 6a, 6b, 6c y 6d (fig. 3.3):

- *El estudiante no responde al ítem 6a y no entiende la pregunta del ítem 6b pues confunde lo que significa la interpretación geométrica de la fórmula (*) con el cambio al registro verbal escrito*. Esto no permite hacer inferencias sobre el acto de comprensión que se confronta, simplemente no interpreta en la gráfica la formula aun dándosela pues no tiene la correspondencia geométrica de procesos y productos.
- En la respuesta al ítem 6c selecciona la respuesta correcta, pues al decirle que la formula da la derivada en un punto, se infiere que el análisis que hace es que el resultado del límite debe ser

un número, pero no siendo clara la justificación, se puede inferir que asocia la formula con la notación simbólica adecuada cuando la ve escrita y asociada con la derivada puntual, pero no es capaz de reproducirla como se puede observar en el análisis al ítem 1 (fig. 1.3).

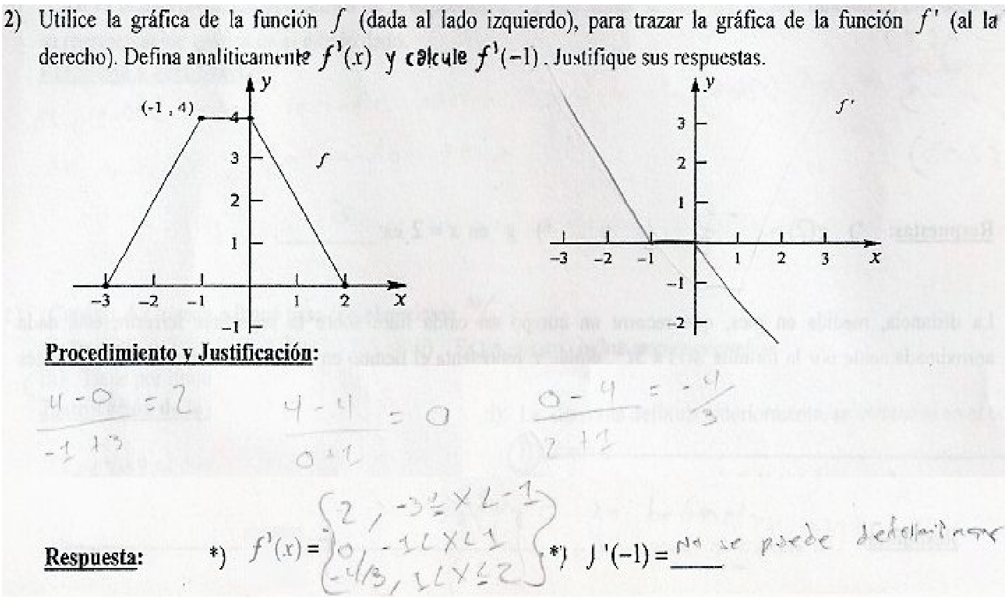
- En la respuesta al ítem 6d, selecciona la respuesta incorrecta, así que el proceso de aproximación no lo tiene claro, aunque distinga como un número el resultado de la derivada puntual, que es una de las incoherencias que se producen en las respuestas de los alumnos exhibiendo dificultades con el concepto de límite, lo cual está relacionado con lo dicho para el estudiante 6 en el análisis de este mismo ítem.

Conclusiones:

- ✓ El estudiante no reconoce globalmente la definición de derivada como un límite de cociente de diferencias, pero la forma de proceder para dar respuesta a las preguntas de los ítems analizados no permite realizar inferencias respecto al reconocimiento local de la secuencia operativa de la definición, mientras lo que si se puede observar es que lo asociado con la derivada son las reglas de cálculo.
- ✓ Con respecto al conocimiento soporte que el estudiante pone en juego al responder las preguntas de los ítems 1 y 3 se puede inferir que maneja exponentes negativos adecuadamente, reconoce la forma como se define una función mediante una expresión matemática variable y sabe como funciona la regla de correspondencia que la define incluyendo funciones a trozos, tiene dificultades con el concepto de límite y no realiza la respectiva interpretación geométrica en el ítem 6a, lo que significa la no identificación de lo que varía en la gráfica según las expresiones en la formula $(*)$.

Eje de referencia 1b.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 6a, 6c, 7 y 8 que confrontan aspectos del eje de referencia 1b: La producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 1, 3 y 6 se mostró respectivamente en las figuras 1.3, 2.3 y 3.3. La producción para los ítems 2, 4, 7 y 8 se muestra a continuación respectivamente en las figuras 4.3, 5.3, 6.3 y 7.3:



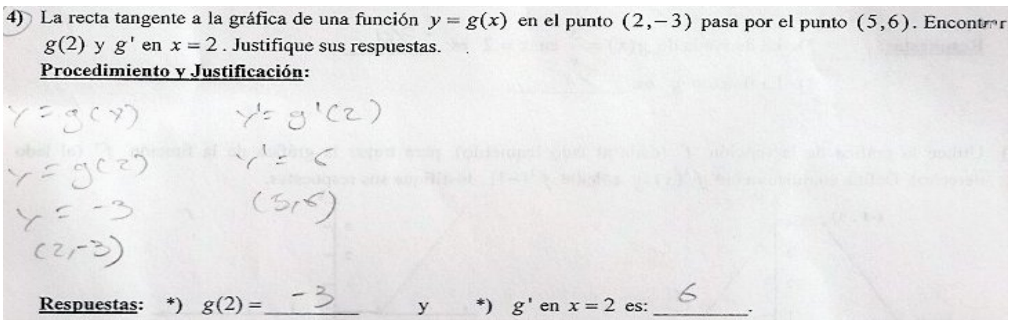
2) Utilice la gráfica de la función f (dada al lado izquierdo), para trazar la gráfica de la función f' (al la derecho). Defina analíticamente $f'(x)$ y calcule $f'(-1)$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$\frac{4-0}{-1+3} = 2$ $\qquad \frac{4-4}{0+1} = 0$ $\qquad \frac{0-4}{2+1} = \frac{-4}{3}$

Respuesta: *) $f'(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ -4/3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ *) $f'(-1) =$ No se puede determinar

Figura 4.3



4) La recta tangente a la gráfica de una función $y = g(x)$ en el punto $(2,-3)$ pasa por el punto $(5,6)$. Encontrar $g(2)$ y g' en $x = 2$. Justifique sus respuestas.

Procedimiento y Justificación:

$y = g(x)$ $\qquad y' = g'(2)$

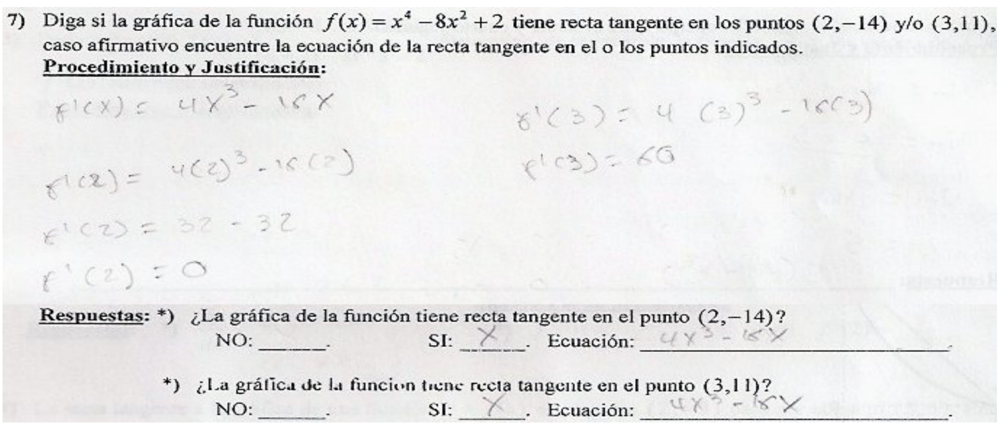
$y = g(2)$ $\qquad y' = 6$

$y = -3$ $\qquad (5,6)$

$(2,-3)$

Respuestas: *) $g(2) =$ -3 y *) g' en $x = 2$ es: 6.

Figura 5.3



7) Diga si la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ tiene recta tangente en los puntos $(2,-14)$ y/o $(3,11)$, caso afirmativo encuentre la ecuación de la recta tangente en el o los puntos indicados.

Procedimiento y Justificación:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$ $\qquad f'(3) = 4(3)^3 - 16(3)$

$f'(2) = 4(2)^3 - 16(2)$ $\qquad f'(3) = 60$

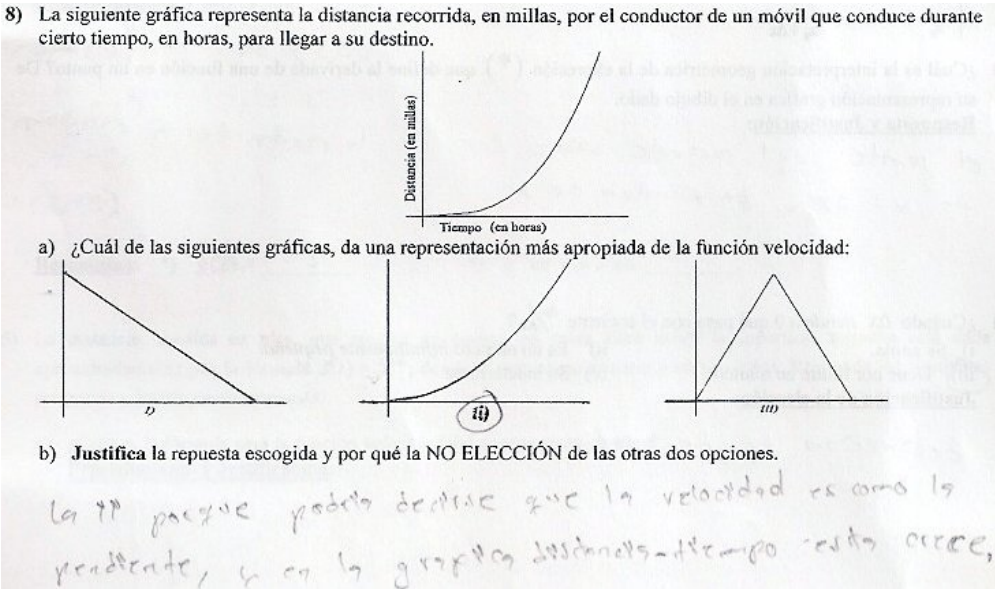
$f'(2) = 32 - 32$

$f'(2) = 0$

Respuestas: *) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(2,-14)$?
NO: ______. SI: X . Ecuación: $4x^3 - 16x$

*) ¿La gráfica de la función tiene recta tangente en el punto $(3,11)$?
NO: ______. SI: X . Ecuación: $4x^3 - 16x$

Figura 6.3


8) La siguiente gráfica representa la distancia recorrida, en millas, por el conductor de un móvil que conduce durante cierto tiempo, en horas, para llegar a su destino.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas, da una representación más apropiada de la función velocidad:

b) **Justifica** la repuesta escogida y por qué la NO ELECCIÓN de las otras dos opciones.

la ii porque podría decirse que la velocidad es como la pendiente, y en la gráfica distancia-tiempo esta crece,

Figura 7.3

Ítems 1, 2, 3, 4 y 7 (figs. 1.3, 4.3, 2.3, 5.3 y 6.3):

- Aunque el proceso de solución, seguido para responder la pregunta 2 del ítem 1, no sea el exigido y las respuestas a los ítems 2, 3, 4 y 7 no sean del todo correctas, el determinar, primero, en todos los ítems (excepto en 4), la función derivada y utilizarla para reemplazar el valor de *x*, dado para calcular la derivada puntual, permite inferir que el estudiante logra los actos de comprensión que son objetos de análisis, relacionados con reglas de derivación.
- Es importante señalar que en lo escrito por el estudiante en el ítem 3 y la gráfica realizada incorrectamente en el ítem 2, existe dificultad en la definición del dominio de la función derivada, pues el estudiante algunas veces no es consciente de la inexistencia de la derivada en algunos puntos del dominio de la función, sobre todo si no cuenta con la representación gráfica de la función, por ejemplo en el ítem 2 al representar analíticamente la función derivada se extraen del dominio 2 de los 4 valores donde la función original no es derivable y aunque esto no coincida con la gráfica de la derivada trazada, se infiere que dicho reconocimiento está mediado por los “puntos angulosos o picos” que posee la representación gráfica de la función original, ratificando dicha afirmación al responder que “ $f'(-1)$ no se puede determinar”, mientras en el ítem 3, donde se define analíticamente la función f y no

se le da la gráfica de la función original, responde que $f'(2)=2$ y en realidad dicha derivada puntual no existe.

Ítems 6a, 6c y 8:

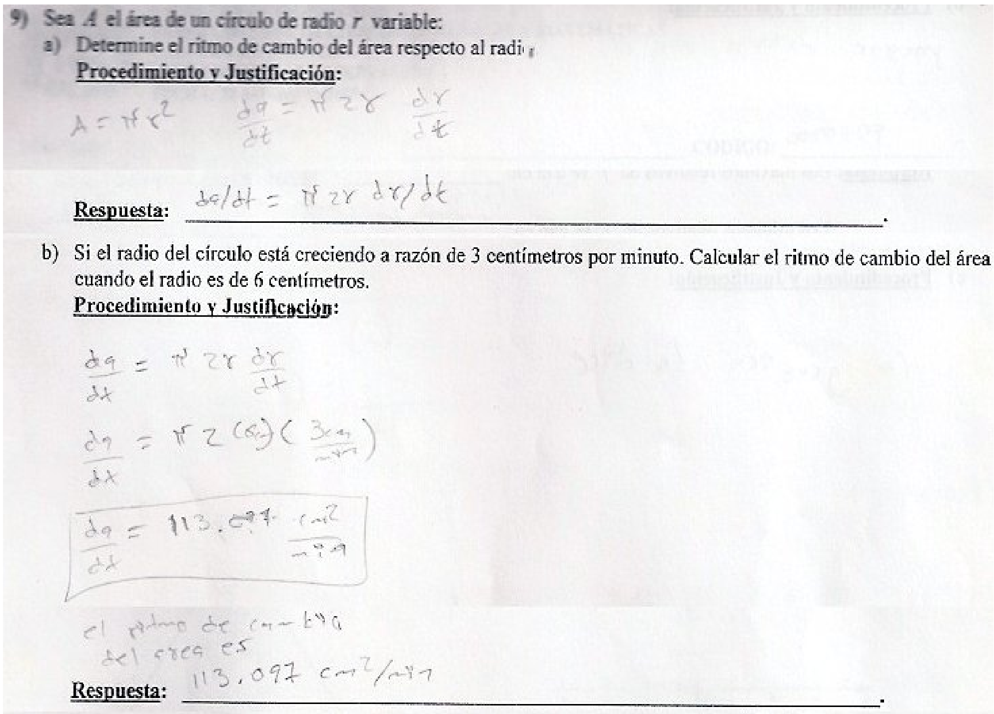
- Como se dijo anteriormente, para el ítem 6c (fig. 3.3) se selecciona la respuesta correcta, pues se analiza que por ser una derivada puntal, el cociente pedido tiene por límite un número, es decir, que se pude ratificar la inferencia del reconocimiento de la derivada puntual como un número, identificada en los ítems anteriores, teniendo en cuenta que el punto de alguna manera lo induce.
- A pesar de que el ítem 6a (fig. 3.3) no se responde y no se justifica claramente la selección correcta para el ítem 8 (fig. 7.3), las inferencias sobre el logro de los actos de comprensión objetos de análisis, relacionadas con reglas de derivación, no se ven afectadas, pues aunque el estudiante debe hacer uso de dichos actos de comprensión, estos no se manifiesten, pues este punto no es de corte operatorio, donde las respuestas están condicionadas por las conversiones entre registros de representación y la comprensión a priori de otros conceptos, en particular el concepto de límite en el ítem 6a, y el concepto de velocidad en el ítem 8.

Conclusiones:

- ✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este eje de referencia se puede concluir que el estudiante reconoce, discrimina y establece la relación entre los productos, función derivada y derivada puntual, del proceso matemático de la definición, pero a través de la su relación con procesos de aplicación de reglas de derivación. Cabe resaltar que en ciertas situaciones, existen dificultades en el reconocimiento de la derivabilidad de una función en un punto.
- ✓ El conocimiento soporte que el estudiante utiliza correctamente para la solución de las preguntas de los ítems analizados, sin incluir aquellos referidos en el análisis del plano 1a, son los siguientes: Reconocimiento del concepto de función, utilización y adecuada aplicación de la fórmula para el cálculo de pendientes de un segmento de recta. Mientras que falla el trazado de la gráfica de una función a trozos y no expresa la fórmula para el cálculo de la ecuación de una recta.

Eje de referencia 1c.

Ahora se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b, en lo que respecta a los aspectos del eje de referencia 1c: La figura 8.3 que aparece a continuación muestra la producción del estudiante para dar respuesta a los ítems 9a y 9b, las otras producciones se encuentran en figuras anteriores.



9) Sea A el área de un círculo de radio r variable:

a) Determine el ritmo de cambio del área respecto al radio

Procedimiento y Justificación:

$A = \pi r^2 \qquad \frac{da}{dt} = \pi 2r \frac{dr}{dt}$

Respuesta: da/dt = π 2r dr/dt.

b) Si el radio del círculo está creciendo a razón de 3 centímetros por minuto. Calcular el ritmo de cambio del área cuando el radio es de 6 centímetros.

Procedimiento y Justificación:

$\frac{da}{dt} = \pi 2r \frac{dr}{dt}$

$\frac{da}{dt} = \pi 2 (6cm)\left(\frac{3cm}{min}\right)$

$\boxed{\frac{da}{dt} = 113.097 \frac{cm^2}{min}}$

el ritmo de cambio del area es

Respuesta: 113,097 cm²/min.

Figura 8.3

Ítems 1, 2, 3, 4, 7, 9a y 9b:

- Según el análisis para el eje 1a, el estudiante no cuenta con la definición de derivada como límite de cociente de diferencias, así que no ha interiorizado dicho proceso, pero a pesar de esto, en el ítem 1 (fig. 1.3) cuando se le pide calcular la derivada puntual en los términos "calcular la derivada de la función $g(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 2$ y determinar la función g'", el estudiante las representa respectivamente como $g'(2)$ y $g'(x)$, esto permite inferir que el estudiante lo que ha interiorizado son términos relacionados con el mismo objeto, les ha asignado un proceso de cálculo y los ha encapsulado en los símbolos apropiados.

- La inferencia anterior se reafirma al proceder de la misma forma cuando se escriben formas equivalentes para la función derivada; tal es el caso de la respuesta al ítem 3 (fig. 2.3) en la cual se le pide determinar la función $\frac{dy}{dx}$ y el estudiante escribe $f'(x)$, en el procedimiento seguido para dar respuesta al ítem 7 (fig. 6.3) y en la interpretación de expresiones dadas en lenguaje verbal en el ítem 9b (fig. 8.3) donde al hablarle en términos de ritmo de cambio del área y razón de cambio por minuto, escribe respectivamente $\frac{da}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$, aunque esto último se infiere que se hace memorísticamente, pues en la interpretación del ritmo de cambio del área respecto al radio en el ítem 9a (fig. 8.3), escribe $\frac{da}{dt}$, sin reconocer que la variable independiente es r. Además interpreta símbolos que representan la función derivada y derivada puntual correctamente en el enunciado del ítem 2 (fig. 4.3).

Conclusiones:

✓ Lo analizado en los puntos anteriores permite inferir que el estudiante logra parcialmente los actos de compresión objetos de análisis, pues no interioriza el proceso múltiple en la definición de derivada, pero ha interiorizado términos relacionados con función derivada y derivada en un punto y los ha encapsulado en los símbolos apropiados.

En general, con los análisis de los planos 1a, 1b y 1c, podemos inferir respecto al significado matemático de la derivada que, el estudiante (24) asocia la derivada de una función con procesos de cálculo (reglas de derivación), no expresa la fórmula contenida en la definición del concepto derivada y por lo tanto no reconoce la definición como un límite de cociente de diferencias, reconoce tipos de funciones y calcula correctamente las imágenes de valores conocida la regla de correspondencia que la define, identifica y discrimina, como objetos, los dos productos del proceso matemático subyacente en la definición (sin que esto quiera decir que reconoce dicho proceso), relacionándolos adecuadamente, además no ha interiorizado dicho proceso múltiple, pero si términos relacionados con función derivada y derivada en un punto y los ha encapsulado en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente, con los términos función derivada y derivada en un punto, tiene dificultades en determinar el dominio de una función derivada, particularmente si la función original se define solamente de forma analítica. Es así como considerando las exigencias en cada uno de los planos y las cuales se le plantean en las situaciones analizadas, el estudiante alcanza el estado de comprensión D, respecto del significado matemático de la derivada.

Ejes de referencia 2a y 2b.

Se analizan en adelante los ítems relacionados con los planos que hacen parte de las versiones de derivada en contexto, comenzando por las respuestas del estudiante al ítem 6b (fig. 3.3), que confronta aspectos de los planos de referencia 2a y 2b:

- Como se dijo anteriormente, el estudiante no interpreta geométricamente la fórmula (*), sino que traduce al registro verbal escrito algunos de sus componentes, lo que permite inferir que el alumno no logra los actos de compresión objetos de análisis.

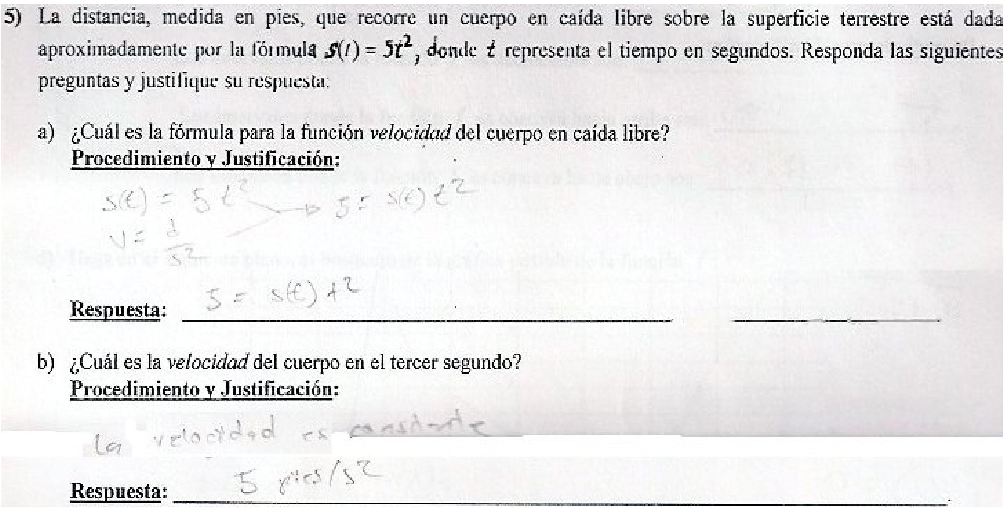
Conclusiones:

✓ El estudiante no logra los actos de comprensión agrupados en los planos de referencia 2a y 2b, es decir, no reconoce la variación y el proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente (su posición límite), resultados que son similares a los obtenidos en otras investigaciones:

> "…se han obtenido evidencias de lo difícil que es comprender para los estudiantes de que por medio de una sucesión de secantes se obtenga realmente la tangente." (Orton 1977, citado en Dolores, C., 1998)

Eje de referencia 2c.

Se analizan a continuación las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 6a, 6b, 7, 8, 9a y 9b que confrontan aspectos del eje de referencia 2c: Las figuras 4.3, 2.3, 5.3, 3.3, 6.3, 7.3 y 8.3 antes presentadas, muestran la producción del estudiante para dar respuestas a las situaciones 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9 respectivamente. La figura 9.3 siguiente, muestra la respuesta del alumno a las preguntas de los ítems 5a y 5b.



5) La distancia, medida en pies, que recorre un cuerpo en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $s(t) = 5t^2$, donde t representa el tiempo en segundos. Responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta:

a) ¿Cuál es la fórmula para la función *velocidad* del cuerpo en caída libre?
Procedimiento y Justificación:
$s(t) = 5t^2 \rightarrow 5 = s(t)\,t^2$
$v = \frac{d}{s^2}$
Respuesta: $5 = s(t)\,t^2$

b) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo en el tercer segundo?
Procedimiento y Justificación:
la velocidad es constante
Respuesta: 5 pies/s^2

Figura 9.3

Ítems 2, 3, 4, 6a, 6b y 7:

- En la respuesta al ítem 2 (fig. 4.3), el estudiante sigue en principio un procedimiento equivalente al método 1 del solucionador ideal, pues define analíticamente la función derivada utilizando el cálculo del valor de la pendiente para cada trozo de la función f dada gráficamente, pero en los puntos donde la función no tiene una recta tangente, dicha correspondencia a veces no se identifica, sobre todo en los extremos del intervalo, pues en puntos interiores donde esto pasa, la representación gráfica de f parece fundamental para dar la respuesta correcta (ver análisis plano de referencia 1b), además es incapaz de trazar la gráfica de la función derivada, lo que permite inferir que el estudiante identifica parcialmente las correspondencias descritas en el plano de referencia objeto de análisis y que las dificultades con el dominio de la función derivada y las incongruencias entre las distintas representaciones se pueden atribuir de un lado a los vacíos en el significado matemático de la derivada descrito en los análisis del plano de referencia 1, en particular derivabilidad lateral (o concepto de límite) y del otro a las dificultades en representar gráficamente funciones constantes y a trozos.

- La inferencia anterior se ratifica al observar los procedimientos para dar respuesta a los ítems 4 (fig. 5.3) y 7 (fig. 6.3), pues en el ítem 4 identifica que hay relación entre la recta tangente y la derivada puntual pero es incapaz de reconocerla claramente, mientras que en el ítem 7, parece proceder de forma memorística, pues deriva y calcula las derivadas puntuales correctamente pero no responde las preguntas planteadas.
- La inferencia sigue siendo válida a pesar de no utilizar los actos de comprensión para responder a los ítems 3 (fig. 2.3) y 6a, 6b (fig. 3.3), pues lo que sucede es que en el ítem 3, el estudiante inicia el cálculo de la derivada utilizando reglas de derivación al observar que la función dada está definida analíticamente y esto no permite su énfasis en la derivabilidad de la función. Mientras que en los ítems 6a y 6b, dichos actos deben pasar por el reconocimiento de la aproximación por rectas secantes a la recta tangente, que tampoco logra (ver análisis eje de referencia 1b).

Ítems 5a, 5b, 8, 9a y 9b:

- Observando los procedimientos totalmente descontextualizados para dar respuesta a los ítems 5a y 5b (fig. 9.3), la justificación incompleta y falta de fundamentación para la selección correcta en el ítem 8 (fig. 7.3), y los procedimientos memorísticos en la resolución de los ítems 9a y 9b (fig. 8.3) como se comentó antes en el análisis relacionado con el plano de referencia 1c, se infiere que el estudiante no identifica las correspondencias, función velocidad con función derivada y velocidad en un instante con derivada puntual. Reconociendo que existe una leve identificación cuando la función velocidad se expresa en términos de razones o ritmos de cambio.

Conclusiones:

✓ Con relación a los actos de compresión agrupados en este plano de referencia se puede concluir que el estudiante identifica parcialmente las correspondencias con la derivada puntual y la función derivada referidas a interpretaciones geométricas (Pendiente de la recta tangente en un punto y la función de pendientes de rectas tangentes), pero a través de la su relación con procesos de aplicación de reglas de derivación, sin identificar los puntos en donde una función no es derivable. Y no identifica dichas correspondencias cuando están referidas a interpretaciones físicas (velocidad instantánea y función velocidad).

Eje de referencia 2d.

Aquí se analizan las respuestas del estudiante a los ítems 2, 3, 4, 5a, 5b, 7, 9a y 9b, en lo que concierne a los aspectos del eje de referencia 2d:

Ítems 2, 3, 4 y 7:

- Como se dijo en el análisis del eje de referencia 1c, el estudiante no cuenta con la definición de derivada como límite de cociente de diferencias, así que no ha interiorizado el proceso múltiplo en dicha definición, pero a pesar de esto, relaciona de alguna manera (se infiere memorísticamente) los términos “pendiente” o “tangente” con los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$, esto se puede observar en el proceso de resolución del ítem 2 (fig. 4.3) cuando obtiene cada trozo de la función derivada, calculando las pendientes de cada uno de los segmentos que hacen parte de la gráfica de la función original, pero no así en la resolución del ítem 4 (fig. 5.3), donde al leer que la recta tangente pasa por el punto $(5,6)$, asocia la ordenada de dicho punto, con la derivada puntual pedida, $g'(2)$, y no es coherente con el proceso del ítem 2. Lo que permite inferir que el estudiante logra parcialmente los actos de compresión objetos de análisis referidos a la versión geométrica de derivada, pues relaciona los términos “pendiente” o “tangente” con los símbolos ya descritos, pero mediados por procesos de aplicación de reglas de derivación, que le permiten tener éxito en algunas situaciones.
- La inferencia se ratifica al observar el proceso de resolución del ítem 7 (fig. 6.3) donde calcula derivadas puntuales al leer en el enunciado la oración recta tangente, pero no saber qué hacer con dichos resultados. Mientras que el proceso de resolución seguido para responder a las preguntas del ítem 3 no permite realizar inferencias con relación al plano objeto de análisis.

Ítems 5a, 5b, 9a y 9b:

- Como se dijo en el análisis del plano de referencia 2c, los procedimientos totalmente descontextualizados para dar respuesta a los ítems 5a y 5b (fig. 9.3), y los procedimientos memorísticos en la resolución de los ítems 9a y 9b (fig. 8.3), permiten inferir que el estudiante identifica parcialmente las correspondencias objetos de análisis referidas a la versión física, pues no se logra cuando al estudiante se le habla en términos de velocidad (fig. 9.3), y se logra un reconocimiento, a través de procesos de aplicación de reglas de derivación, cuando se le habla en términos de ritmos de cambio (fig. 8.3).

Conclusiones:

✓ El estudiante logra con demasiadas restricciones los actos de compresión objetos de análisis referidos a la versión geométrica de derivada, pues tiene éxito en algunas situaciones, a través de la relación con procesos de aplicación de reglas de derivación, en las cuales logra relacionar los términos “pendiente” o “tangente” con los símbolos adecuados, pero sin una fundamentación conceptual, mientras que las correspondencias referidas a la versión física, no se logra cuando al estudiante se le habla en términos de “velocidad”, y de nuevo logra un reconocimiento memorístico cuando se le habla en términos de “razón de cambio”.

Teniendo en cuenta los análisis anteriores respecto a las versiones de derivada en contexto (plano 2), el estudiante (24) alcanza el estado de comprensión D caracterizado antes. Posee un conocimiento con muchas restricciones de la versión geométrica (mediada por reglas de derivación) y un conocimiento casi nulo de la versión física. En particular las restricciones de la versión geométrica pasan por el no reconocimiento del proceso de aproximación por rectas secantes a la recta tangente y el reconocimiento en funciones dadas gráficamente y no así analíticamente, algunos valores en donde una función no es diferenciable por la no existencia de una recta tangente. Y en la versión física lo único que logra identificar, aunque memorísticamente, es que cuando se le habla de algún ritmo o razón de cambio, se debe interpretar como una derivada y no así para velocidades.

Como conclusión general, con lo analizado en todos los ítems, se puede afirmar que el estudiante alcanza el estado de comprensión DD, caracterizado anteriormente, pues, tanto el significado matemático del concepto derivada, como el conocimiento de las versiones en contexto no son claros para el estudiante, en muchos casos debido a la no apropiación de los conceptos soporte ya descritos, pero el logro parcial de algunos actos de comprensión, mediados por un proceso de cálculo a través de reglas de derivación, le permiten tener relativo éxito en la resolución de algunas situaciones.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con relación al objetivo 1:

1.1) Utilizando el concepto de Estructura Teórico Conceptual (Ver marco teórico), la tesis caracterizó (cap. 4) el saber matemático, que puede ser tomado como referente para caracterizar un estado básico deseable de comprensión de derivada, para estudiantes de ingeniería, según la propuesta de enseñanza del texto Larson para dicho concepto. Y, consecuentemente, para determinar estados de comprensión que alcanzan estudiantes que toman un primer curso de cálculo, con el texto mencionado, respecto del mismo concepto.

1.2) La identificación de los actos de comprensión, entendidos como demandas cognitivas que la apropiación de dicha ETC de referencia le plantea al alumno, estructurados según planos de referencia para la comprensión, permitió caracterizar, un estado deseable de comprensión básica, respecto del concepto de derivada, para estudiantes de ingeniería, al término de un primer curso de cálculo.(ver pp. 43-45).

1.3) De igual manera, la identificación de subconjuntos en tal conjunto de actos de comprensión, estructurados según ejes de referencia para la comprensión, permitió caracterizar, posibles estados de comprensión respecto del concepto de derivada. (Cap. 6).

Con relación al objetivo 2

2.1) Se construyó un instrumento de observación, verificando su pertinencia, constituido por 9 situaciones problemáticas, que toman como referencia, para su confrontación, los actos de comprensión que se identifican en la comprensión básica de derivada. La resolución de estas situaciones provee indicadores que permiten inferir, a partir de las respuestas del alumno, si tales alumnos han alcanzado los actos de comprensión que son confrontados. (Cap. 5)

2.2) La aplicación del instrumento anterior y la confrontación de resultados respecto de los 16 estados posibles de comprensión identificados, permitió constatar, que en la población de estudiantes, objeto de estudio, sólo se tipificaron tres de tales estados de comprensión, BC, CD y DD, todos ellos distantes del estado deseable de comprensión AA. (Cap. 6).

Los pares ordenados de letras mediante los cuales se representan los estados de comprensión, respecto del concepto de derivada, implica que tales estados se estructuran con base en estados de comprensión relativos a los dos planos de referencia que se prescriben para caracterizar la comprensión de un concepto matemático. En el caso que nos ocupa, la primera letra se refiere al estado de comprensión asociado con el significado matemático de la derivada y, la segunda letra, se refiere al estado de comprensión asociado con su marco interpretativo. (Pp. 84-89)

2.3) Los estados de comprensión alcanzados fueron BC, (Cap.6, pp. 93-94) que caracteriza el nivel más alto de comprensión en la población de estudiantes objeto de estudio. Este nivel fue alcanzado por el 13.12% de dicha población (8 de los 61 estudiantes). El estado de comprensión CD (pp. 94-95) que caracteriza el segundo nivel ce comprensión en la población estudiada, fue alcanzado por el 40.98% de dicha población (25 estudiantes). Y el estado de comprensión DD (pp. 95-96) que caracteriza el nivel de comprensión más bajo en la población de estudiantes, fue alcanzado por el 45.90% (28 estudiantes).

2.4) Se puede destacar, finalmente, como un resultado importante de la tesis, la metodología que se elabora para caracterizar un estado de comprensión básica de derivada, y caracterizar estados de comprensión que alcanzan estudiantes en torno a una propuesta de enseñanza. Esta metodología es extensible al estudio de otros conceptos matemáticos importantes del cálculo.

Conclusiones generales

1) La comprensión que alcanzan los estudiantes de ingeniería de la Javeriana-Cali, después de tomar un primer curso de cálculo, presenta deficiencias agudas. Tales deficiencias se pueden identificar cuando se comparan, los estados de comprensión BC, CD y DD, que tipifican los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, con el estado AA (cap. 6), que tipifica el estado de comprensión deseable, según la propuesta de enseñanza que se agencia en el texto de Larson et al. (2006).

2) De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que el 87% de los estudiantes de la población objeto de estudio (estados CD y DD) alcanzan una comprensión de derivada muy deficiente e inapropiada para el estudio del cálculo, tanto en lo que respecta a la comprensión del significado matemático de la derivada como a la apropiación de su marco interpretativo. Se puede afirmar, que en esta población mayoritaria, los estudiantes no tienen tiene una interpretación conceptual de derivada, su identificación es operacional, es decir, alcanzan la identificación de función derivada y derivada puntual como cálculo de f' y $f'(a)$ mediante reglas de derivación.

   Para los estudiantes que alcanzan el estado BC (13 % de la población) el nivel de comprensión alcanzado es menos crítico, especialmente en lo que respecta a la comprensión del significado matemático de derivada, pero presenta deficiencias graves en lo relativo a la apropiación del marco interpretativo.

3) Las mayores deficiencias se presentan en los actos de comprensión asociados con la apropiación del marco interpretativo. Estas deficiencias se refieren tanto a la versión geométrica de pendiente de la recta tangente, como a la versión física de velocidad y a la versión general de ritmo de cambio.

4) La comprensión de los alumnos, incluyendo los que alcanzan el estado de comprensión más alto BC, en lo que concierne al marco interpretativo, prácticamente se restringe a la

apropiación parcial de los actos de comprensión que se agrupan en 2c)[12]. Esta comprensión es más parcial y deficiente a medida que nos desplazamos del estado BC a los estados CD y DD. En lo que respecta al marco interpretativo, en la comprensión de todos los estudiantes, están ausentes los actos de comprensión que se agrupan en 2a) y 2b) y que conciernen, respectivamente, a la identificación y discriminación de los procesos geométricos de aproximación (recta secante a recta tangente; pendiente de la secante a pendiente de la tangente) y a la identificación de la correspondencia existente entre estos procesos geométricos de aproximación y los procesos analíticos de límite del cociente incremental, que define derivada puntual.

5) En lo que concierne a la apropiación del significado matemático de la derivada, sólo los estudiantes que alcanzan el estado de comprensión BC (13% de la población objeto de estudio) (por lo de la letra B) exhiben un nivel de comprensión cercano al estado AA (por lo de la primera letra A) que se postula como deseado (pp. 91-93). Las producciones de estos alumnos permiten inferir que han alcanzado los actos de comprensión que se agrupan en 1b)[13], 1c)[14] y en gran medida los que se agrupan en 1a)[15]. En este último eje de referencia para la comprensión, el restrictivo de la comprensión, se refiere al significado matemático del concepto de límite. A pesar de que los alumnos que alcanzan este estado de comprensión disponen de una definición personal de derivada, estable, bien adaptada matemáticamente y coherente, es decir que la aplican con éxito en diferentes situaciones, incluyendo la identificación de puntos de indefinición de la función derivada, cuando esta pide ser calculada, el estudiante no tiene claro el significado matemático del proceso aproximativo mediante el cual, el cociente incremental, define el valor de la derivada, cuando existe.

---

[12] Identificar la correspondencia entre: (i) *La pendiente de la recta tangente* en un punto (o velocidad instantánea, ritmo de cambio) con *la derivada* en dicho punto, y (ii) *La función de pendientes de rectas tangentes* a la curva (o función velocidad, función ritmo de cambio) con *la función derivada*)

[13] Reconocer y discriminar, los dos productos del proceso matemático de la definición y establecer la relación entre ellos. *Una función* (la función derivada.) y *un número* (el valor de la derivada puntual o valor de la función derivada en un punto)

[14] Interiorizar el proceso múltiple y sus productos, y encapsular en los símbolos $f'(x)$ y $f'(c)$ o equivalentes, articuladamente, con los términos función derivada y derivada en un punto.

[15] Reconocer (local y globalmente) en la representación analítica de la definición, la secuencia operativa que resulta de la composición de varias operaciones.

6) El vacío anterior, relacionado con la comprensión del significado matemático del concepto de límite, que aparece como un concepto soporte central para la comprensión del significado matemático de la derivada, está presente no sólo en los estudiantes que alcanzan el estado de comprensión BC, sino en todos los alumnos que tomaron la prueba. El punto señala pues una deficiencia importante en la formación previa de los alumnos.

   La forma como los estudiantes responden los ítems 6c, 6d, asociados con la confrontación de este acto de comprensión, expresa una conexión con el obstáculo epistemológico que enfrento Newton con el problema de la razón última (ver Grattan-Guinness, 1980, pp.116-118) y que, sin duda, en aquel momento tenía que ver con la ausencia de un concepto de límite fundamentado matemáticamente.

7) En los estudiantes que alcanzan los otros estados CD (por C) y DD, (por la primera D), la comprensión del significado matemático de derivada se torna bastante precario y tiende a restringirse a los actos de comprensión que se agrupan en 1b (discriminación de los productos de la definición de derivada) pero desde una perspectiva operacional. Aunque en el estado CD (por C), algunos alumnos alcanzan a exhibir una definición personal, bien adaptada, su grado de coherencia presenta vacíos que debilitan la apropiación del significado matemático de la definición de derivada.

   En este sentido, un punto que establece una diferencia importante es que el estudiante, cuando se le solicita calcular una función derivada, pueda identificar, de acuerdo con las características de la función, en qué puntos de su dominio la función derivada no está definida, es decir pueda calcular exitosamente la función derivada. El éxito en la resolución de este tipo de problema está dirigido por el acto de comprensión asociado con la identificación de la condición de derivabilidad en la definición de función derivada y la toma de conciencia de que esta derivabilidad no se obtiene necesariamente mediante las reglas de derivación sino que puede requerir la aplicación misma de la definición de derivada. Cálculo que, a su vez, puede exigir de una apropiación relativamente fina del concepto de límite. Los estudiantes que alcanzan los estados de comprensión, CD y DD no apropian este acto de comprensión, que si lo apropian los alumnos que alcanzan el estado de comprensión BC

8) Desde esta perspectiva se podría concluir que en lo concierne al significado matemático, la falencia más notable entre los estudiantes está relacionada con la apropiación de los actos que se agrupan en 1a) y que se revelan en el hecho de que el 78% de los alumnos no exhibe una definición personal estable, bien adaptada matemáticamente y coherente.

   Entre los problemas para lograr una buena adaptación matemática en lo que concierne a la definición personal, se destaca la del vació en la apropiación de la condición de derivabilidad que se refleja en los problemas de identificar puntos no derivables.

   En este contexto la falta de una debida apropiación del concepto de límite emerge como el concepto soporte que determina mayores implicaciones negativas en la comprensión del concepto de derivada.

9) Se puede concluir finalmente, que el método que se ha puesto en juego para caracterizar un estado básico de comprensión de un concepto y determinar estados de comprensión que alcanzan los alumnos en el contexto de una propuesta de enseñanza determinada, puede ser una ayuda importante en la prevención y superación de obstáculos cognitivos de tipo didáctico en la enseñanza del concepto. Hay obstáculos didácticos que pueden provenir de que ciertos actos de comprensión no sean puestos como referentes de aprendizaje en la propuesta de enseñanza. Un ejemplo viene al caso. Planteamos que la apropiación de los actos de comprensión que se agrupan en las líneas de referencia 2a y 2b permitiría superar el obstáculo de “obtener la tangente por medio de una sucesión de secantes”. (Orton, 1977; citado en Dolores, 1998).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, J. (1998). *Mapas conceptuales matemáticos*. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados. Cali. Colombia.

Álvarez, J. (2007). *Consideraciones metodológicas en torno a la aplicación del concepto de estructura teórico conceptual en diferentes investigaciones didácticas*. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados. Cali. Colombia.

Álvarez, J. (2009). *Estructuras teórico conceptuales y comprensión conceptual en matemáticas*. Documento de trabajo. Accesible a investigadores interesados. Cali. Colombia.

Álvarez, J., & Delgado, C. (2001). *La problemática Tall-Vinner. Reformulación operativa en el Caso de función*. [Preprint. Departamento de Matemáticas. Centro de estudios avanzados en Psicología, Cognición y Cultura]. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Gómez, P. (ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática, pp. 97-140. Empresa docente & Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá. Colombia.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). *The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate.* Journal of Mathematics Behavior. Vol. 16, pp. 399-430.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad : introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en didactique des mathematiques. Vol. 4. No. 2, pp. 165-198. Traducción al español: Delgado, C. Universidad del Valle, documento interno, 1993.

Cantoral, R. (1988). *Historia del Cálculo y su Enseñanza: del trazado de tangentes al concepto de derivada*. Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa. Guatemala C. A.

Cornu, B. (1991). *Limits*. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking, pp. 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Delgado, C. (1998). *Estudio Microgenético de Esquemas Conceptuales Asociados a los Conceptos de Continuidad y Límite en Universitarios de Primer Curso*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Dolores, C. (1989). *Algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de derivada*. Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa. San José Costa Rica C.A.

Dolores, C. (1998). *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial.* Capítulo 13 del libro Investigaciones en Matemática Educativa II. Fernando Hitt (Editor). Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 257-272. México D. F.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). *Research in Calculus Learning: Understanding Limits, Derivates, and Integral*. In Kaput, J., and Dubinsky, E. (Eds.). Research issues in undergraduate

Mathematics Learning, MAA notes 33, pp. 31-45. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Grattan-Guiness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910, una introducción histórica*. Alianza Editorial. Madrid. España.

Hoyles, C., & Noss, R. (1986). *Scaling a mountain: a study of the use, in LOGO environmente.* European Journal of Psychology of Education. Vol. 1. No. 2.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2006). *Cálculo.* (8ª Ed). México, D.F: Mc Graw Gill.

Novak, J., & Gowin, D. (1986). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona. España. Ediciones Martínez Roca.

Orton, A. (1977). *Chords, secants, tangents and elemntary calculus*. Mathematics Teaching núm. 78, pp. 48-49.

Sfard, A. (1991). *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*. Educational Studies in Mathematics. Vol 22, pp. 1-32. Kluwer Academic Publisher. Traducción al español: Delgado C., Universidad del Valle, documento interno, 1993.

Sierpinska, A. (1985). *Obstacles Epistemologiques Relatifs a la Notion de limite.* Recherches en Didactiques des Mathématique. Vol. 6. No. 1, pp. 5-67.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function , En E. DUBINSKI and G.HAREL (eds.), *The Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58. Mathematical Association of America, Washington, DC. Traducción al castellano: Sobre la comprensión de la noción de función. Delgado C., Universidad del Valle, documento interno, 1999.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with reference particular to limit and continuity.* Centro de investigación en Educación Matemática. Universidad de Warwick. Centro de Enseñanza de la ciencia. Universidad de Hebrew.

Tall, D., & Vinner, S. (1995). *La problemática Tall - Vinner* (Alvarez, J. y Delgado, C. 2001). *Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus* (Thompson, P. Educational studies in mathematics. Vol. 26, 1994, pp 229-274).

Tall, D., & Giraldo, V. (2002). *Conflitos Teórico-Computacionais e a Formaçao da Imagem Conceitual de Derivada*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. University of Warwick.

Vinner, S. (1983). *Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function.* The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 14, pp. 293-305.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. Advanced Mathematical thinking. Edited by David Tall. Kluwer Academic Publishers.

Zandieth, M. (2000). *A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derívate*. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education. Vol. 8, pp. 103-127. Providence, USA: American Mathematical Society.