Encuentro Colombiano de matemática Educativa

La resolución de problemas y la investigación sobre el aprendizaje de la teoría de números[47]

Deissy Narváez Ortiz(dmnarvaez@gmail.com)
Juan Cadena Nieto (calvin_55@hotmail.com)
Edimer Santos Barón(pipos_91@yahoo.com.mx)

Resumen

Presentamos aquí una experiencia de aula en la que proponemos una intervención pedagógica para la construcción de conocimiento por medio de resolución de problemas. Inicialmente describimos la intervención pedagógica, a partir de los roles de quienes actúan en ella, posteriormente presentamos la síntesis de una revisión bibliográfica en la que abordamos dos preguntas: ¿Cuál es el lugar de la teoría de números en la construcción de matemáticas (puras y escolares) y su papel en la explicación de situaciones reales?, ¿Qué situaciones problema propician aprendizaje de teoría de números?. Finalmente presentamos el proyecto de investigación que se adelanta en LEBEM.

Introducción

La resolución de problemas como forma de promover el aprendizaje en el aula de matemáticas, es una propuesta en la que distintos investigadores y teóricos de la educación matemática han insistido desde hace ya algunas décadas (Polya, 1945; S Lesh y Doerr, 2003; Schoenfeld, 1985; Kilpatrick, 1988; Bosch & Gascón, 2004; Santos, 2007, entre otros). En 1998, el MEN, desde la propuesta de los Lineamientos Curriculares, incluyó dentro de la estructura curricular la resolución de problemas como *"un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela"* (p. 41), argumentando desde distintas posturas la importancia de las situaciones problemáticas como contexto para el desarrollo de los conocimientos básicos asociados a las distintas áreas del pensamiento matemático. De acuerdo con ésta propuesta del MEN y numerosos resultados de investigación desarrollados en el marco del Programa de formación de docentes, se estructuró la propuesta curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital F.J.D.C., en la que se entiende que el ambiente en el que aprende el maestro debe ser consistente con las prácticas que constituyen el hacer matemáticas y que la resolución de problemas es la más fundamental de éstas prácticas (LEBEM, 2003). Se espera entonces que en los cursos de problemas haya dos objetos de aprendizaje principalmente: las matemáticas y la resolución de problemas, donde el primer objeto es construido mediante el segundo.

Pero la relación entre la resolución de problemas como forma de organizar la clase y el conocimiento matemático que permite construir el abordaje de un problema es compleja, dado que involucra no sólo el estudio de los tipos de problemas propuestos, sino la caracterización del proceso de aprendizaje que ocurre en la solución de un problema. Esto último implica describir *toda* la actividad involucrada en la resolución, es decir las estrategias de resolución del estudiante frente al problema, las estrategias de

47 Realizado en el marco del proyecto de investigación para la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes, presentada por Deissy Narváez Ortiz, titulado: "Sobre la relación entre estrategias utilizadas por estudiantes de LEBEM en la resolución de un problema y su comprensión de conceptos matemáticos asociados a la teoría de números"

comprensión del conocimiento involucrado en el problema y la calidad de la intervención del profesor en el acompañamiento del proceso. La manera de llevar esto a cabo configura la problemática que aborda nuestra investigación.

Participantes

La experiencia se lleva a cabo actualmente con 28 estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, inscritos en la asignatura "Problemas Aritméticos III" con una intensidad horaria de 6 horas a la semana. Los participantes aceptaron ser investigados previa presentación del proyecto.

Intervención Pedagógica

El diseño pedagógico considera 5 elementos principales:

1. *Los problemas propuestos*. Se seleccionan y/o diseñan teniendo en cuenta las consideraciones de Charnay (1993) sobre lo que es un problema, privilegiando los problemas matemáticos contextualizados definidos por Diéguez, García, Server & Álvarez (2005). Estos problemas se dividen en cuatro grandes grupos, definidos por el concepto que privilegian: problemas de divisibilidad y números primos, problemas de ecuaciones de congruencia y sistemas de ecuaciones, problemas de ecuaciones diofánticas y problemas de aritmética modular.

2. *La manera como se abordan los problemas*. La clase comienza con la propuesta de uno o más problemas. La primera experiencia con el problema es individual y luego se conforman grupos en los que se discuten los acercamientos individuales iniciales. Debido a que los problemas no son de solución inmediata, la clase no es el único escenario en el que se abordan. Para el siguiente encuentro los grupos traen distintas elaboraciones de la resolución del problema y propuestas para su matematización. De acuerdo con estas elaboraciones, estudiantes y profesor decidimos si se hace socialización, si se cambian los grupos o si se propone otro problema. Siempre habrá maneras distintas de aproximarse a la solución, por lo que cada estudiante puede continuar el abordaje del problema original, aunque ya no sea tema de la clase y puede mostrar su trabajo en clase cuando se considere pertinente.

3. *Los roles del Profesor.* Son tres roles principalmente: el de escoger y/o diseñar los problemas y secuenciarlos, el de acompañar el proceso de resolución de los estudiantes buscando complejizarlo con sus intervenciones y el de observar aprendizaje de los estudiantes paso a paso.

4. *Los roles del estudiante.* El estudiante inicialmente aborda cada problema de manera individual y se compromete en la investigación teórica de los tópicos matemáticos que le permitirán modelarlo. Además en otros momentos de trabajo con el problema los estudiantes conformarán grupos de cuatro personas, de acuerdo a sus intereses.

5. *La naturaleza del conocimiento matemático que se pretende construir*. En este ambiente de aprendizaje, el conocimiento matemático se concibe como construcción social y cultural. Thompson (1992) plantea que desde esta perspectiva la expresión "saber matemáticas" es equivalente a "hacer matemáticas", lo cual sólo es posible por medio de la actividad de resolver problemas. Esto implica que la construcción de conocimiento matemático se hace mediante la matematización (Chevallard, 1992).

Algunas consideraciones teóricas

En la presente síntesis de la revisión bibliográfica abordamos dos preguntas: ¿cuál es el lugar de la teoría de números en la construcción de las matemáticas (puras y escolares) y su papel en las posibles formas de explicar situaciones reales?, y ¿Qué situaciones problema propician aprendizaje de los elementos fundamentales de la teoría de números?. Los hallazgos de esta revisión documental permiten justificar la necesidad de investigar el aprendizaje de los fundamentos de la teoría de números como parte esencial del conocimiento matemático de un profesor en proceso de formación.

> "Erdös creía que si un problema matemático permanecía sin resolver más de un siglo, era casi con seguridad un problema de teoría de números. Existen pautas en el universo que se pueden expresar mediante números enteros (...) los enteros han sido cruciales en la evolución del conocimiento científico de la humanidad. Así por ejemplo Lavoisier descubrió que los compuestos químicos están formados por proporciones de elementos correspondientes a ratios de pequeños números enteros. Esto constituyó una fuerte evidencia a favor de la existencia de los átomos" (Pickover, 2002, p. 21, 22)

La historia de la teoría de números comienza a consolidarse desde los primeros acercamientos al concepto de número, pues la dicha teoría puede considerarse en principio como la aritmética teórica y "la aritmética teórica surge a partir del concepto de número" (Aleksandrov,1981, p. 34).

En principio los números eran percibidos sólo como cantidades ligadas a una colección dada, la abstracción de las propiedades de los números fue un proceso que permitió conceptualizar el número como una propiedad de las colecciones de objetos que es común a todas las colecciones cuyos objetos pueden ponerse en correspondencia biunívoca unos con otros (Scheinerman, 2000), pero este proceso llevó varios siglos en formalizarse. Entre tanto, cada pueblo desarrolló su propio lenguaje de los números y constituyó reglas para operar permitiendo, incluso, conocer números tan grandes que desbordaban la experiencia del ser humano de entonces. Pero fueron las necesidades del entorno las que forjaron la adaptación a un sistema de símbolos más general "los números arábigos y su carácter posicional" hecho que facilitó los cálculos escritos. Pero ya el ser humano comenzaba a abstraer algunas propiedades de los números, como el hecho de plantear que la sucesión de números era susceptible de ser prolongada indefinidamente, lo cual permite aproximarse a la noción de infinito. Así, vemos un ejemplo del paso de una situación experiencial, como contar objetos uno a uno, para pasar a un proceso ilimitado de formación de números añadiendo una unidad al número anterior, lo cual se convierte en un producto de la abstracción, consolidando así uno de los objetos fundamentales de las matemáticas; "la matemática tiene como objeto no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino todas las posibles relaciones cuantitativas, y entre ellas el infinito" (Aleksandrov, 1981, p. 34)

La primera formalización de las propiedades de los números aparece en el trabajo de Euclides, (Libro VII), donde se plantean diferentes definiciones aritméticas, algoritmos y demostraciones hoy consideradas fundamentos de la teoría de números. Definiciones como unidad, número, número par, número impar, número primo, número compuesto, entre otras; además de la introducción del algoritmo de Euclides, procedimiento que permite determinar el máximo común divisor de dos o más números o, en caso contrario, si dos números son primos entre si. En consecuencia, el conjunto de los primos inspiró muchos trabajos en el campo de la aritmética, más tarde Erastóstenes de Cirene, contribuye a éste trabajo planteando un método para identificar los números primos menores que un entero dado, trabajo conocido como la criba de Eratóstenes. Otro de los autores más influyentes en construcción de la teoría de números fue Diofanto, quién utiliza por primera vez símbolos y abreviaturas algebraicas, simplificando los métodos para la resolución de ecuaciones de una o mas variables, asimismo su tratado; La aritmética de Diofanto, fue la inspiración para los trabajos posteriores como el de Fermat, quien intentando generalizar el problema II-8 (La división de un cuadrado en dos cuadrados), postuló el famoso teorema que lleva su nombre y adelantó un trabajo significativo para el estudio de los números primos (los primos de fermat: $N_n = 2^{2^n}+1$; Los números primos de Fermat). "Fermat representa un punto focal en la historia de la teoría de números; en su trabajo las ramas radiales de los números anteriores fueron unificados y su contenido recreado de una manera sistemática y enriquecida" *Oystein Ore (*cit. en Pickover, 2002)

El papel de la teoría de números en la construcción de las matemáticas es de gran importancia, ya que es imposible separarla de la Aritmética misma, que ha sido considerada como la reina de la matemática. En general podemos decir que las propiedades de los enteros pueden describirse como dos grandes grupos: las que tienen que ver con la existencia de los números primos y la divisibilidad entre enteros. El estudio de los números primos conduce al teorema fundamental de la aritmética, con el que es posible generalizar una manera de obtener todos los elementos del conjunto numérico de los enteros en términos del conjunto de los primos. Esta estracha relación puede apreciarse en el siguiente apartado de Aleksandrov (1981, p. 37):

> *"Los números abstractos en si no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos. [...] el objeto de la aritmética son las relaciones entre números, pero estas relaciones son las imágenes abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre colecciones de objetos; así, podemos decir que la aritmética es la ciencia de las relaciones cuantitativas reales consideradas abstractamente, esto es, simplemente como relaciones. La aritmética, como vemos, no surge del pensamiento puro como pretenden los idealistas, sino que es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales; surge de una larga experiencia práctica de muchas generaciones".*

Éste hecho justifica la importancia de la construcción teórica de éstas relaciones en el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, quien será responsable de poner en el aula elementos adecuados para fomentar en el estudiante las competencias que debe desarrollar en el ámbito de la aritmética, como se propone desde los documentos que reglamentan el currículo de matemáticas colombiano (Lineamientos y estándares curriculares), por ejemplo, para los grados 6° y 7°, se plantea como uno de los objetivos *"Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa, etc.)."* (MEN, 2003, p. 16). Pero el desarrollo de este objetivo implica un trabajo a través del diseño de actividades que propicien en el estudiante razonamiento matemático desde una perspectiva cotidiana a través de la resolución de problemas, a continuación presentaremos una situación que abordamos en la intervención pedagógica y una posible implementación del problema en la básica, propuesta por un estudiante que participó de la experiencia.

Situación 1.

Las dimensiones de una caja son; 1,65m x 2,1m x 3m;

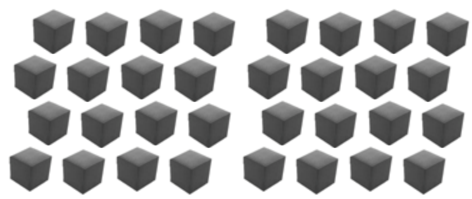
i. *Halle todas las posibles dimensiones de cajas más pequeñas, de modo que sea posible acomodar un número determinado de ellas en la caja inicial sin que sobre o falte espacio (además de las cajas cúbicas, considere otras posibilidades).*
ii. *Halle para cada caso el valor de los lados y el número de cajas necesarias para rellenar la inicial.*
iii. *¿De las cajas cúbicas que es posible encontrar, cuál es la dimensión más grande?*
iv. *Generalice el procedimiento para cualquier terna de dimensiones.*
v. *¿Qué condiciones debe cumplir la terna de dimensiones iniciales para que siempre haya más de una posibilidad de rellenar la caja con cajas cúbicas?*

¿Qué se pretende que aprenda?

- Analizar el problema y determinar posibles estrategias argumentando sus decisiones de acuerdo con sus conocimientos preexistentes.
- Adecuar el problema, en este caso las unidades de medida propuestas (conversión de metros a centímetros) para permitir trabajar en un mismo lenguaje, de esta forma restringir el problema al trabajo con enteros.
- Usar criterios de divisibilidad para identificar soluciones particulares.
- Usar la función Tao para encontrar el número de divisores de un número entero cualquiera.
- Encontrar el conjunto de divisores de cada cantidad dada.

- Generar un procedimiento para expresar todas las posibles combinaciones entre los divisores de una terna de números.
- Relacionar el Máximo Común Divisor de tres números con el contexto del problema.
- Formular una solución formal al problema donde argumentando su pertinencia y validez desde los objetos matemáticos aplicados en el proceso de solución.
- Proponer problemas que posibiliten un acercamiento a la vida cotidiana, donde ponga en uso e implemente el trabajo anteriormente desarrollado.
- Rediseñar el problema para la población … con el fin propiciar en los estudiantes el desarrollo de los conceptos que están vinculados a la solución del problema

Un posible rediseño de la situación para la básica.



Para que los estudiantes se apropien de material experiencial, con el cual dotar de significado la situación, se les entrega**: una caja cuyas dimensiones son; 9cm x 7cm x 4cm; Cantidad de cubos; 252 (de 1 cm x 1cm); Cinta para unir los cubos y generar cubos de mayores dimensiones.**

El estudiante abordará las siguientes preguntas manipulando el material

i. *Halle todas las posibles dimensiones de cajas más grandes, de modo que sea posible acomodar un número determinado de ellas en la caja inicial sin que sobre o falte espacio (además de las cajas cúbicas, considere otras posibilidades).*
ii. *Halle para cada caso el valor de los lados y el número de cajas necesarias para rellenar la inicial.*
iii. *¿De las cajas cúbicas que es posible encontrar, cuál es la dimensión más grande?*

Para ello el estudiante determinará que necesita medir, tener una medida común para comparar y comenzar a desarrollar la actividad mientras que interactúa y experimenta, constatando los resultados en la practica que esta desarrollando. El siguiente problema que los estudiantes abordarán, es uno donde experimentaran un problema similar al que se menciono anteriormente donde no tendrán materiales, el manejo del problema es abstracto con una caja de mayores dimensiones con las mismas tres preguntas. Y asi podemos continuar variando las dimensiones de la caja, variando de centímetros a metros, aumentando las preguntas; la finalidad es aumentar la complejidad del problema hasta acercarse lo mas posible al nivel del estudiante para profesor (hay que aclarar que lo mas posible es que este proceso no culmine ni en la básica, media o profesional, ya que el rediseño de actividades es un proceso de constante desarrollo, donde siempre se pueden encontrar tanto situaciones, como estrategias diferentes para fomentar el aprendizaje en el estudiante)

Acerca de la metodología del proyecto de investigación

Para explorar el aprendizaje que ocurre cuando los estudiantes participan en este diseño de clase consistente con principios constructivistas y fundamentado primordialmente en la resolución de problemas, se realiza una investigación de carácter cualitativo cuya naturaleza es descriptiva, exploratoria e interpretativa.

Las preguntas de investigación

1. ¿Cuáles son las estrategias de solución de problemas que utilizan estudiantes que se forman como profesores de matemáticas a medida que avanzan en la resolución de problemas asociados a la teoría de números?
2. ¿Cómo se manifiesta la comprensión de conceptos matemáticos a medida que los estudiantes usan estas estrategias?
3. ¿Qué relaciones pueden establecerse en el desempeño de estos estudiantes entre el uso de estrategias de solución y la comprensión de conceptos matemáticos?

La recolección y análisis de datos

Recogeré entrevistas semi-estructradas y textos de reconstrucción del proceso de los estudiantes y grabaciones de video y audio de su trabajo en colaboración en clase. En ellos buscaré y asociaré inicialmente los tipos de estrategias de resolución de problemas que caracterizan Schoenfeld (1992) y Santos (2007) y el contenido matemático expresado, según los procesos de matematización horizontal y vertical propuestos por Treffers y descritos por García (2002). Una vez asociadas estrategias y contenido matemático expresados por los estudiantes, determinaré la frecuencia con que un tipo de estrategia se ubica en una categoría de matematización, lo cual me permitirá establecer si hay o no una relación entre la comprensión del concepto y las estrategias. Los hallazgos de esta investigación proporcionarán conocimiento para analizar la actividad del estudiante en relación con su aprendizaje, en un práctica pedagógica que privilegia la resolución de problemas como forma de hacer matemáticas.

Referencias

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (1981). La Matemática: su contenido, métodos y significados. Alianza Editorial., Madrid, España.

Aguilar, M., Navarro, J., López, J., Alcalde, C. (2002) Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, Vol. 14*(002), 382-386. [Versión electrónica]

Bell E. T. (1940) Historia de la matemáticas. Fondo de cultura económica, México.

Boyer Carl B.(1986) Historia de la matemática. Alianza editorial, Madrid - España

Charnay, R. (1993) Aprender (Por Medio De) La Resolución De Problemas. En Didáctica De Matemáticas: Aporte y Reflexiones, Compiladoras Parra y Saíz. Paidos: Argentina

Courant Richard & Robbins Herbert (2002) ¿Qué son las matemáticas? : Conceptos y métodos fundamentales: traducción de Martín Manrique Mansour. Fondo de Cultura Económica, México.

Dunham William (2000) Euler. El maestro de todos los matemáticos. Nivola libros y ediciones, España.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Ed. Magisterio.

MEN (2003) Estándares Básicos De Matemáticas Y Lenguaje, Educación Básica Y Media

Millán Gasca Ana (2004) Euclides. La fuerza del razonamiento matemático. Nivola libros y ediciones, España.

Pólya, G. (1945): *How To Solve It*. Princeton: Doubleday (2[e] Éd., 1957).

Santos L. (2007) La Resolución de Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México: Trillas

Scheinerman, E. (2000) "Matemáticas Discretas". Grupo Geo impresores, S.A., S. Juan Xalpan, México, D.F.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press: New York.

Torrecillas Blas (2003) Fermat. El mago de los números 2da edición. Nivola libros y ediciones, España.