UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO COMO RELACIÓN DE EQUIVALENCIA UTILIZANDO EL MODELO VIRTUAL DE LA BALANZA

Oscar Wilder Galeano Torres

Código: 0753440

Leonardo Váquiro Vélez

Código: 0751829

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI, FEBRERO 19 DEL 2015

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO COMO RELACIÓN DE EQUIVALENCIA UTILIZANDO EL MODELO VIRTUAL DE LA BALANZA

Presentado en la Línea de Investigación y Formación: Didáctica de las Matemáticas

Oscar Wilder Galeano Torres

Código: 0753440

Leonardo Váquiro Vélez

Código: 0751829

Asesor

Cristian Andrés Hurtado Moreno

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI, FEBRERO 19 DEL 2015

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO COMO RELACION DE EQUIVALENCIA UTILIZANDO EL MODELO VIRTUAL DE LA BALANZA							
Se trata de:	Proyecto [ ]				Informe Final [X]			
Director:	Cristian Andrés Hurtado Moreno							
1er Evaluador:	Maritza Pedreros							
2do Evaluador:	María Teresa Narváez							
Fecha y Hora	Año:	2015	Mes:	Septiembre	Día:	05	Hora:	15:30

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Leonardo Váquiro Vélez	0751829	3469
Oscar Wilder Galeano Torres	0753440	3469

EVALUACIÓN					
Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ___________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de _________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador
[signature]	María Teresa Narvaez	Maritza Pedreros P.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer Grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la Balanza.

Autores:

Nombre: Leonardo Vaquiro Velez Firma: C.C. 1.143.829.065

Nombre: Oscar Wilder Galeano Torres Firma: Oscar G. C.C. 1.130.614.505

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: Octubre 19 /2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, agradecemos a Dios, por guiarnos este camino y permitir que escaláramos un peldaño más en nuestras vidas.

A nuestros padres y familia (y los que ya no se encuentran entre nosotros), por habernos brindado el apoyo incondicional en el transcurso de nuestra carrera.

A los estudiantes, profesores y directivos de la Institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir, por su disponibilidad de tiempos, espacios y logística necesarias para la realización de la fase experimental de este trabajo.

Agradecemos al profesor Octavio Pabón por enseñarnos a ser perseverantes en nuestros logros y a que jamás nos diéramos por vencidos en esta carrera de formación (Q.E.P.D).

A nuestro director Cristian Hurtado, por sus valiosas orientaciones y paciencia para realizar satisfactoriamente este trabajo de grado.

Finalmente agradecemos a todas aquellas personas que aportaron un granito de arena para culminar nuestra carrera universitaria.

Gracias a todos.

Tabla de contenido

RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia, la cual vincula un modelo virtual de balanza. La propuesta en mención fue implementada con un grupo de estudiantes de grado octavo de la Educación Básica Secundaria del Colegio Santa Isabel de Hungría sede Compartir en dos sesiones de trabajo, en la primera de estas sesiones se presentaron las cuatro primera escenas del modelo, en donde se da prioridad a ecuaciones de tipo aritmético y algebraico con incógnitas y coeficientes positivos; en la segunda sesión se presentaron las escenas en donde se abordaron las ecuaciones de tipo aritmético y algebraico pero involucrando incógnitas y coeficientes tanto positivos como negativos.

Entre los resultados obtenidos de la implementación de la propuesta sobresalen, entre otros, que la gran mayoría de estudiantes reconocieron la necesidad de mantener la equivalencia en el modelo de la balanza, rebasando esta acción al sistema de representación simbólica, es decir, manteniendo la equivalencia entre los miembros de las ecuaciones; además, se lograron identificar que el modelo de la balanza empleado ayuda a superar algunas de las dificultades reportadas en la investigación en didáctica del álgebra.

Palabras claves: resolución de ecuaciones de primer grado, relación de equivalencia, modelo virtual de la balanza.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza y aprendizaje del álgebra se encuentran múltiples dificultades, particularmente al momento que se introduce como objeto de estudio en la escuela. Los aportes realizados por diferentes autores como Filloy & Kieran, (1989), Kieran, (1992), Gallardo & Rojano, (1987), Filloy & Rojano (1989), muestran la gran problemática existente de cara a la construcción de pensamiento algebraico en estudiantes, siendo este un espacio propicio para identificar y analizar dificultades que presentan éstos ante las diversas formas cómo el álgebra es presentada en la escuela. Algunas de estas dificultades están relacionadas con: la resolución de ecuaciones, significación del signo igual, la naturaleza del álgebra dentro del contexto de las matemáticas, la transición del pensamiento aritmético al algebraico, la naturaleza del lenguaje algebraico, entre otras.

En este sentido, muchos de estos estudios muestran dificultades de los estudiantes con respecto a las ecuaciones, la resolución de ecuaciones, la resolución de problemas, la manipulación de expresiones algebraicas, entre otros; poniendo de manifiesto la necesidad de atender de manera oportuna algunas de éstas dificultades. Por tal motivo, se cree conveniente en este proyecto identificar el tratamiento que le dan los estudiantes a las ecuaciones de primer grado con el propósito de proponer estrategias que potencien este proceso y aportar a la construcción del pensamiento algebraico en la escuela, particularmente al concepto de ecuación.

Para tal efecto, se implementa la propuesta trabajada por las profesoras Rojano y Martínez (2010) y Martínez (2009) para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado, la cual se basa en un modelo virtual de balanza dinámico e interactivo que permite a los estudiantes manipular una variedad amplia de estructuras de ecuaciones con el fin de que ellos trasciendan lo que trabajan de forma virtual a los procesos que realizan sintácticamente al trabajar una ecuación. Este modelo tiene una versión ampliada que es la balanza con poleas que permite que el estudiante trabaje ecuaciones con sustracción de términos.

Con esta propuesta se pretende favorecer en un grupo de estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Santa Isabel de Hungría sede Compartir, el proceso de resolución de ecuaciones como relación de equivalencia y, de acuerdo con el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba, se espera poder aportar a la reflexión en torno algunas de las dificultades reportadas por la investigación en didáctica del álgebra. Además de lo anterior, también se pretende otorgar a docentes y/o futuros maestros estrategias y recomendaciones en relación con el tratamiento que potencia la resolución de ecuaciones de primer grado y el concepto de ecuación en la escuela.

Para lograr las pretensiones descritas en el párrafo anterior, este documento se ha estructurado en cuatro capítulos tal como se sigue:

En el capítulo 1 se ubican los aspectos generales de la investigación, como lo son la problemática, los objetivos; general y específicos que permitan guiar el trabajo y orientar la propuesta planteada y, finalmente la justificación de este proyecto.

En el capítulo 2 se ubican los aspectos de referencia conceptual proponiendo tres dimensiones: la matemática, la curricular y la didáctica; las cuales permitirán fundamentar el análisis de los resultados obtenidos al implementar la propuesta de este proyecto.

En el capítulo 3 se realiza una descripción de la población objeto de estudio y de la metodología de implementación del modelo virtual de la balanza. Además, se describen de forma detallada las secciones que conforman el modelo, explicando las características de las distintas escenas que componen las secciones del modelo virtual de la balanza. Por último, se describen las hojas de trabajo que se usaran en la implementación del modelo, las cuales permitirán dar cuenta del impacto que éste tiene en la resolución de ecuaciones de primer grado.

En capítulo 4 se presentan algunas conclusiones de la propuesta adoptada y de los objetivos planteados. También se proponen algunas sugerencias y recomendaciones a personas interesadas en reflexionar sobre las diversas problemáticas que atañen en la resolución de ecuaciones de primer grado.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se ubica la problemática en la cual se sitúa este proyecto, tal problemática parte del reconocimiento de múltiples dificultades que han sido reportadas por la investigación en torno a la transición de la aritmética al álgebra, haciendo énfasis en aquellas que enfrentan los estudiantes cuando las ecuaciones de primer grado son objeto de aprendizaje en las aulas de clase. Además de lo anterior, se presentan el objetivo general y los específicos que vertebran el proyecto, así como una justificación tanto de la pertinencia de trabajos como este como de la selección del objeto matemático aquí abordado.

1.1 Presentación del problema

Durante las últimas décadas la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar ha sido objeto de reflexión, discusión e investigación en el “campo” de la Educación Matemática. Los aportes realizados por diferentes autores como Filloy & Kieran (1989), y Gallardo & Rojano (1987), identifican problemáticas en el momento en que el álgebra es presentada en la escuela. De esta manera, con relación a los aportes productos de las investigaciones interesadas en el estudio del álgebra como objeto de enseñanza y aprendizaje, se reconoce un interés común por muchas de éstas en identificar dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a este proceso.

En este trabajo se presentan, desde una perspectiva general, algunas dificultades que muestran los estudiantes en la introducción del álgebra escolar. Algunas de éstas están ubicadas en la transición del pensamiento aritmético al algebraico[1] y surge, debido a que los estudiantes traen consigo nociones utilizadas en aritmética y luego buscan emplearlas en el álgebra. Como lo señalan Filloy y Kieran (1989) "El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones" (p.229). Por tal razón, debe existir un cambio de concepción por parte de los estudiantes acerca del tratamiento que le dan a una actividad aritmética, donde basta con dar soluciones concretas, al tratamiento que se le da a la actividad algebraica, donde, se establecen procedimientos y relaciones de forma general sobre números y operaciones. En este sentido, se presentan a continuación algunas dificultades que muestran los estudiantes en la transición del pensamiento aritmético al algebraico.

Una de las dificultades que se presentan en la transición de estos pensamientos, es la forma como los estudiantes ven el signo igual. Por lo general, en la aritmética lo conciben como indicador de que "hay algo para hacer" es decir, les indica que deben efectuar algún tipo de operación, comúnmente, al lado izquierdo de la igualdad para encontrar un resultado que se

[1] En este trabajo se ubica el pensamiento aritmético en las acciones que realizan los estudiantes exclusivamente sobre los datos de las ecuaciones, es decir, sobre sus términos conocidos. Por su parte, se entiende que en el pensamiento algebraico no basta sólo con operar sobre los datos conocidos de la ecuación, también es necesario un tratamiento sobre la(s) incógnita(s) o términos desconocidos de este objeto matemático (Gallardo & Rojano, 1987). De igual forma, se entiende que "lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades indeterminadas (p.e. incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizas cálculos con ellas como lo haces con números conocidos" (Radford, 2011, en Godino et al. 2012, p. 12)

ubica en el lado derecho de ésta. Tal como lo afirman Filloy & Kieran (1989). "El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad" (p.230). Por ejemplo, a muchos estudiantes les cuesta aceptar en primera instancia ecuaciones como $2x + 5 = -4 + 6$, porque en el lado derecho de la ecuación debería ir el resultado de la expresión $2x + 5 = 2$.

Así, cuando no se toma el signo igual como un símbolo que indica una relación de equivalencia entre las expresiones que involucra se presentan obstáculos al intentar resolver o darle significado a ecuaciones de tipo $3x - 5 = x + 4$, en tanto, la incógnita se presenta en ambos miembros. Kieran (1992) cita a Vergnaud (1984, 1986), para explicar que: "El cambio de interpretación que debe ocurrir en álgebra con respecto al signo igual es, precisamente, el de respetar el carácter simétrico y transitivo de la igualdad" (p.6). Por consiguiente, la dificultad que se expresa en este aspecto se caracteriza por la única interpretación del signo igual que poseen los estudiantes, la cual no les permite ver que el símbolo del signo igual también representa una equivalencia entre dos partes de una ecuación (izquierda y derecha).

Otra dificultad que se ubica en el paso de la aritmética al álgebra es la *inversión de las operaciones* (Gallardo & Rojano, 1987), en donde, se afirma que la noción de operación inversa no está consolidada en el estudiante, un ejemplo de esta dificultad se caracteriza por las reglas que utilizan los estudiantes para resolver una ecuación del tipo $2x = 4$, donde efectúan para este caso la regla "al revés" con el fin de dar la solución a la ecuación, es decir, efectúan la división 2 entre 4 obteniendo 0.5 como resultado, e inmediatamente al no aceptar esta solución, efectúan 4 entre 2, lo realizan "al revés" aceptando esta última como solución. Este tipo de métodos usados por los estudiantes permite dar cuenta que existen obstáculos.

Los estudiantes tienden a utilizar métodos escolarizados esquematizando la solución de una ecuación, por tanto, se les dificultad reconocer las propiedades de la igualdad como, por ejemplo, la uniformidad que existe entre los dos miembros de una ecuación. Otro ejemplo de este aspecto es que los estudiantes reconocen con facilidad que $1 \times x = x$, pero, se les dificulta asimilar de la misma forma que $x = 1 \times x$ (propiedad simétrica), en consecuencia, al no reconocer este tipo equivalencias se les puede dificultar hacer conciencia de las propiedades de la igualdad inmersas en la operación.

Otro aspecto importante desde la perspectiva de las dificultades que surgen en la transición del pensamiento aritmético al algebraico es la forma como operan los estudiantes sobre ecuaciones lineales. La permanencia en un método único de resolución es ejemplo de ello. En el momento de operar lo desconocido o las incógnitas en la ecuación los estudiantes resuelven una expresión del tipo $4x - 2 = 3$, operando únicamente sobre los datos de eliminar ésta para encontrar la respuesta. Pero cuando se les pide resolver ecuaciones del tipo $3x - 5 = 2x + 1$, no basta solamente con operar los datos conocidos, sino también, las incógnitas, la cantidad a encontrar, y es ahí donde su forma de operar sobre ecuaciones lineales los lleva a cometer errores. Es lo que Gallardo

& Rojano (1987) llaman acciones en el ámbito aritmético para el primer tipo de ecuación y algebraico en el segundo tipo de ecuación.

La dificultad señalada se presenta por la permanencia en un campo aritmético por parte de los estudiantes, donde continúan empleando métodos numéricos de solución que les funcionaban en este campo y los trascienden a las ecuaciones de tipo algebraico que requieren de un tratamiento distinto, dado el carácter analítico del álgebra.

Ahora, se hace necesario para el desarrollo de este trabajo, identificar las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones (las de primer grado objeto de estudio de este proyecto) puesto que, a través de éstas dificultades se da cuenta de las formas cómo los estudiantes se enfrentan a la resolución de una ecuación y cuáles son los obstáculos que se presentan. De esta manera, Filloy y Kieran (1989) reconocen tres maneras como los estudiantes enfocan la resolución de ecuaciones, a saber:

- Los enfoques de resolución intuitivos, incluyendo el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento.
- El uso de la substitución por tanteo como método de resolución.
- Los métodos formales de resolución de ecuaciones que incluye la trasposición de términos y la realización de operaciones en ambos lados de la ecuación.

Del primer enfoque, se tiene que los estudiantes al resolver $3 + \blacksquare = 10$, logran realizar la ecuación por hechos numéricos, adjudicando que $3 + 7$ es igual a 10, ahora, para el caso del recuento, los estudiantes asumen que está (respecto a la posición) en 3 y pasa por 7 números para llegar a 10. Por último, el método de recubrimiento, donde el estudiante resuelve una ecuación de la forma $4x + 16 = 8x$, concediendo a 16 el valor de $4x$, porque $4x + 4x$ es igual a $8x$, de esta manera se realizan tratamientos, no sobre la ecuación dada, sino sobre la ecuación $4x = 16$, se despeja y se obtiene que $x = 4$. De acuerdo con lo anterior, Kieran (1992) afirma que se está refiriendo solo a operaciones aritméticas llevadas a cabo sobre números para producir números lo cual determina una perspectiva procedimental en el álgebra.

Respecto al segundo enfoque, el uso de la sustitución por tanteo por parte del estudiante como método de resolución de una ecuación, puede llevar a invertir mucho tiempo dependiendo de la ecuación. Por ejemplo, el estudiante al resolver una ecuación como $2x = 20$, no tendrá problemas al dar valores a x para encontrar finalmente que $x = 10$, pero qué sucede con el método de la sustitución por tanteo en un caso como el siguiente, donde el estudiante debe resolver $3x = 2367$. Resolver este tipo de ecuaciones puede llevar a los estudiantes un buen tiempo, en cuanto su tanteo se vuelve sistemático, es decir, en cuanto empiezan a determinar un intervalo de valores posibles entre los cuales se encuentra la respuesta teniendo en cuenta las operaciones que realizan. La estrategia empleada por el estudiante para encontrar la solución sugiere que existe una permanencia en el campo aritmético, la cual siendo el único método de resolución no le permite hacer conciencia de las propiedades de la igualdad entre el miembro izquierdo y derecho de la ecuación.

En relación con el último enfoque, la trasposición de términos, se hace énfasis en el procedimiento de trasponer términos. Al ejecutar la misma operación en ambos miembros de la igualdad se enfatiza en la simetría de la ecuación, pero este acierto se pierde cuando los estudiantes hacen uso de éste método de solución únicamente como una regla de cambio de lado entonces cambio de signo, perdiéndose totalmente el carácter simétrico de la igualdad y la propiedad principal que valida la transposición de términos: la uniforme de la igualdad.

De acuerdo con lo anterior, se han identificado problemáticas entorno al desarrollo del pensamiento algebraico y por tal motivo dificultades que presentan los estudiantes al momento de ser introducidos al álgebra. Es por esta razón que surge la necesidad de indagar sobre las dificultades que se presentan durante la enseñanza y aprendizaje del álgebra, particularmente en la problemática relacionada con la resolución de ecuaciones de primer grado. De ahí que, para el desarrollo de este trabajo interesa indagar sobre:

¿Cómo favorecer la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir, usando el modelo virtual de la balanza?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Favorecer la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en los estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir, usando el modelo virtual de la balanza.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes en la resolución de ecuaciones de primer grado reportadas en diversas investigaciones.
- Implementar el modelo virtual de la balanza en grupo de estudiantes de octavo grado de la institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir, como propuesta para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia.
- Proponer sugerencias y recomendaciones a maestros en ejercicio, futuros docentes y/o interesados en el tema, para favorecer la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia.

1.3 Justificación

En la enseñanza y estudio del álgebra se han realizado varios trabajos e investigaciones que documentan los errores, obstáculos y dificultades que presentan los estudiantes al ser introducidos al álgebra y a las diferentes opciones para aproximarlos a este campo (Filloy & Kieran, 1989; Kieran 1992; Gallardo & Rojano 1987; Bednarz, Kieran & Lee 1996). De este modo, uno de los temas importantes que se presentan en las investigaciones se enfoca en la resolución de ecuaciones de primer grado (objeto de estudio de este trabajo) y problemas que giran en torno a este proceso. El análisis y estudio de los errores, obstáculos y dificultades permite reconocer ciertas nociones y enfoques que usan los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales y permite generar estrategias para superar dichas dificultades.

De acuerdo con lo anterior, se reconocen diversa documentación e investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Sin embargo, hoy en día teniendo en cuenta la labor docente y desde la postura de estudiantes de la licenciatura, se reconoce que muchas de esas dificultades registradas aún permanecen y siguen permeando las aulas de varias instituciones. Por esta razón, proyectos como éste aportan a la documentación existente, generando así pautas específicas para el tratamiento de ecuaciones de primer grado con una incógnita, las cuales pueden orientar a docentes o futuros licenciados en matemáticas para realizar una mejor planificación de la enseñanza del álgebra dentro de los programas de matemáticas. De acuerdo con Socas, Camacho, Palarea & Hernández (1996) si el profesor tiene claridad sobre los errores que cometen los estudiantes según las dificultades innecesarias que se presentan, realizará ajustes y correcciones positivas, este aspecto es un avance relevante en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y estrategias futuras para llevar a cabo estos procesos

En este mismo orden de ideas, diversas investigaciones en el marco de la didáctica del álgebra han mostrado que existen dificultades asociadas a la transición de un pensamiento aritmético a uno algebraico, en donde surge la necesidad de presentar un estudio de las ecuaciones, en tanto que existe un interés por indagar sobre las dificultades que presentan los estudiantes novatos en el estudio del álgebra.

De acuerdo con lo anterior, las investigaciones muestran que la resolución de ecuaciones hace parte del *corte didáctico*[2] en cuanto permite analizar dificultades en los dos pensamientos, con el tratamiento de ecuaciones aritméticas, por una parte, donde el estudiante sólo debe operar sobre los datos de la ecuación, y por otra parte, el tratamiento de ecuaciones de tipo algebraico, donde se debe operar no simplemente los datos sino también las incógnitas, siendo las ecuaciones lineales un objeto matemático presente en el proceso que vincula ambos pensamientos. Además de esto, un estudio sobre ecuaciones no solo permite ver lo que sucede en las fronteras de estos dos pensamientos, sino que también permite encontrar y proponer estrategias para romper con

[2]Brousseau (citado por Gallardo & Rojano, 1987) define el termino corte didáctico, para referirse obstáculo didáctico de origen epistemológico. Es decir, nos referimos al tipo de obstáculo que no puede, ni debe escapar del hecho mismo de su papel constitutivo del conocimiento al que se apunta y que es frecuente encontrar en la historia de los conceptos mismos.

conceptos y hábitos que se extienden del pensamiento aritmético al algebraico en los estudiantes.

Otro aspecto importante que es necesario resaltar, es que la ecuación como objeto matemático permite modelar situaciones o problemas de la vida diaria. Regularmente recurrimos a las ecuaciones lineales con el fin de dar soluciones a problemas cotidianos a partir de la modelación, como por ejemplo, los problemas de edades, de costos, de movimiento, etc., donde planteamos ecuaciones que nos permitan dar solución al problema, o problemas del cálculo de perímetros de figuras geométricas, terrenos y demás. Por esta razón, las ecuaciones son un objeto matemático potente en tanto permiten la modelación de diversos tipos de problemas (matemáticos o no), en este sentido, las ecuaciones lineales permiten modelar un tipo particular de fenómenos. La solución de muchos problemas, en términos generales, busca modelos matemáticos que permitan su representación para poder ser operado y así dar cuenta de posibles soluciones.

Ahora, es necesario mencionar que curricularmente el desarrollo del pensamiento algebraico está ligado a las variaciones, por tal motivo, el desarrollo del pensamiento variacional muestra que el álgebra es un herramienta útil para representar y describir procesos de cambio, variación y lo que permanece constante, permitiendo la formulación, generalización y argumentación de conjeturas. Además, da un sentido al uso de variables, constantes, términos, expresiones algebraicas propias del estudio formal del álgebra. De esta manera, el estudio de las ecuaciones de primer grado es transversal al desarrollo del conocimiento matemático, puesto que el desarrollo del pensamiento variacional permite constatar conceptos posteriores como el de función, parámetro, el cálculo algebraico, en la Educación Básica Secundaria, y la geometría analítica, el cálculo integral y diferencial en la Educación Media (MEN,2006).

En este sentido, lo planteado en Los Lineamientos Curriculares (MEN, 2008) propone las situaciones problemas como proceso para darle sentido y significado a la variación y determina, de igual forma, que el desarrollo del pensamiento variacional desde temprana edad permite a los estudiantes por medio de las situaciones problema comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas que se presentan en el estudio formal del álgebra y así mismo, los fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

De esta forma, se reconoce que el trabajo con ecuaciones de primer grado es fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico y la construcción del conocimiento matemático. Donde es pertinente indagar sobre los procesos de tratamiento que dan los estudiantes de grado octavo al abordar una ecuación lineal permitiendo dar cuenta de los métodos empleados, de ahí que se puedan desarrollar estrategias y habilidades que potencien el proceso de resolución de ecuaciones y brinden elementos de análisis a docentes e investigadores.

CAPÍTULO 2

ELEMENTOS DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este apartado se proponen tres dimensiones que se tendrán en cuenta para consolidar algunos referentes conceptuales que sustentan la problemática planteada en esté trabajo y permitirán, además, fundamentar tanto la propuesta como el análisis de resultados obtenidos a partir de las acciones realizadas por los estudiantes al enfrentarse a la propuesta planteada. Dichas dimensiones conceptúales son: la matemática, la curricular y la didáctica.

En este sentido, es pertinente analizar estas tres dimensiones en tanto brindan elementos de análisis para implementar el modelo de la balanza virtual y para el análisis de los resultados de la aplicación de la misma. De igual forma, es adecuado establecer unas categorías para abordar estas dimensiones, puesto que, gracias a los múltiples avances en las investigaciones en el campo de la Educación Matemática, existen diferentes propuestas y/o enfoques para hacerlo.

2.1 Dimensión Matemática

En esta dimensión se presenta desde una perspectiva matemática, algunos conceptos y nociones pertinentes para el desarrollo de esta propuesta, a saber: las expresiones algebraicas, como una noción fundamental del álgebra que permite representar algunas situaciones mediante números y variables. Las expresiones polinómicas (o polinomios) y las ecuaciones que surgen a partir de una relación de equivalencia entre dos expresiones polinómicas.

Posteriormente se presenta y relacionan dos aspectos importantes con el concepto de igualdad: la relación de equivalencia y la lógica ecuacional. Ya que es de suma importancia que a partir de una ecuación se puedan generar una cadena de ecuaciones equivalentes a una dada y dar cuenta de una concatenación en los procesos que se realizan.

2.1.1 Las expresiones algebraicas, los polinomios y las ecuaciones

Las expresiones algebraicas resultan de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) que se realizan entre números reales y variables, siendo necesario, para algunos casos, restringir las variables a efectos que la expresión represente un número real, lo cual está relacionado con el dominio de la variable. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$\sqrt{x}, \qquad \frac{3x^3-4xy}{x+y}, \qquad x^3 - 5x^2 + 2, \qquad 3x^2 + 4x, \qquad 2x$$

En el primer caso, el dominio de la variable debe de estar restringido única y exclusivamente en el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, lo cual indica que el dominio de ésta, está dado por todos los números reales positivos y el cero. Para el segundo caso, la expresión racional, los valores permisibles para las variables x e y están determinados en el conjunto $\mathbb{R}$, si y sólo si $x \neq y$. Por su parte, el tercer, cuarto y quinto caso, tienen como dominio de la variable el conjunto $\mathbb{R}$, siendo este tipo de expresiones algebraicas conocidas como expresiones polinómicas.

Así mismo, se define las expresiones polinómicas desde el álgebra moderna Birkohff & Maclane (1970) catalogan el polinomio formal sobre x en D a cualquier expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (a_0, \dots, a_n \in D; a_n \neq 0 \; si \; n > 0)$$

Donde D es un dominio de integridad[3], y como afirma Luque, Mora & Torres (2006), n es un $\mathbb{Z}^+$ y se le llama grado del polinomio, los coeficientes a_i son números reales y a cada uno de los monomios o sumandos de la expresión se les llama términos del polinomio; el símbolo x del cual no se tiene información se le llama por esta misma razón, *indeterminada.* Adicionalmente, al coeficiente de la potencia más alta de la variable x se le llama coeficiente principal. El mayor valor de n en la expresión es lo que se determina como el grado del polinomio $P(x)$ y se denota como $gra\,P(x) = n$. Además, se dice que dos polinomios (formales) son *idénticos* cuando tienen el mismo grado, los mismos coeficientes de las mismas potencias de x.

De acuerdo con lo anterior, es posible establecer distintos polinomios en una misma variable y se pueden presentar casos donde los coeficientes de los polinomios sean iguales, por tanto, ambos polinomios también lo serán. Por ejemplo, si:

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$

y, $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m$

[3] Se entiende para este trabajo como dominio de integridad a un conjunto M con las operaciones de adición y multiplicación bien determinadas para los elementos $a, b, c, \dots$ que cumpla con los siguientes postulados: (i) cierre, (ii) Unicidad, (iii) Conmutativa, (iv)Leyes de asociatividad, (v) Ley distributiva, (vi) Cero, (vii) Unidad y $(viii)$Inverso aditivo. Es decir, el conjunto M sea un *anillo conmutativo.* Además, que se verifique el postulado (ix) Ley cancelativa.

Entonces, $P(x) = Q(x)$ si y sólo si $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$. Es decir que los polinomios son iguales si los coeficientes de los términos los son.

El trabajo con polinomios, de acuerdo con la teoría de ecuaciones da a lugar dos tipos de relaciones: la desigualdad, que no es objeto de estudio en este trabajo, y la de igualdad:

$$P(x) = \mathrm{Q(x)}$$

Es decir:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_mx^m$$

La igualdad polinómica anterior es lo que se conoce como la forma general de una ecuación polinómica, en la cual, $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \in \mathbb{R}$, n continua siendo un entero positivo y el grado de la ecuación es el mayor exponente de la variable, para este caso n. A su vez, el grado de la ecuación determina una tipología de ecuaciones. Así, si la ecuación es de grado 1, se le conoce como ecuación de primer grado o lineal, si la ecuación es de grado 2, se le conoce como ecuación de segundo grado o cuadrática, si la ecuación es de grado 3, se le conoce como ecuación de tercer grado o cúbica y para una ecuación de grado n, se le conoce como ecuación de enésimo grado.

En estas ecuaciones polinómicas surge el concepto de raíz, entendido éste como los posibles valores reales para la variable (x), tal que al sustituirlos en la ecuacion se llegue a una identidad $r = r$, $\forall r \in \mathbb{R}$, es decir, el valor r satisface la igualdad.

Teniendo en cuenta el estudio de la teoría de ecuaciones es posible clasificar a estos objetos matemáticos en tres tipos: ecuaciones condicionales, identidades e inconsistentes. Un ejemplo del primer tipo de ecuación es la expresión: $2x + 10 = 20$, cuya raíz "x" está restringida, es decir, sólo se cumple para un conjunto particular de raíces que al ser reemplazado hacen cierta la igualdad; para este caso la raíz es 5 porque permite que se mantenga la equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de la igualdad. El segundo tipo de ecuaciones, las identidades, se tiene a manera de ejemplo la siguiente expresión: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, que se verifica para cualquier valor real que tome "x" e "y".

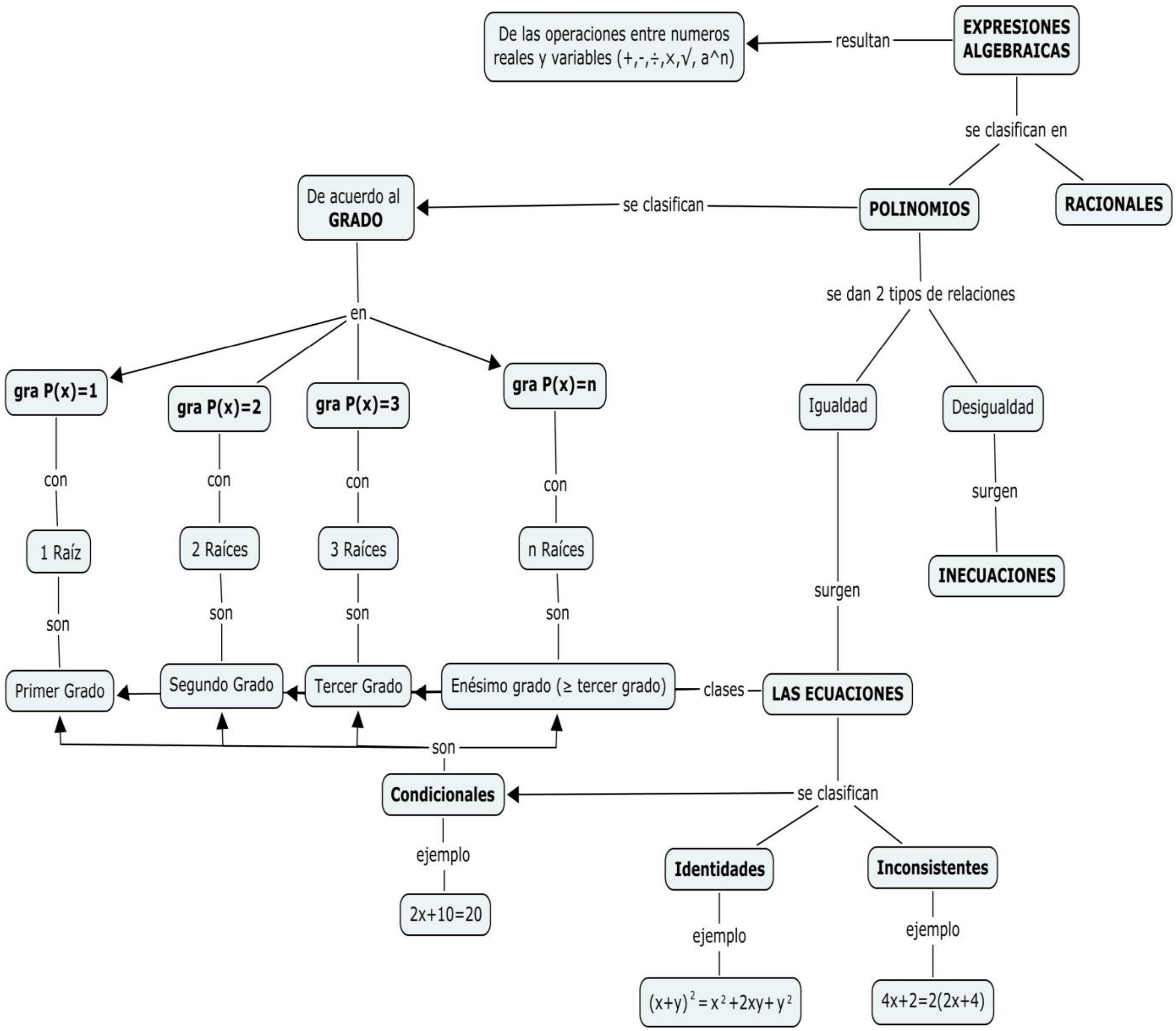
El tercer tipo de ecuaciones, las inconsistentes, se caracterizan por no tener solución, es decir, dan paso a inconsistencias. Por ejemplo, la ecuación:

$$4x + 2 = 2(2x + 4).$$

No tiene raíces en tanto se llega a la inconsistencia 2=8.

Es importante mencionar la relación que existe entre estos conceptos o nociones matemáticas pertinentes para este trabajo, las expresiones algebraicas, los polinomios y las ecuaciones. Porque permite dar cuenta de la forma como emerge el concepto de ecuación a partir de nociones generales y elementales como lo son las expresiones algebraicas. Además, se pone de manifiesto aquellos elementos matemáticos fundamentales como lo son la igualdad de polinomios para afianzar el concepto de ecuación y evidenciando lo potente del concepto de igualdad como relación de equivalencia al momento de trabajar con ecuaciones de primer grado.

Por tanto, es importante resaltar el concepto de ecuación polinómica puesto que permite dar herramientas de análisis en relación con la aplicación del modelo y al momento de revisar los resultados obtenidos. A continuación se presenta de manera esquemática un diagrama que recoge los elementos conceptuales más relevantes y sus relaciones que hasta el momento se han caracterizado en este apartado:



Esquema 1. Diagrama de los elementos conceptuales de las expresiones algebraicas, polinomios y ecuaciones.

Por otro lado, es fundamental darle un sentido a la significación del signo igual como relación de equivalencia para poder dar cuenta de esa igualdad entre polinomios que se mencionó anteriormente y de cierta forma darle una claridad total a lo que se considera por igualdad en este trabajo.

2.1.2 La igualdad como relación de equivalencia y la lógica ecuacional

El concepto de igualdad en este trabajo ha sido mencionado ciertamente desde las dificultades que tienen los estudiantes al momento de significar el signo igual, los cuales dependiendo de la conceptualización que tienen de éste les lleva a cometer errores en el tratamiento que le dan a una ecuación. Por lo tanto, es importante dar un espacio para adoptar una postura acerca de la forma como se debe significar e igualmente dar una distinción entre signo igual "=" e igualdad y este concepto matemático se puede referenciar desde una perspectiva local, un trabajo de pre-grado acerca de los *significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado* donde Infante & Hurtado (2010) afirman que:

> Se debe hacer énfasis en una clara distinción entre lo que es la igualdad como concepto matemático, abstracto, ideal y asequible únicamente por la mente humana y lo que es el símbolo del signo igual, el cual permite evocar, hacer referencia y conceptualizar la igualdad en matemáticas y, que a su vez permite la manipulación y tratamiento en el interior de un registro de representación dado. En otras palabras, la igualdad como concepto matemático subyace del símbolo del signo igual. (p.26)

De acuerdo con lo anterior, el símbolo del signo igual "=" no es más que una representación de un concepto matemático y determina una igualdad entre dos expresiones matemáticas, de cierta forma el concepto de igualdad debe ser representado y el símbolo del signo igual lo hace con el fin de que se pueda dar un tratamiento al objeto matemático que se iguala.

Ahora, el concepto de igualdad en una ecuación hace referencia a la equivalencia que existe entre los miembros derecho e izquierdo de una ecuación y es necesario mencionar como se da esa relación de equivalencia entre las partes. Desde la teoría de conjuntos se puede evidenciar mediante el axioma de extensión como se da esa relación a partir de conjuntos.

Sea A y B dos conjuntos, y todo elemento de A es un elemento de B, y todo elemento de B es un elemento de A, entonces A es igual a B.

Simbólicamente se puede representar así:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x: x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x: x \in B \rightarrow x \in A)$$

Este axioma pone de manifiesto una relación de equivalencia a partir de un sentido de doble pertenencia entre conjuntos y esto es lo que determina la igualdad.

Entonces, la igualdad es una relación que se define entre dos objetos matemáticos, que pueden ser números, una ecuación, un vector etc. A partir de esto, se empieza a establecer la importancia de ver la igualdad como una relación de equivalencia, lo cual implica determinar algunas propiedades de la igualdad que definan esa relación de equivalencia entre objetos matemáticos. Las propiedades de la igualdad son las siguientes:

Sean a, b y c números reales, la relación de equivalencia se define con las siguientes propiedades

1. *Reflexiva:* $a = a$

2. *Simétrica:* si $a = b, entonces\ b = a$

3. *Transitiva:* si $a = b, y\ b = c, entonces\ a = c$

De acuerdo con estas tres propiedades de la igualdad se observa que existe una relación binaria entre los números a, b,c al igual que cuando se habló de conjuntos *A y B* donde existe una doble pertenencia entre los elementos de dichos conjuntos. No importa el conjunto numérico donde se trabaje sean números naturales, enteros, reales u otros. Se pueden generar relaciones de equivalencia por ejemplo[4]:

$Sean\ m, n, r, s\ \in N\ y\ sea$

$(n, m) \sim (r, s)\ mediante\ una\ relacion\ de\ equivalencia, entonces$

$(n, m) \sim (r, s) \leftrightarrow n + s = r + m\ (por\ definición)$

- ✓ $(n, m) \sim (n, m) \leftrightarrow m + n = m + n\ (propiedad\ reflexiva)$
- ✓ $(n, m) \sim (r, s) \rightarrow (r, s) \sim (n, m)\ así\ n + s = m + r, entonces\ r + m = s + n\ (propiedad\ simétrica\ )$
- ✓ $(m, n) \sim (r, s) \land (r, s) \sim (o, p) \rightarrow (m, n) \sim (o, p)\ donde\ o\ y\ p\ \in N$

$sea\ n + s = m + r\ y\ r + p = s + o, entonces\ n + p = m + o$

$De\ esta\ forma\ se\ tendria\ que$:

$$[(m, n)] = \{(r, s) \therefore (r, s) \sim (m, n)\}$$

De esta manera, la pareja (m, n) esta relacionada con el conjunto de parejas (r, s) que cumple dicha condición. Así, es posible también observar que la teoría de conjuntos hace referencia a la igualdad y se establece a partir de las

[4] Tomado de la tesis de pregrado de S*ignificados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado* realizada por Infante & Hurtado en el Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

relaciones de equivalencia y dicha equivalencia entre conjuntos o números es representada por el símbolo del signo igual.

En este mismo sentido, el símbolo del signo igual juega un papel preponderante en las relaciones de equivalencia entre dos objetos matemáticos y particularmente lo hará también en la igualdad que se establece al plantear una ecuación de primer grado, específicamente en el momento que se empiezan a generar cadenas de ecuaciones equivalentes a una anteriormente dada. Es posible entonces dar cuenta del concepto de lógica ecuacional, la cual se referencia desde el trabajo de investigación de Castaño (2008), donde afirma que:

> Es aquella que estudia las ecuaciones o identidades en estructuras algebraicas. Esta se puede considerar como aquella que formaliza los métodos con los cuales se deduce una ecuación a partir de un conjunto de ecuaciones arbitrario y fijo, en una estructura algebraica cualesquiera. (p.46)

Por ende, la lógica ecuacional está estrechamente relacionada con el álgebra universal.

Ahora, se considera una cadena de ecuaciones como un proceso el que permite generar nuevas ecuaciones a partir de una ecuación dada, se puede emplear cierta logicidad que da cuenta de dicho proceso, es decir, de una ecuación P se puedan dar ecuaciones Q, R, S, etc; por medio de un conjunto de reglas propias de la igualdad y el dominio de las estructuras algebraicas en el cual se encuentra la ecuación. En esta misma percepción se puede mencionar de una Teoría Ecuacional, presentada por un conjunto de ecuaciones las cuales son cerradas bajo el operador de consecuencia lógica $(=)$.

Así, lograr este proceso de concatenación o cadena de ecuaciones es permitido a partir de la deducción, la cual establece las relaciones lógicas entre cada una de las ecuaciones que hacen parte de la deducción de una ecuación P a partir de un conjunto Q de la cadena de ecuaciones. Todo este proceso se define como el concepto de deducción ecuacional o demostración ecuacional (Castaño, 2010).

De este modo, las cadenas de ecuaciones tienen una logicidad que les permite estructurarse desde la deducción ecuacional y esa logicidad está conformada por una serie de reglas que son las que permite obtener nuevas ecuaciones a partir de una ecuación dada hasta llegar a una conclusión. Tales reglas son las siguientes:

1. **Tautología:** $\boldsymbol{a_k}$ es una sustitución de $x \approx x$.
2. **E - Axioma:** a_k es una instancia de sustitución de alguna ecuación en **E.**
3. **Simetría:** si a_k es de la forma $t \approx s$, entonces existe un $i < k$ tal que a_i es de la forma $s \approx t$.
4. **Transitividad:** si a_k es de la forma $t \approx s$, entonces existen $i, j < k$ tales que a_i es de la forma $t \approx r$ y aj es de la forma $r \approx s$.
5. **Reemplazo:** si a_k es de la forma $\delta(t_1,\ t_2, \dots, t_n) \approx \delta(s_1, s_2, \dots, s_n)$, donde $\delta \in \sum n$, entonces existe $i_1, i_2, \dots, i_n$ tales que $\delta i_1, \dots, \delta i_n$ son respectivamente $t_1 \approx s_1, \dots, t_n \approx s_n$.

Las dos primeras reglas son axiomas y las tres últimas son reglas de inferencia que conjuntamente permiten generar nuevas ecuaciones a partir de una dada. Estas reglas ponen de manifiesto que las cadenas de ecuaciones que se forman no son arbitrarias, sino que tienen una estructura lógica al momento que se van generando. El siguiente ejemplo[5] muestra el proceso formal de generar una ecuación a partir de un conjunto de ecuaciones dada, justificando cada tratamiento lógico con las reglas mencionadas anteriormente:

Sea $\sum = \{f,\ g\}$ un lenguaje, $X = \{x,\ y\}$ el conjunto de variables y $E = \{fgx \approx x, ggx \approx x\}$ el conjunto de $\sum$– ecuaciones. Mostremos que $E \vdash fx \approx gx$.

1. $fgx \approx x$ (E-axioma)
2. $ggx \approx x$ (E-axioma)
3. $fggx \approx gx$ (sust. de x por gx en 1)
4. $fggx \approx fx$ (reemplazamiento de f en 2)
5. $fx \approx fggx$ (simetría en 4)
6. $fx \approx gx$ (transitividad de 5 y 3)

Nótese, que la sustitución de términos se utiliza como una regla de inferencia. Además, en el ejemplo se puede observar que cada ecuación obtenida se deduce a partir de una dada haciendo uso potente del concepto de lógica ecuacional mencionado anteriormente. En sí, estas determinaciones que se toman de la igualdad desde la relación de equivalencia y la lógica ecuacional permiten obtener herramientas de análisis para la implementación del modelo y para los resultados que se obtengan de la aplicación de la prueba.

[5] Tomado de la tesis de pregrado Lógica Ecuacional realizada por Castaño J. en el Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle.

2.2 Dimensión curricular

La construcción de esta dimensión se encuentra relacionada con el contexto colombiano e institucional, por lo cual se apoya en referentes tanto nacionales como institucionales, se hace uso para el primer caso de dos documentos oficiales como lo son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). Respecto al primer documento, se presenta una breve descripción histórica acerca de la trayectoria del currículo y sus objetivos para el mejoramiento de la educación, teniendo en cuenta la formación de docentes y los contenidos direccionado por el Ministerio de Educación Nacional, haciendo énfasis en la forma como se organiza el currículo desde tres aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto. Con respecto al referente institucional, se realiza una descripción del plan de estudios de la institución donde se aplicara la propuesta, con el fin de resaltar que las ecuaciones lineales son objeto de estudio en el colegio para grado octavo y los estudiantes tienen unos conocimientos previos del trabajo con ecuaciones.

2.2.1 Referentes nacionales

La perspectiva curricular hace mención del marco legal direccionado por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] a través de diferentes momentos históricos. Por ejemplo, en Colombia durante la década del 60 al 70 surge la llamada “matemática moderna” y tal como lo afirma el MEN (1998) enfatiza en las estructuras abstractas, profundizar en el rigor lógico fundamentados a través de la teoría de conjuntos y el cultivo del álgebra. El efecto causado a la renovación de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias no produjo el cambio esperado, por consiguiente, se inicia en los años 70 y 80 un debate para volver curricularmente a lo básico: las cuatro operaciones con enteros, fracciones y decimales. En este sentido, a partir de 1975 se lanzó el Programa Nacional de Mejoramiento Cualitativo de la Educación para actualizar el currículo, formar y perfeccionar docentes a través del Ministerio de Educación. Por consiguiente se inicia una reforma escolar en Colombia con el fin de mejorar cualitativamente la educación.

De ahí que, diferentes programas, decretos y resoluciones direccionaron los objetivos curriculares, como la Federación Colombiana de Educadores (FECODE), que por ejemplo, se enfocó principalmente en los contenidos sobre el currículo.

Más tarde, estos cambios dieron origen a la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, la cual establece nuevas condiciones y orientaciones que habrían de guiar la política curricular, complementariamente se establecen para tal efecto, los Lineamientos Curriculares en 1998 y posteriormente los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en el 2006.

De acuerdo con lo anterior, en nuestro país el currículo de matemáticas se estructura o se direcciona en relación con los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

Ahora, el enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la compresión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como lo son la complejidad de la vida y el trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana. (MEN, 1998)

Por consiguiente, se considera que el conocimiento matemático en la escuela está pensado o se representa desde una interacción social y cultural, en donde las experiencias que surgen durante estas interacciones manipuladas y contextualizadas en la escuela puedan dar construcción a conceptos matemáticos. Los alumnos aportan en las aulas de clase su cultura en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y a su vez los docentes de matemáticas trabajan desde su cultura, para la construcción de esos significados (MEN, 1998). En la formación matemática básica, se busca potenciar el conocimiento matemático mediante la apropiación por parte del estudiante de contenidos relacionados con los sistemas matemáticos, donde es necesario relacionar esos contenidos de aprendizaje con la vida diaria de los alumnos. De esta manera y de acuerdo con los Lineamientos Curriculares de matemáticas, el currículo se organiza en tres aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

El primer aspecto, los procesos generales de pensamiento, tienen que ver con el aprendizaje, donde se relacionan el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. La resolución y planteamiento de problemas juega un papel importante en el desarrollo y estudio de las matemáticas, por tal motivo debe ser un objeto de enseñanza en la escuela desde temprana edad. Los estudiantes al resolver problemas desarrollan su capacidad de comunicarse matemáticamente y la capacidad de utilizar razonamientos de más alto nivel.

Ahora, el razonamiento tiene que ver con otros procesos de las matemáticas como la comunicación, la modelación y como los procedimientos. Es decir, el estudiante debe justificar las estrategias y procedimientos que le permiten llegar a una conclusión, debe argumentar los algoritmos utilizados durante el tratamiento a una ecuación de primer grado, por tanto resulta interesante observar todos estos procesos de razonamiento para tenerlos en cuenta tanto en la realización de la secuencia como en la producción de los estudiantes al enfrentarse a ésta.

Por otra parte tenemos el segundo aspecto, los conocimientos básicos, que tienen que ver con procesos específicos que funcionan como herramientas mediadoras para desarrollar pensamientos matemáticos como: el numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Estos modos de pensamientos son sistemas propios de las matemáticas en los cuales se encuentran: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos, respectivamente. Así pues, para el desarrollo de este trabajo y de acuerdo con la propuesta planteada, se hace indispensable trabajar con el pensamiento variacional con los sistemas algebraicos y analíticos, porque hace referencia a la variación y el cambio así como su representación en distintos registros o sistemas simbólicos como el algebraico.

Por último se encuentra el contexto que tiene que ver con el entorno y los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende, todas la variables como las condiciones sociales y culturales que se presentan deben tenerse en cuenta para el diseño de situaciones en el proceso de enseñanza (MEN, 1998). Por tal razón el contexto más propicio para adentrar los estudiantes a las matemáticas debe relacionar las matemáticas mismas, la vida diaria y de las otras ciencias, así se da sentido y utilidad a las matemáticas que el estudiante aprende.

Teniendo en cuenta los tres aspectos mencionados anteriormente (procesos generales, conocimientos básicos y el contexto) que hacen parte de la organización del currículo de acuerdo con lo planteado por el MEN (1998), es importante mencionar cuales son los referentes adoptados en este trabajo en relación con la propuesta curricular local a través de la implementación y aplicación del modelo virtual de la balanza.

En relación con los procesos generales, se enfoca la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos, puesto que es una actividad importante para que el estudiante además de razonar elabore modos de pensar propios que le permitan trasformar expresiones en otras equivalentes. Proceso que determina el aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” siendo potente para la construcción del conocimiento matemático, ya que cuando el estudiante modela situaciones hace uso técnicas, métodos destrezas y habilidades que con el uso constante pasan hacer más eficaces, más rápidos y de mayor exactitud (MEN, 1998). Lo anterior resulta interesante y se relaciona con la problemática planteada en este trabajo, porque en la resolución de ecuaciones como relación de equivalencia el estudiante debe tomar un camino para conseguir la solución de la ecuación, de esta manera se pueden observar los procedimientos, estrategias y métodos de resolución empleados por el estudiante en el tratamiento que realiza a una ecuación.

Por esta razón, la implementación de la propuesta el modelo virtual de la balanza se sustenta en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, ya que es pertinente que el estudiante aparte de que razone sobre objetos matemáticos, también pueda hacer cálculos de forma correcta, y tome conciencia sobre las propiedades que se ponen en juego al generar una cadena de ecuaciones equivalentes.

De acuerdo con lo anterior, el modelo virtual de balanza implica que los estudiantes interactúen con el medio de forma dinámica y se espera que trasciendan el método algebraico de resolución a una variedad amplia de modalidades de ecuaciones y que de cierta manera infieran el método de trasposición de términos como una relación de equivalencia, dando claridad de las cadenas lógicas de ecuaciones que desarrollan y contextualizándolos con su vida diaria.

Ahora, con respecto a los conocimientos básicos, como se mencionó anteriormente es idóneo trabajar con el pensamiento variacional ya que los sistemas algebraicos hacen parte del objeto de estudio de este trabajo y propiamente este tipo de pensamiento permite referir a fenómenos de cambio y variación. Por último, la implementación de la propuesta en relación con el contexto se ubica en un ambiente totalmente matemático, es decir, se busca que el estudiante desarrolle unas habilidades para trabajar las ecuaciones que de forma posterior puedan ser enfocadas en situaciones problemáticas referidas a las matemáticas mismas, buscando, tal como lo menciona el MEN (1998), introducir esta área de conocimiento en la cultura con el fin de no sólo desarrollar en el estudiante métodos o técnicas procedimentales sino también procesos de pensamiento que le den un sentido y una utilidad a las matemáticas que el estudiante aprende.

Es importante resaltar que de acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que no existe un apartado específico donde se sitúen la resolución de ecuaciones asociada al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, sin embargo se reconoce la necesidad de desarrollar un modo de pensamiento que le permita al estudiante modelar situaciones de cambio y variación en donde objetos matemáticos como las ecuaciones en un sistema algebraico es potente para representar fenómenos asociados a la variación y al cambio, no obstante, los estudiantes sólo pueden dar cuenta de ello cuando cobran sentido el sistema simbólico y los distintitos tratamientos que se realizan a su interior, como es el caso de la resolución de ecuaciones, lo cual se ha convertido, de acuerdo con investigaciones, en procesos rutinarios, memorísticos, en un juego de símbolos y reglas carente de todo sentido y utilidad.

Por otra parte, y en relación con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), los cuales apuntan al desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes desde sus primeros ciclos de escolaridad. Donde las tablas, los diagramas, las representaciones icónicas, entre otras, juegan papeles preponderantes en la construcción y desarrollo de este tipo de pensamiento. De la misma forma proponen:

> Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p.67)

Desde esta perspectiva curricular a temprana edad el estudiante es aproximado en primera instancia al reconocimiento de expresiones equivalentes y patrones, posteriormente a la construcción, representación y utilización de métodos que le permitan mostrar el cambio o la variación y finalmente a modelar y analizar situaciones a partir del lenguaje algebraico. En este mismo sentido según el MEN (2006) “En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado a con las variaciones es el sistema algebraico” (p. 67). Como se presenta en los estándares de grados octavos y novenos se le da mayor importancia a la construcción y significación del lenguaje algebraico y los sistemas analíticos y que por tanto las ecuaciones algebraicas y sus procesos de resolución cobran sentido.

De acuerdo con esto, los estándares que hacen alusión a las ecuaciones en la educación básica secundaria y sus procesos de solución son los siguientes:

GRADO ESCOLARIDAD	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
De sexto 6° a séptimo 7°	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
De octavo 8° a noveno 9°	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
	Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 1. Estándares básicos de competencias: pensamiento variacional

Por consiguiente, es necesario resaltar que para la implementación de la propuesta el modelo virtual de la balanza se tomará explícitamente el estándar donde el estudiante construye expresiones algebraicas equivalentes a una dada. Lo anterior es así porque, en primera instancia, se relaciona con el objetivo de trabajo donde es primordial que el estudiante domine procedimientos y resuelva ecuaciones de primer grado teniendo en cuenta la relación que existe entre el lado izquierdo y el derecho de una ecuación. Además, el estándar permite dar cuenta justamente del proceso en el que el estudiante genera expresiones equivalentes, es decir, una cadena lógica de ecuaciones que conforman una estructura lógica.

De ahí que, el estudiante afrontará las diferentes dificultades mencionadas anteriormente en la construcción de lenguaje y pensamiento algebraico, por esta razón con la propuesta se busca analizar y diseñar estrategias para su desarrollo en la escuela.

2.2.2 *Referente institucional*

La institución Santa Isabel de Hungría sede colegio compartir, lugar donde se realizará la aplicación de la propuesta, dispone, como es debido, con su plan de estudios en donde se puede apreciar que para el área de matemáticas se cuenta con unos componentes relacionados con los pensamientos matemáticos que se deben desarrollar en los estudiantes y con sus sistemas matemáticos propios ya mencionados. Posteriormente, se establece una componente denominada "enseñanzas" en donde se determinan las competencias y habilidades a desarrollar en los estudiantes, luego, una componente para los ejes temáticos que direccionan los conceptos a trabajar y, finalmente, la componente de evaluación, donde se establecen los indicadores de desempeño que debe alcanzar cada estudiante y un tiempo previsto para su desarrollo. (Ver anexo 1)

De acuerdo con esto, es necesario mencionar que, según el plan de estudios de la institución en el área de matemáticas, existen unas componentes a trabajar y este mismo formato se aplica a cada grado de escolaridad, también se determina un tiempo de doce semanas (I periodo) para dar cumplimiento al plan de estudios. Además, se registran con anterioridad las metodologías a trabajar y los recursos que se van a implementar en el trascurso del periodo.

Dos cuestiones que pone de relieve este referente institucional, pertinente de mencionar, es que: por un lado, el plan de estudios de la institución deja ver explícitamente que las ecuaciones lineales son objeto de estudio en el segundo periodo de grado octavo, por tanto al momento de implementar la propuesta los estudiantes solo tendrán los conocimientos básicos acerca de que es una ecuación y las propiedades de la igualdad que de acuerdo con el plan de estudios se da en grado sexto (ver anexo 1). Por tanto, son muy pocas las bases o nociones que tienen los estudiantes acerca de qué es una ecuación y sus procesos de resolución. Por otro lado, es interesante resaltar que en el plan de estudios de la institución para la parte de enseñanzas existen unas competencias relacionadas con la ejercitación de procedimientos, por tal razón, podríamos cuestionarnos si en la en la institución el trabajo con ecuaciones se ve como un proceso procedimental, rutinario o mecánico, que está estrechamente ligado con los pasos que se deben seguir para dar solución a una ecuación y no como un proceso de razonamiento con sentido de un por qué y un para que el trabajo con ecuaciones.

2.3 Dimensión didáctica

En esta dimensión se presentan tres apartados tal como se siguen: (1) algunas dificultades que tienen los estudiantes en el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado, esto de acuerdo con algunas investigaciones realizadas por Kieran (1992), Filloy & Kieran (1989), Martínez (2009), Socas et al. (1996); (2) algunos *modelos*[6] que se adoptan en la enseñanza de las ecuaciones y (3) el modelo de la balanza virtual que se adopta en este trabajo en virtud de dar cuenta del objetivo general.

Las investigaciones que permiten mostrar las dificultades[7] asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado son aportes realizados por diversas fuentes de la comunidad en Educación Matemática que consideran central el desarrollo del pensamiento algebraico y con ello la existencia actual de múltiples problemáticas que se revisten en este proceso.

2.3.1 Algunas dificultades que se presentan en torno a la resolución de ecuaciones de primer grado

Algunas dificultades que reportan las investigaciones con respecto al tratamiento en el sistema simbólico-algebraico de las ecuaciones, se describen a continuación:

Una de las dificultades centrales respecto a la noción que tienen los estudiantes del signo igual, pues ésta es como una señal de “hacer algo” y no como una relación de equivalencia entre los lados izquierdos y derecho de la ecuación (Kieran, 1992), Tal situación conlleva a los estudiantes a abusar del signo igual, tal como se presenta a continuación:

$$3x + 5 = 10 + 2x$$

[6] Se entiende aquí el concepto de modelo tal como lo hacen Castro y Castro (1997) en el sentido que, “los modelos son esquemas o materiales estructurados, conectados mediante leyes o reglas, que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones y propiedades” (p. 2).

[7] Se debe aclarar que muchos autores trabajan dificultades, errores y obstáculos en álgebra sin considerar su naturaleza u origen epistemológico. De acuerdo con Palarea (1996), se entiende que “las dificultades son de procedencia distinta se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos mediante errores” (p. 74).

$$3x + 5 - 5 = 10 + 2x$$

$$3x = 10 + 2x - 2x - 5$$

$$3x - 2x = 10 - 5$$

$$x = 5$$

El ejemplo anterior permite rastrear una ausencia de conocimiento del significado del signo igual como relación de equivalencia en la cadena de ecuaciones, dado que los estudiantes trabajan sobre el lado derecho o izquierdo de la igualdad sin modificar el otro miembro de la misma forma. La ausencia de ese conocimiento puede tener su génesis, quizá en el uso del signo igual para conectar un problema con el resultado numérico, hecho que es frecuente en los estudios anteriores. Así, el signo igual se usa con menor frecuencia para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado (Socas et al, 1996). Esta ausencia de conocimiento respecto al signo igual en las ecuaciones tiene implicaciones sobre la conceptualización que los estudiantes dan a estos objetos matemáticos y sobre la significación que logran tanto de las ecuaciones como de la solución encontrada al resolverla.

Lo mencionado se muestra en el ejemplo que expone en su estudio el grupo Azarquiel (1993), en donde se le pide a una estudiante resolver la ecuación $3 + 4b + 3 = 3b + 1$, y de inmediato pregunta "¿puedo cambiar la b por la x?", de una u otra forma se puede percibir que el estudiante asocia únicamente el tratamiento con ecuaciones con la manipulación de la variable x. En otro caso presentado en ese mismo estudio, un estudiante al resolver la ecuación

$$\frac{1}{2} - \frac{t}{2} = \frac{3}{2} - t,$$

Y obtener como resultado $t = 2$, pregunta a su profesor acerca de la veracidad de su resultado diciendo: *"¿lo tengo bien?"*, el docente le pide que lo compruebe, éste no entiende lo que se le manda, es decir, que lo que se espera, es que él reemplace la solución hallada en la ecuación inicial o en alguna de las cadenas equivalentes creadas por él mismo. Lo anterior, permite dar cuenta que el estudiante no establece una relación entre la solución encontrada y la ecuación dada y, por tanto, ve la solución de una ecuación como una mera aplicación de reglas que permiten encontrar un número, el cual debe ser comúnmente un entero.

El anterior ejemplo pone de manifiesto que no es claro entonces para el estudiante que la solución encontrada para la ecuación debe satisfacer la equivalencia en cualquiera de las ecuaciones generadas, pues todas son lógicamente equivalentes.

Otros tipos de dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones son: (a) el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos a nivel sintáctico, (b) la pertinencia del dominio de una ecuación cuando se presentan números racionales y (c) es la presencia del signo menos en la ecuación. Con respecto a la primera dificultad, suele suceder en ocasiones que los estudiantes le dan un mal uso a la propiedad distributiva en ecuaciones como $3(x + 2) = 7x$, donde resuelven $3x + 2 = 7x$ distribuyendo solo él 3 para el primer término; en otras circunstancias como por ejemplo $3(x + 2) = 3x + 6$, hacen buen uso de la propiedad distributiva multiplicando a 3 con x y 2 pero cuando el factor 3 está a la derecha en la expresión tal como se muestra a continuación $(x + 2)3 = 3x + 6$, con frecuencia los estudiantes no saben cómo aplicar la propiedad en mención .(Socas et al, 1996).

En el segundo tipo de dificultad se presenta una serie de errores donde el estudiante prescinde del denominador, por ejemplo en la ecuación $\frac{20x-5}{9} – 7 = 8$, el estudiante resuelve $20x – 5 – 7 = 8$ omitiendo el trabajo con el denominador. En otro caso presente en este mismo estudio, por ejemplo, en $8 + \frac{7x}{3} = \frac{3x}{2}$ el estudiante resuelve $8 + 14x = 9x$. Considerando, distribuir los denominadores $2\, y\, 3$ solo para los términos que están junto al signo igual y olvidando por completo que en el miembro izquierdo de la ecuación planteada el 2 tambien debio ser distribuido para el 8.

Con respecto a la última dificultad (presencia del signo menos en la ecuación), el grupo Azarquiel (1993) refiere en su estudio que los estudiantes tienen una clara percepción que la sustracción es la operación inversa de la adición, pero, en su totalidad no todo estudiante ve la adición como una operación inversa de una sustracción. Por esta razón dificultades asociadas con el signo menos se ponen de manifiesto en situaciones pre-algebraicas y trascienden al álgebra. Así, situaciones como la que se expone en el siguiente proceso suelen suceder:

$$52x – 32 = 25x + 130$$

$$52x – 32 – 32 = 25x + 130 – 32$$

$$52x = 25x + 98$$

$$52x – 25x = 25x + 98 – 25x$$

$$98 = 27x$$

Se revela escasa consistencia en la utilización de operaciones inversas y en otros casos se confunde el signo menos que hace operativa el menos asociado a la naturaleza de un coeficiente, tal como se presenta a continuación:

$$5 - \frac{3(2 - 3x)}{2} = 20(x - 3)$$

$$5 - \frac{6 + 9x}{2} = 20x - 60$$

Se toma el signo menos de la resta entre las dos expresiones en el miembro izquierdo de la ecuación como el signo del coeficiente 3 y por esta razón se multiplica la expresión por -3, posterior a esto, se sigue ubicando el signo menos como operador, es decir, como si no se hubiese hecho uso de éste.

Por otro lado, existen dificultades asociadas a los métodos que utilizan los estudiantes al momento de resolver ecuaciones y donde buscan trascender métodos que les funcionan en ecuaciones aritméticas del tipo $x + b = c$, a otras más complejas (o no aritméticas)) como $ax + b = cx + d$, en donde existe doble ocurrencia de la incógnita. Al respecto, Kieran (1992) cita a Bernard & Cohen (1988) para afirmar que el método de adivinación y prueba es uno de los primeros que son presentados a los estudiantes en la escuela. Así, Al resolver la ecuación $7 + n = 12$, los estudiantes aluden a usar hechos numéricos conocidos, considerando que $7 + 5 = 12$, por lo tanto $n = 5$. Pero cuando se le presentan ecuaciones como $5x - 10 = 2x + 1$ el método parece no funcionar.

Otro ejemplo para caracterizar en este sentido, es el "método del recuento", en el cual Bell, O' Brien, y Shiu (1980) han visto alumnos que usaban el método de cubrir para resolver ecuaciones tales como $2x + 9 = 5x$: “puesto que $2x + 9$ suman $5x$; 9 debe ser igual a $3x$ porque $2x + 3x$ también es igual a $5x$; así x es 3”. Claramente si se complejiza la ecuación con una como por ejemplo: $2x + 9 = 5x + 1$, el método se queda corto para trabajar ecuaciones algebraicas. Finalmente, el conteo también es una técnica de solución usada comúnmente en los primeros acercamientos a la solución de ecuaciones y no es útil para trabajar con ecuaciones no aritméticas.

Estos métodos utilizados por los estudiantes mencionados anteriormente en este trabajo es lo que Filloy y Kieran (1989) determinan como enfoques utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones y los clasifican en: intuitivo, sustitución por tanteo y formal. Es importante aclarar que la dificultad no recae sobre los métodos que utilizan los estudiantes, sino sobre la permanencia exclusiva de éstos y en la trascendencia que les dan a algunos para resolver ecuaciones más complejas en donde no aplican.

De manera general, muchas de las dificultades que se han presentado corresponden a la falta de significación del signo " = " que poseen los estudiantes como relación de equivalencia, lo anterior se puede apreciar desde una perspectiva local, con dos proyectos que ponen de manifiesto y/o evidencian las dificultades que internacionalmente se han detectado y referenciado en este trabajo. De este modo, el trabajo realizado por Infante & Hurtado (2010), pone en evidencia que el énfasis que se le ha dado al signo igual en el marco del trabajo aritmético inclina hacia la necesidad de encontrar el resultado de la ecuación, lo cual hace que los estudiantes al llegar al estudio del álgebra se limiten a aplicar procesos intuitivos o de tanteo, generándose dificultades en el aprendizaje de este campo. Así mismo, reconocen los autores que los estudiantes no ven la importancia que requiere el empleo del signo igual para actividades propias del álgebra, por lo cual se les dificulta reconocer cuando dos expresiones son equivalentes sin necesidad de realizar un cálculo implicado en estas expresiones.

Es por eso que no se descarta la posibilidad de que los estudiantes lleguen a ver el signo igual como una relación de equivalencia entre dos expresiones algebraicas o entre ecuaciones siempre y cuando se les fundamente con el planteamiento de actividades para así lograr dar una caracterización a este signo, para tal efecto se debe tener en cuenta la aplicación de algunas propiedades que conlleva a una concatenación de expresiones que producen ecuaciones equivalentes, como lo es principalmente la propiedad uniforme de la igualdad.

Por otra parte, otro trabajo local realizado por Benalcázar (2012) muestra una clara dificultad que tienen los estudiantes al intentar producir ecuaciones equivalentes a una dada. Puesto que, los estudiantes por una parte no aplican las propiedades de la igualdad para producir ecuaciones equivalentes y de otra parte no reconocen el signo igual como una relación de equivalencia entre los miembros de una ecuación. En este mismo orden de ideas, otra dificultad que resalta Benalcazar (2012) en su trabajo de grado concluye que:

> Los problemas concernientes con la transposición de la cantidad como factor, tuvo que ver con el método de la transposición para cantidades, que asumen el rol de ser positivas o negativas, la cual es extendida a la transposición de términos para factores. Pues bajo esta condición no aplica el decir, cambiar de miembro una cantidad significa, también cambio de signo en esta. De otra

parte en las cantidades de signadas como positivas y negativas son transpuestas con el error en el cambio, conservando estas cantidades los signos. (p.104)

Ahora, las dificultades caracterizadas internacional y localmente servirán como punto de referencia para el análisis de los resultados que se generen a partir de la aplicación de la propuesta. A continuación, se mencionan algunos modelos para la aproximación de los estudiantes al concepto de ecuación como relación de equivalencia, de tal forma que son otra alternativa que aportan significado a los símbolos algebraicos, y contribuyen al proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de ecuaciones.

2.3.2 Algunos modelos para la resolución de ecuaciones de primer grado

Desde el campo de la didáctica del algebra, en particular, en las investigaciones producidas por el grupo Azarquiel (1993), Socas et al. (1996), Palarea (1996), Cabanne (2010) y Martínez (2009), comúnmente se abordan la resolución de ecuaciones de primer grado con base en unas reglas definidas, que en general se vierten en la transposición de términos. Sin embargo, por mayor destreza que logren los estudiantes al usarlas, no necesariamente se garantiza que se configure en ellos el concepto de ecuación como relación de equivalencia, o que el uso de tales propiedades les permita superar ciertas dificultades y errores que se presentan en la resolución de ecuaciones de primer grado, puesto que, muchos de estos errores se producen por los métodos que son válidos en algunos casos únicamente. Tal como se anotó en el apartado anterior.

Tal como lo afirma Socas et al, (1996), “en ecuaciones, los modelos permitirán pasar de forma simple de la situación problemática a la ecuación correspondiente así como iniciar a los alumnos en la resolución y en el conocimiento de las reglas de manipulación de expresiones algebraicas sencillas” (p.170). Es decir, se presentan los modelos en el álgebra como un esquema o material que permite transitar de una situación problema al modelo y de éste a la expresión algebraica correspondiente. Algunos de los modelos que se han escogido para presentar en este trabajo tienen una puesta en común o están referenciados en las investigaciones de Cabanne (2010), Socas et al. (1996) y Azarquiel (1993) como “estructuras” que permiten aproximar al estudiante al concepto de ecuación y su respectiva solución.

- **El modelo de diagramas**

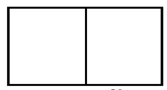
Este tipo de modelo es usado para facilitar a los estudiantes el paso de un enunciado verbal a la formulación o planteamiento de la ecuación en un lenguaje simbólico y, posteriormente, a su solución. Estos diagramas se expresan como cadenas de gráficos que van desarrollando una idea, permitiendo expresar de forma gráfica o lógica la variación y operaciones de un suceso. Por ejemplo, dado el siguiente enunciado: *Hallar un número tal que su triplo aumentado en 2 de 29*, el diagrama que lo representa estaría dado por $s \rightarrow \text{x}\,3 \rightarrow \blacksquare \rightarrow +2 \rightarrow 29$, del cual se puede extraer la operación simbólica $3s + 2 = 29$. El ejemplo anterior permite al estudiante dar cuenta de las operaciones inversas que hay que realizar para obtener la solución, es decir, realizar un recorrido por el diagrama en sentido contrario: al resultado 29 le resto 2 y lo divido entre 3 teniendo como resultado s = 9 (Socas et al, 1996). Ejercicios como éste también favorecen la compresión de las operaciones y sus inversas, y facilitan la adquisición del concepto de ecuación a través de su solución (Azarquiel, 1993).

- **El modelo de tableros**

Este tipo de modelo se presenta a los estudiantes con el fin de establecer y fundamentar el significado del signo igual como el equilibrio o equivalencia que se maneja al resolver una ecuación y la relación que existe entre lo conocido y lo desconocido. Esto se consigue partiendo de materiales manipulativos ya fabricados o construidos por el mismo estudiante. De forma general, este modelo se presenta mediante la manipulación de un tablero o una cartulina divida en dos partes que hacen referencia al lado derecho e izquierdo de la ecuación, la línea del centro de la cartulina o el tablero representa el signo igual. Se manejan fichas de polígonos geométricos de distintos colores, un color y una forma para representar cantidades conocidas (números) y otro para las desconocidas (incógnitas), además se denota las mismas figuras geométricas, pero, con distinto color para las cantidades e incógnitas negativas.

De ahí que, se establecen reglas del juego las cuales básicamente aluden a eliminar o neutralizar figuras del tablero que tengan la misma forma pero diferente color, la idea en este modelo es aislar las fichas que representan incógnitas al lado izquierdo del tablero y las que denotan números al lado derecho con el fin de determinar el valor de una incógnita asociada a un valor numérico. Este tipo de modelo pone de manifiesto la metáfora de equilibrio en el tablero. Por ejemplo, tomando como referencia la ecuación del modelo anterior $3s + 2 = 29$ para trabajarla en un modelo de tablero se tendría algo como lo que sigue:

El estudiante divide una cartulina en dos partes iguales, así:



Supongamos que se eligen las siguientes formas como fichas del tablero:

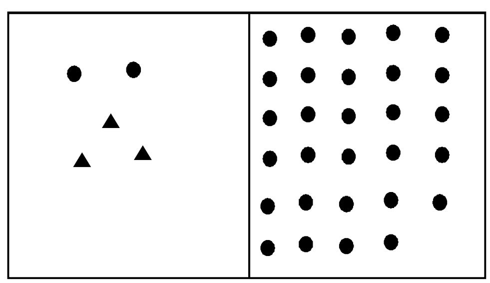
Amarillo para incógnitas negativas △

Negro para incógnitas positivas ▲

Amarillo para números negativos ○

Negro para números positivos ●

La única regla del juego es pareja de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero se neutralizan y eliminan.



$$3s + 2 = 29$$

El ganador del juego será quien logre realizar el proceso correcto de aislar las fichas que representan las incógnitas positivas. Según Socas et al. (1996) este modelo puede ayudar a introducir a los alumnos en el concepto de ecuación, en la observación de algunas reglas de manipulación de la igualdad y en la resolución de ecuaciones lineales sencillas (p.184).

- **El modelo de la balanza**

La utilización de la balanza como “puzzle”, es decir, como juego que consiste en combinar correctamente las piezas de una figura, de tal forma que se equilibre o complemente correctamente las partes de está, se establece como un método fundamental para aproximar a los estudiantes al concepto de ecuación como relación de equivalencia, ya que “la balanza permite tratar el concepto de ecuación como igualdad simétrica, con la incógnita en ambos lados, pudiéndose con este modelo descubrir las leyes uniformes de la igualdad en que se basa la resolución formal de ecuaciones” (Azarquiel, 1993, p.102).

Ciertamente, existen diferentes figuras que hacen alusión al modelo de la balanza, pero básicamente lo que se intenta representar, sin importar la gráfica es que existe un equilibrio entre dos lados. A manera de descripción, la balanza física (material tangible) consta de una base que sostiene una vara que tiene dos platillos iguales, los cuales están ubicados a la misma distancia de la base, tal como se presenta a continuación:

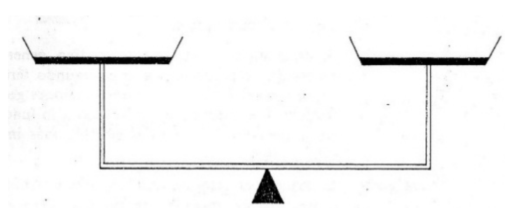


Figura 1. Balanza de dos platillos

La balanza es fundamental para presentar a los estudiantes la relación de equivalencia, puesto que físicamente el estudiante puede asimilar el concepto de igualdad a través del equilibrio de las masas en ambos platillos. Como por ejemplo:

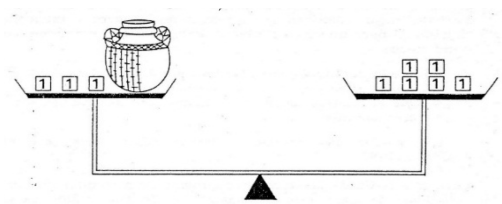


Figura 2. Representacion de pesos en la balanza de dos platillos

Este tipo de situación permite al estudiante establecer la relación de equivalencia a través del equilibrio que existe entre los dos platillos, además de cuestionarle cuál es el peso de la jarra y como debe hacer para dar cuenta de ese valor. De esta manera, emerge el concepto de igualdad y pone de manifiesto que la balanza es un modelo potente que permite establecer relaciones de equivalencia realizando una clara representación del signo igual cuando los dos platillos están en equilibrio.

Particularmente, en el trabajo con ecuaciones la balanza permite modelar situaciones colocando en los platillos ambos miembros de una ecuación, donde, de igual forma el modelo pone de manifiesto la relación de equivalencia que existe entre ambos lados y puede llevar a los estudiantes a que utilicen el método de hacer lo mismo en ambas platillos con el fin de encontrar para un caso específico el valor de la incógnita en una ecuación.

Este modelo concreto, permite dotar de significado las operaciones algebraicas usadas al resolver ecuaciones, dando cuenta sintácticamente de todos los procesos que el estudiante realiza a lápiz y papel con el fin de resolver la ecuación, además, de reforzar la noción de ecuaciones equivalentes. A continuación se presentan dos situaciones favorables para los estudiantes cuando se hace uso del modelo de la balanza en estudios realizados por Vlassis (2002), Radfor & Grenier (1996) se utiliza el modelo para acercar a los estudiantes al concepto de ecuación y la resolución de ecuaciones de primer grado.

En un estudio realizado por Vlassis (citado por Rojano, 2010) respecto al uso de la balanza como modelo que acerca a los estudiantes a las ecuaciones de primer grado y su resolución, se afirma que el uso de la balanza ayudó a los alumnos a aprender el método formal de aplicar en la misma operación en ambos lados de la ecuación. Por su parte, Radford & Grenier (citados por Rojano, 2010) refieren que también contribuye a que los alumnos comprendan la regla de eliminación de términos semejantes cuando están en distintos miembros de una ecuación.

Las dos investigaciones aludidas ponen de manifiesto el modelo de la balanza como un medio pertinente para trabajar las ecuaciones y su resolución. Sin embargo, también es reconocido por diferentes investigadores como Azarquiel (1993), Socas et al, (1996), Cabanne (2010), Rojano (2010) y Rojano & Martínez (2010), algunas desventajas y/o dificultades de este modelo, como por ejemplo: el modelo no permite representar ecuaciones haciendo uso de los números racionales y no permite representar la resolución de ecuaciones de tipo $x + 9 = 0$, siendo esta última dificultad una de las más documentadas, es decir, la incorporación de números negativos y su operatividad a la sintaxis algebraica.

Sin embargo, esta última dificultad del modelo se logra superar a partir del modelo virtual y dinámico de la balanza adoptado en este trabajo, dado que con la incorporación de un sistema de poleas (el cual será descrito con detalle más adelante) que representan cantidades negativas es posible trabajar las ecuaciones que incluyan términos con coeficientes negativos. De esta forma se supera ciertamente la dificultad asociada al modelo.

El uso del modelo de la balanza virtual adoptado aquí, permite pues, de acuerdo con las distintas investigaciones mencionadas anteriormente, un acercamiento al concepto de ecuación y a su resolución como relación de equivalencia, superando la dificultad inherente del modelo concreto asociado al trabajo con cantidades negativas. Es por ello que se toma partido en adoptarlo como ruta de aprendizaje para la resolución de ecuaciones de primer grado.

Así, se considera este modelo a partir de las investigaciones y los trabajos de las profesoras María Teresa Rojano (2010) y Minerva Martínez (2009), como uno de los métodos pertinentes para que los estudiantes conceptualicen las ecuaciones como una relación de equivalencia y no simplemente como algo mecánico que están operando sin conciencia alguna. A continuación se presentará este modelo de balanza virtual.

2.3.3 El modelo de la balanza virtual

La balanza que se implementa en este trabajo se retoma de la tesis de maestría de la profesora Martínez[8] (2009), en la cual se tuvo como propósito

[8] El acceso al simulador que contiene el modelo se hace de manera gratuita siguiendo la URL: http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/index.html

principal, ayudar a los estudiantes de entre 12 y 14 años a abstraer las acciones realizadas en la balanza al nivel de la sintaxis algebraica asociada a la resolución de ecuaciones de primer grado. Este modelo tiene una gran diferencia con el modelo diagramático mencionado en el apartado anterior, ya que este prototipo es un modelo virtual y dinámico[9] que establece una ruta presentada en cuatro secciones: la balanza simple, la balanza con poleas, ejercicios y solución de problemas.

Figura 3. Secciones que configuran el modelo virtual de la balanza

Es importante aclarar que para el desarrollo de esta propuesta sólo se ocupó la primera y segunda sección puesto que hacen referencia al tratamiento de ecuaciones y su resolución como tal. La tercera sección, ejercicios, no se trabaja directamente desde el software sino que se proponen unas hojas de trabajo (que más adelante se presentarán) que permitan rastrear los procesos de resolución de ecuaciones realizados por los estudiantes en papel y lápiz. La

[9] Por dinámico nos referimos a que el estudiante puede interactuar con el modelo por medio de movimientos de arrastre haciendo uso del mouse y visualizar los cambios que producen sus acciones tanto en la balanza como a nivel sintáctico.

cuarta sección, problemas, no se contempla en el trabajo pues en ésta se abordan el planteamiento y solución de problemas con ecuaciones de primer grado y esto desbordaría los objetivos planteados en este proyecto.

En la sección 1 se contempla el modelo de la balanza simple, el cual se compone de una base rectangular con un regulador de nivel o equilibrio (objeto central) ubicado en el centro de la base, el regulador está unido a dos platillos laterales por medio de una vara que permite mantener una relación entre las tres piezas: el regulador, el platillo izquierdo y el platillo derecho. Además, existen dos cestos de basura a cada lado de la balanza con el fin de tirar objetos (pesos) que no sean necesarios. Tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 4. Balanza simple

Otra parte que componen el modelo de la balanza virtual son las dos clases de pesos para representar tanto las cantidades conocidas y unitarias (valor numérico 1) como las desconocidas (incógnitas). Los valores de estos pesos están asociados únicamente a coeficientes positivos (lo cual es sumamente importante pues aquí yace la diferencia con la sección de la balanza con poleas) y de forma interactiva los estudiantes, haciendo uso del arrastre, agrega, quitan, mueven de un platillo a otro pesos conocidos y desconocidos (ver Figura 5) con el fin de ir ejecutando la tarea que el modelo contempla.

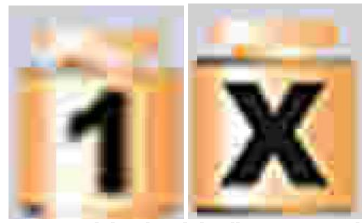


Figura 5. Peso conocido (unidad) y peso desconocido (x)

En esta primera sección se presentan diferentes momentos inmersos en una ruta didáctica que intenta aproximar a los estudiantes a la resolución de ecuaciones de primer grado exclusivamente con cantidades positivas. De este modo, primero es pesar objetos, segundo, se representan ecuaciones agregando pesos conocidos y desconocidos en los platillos y, tercero, se encuentra el valor del peso desconocido dada una ecuación (Rojano & Martínez, 2010, p.8).

Algo importante para destacar de este modelo dinámico es que además de permitir al estudiante visualizar lo que sucede al tratar ecuaciones en la balanza, en la parte inferior de ésta aparece la ecuación de manera simbólica que se pide representar o resolver (según el caso) y cuando ellos modifican algo en los platillos de la balanza se ve reflejado sintácticamente en dicha expresión, tal como se muestra en a figura 6 en donde hay una correspondencia tanto en la ecuación dada para representar como en la ecuación presentada debajo de la balanza.

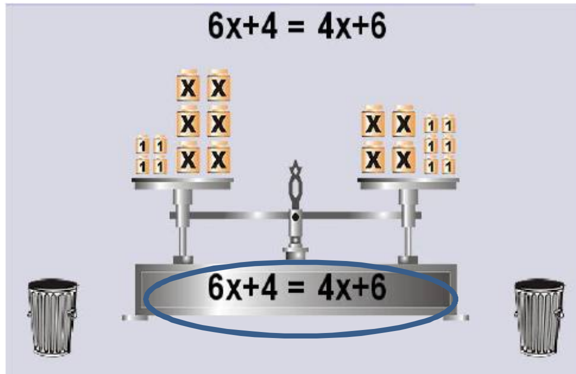


Figura 6. Sintaxis de la ecuación reflejada en la balanza

Las ecuaciones que se van a representar o resolver aparecen al azar en el modelo, sin embargo, existe un botón de *nivel* que permite modificar la estructura de la ecuación planteada. Así, en el nivel 1 todas las ecuaciones presentan estructura de la forma $A + x = B$; en el nivel 2, estructura $Ax = B$, en el 3 estructura $Ax + B = C$; en el nivel 4 son de la forma $Ax + B = CX$ y finalmente las ecuaciones de nivel 5 guardan estructura $Ax + B = CX + D$. Por supuesto en esta sección del modelo, tal como se ha indicado, el dominio de A, B, C y D está en los $\mathbb{Z}^{+}$

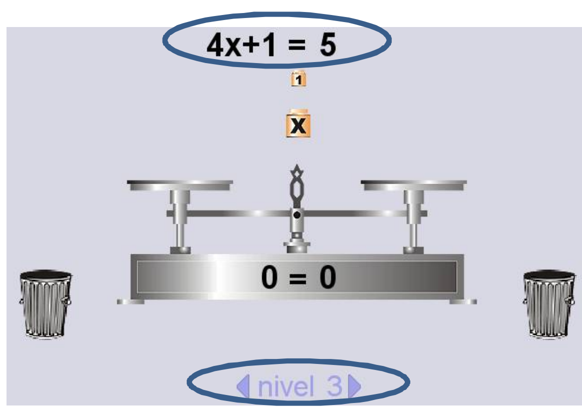


Figura 7. Nivel 3 de la ruta del modelo virtual de la balanza y su relación con la estructura que le corresponde, en este caso de forma $\boldsymbol{Ax + B = C}$.

Ahora bien, la sección 2 del modelo de la balanza presenta una versión ampliada de la versión de la balanza simple (sección 1), resolviendo algunas desventajas del modelo diagramático que no permitía trabajar con cantidades negativas, puesto que en esta sección es posible representar y resolver ecuaciones que incluyen sustracción de términos, es decir, es posible representar y resolver ecuaciones con coeficientes negativos. Aquí, el estudiante también pueda retirar, poner y mover pesos por medio del arrastre, no obstante, a diferencia de la balanza simple, ya no hay únicamente dos platillos en la balanza sino que aparecen otros dos platillos con poleas ubicados en la parte superior derecha e izquierda, en los cuales se colocan las cantidades negativas (véase Figura 8).

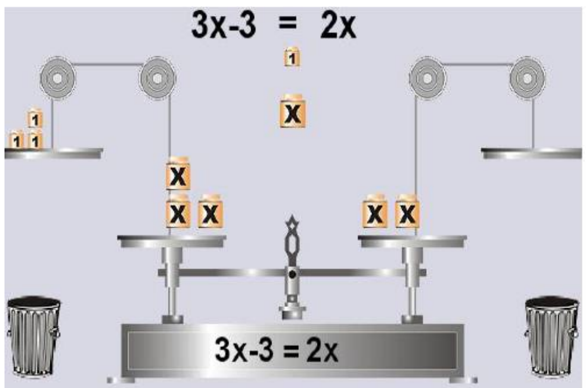


Figura 8. Balanza con poleas

Cabe mencionar que tanto en la balanza virtual simple como la balanza con poleas atraen la atención del estudiante y generan en ellos un reto para intentar resolver las diferentes ecuaciones propuestas, que de acuerdo con su destreza les permite elegir entre niveles que pongan a prueba sus habilidades.

En general, La profesora Martínez (2010) presenta la ruta didáctica para el trabajo con los dos tipos de balanza, el cual para la balanza simple comprende cinco escenas:

- Familiarización con la balanza (pesar objetos)
- Representación de ecuaciones en la balanza (correspondencia entre los elementos de la ecuación y los del modelo)
- Resolución de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por eliminación de objetos de los platillos (principio de manipulación que mantiene el equilibrio)
- Resolución de ecuaciones con la balanza fija, por elección de la operación inversa que se aplica a los términos en la ecuación (recuperación de los principios de manipulación que mantiene el equilibrio en el nivel sintáctico: noción de equivalencia algebraica).
- Resolución de ecuaciones sin la balanza, transformando y restableciendo la igualdad en el nivel simbólico del álgebra (automatización de las acciones en el nivel sintáctico). (De acuerdo con lo anterior, es indispensable para este estudio que los estudiantes interactúen con el modelo mencionado, ya que es un medio potente que permite fortalecer en ellos la resolución de ecuaciones como una relación de equivalencia y se dará cuenta de ello a través de la implementación de la propuesta y el análisis de los resultados.

Por su parte la balanza con poleas comprende 3 escenas:

- Representación de ecuaciones con términos de coeficiente negativo en la balanza con poleas.
- Resolución de ecuaciones con coeficientes negativos.
- Resolución de ecuaciones con coeficientes negativos mediante la selección de signos operacionales (+,- y ÷).

Para el caso de la primera sección, la balanza simple, los estudiantes no pasan por la última escena, pues para eso se proponen el diseño de unas hojas de trabajo que más adelante se describirán, las cuales permitirán analizar el trabajo realizado por los estudiantes y así arrojar resultados en torno al alcance de los objetivos que aquí se han propuesto.

De acuerdo con lo anterior, es indispensable para este estudio que los estudiantes interactúen con el modelo mencionado, ya que es un medio potente que permite fortalecer en ellos la resolución de ecuaciones como relación de equivalencia, lo cual será objeto de análisis a partir de la implementación del modelo y el análisis de los resultados obtenidos con las hojas de trabajo.

CAPÍTULO 3

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON EL MODELO VIRTUAL DE LA BALANZA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA.

En este capítulo se presenta la descripción metodológica para la implementación del modelo virtual de la balanza. Además, se describe con detalle las distintas escenas que componen la ruta del modelo virtual de la balanza simple y con poleas. Se describen también las hojas de trabajo que serán implementadas a la par del modelo virtual de la balanza, junto con las expectativas de desempeño de los estudiantes en relación con cada uno de los ítems que componen dichas hojas. Por último, se exhiben los resultados y análisis del trabajo realizado por los estudiantes en las hojas de trabajo, el cual surge de la interacción que hacen en el modelo virtual de la balanza al ir pasando por la ruta didáctica que propone.

3.1. Planeación y organización para la prueba piloto

3.1.1. Sobre la población de estudio

La prueba fue aplicada en la Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría sede compartir, un colegio de cobertura que pertenece a la Arquidiócesis de Cali. La prueba se considera piloto porque se está tomando una muestra aleatoria de 10 de los 42 estudiantes de grado octavo grupo tres (8-3) de la jornada de la mañana, grado que se escogió también de manera aleatoria por los aplicadores de la prueba. Los estudiantes se encuentran entre los 12 y 15 años de edad, la muestra que se tomó contiene un estudiante repitente y no incluye ningún estudiante nuevo. De acuerdo con una indagación interna sobre la muestra de estudiantes seleccionados, algunos de ellos estuvieron juntos en grado séptimo pero la mayoría se conocen de años anteriores puesto que el colegio tiene la costumbre al comienzo de cada año lectivo "mezclar" los estudiantes aleatoriamente para no dar continuidad a los mismos grupos.

3.1.2. Sobre la implementación de la prueba piloto

Para la implementación de la prueba los aplicadores de la misma adecuaron seis computadores con la aplicación java, la cual era necesaria para el funcionamiento del software. Se debe aclarar que ninguno de los computadores posee la aplicación por cuestiones de restricciones educativas con los estudiantes. Los 10 estudiantes seleccionados fueron dispuestos por binas para que realizaran todo el trabajo, tanto la manipulación del simulador como el desarrollo de las hojas de trabajo. De este modo, cinco computadores quedaron destinados para las cinco parejas y el sexto computador se ubicó de forma estratégica en la sala con un proyector y con el software a disposición para así mostrar y guiar a los estudiantes durante su recorrido por la ruta en los momentos que se considerará conveniente.

De antemano, se hicieron algunas recomendaciones a los estudiantes respecto al funcionamiento del modelo de la balanza, es decir, se les dio indicaciones de que debían esperar algunos segundos cada vez que cambiaran de escena, debido a que la velocidad de la banda ancha no era óptima, por tanto existirían algunos contratiempos. También se les explico a través del proyector cómo debían trabajar y los botones básicos del simulador (e.g. de nivel, de sección, etc.) y el efecto arrastre que es posible sobre las figuras que se presentan. De igual forma se les hizo énfasis en la importancia de las hojas de trabajo como herramientas que van a la par del trabajo desarrollado en el simulador, de tal forma que se trabaje de forma simultánea con lo realizado en el modelo y de acuerdo con las instrucciones consignadas en dichas hojas. En este punto se hizo énfasis a los estudiantes de la importancia y necesidad de plasmar todo los procesos o acciones que pensaran.

Durante el diseño de la prueba piloto, y de acuerdo con el tiempo acordado y permitido por la institución, se pensó implementar en dos secciones de 2 horas reloj cada una en el mes de junio, con una diferencia de ocho días entre la una y la otra. La primera sección se realizó, tal y como se había planeado, teniendo en cuenta la ruta que propone la balanza sencilla, sin embargo, las dos horas estipuladas no fueron suficientes debido a que no todas las parejas lograron terminar con la primera prueba en el tiempo determinado.

La sección 2 se hizo a los ocho días, pero antes de iniciar, se dio un tiempo de treinta minutos para que las cinco parejas terminaran la sección 1. Fue indispensable la intervención de los aplicadores para recordar las escenas trabajadas por los estudiantes ocho días antes con el fin de dar una continuidad al trabajo realizado, además de homogenizar el desarrollo de la prueba y que todos comenzaran simultáneamente la sección 2 en atención a la ruta propuesta en la balanza con poleas. Como era de esperarse, de acuerdo con el desarrollo del trabajo presentado en la sección 1, las parejas no lograron terminar con el trabajo estipulado en la hoja de trabajo de la sección 2, por lo cual, fue necesario abrir un espacio adicional de una hora al día siguiente para terminar el trabajo iniciado en sección 2.

En esta nueva sección los aplicadores guiaron por medio de preguntas y ejemplos en el video beam a los estudiantes con la finalidad de retomar la sección anterior y conectarlos con el trabajo que venían realizando en la balanza y poleas. De este modo, se finalizó con una sección más de 1 hora reloj la aplicación de la prueba piloto.

Se debe mencionar que en cada una de las secciones los estudiantes trabajaron en las mismas binas que habían conformado al iniciar el trabajo y que todo el tiempo hubo presencia de dos aplicadores, casi siempre uno al frente del proyector y el otro observando el trabajo de los estudiantes.

3.2 Recursos utilizados en el estudio

Para el desarrollo del trabajo de campo con los estudiantes se tiene en cuenta tanto la ruta didáctica que contempla el modelo virtual de la balanza como unas hojas de trabajo. Ambas se describen a continuación:

3.2.1 La ruta didáctica del modelo virtual de la balanza

El propósito fundamental de este proyecto es favorecer el proceso de resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en los estudiantes objeto de estudio en este proyecto. Para tal efecto, se ha tomado el modelo implementado por la profesora Martínez (2009), que considera y supera algunas de las dificultades arrojadas por las investigaciones, mencionadas a lo largo de este trabajo.

Como ya se describió en el capítulo II el modelo virtual de la balanza es un programa dinámico basado en el modelo concreto de la balanza tradicional. Una de sus secciones, la balanza simple (ver Figura 4), permite trabajar algunos casos de ecuaciones sólo con cantidades positivas y su versión ampliada, la sección 2 en donde se trabaja con una balanza con poleas (ver Figura 8), permite trabajar ecuaciones con sustracción de términos.

A continuación se describe detalladamente la ruta didáctica que compone tanto la balanza sencilla (sección 1) como su ampliación la balanza con poleas (sección 2):

3.2.1.1 El modelo virtual de la balanza sencilla

Esta primera parte, se encuentra conformada por cuatro escenas que se denominan *balanza 1, 2 ,3 y 4*[10]. En todas estas escenas, se realiza un trabajo con ecuaciones de tipo aritmético: $x + B = C$; $Ax = B$; $Ax + B = C$; y de tipo algebraico: $Ax + B = Cx + D$; $Ax + B = Cx$; $Ax + x = Bx$. Las escenas se describen a continuación:

- ***Balanza 1:*** **familiarización con la balanza**

Esta parte de la ruta pertenece a la primera escena de la sección 1 del modelo: *pesar objetos,* para lo cual el estudiante debe tomar pesos de cantidad conocida, la unidad, ubicados en el centro de la balanza y arrastrarlos hasta el platillo

[10] Es necesario aclarar que las “cuatro balanzas” no son más que los títulos de cada escena de la sección 1 que hace parte de la ruta didáctica que aparecen en el simulador con el fin identificar en qué parte de la ruta se encuentra el estudiante.

derecho para que se logre equilibrar la balanza. La idea de esta escena es, tal como lo indican Martínez y Rojano (2010), que el estudiante se familiarice con el modelo.

Figura 9. Valor de x encontrado mediante el arrastre de pesos

Los estudiantes van colocando los pesos hasta que se equilibre la balanza identificando que ya ha terminado el ejercicio cuando aparece en la parte sintáctica de la balanza (ver Figura 9) el valor del peso desconocido, es decir, x = 6 para el caso del ejemplo en la figura 9. De dominar esta primera parte el estudiante avanza al siguiente escena de la ruta, dando clic en la flecha verde que aparece en la parte inferior derecha de la *Figura 9* ó, por lo contrario, debe dar clic en la opción *otra,* acción que inmediatamente le presenta otro ejercicio de *pesar objetos*.

- ***Balanza 2:*** **representación de ecuaciones en la balanza**

En esta segunda escena, *representar una ecuación dada,* el estudiante debe representar en la balanza y con las figuras de peso conocido y desconocido la ecuación que el modelo le presenta en la parte superior de la balanza. En esta situación aparece en la parte superior de la balanza una ecuación de primer grado que bien puede ser tipo aritmético (con una ocurrencia de la incógnita) o bien de tipo algebraico (con dos ocurrencias de la incógnita) de acuerdo con el nivel en el que se encuentre la balanza. En el centro de la balanza se encuentran las figuras de pesos conocidos y desconocidos (ver Figura 10). La idea es que el estudiante por medio del arrastre, mueva las figuras hacia los dos platillos de la balanza hasta que los haga corresponder con la ecuación planteada en la parte de arriba de la balanza, es decir, que represente la ecuación dada.

A medida que el estudiante coloca objetos en los platillos de la balanza estas acciones se representan en la parte baja de la misma, lo cual permite dar cuenta de la representación sintáctica de sus acciones con el modelo. Tal como se puede observar en la Figura 10.

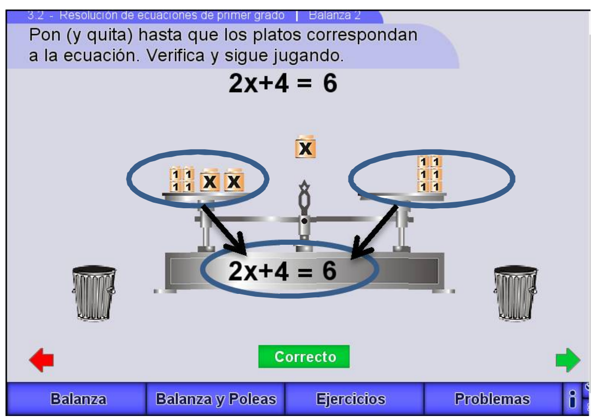


Figura 10. Balanza equilibrada

Como se muestra en dicha figura, cuando el estudiante ha colocado los pesos de manera adecuada en cada platillo de la balanza, inmediatamente aparece la palabra *“correcto”* indicándole que la ecuación ha quedado bien representada y, por tanto, el ejercicio ha terminado y puede realizar otra representación de una ecuación. En esta segunda parte el estudiante tiene hasta cinco niveles, en el nivel $4\, y\, 5$, particularmente, aparecen ecuaciones algebraicas del tipo $Ax + B = Cx$ y $Ax + B = Cx + D$, respectivamente. Aunque su proceso de representación por medio del modelo es el mismo, las investigaciones abordadas en este trabajo muestran la clara dificultad que tienen los estudiantes para trabajar con este tipo de ecuaciones.

- ***Balanza 3:* resolución de ecuaciones con la balanza dinámica, encontrando el peso desconocido por eliminación de objetos en los dos platillos**

En esta parte de la ruta es de *encontrar el valor del peso desconocido*. La cuestión es que los estudiantes realicen las acciones necesarias para que se mantenga el equilibrio de la balanza y a su vez lograr hallar el valor de la incógnita de la ecuación.

En esta situación, se les presenta a los estudiantes en la parte superior una ecuación, la cual se corresponde con los pesos ya ubicados en los platillos de la balanza. Lo que el estudiante debe hacer es arrastrar los pesos ubicados en la balanza hacia el canasto de basura, preservando el equilibrio en la ecuación, hasta que quede un peso desconocido en uno de los platillos de la balanza y así encontrar el valor de la incógnita.

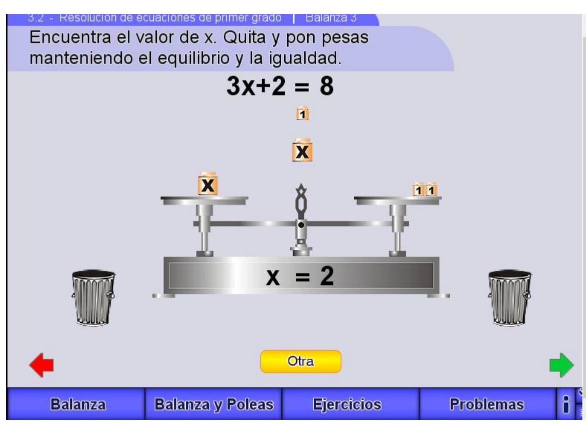


Figura 11. Descubriendo el valor de x quitando pesos

Esta parte de la ruta incluye cinco niveles de dificultad cambiando el tipo de ecuaciones con las que el estudiante trabaja, empezando con ecuaciones aritméticas hasta el nivel 3 y cambiando a ecuaciones de tipo algebraico en el nivel 4 y 5.

- ***Balanza 4:*** **resolución de ecuaciones con la balanza fija[11] por la elección de la operación inversa que se aplica a los términos en la ecuación**

Este apartado de la ruta alude a la escena de *encontrar el valor del peso desconocido.* La idea es que los estudiantes identifiquen las operaciones que debe realizar para encontrar el valor de la incógnita.

En esta escena se les presenta a los estudiantes la balanza con unas figuras de pesos conocidos y desconocidos ubicados en los platillos, en la parte inferior de la balanza aparecen dos signos de operaciones básicas el de la resta y división, los cuales son necesarios para dar solución a la ecuación que está ubicada en la parte derecha del modelo y que es representa por las figuras en la balanza (Ver Figura 12).

Figura 12. Balanza fija con cuadro de representación sintáctica

[11] La balanza fija hace parte de la ruta del modelo virtual de balanza que como su nombre lo indica no es una balanza dinámica, está fija y por tanto sus platillos no suben ni bajan cuando el estudiante realiza acciones en el modelo como sí sucede en las escenas anteriores. De este modo la acción de arrastre de figuras en esta escena no existe.

La idea es que el estudiante primero elija una operación y de forma inmediata el programa le presenta una opción para que ejecute una acción. Por ejemplo, si elige la operación resta para el caso presentado en la Figura 13, aparecen unas flechas que permiten indicar la clase de peso (unidad o incógnita) y la cantidad del mismo que se desea restar en ambos lados de la balanza.

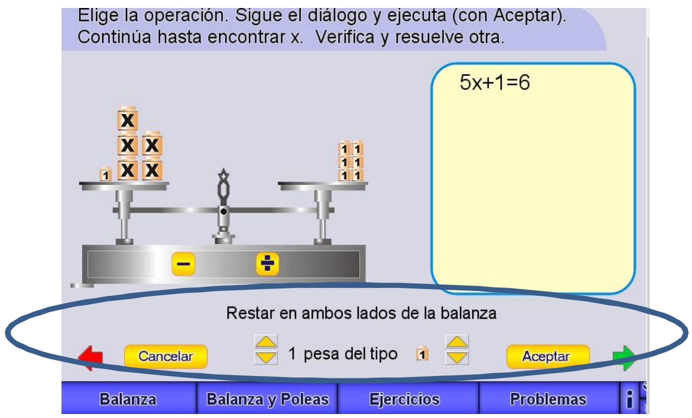


Figura 13. Opción presentada al elegir una operación en la balanza fija

Acto seguido, en el recuadro de la parte sintáctica de la ecuación y de forma simultánea se realiza la operación que el estudiante indicó en el modelo (ver Figura 14).

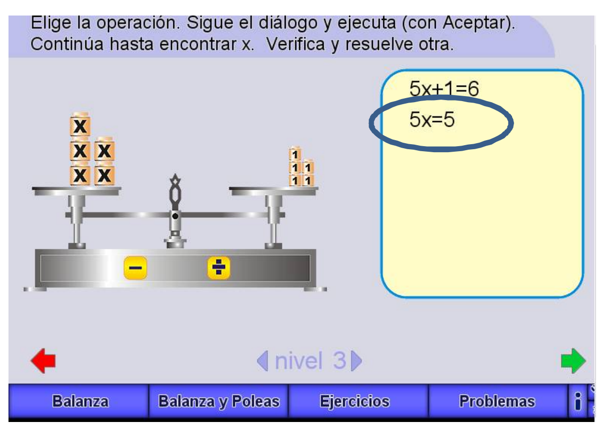


Figura 14. Valor de x encontrado

Cuando los estudiantes aplican las operaciones y cantidades adecuadas, les aparece en la parte inferior la palabra "correcto" que les indica que efectivamente han encontrado el valor de la incógnita.

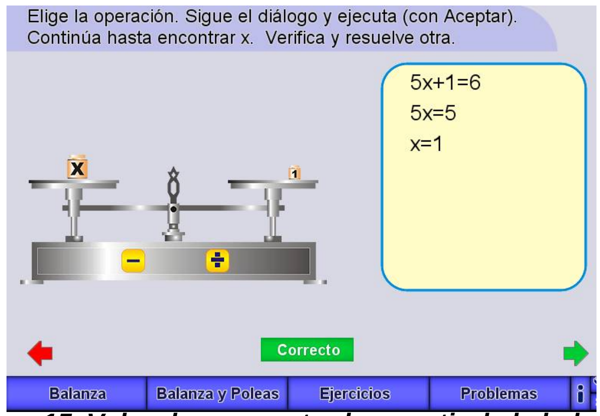


Figura 15. Valor de x encontrado a partir de la balanza fija.

Al igual que la sección anterior, esta etapa de la ruta tiene cinco niveles de dificultad para que los estudiantes pongan a prueba sus conocimientos. Es importante resaltar la importancia de esta sección, puesto que permite a los estudiantes dar cuenta de las operaciones (inversas) que deben realizar para solucionar una ecuación.

3.2.1.2 El modelo virtual de la balanza con poleas

En esta sección solo se trabajan tres escenas, se excluye la familiarización con la balanza, *pesar objetos*, puesto que el estudiante ya ha interactuado con el modelo en la sección 1 y no hace falta explorar el modelo. Las escenas que se trabajan son las siguientes:

- ***Balanza y poleas 1*: representación de ecuaciones con términos de coeficiente negativo en la balanza con poleas.**

En esta escena se trabaja con una balanza en la que es posible representar ecuaciones con coeficientes negativos, puesto que las poleas permiten halar peso de los de platillos más grande (en donde se ubican las cantidades positivas) representando de esta manera los términos con coeficiente negativo en los platillos más pequeños (señaladas con los círculos) con las figuras de peso conocido y desconocido (ver Figura 16). Se espera que los estudiantes pongan los pesos necesarios que correspondan la ecuación y a su vez, la balanza siga conservando el equilibrio. Esta escena incluye los cinco niveles de dificultad, hasta el nivel 3 corresponden con ecuaciones de tipo aritméticas y los niveles 4 y 5 con ecuaciones algebraicas.

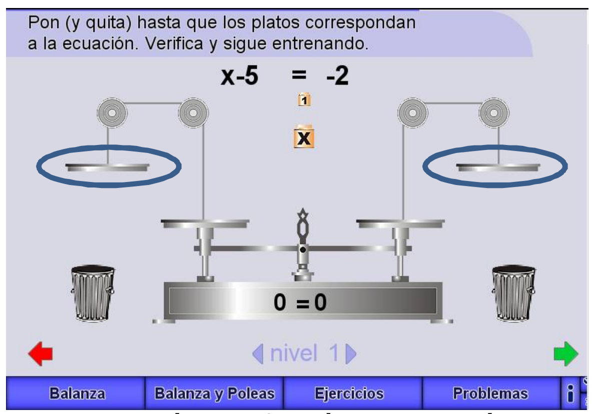


Figura 16. Balanza con poleas

- ***Balanza y poleas 2*: resolución de ecuaciones con coeficientes negativos.**

En esta escena, se puede lograr trabajar de dos maneras distintas la resolución de ecuaciones; por un lado la transposición de términos, pues, se está manejando coeficientes negativos y por el otro el de eliminar (o desechar al canasto de basura) las figuras ubicadas en ambos lados de los platillos de la balanza. Como se mencionó anteriormente en la *balanza 3,* se espera que los estudiantes pongan o quiten pesos siempre y cuando la balanza siga preservando el equilibrio en la ecuación, hasta quedar un peso desconocido en uno de los platillos y así encontrar el valor de la incógnita. Esta escena incluye los cinco niveles de dificultad, los cuales hasta el nivel 3 se corresponden con ecuaciones de tipo aritméticas y los niveles 4 y 5 con ecuaciones algebraicas.

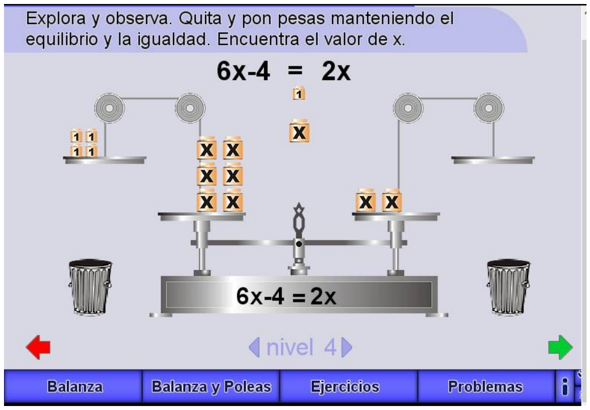


Figura 17. Encontrando el valor de x en la balanza con poleas

- ***Balanza y poleas 3: resolución de ecuaciones con términos con coeficiente negativo mediante la selección de signos operacionales***$(+, -, \div)$.

En esta última escena de la balanza se espera que el estudiante, al igual que en la balanza 4, comprenda más el desarrollo sintáctico que se da al seleccionar el símbolo de operación que aparece en la parte inferior de la balanza, seleccionado las operaciones necesarias para llegar a encontrar el valor de la x de la ecuación. Cabe mencionar que en esta parte de la balanza aparece el símbolo + (Ver Figura 18) porque en esta escena se trabaja tanto con coeficientes negativos como con coeficientes positivos.

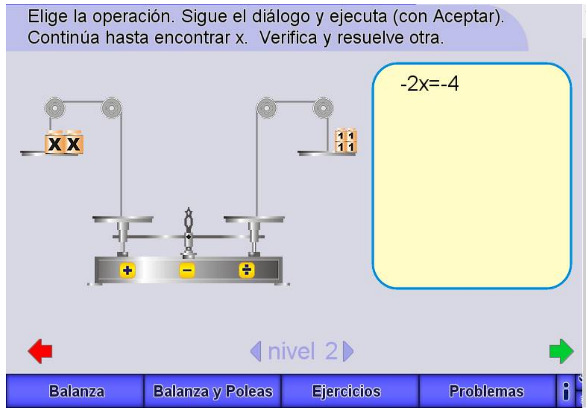


Figura 18. Hallando el valor de x con $(+,-,\div)$.

Finalmente lo que aquí se pretende es que el estudiante halle la solución de la ecuación representada tanto sintácticamente como en la balanza fija haciendo un uso correcto de las operaciones según el caso de la ecuación presentada.

Se puede decir que para el desarrollo del trabajo presentado en balanza y poleas, con balanza fija, se sigue trabajando la misma estructura de ecuaciones que en la balanza simple, de tipo aritmético $x + B = C$; A$x = B$; $Ax + B = C$; y de tipo algebraico $Ax + B = Cx + D$; $Ax + B = Cx$; $Ax + x = Bx$.

3.2.2 Hojas de Trabajo

En el trabajo con los estudiantes además de implementar el modelo virtual de la balanza se implementó también dos hojas de trabajo, una en relación con el trabajo desarrollado en la balanza simple y la otra para el desarrollo del trabajo en la balanza con poleas. Las hojas de trabajo en este estudio se consideran como un instrumento que permite indagar si el modelo virtual de la balanza es un simulador útil que ayuda a los estudiantes a comprender la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia. En este sentido, las hojas de trabajo son el instrumento por el cual se constata y se da cuenta del cumplimiento de los objetivos planteados en este trabajo a través del análisis de los resultados obtenidos en dichas hojas. Las hojas dos hojas de trabajo se desarrollaron pesando en la ruta didáctica por la cual transitan los estudiantes durante la interacción con las dos secciones que hacen parte del modelo. A continuación se presenta la descripción de cada una de las hojas implementadas.

3.2.2.1 Descripción de las hojas de trabajo

Las hojas de trabajo se diseñaron pensando en los dos modelos de balanzas, sencilla y con poleas, planteadas en la ruta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado, de este modo, una hoja de trabajo se implementó para la sección 1 (ver anexo 2), modelo de *la balanza sencilla*, y otra hoja de trabajo para la sección 2 (ver anexo 3), modelo de *la balanza con poleas*. La hoja de trabajo uno, cuenta con 18 ítems tal como se sigue:

- Seis preguntas abiertas con espacios demarcados por líneas para que el estudiante responda.
- Doce ecuaciones de primer grado con una incógnita para ser resueltas por los estudiantes.

En primer lugar, las 6 preguntas abiertas que se plantean, se relacionan con el trabajo que hacen los estudiantes con la escena 1, escena 2, dos para la escena 3 y por ultimo dos para la escena 4, en la balanza sencilla. En segundo lugar, de las 12 ecuaciones, 5 están ubicadas en relación con el trabajo realizado por los estudiantes en la escena 3 y las restantes 7 dan cuenta de la escena 4, balanza fija.

Los ítems relacionados con procesos de resolución de ecuaciones de primer grado incluyen en esta sección, son ecuaciones de tipo aritmético y algebraico, donde, todas las ecuaciones se trabajan con coeficientes e incógnitas positivas.

La hoja de trabajo dos, cuenta con 18 ítems tipificados de la siguiente forma:

- Cuatro ecuaciones que debe representar los estudiantes a partir de la balanza con poleas establecida en imágenes.
- Catorce ecuaciones de primer grado con una incógnita para ser resueltas por los estudiantes dando cuenta de los procesos que utiliza para hacerlo.

En la escena 1(*balanza y poleas 1*), se relaciona con el trabajo que deben hacer los estudiantes representando ecuaciones de primer grado en la *balanza y poleas,* teniendo en cuenta las cantidades positivas y negativas para ubicarlas en los platillos adecuados en las imágenes de la balanza con poleas planteadas. Por último, de las 14 ecuaciones, 4 están ubicadas en relación con el trabajo realizado por los estudiantes en la escena 2 y las 10 restantes dan cuenta de la escena 3.

De acuerdo con esta caracterización, los ítems relacionados con procesos de resolución de ecuaciones de primer grado incluyen en esta sección, son ecuaciones de tipo aritmético y algebraico, además, se trabajan coeficientes e incógnitas con cantidades negativas y positivas.

A continuación se presenta la tabla 2, en donde se sintetiza la información que se encuentra en las hojas de trabajo en relación con la cantidad de preguntas, ítems y escenas.

<table>
<tr><th rowspan="2">HOJAS DE TRABAJO</th><th colspan="4">Numero de ítems de respuestas abiertas</th><th colspan="6">Numero de ecuaciones presentadas por escena</th><th colspan="6">Cantidad y tipo de estructura de la ecuaciones presentadas</th><th colspan="6">Forma de cada estructura</th></tr>
<tr><th>Escena 1</th><th>Escena 2</th><th>Escena 3</th><th>Escena 4</th><th colspan="3">Escena 3</th><th colspan="3">Escena 4</th><th colspan="3">Escena 3</th><th colspan="3">Escena 4</th><th colspan="3">Escena 3</th><th colspan="3">Escena 4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">SECCIÓN 1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="3">5</td><td colspan="3">7</td><td colspan="3" rowspan="2">Tipo Aritmética: 1
Tipo Algebraica: 4</td><td colspan="3" rowspan="2">Tipo Aritmética: 4
Tipo Algebraica: 3</td><td colspan="3" rowspan="2">Tipo Aritmética:
$x + B = C$

Tipo Algebraica:
$Ax + B = Cx + D$</td><td colspan="3" rowspan="2">Tipo Aritmética:
$x + B = C$; $Ax + B = C$; $Ax = B$

Tipo Algebraica:
$Ax + B = Cx + D$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Total : 6</td><td colspan="6">Total :12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">SECCIÓN 2</td><td colspan="4" rowspan="3">0</td><th colspan="2">Escena 1</th><th colspan="2">Escena 2</th><th colspan="2">Escena 3</th><th colspan="2">Escena 1</th><th colspan="2">Escena 2</th><th colspan="2">Escena 3</th><th colspan="2">Escena 1</th><th colspan="2">Escena 2</th><th colspan="2">Escena 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética: 2

Tipo Algebraica: 2</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética: 3

Tipo Algebraica: 1</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética: 4

Tipo Algebraica 6</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética:
$x + B = C$; $Ax = B$

Tipo Algebraica:
$Ax + B = Cx + D$</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética:
$x + B = C$; $Ax = B$

Tipo Algebraica:
$Ax + B = Cx + D$</td><td colspan="2" rowspan="2">Tipo Aritmética:
$x + B = C$; $Ax = B$

Tipo Algebraica:
$Ax + B = Cx + D$; $Ax + B = Cx$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Total :18</td></tr>
</table>

Tabla 2. Sistematización general de las hojas de trabajo uno y dos.

3.2.2.2 Propósitos y expectativas de desempeño

El referente permanente para el diseño de la prueba piloto fue la ruta del modelo virtual de la balanza, puesto que se considera fundamental en este trabajo en virtud acerca de los estudiantes a la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia. Cada una de los ítems propuestos en la prueba piloto, sección 1 y 2, fueron pensados de acuerdo a las secciones que componen la ruta del modelo y al tránsito que deben realizar los estudiantes por estos. De este modo mantiene una relación entre la ruta didáctica por la que transita el estudiante y lo que se espera que él realice en las hojas de trabajo para tomar los resultados obtenidos. Se debe resaltar que en la implementación de estas hojas fue importante la participación de los aplicadores para coordinar y guiar a los estudiantes en las diferentes secciones de cada prueba. Conforme a las inquietudes que les surgía, en particular aquellas relativas al uso del simulador.

A continuación se presentan la descripción de las expectativas de desempeño de cada uno de los ítems que configuran las hojas de trabajo.

- **HOJA DE TRABAJO: SECCIÓN 1**

ÍTEM 1.
1. *De acuerdo al trabajo en la balanza 1, diga qué es lo que indica que ya se encontró el peso de "X".*

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes reconozcan que es necesario el equilibrio entre los platillos de la balanza para encontrar el peso de x.

ÍTEM 2.
2. En el trabajo realizado con la balanza 2, qué es lo que indica que la ecuación dada está correctamente representada en la balanza.

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes logren reconocer que una ecuación está correctamente representada cuando se da un equilibrio entre los platillos de la balanza.

ÍTEM 3.
1. A partir del trabajo realizado en la balanza 3, responda y resuelva:
a) Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso "1" de su platillo izquierdo.
b) Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso "X" de su platillo derecho.
c) Encuentre el valor de "X" para las siguientes ecuaciones, escribiendo paso a paso el proceso que considere necesario: $7 = x + 2$; $3x + 2 = 2x + 5$; $6x + 1 = 3x + 7$; $10x + 40 = 5x + 50$; $2x + 6 = x + 1$.

Expectativas de desempeño: Con respecto a los literales a) y b) se espera que los estudiantes identifiquen que se debe retirar la misma cantidad de figuras de ambos platillos para que el equilibrio entre éstos se mantengan. Ahora bien, con respecto al literal c) se espera que los estudiantes resuelvan las ecuaciones planteadas tomando como referencia el modelo o cualquier esquema que les permita encontrar el valor de la incógnita.

ÍTEM 4.

2. *A partir del trabajo desarrollado en la balanza 4 realice lo siguiente:*

a) *A partir de la ecuación representada en la balanza (*$2x = 6$*) escriba qué se debe hacer para retirar las dos figuras de peso "1" (cada una) que acompaña la figura de peso "X"*

b) *A partir de la ecuación representada en la balanza (*$2x = 6$*), escriba qué se debe hacer para dejar una sola figura de peso "X"*

c) *Resuelva las siguientes ecuaciones escribiendo paso a paso todo el proceso que considere necesario para hallar el valor de X:*$5 = 2 + x$; $2x + 8 = 18$; $20 = 10x$; $16 = 5x + 11$; $6x + 8 = 4x + 26$; $7x + 35 = 10x + 2$; $10x + 1 = 3x + 2$.

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes identifiquen el tipo de operación necesaria que se deben ejecutar para despejar una cantidad determinada en una ecuación representada en el modelo de la balanza.

En el literal c) se espera que los estudiantes resuelvan las ecuaciones sin hacer uso de la balanza simple, es decir, que identifiquen las operaciones sobre números y símbolos que les permita encontrar el valor de la incógnita, y lo registren de forma sintáctica. En la ecuación $10x + 1 = 3x + 2$, se espera que los estudiantes empleen lo trabajado en la balanza sencilla durante sus cuatro escenas.

- **HOJA DE TRABAJO: SECCIÓN 2**

ÍTEM 1.

1. De acuerdo al trabajo realizado en la balanza y poleas 1, representa en las siguientes balanzas con poleas cada una de las ecuaciones dadas según corresponda: $a) -5 = -x - 2$; $b) 4x = -7$; $c) 2x - 3 = -x + 1$; $d) -3x + 1 = 2x - 1$.

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes logren representar la ecuación en el modelo virtual de la balanza ampliada, manteniendo el equilibrio entre los platillos grandes y pequeños (para las cantidades negativas) de la balanza y a su vez den cuenta, la relación de equivalencia que emerge con dicha acción al colocar pesos en ambos lados de la balanza.

ÍTEM 2.
2. A partir del trabajo realizado en la balanza y poleas 2, resuelva las siguientes ecuaciones:$a) x - 5 = -3$; $b) -5x = -10$; $c) 2x - 5 = -3$; $d) 4x - 6 = 3x - 2$.

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes resuelvan las ecuaciones sin hacer uso del modelo de la balanza ampliada, logrando así poner a prueba los conocimientos previos adquiridos en la práctica, expresando la transposición de términos para encontrar el valor de la incógnita.

ÍTEM 3.
3. A partir del trabajo realizado en la balanza y poleas 3, resuelva las siguientes ecuaciones realizando paso a paso las operaciones que considere necesario para hallar el valor de la incógnita: $a) -3 = x - 5$; $b) -2x = -8$; $c) 2x - 6 = -4$; $d) 4x - 10 = 2x$; $e) 7x - 8 = x - 2$; $f) 2x - 2 = x + 4$; $g) -9 - 3 + 2 = 10x - 20x$; $h) 6x - 7 = 2x - 3$; $i) 3x + 4 = 2x + 3$; $j) 7x + 8 = 2x + 4$.

Expectativas de desempeño: Que los estudiantes resuelvan las ecuaciones sin hacer uso de la balanza y poleas, es decir, que encuentren las operaciones sobre números y símbolos que les permita encontrar el valor de la incógnita, y lo registren de forma sintáctica.

3.3 Sistematización y análisis de los resultados obtenidos

3.3.1 Prueba piloto sección uno

El análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba piloto sección 1, se presentará aquí en dos momentos. En el primero, se realiza el análisis relativo a las 6 preguntas de respuesta abierta, el cual se desarrolla a partir del alcance de las expectativas de desempeño propuestas para dichas preguntas; esta parte del análisis, además, se hace sobre las cinco parejas de estudiantes participes del estudio, en otras palabras, no se presenta en este momento del análisis lo que realizo cada una de las parejas en las 6 preguntas o ítems.

A diferencia de lo anterior, el segundo momento de análisis se presenta para cada una de las parejas de estudiantes y en relación con los distintos tratamientos que realizan para resolver las ecuaciones de primer grado. Esto en virtud que lo que más interesa aquí, de acuerdo con el objetivo planteado, es dar cuenta sí los estudiantes logran resolver las ecuaciones como relación de equivalencia, es decir, evocando a la propiedad uniforme de la igualdad y haciendo uso de los inversos aditivos y multiplicativos, principalmente. De este modo, este momento del análisis es más detallado que el primero.

A continuación, se presenta la sistematización de los resultados obtenidos junto con sus respectivos análisis.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	**De acuerdo al trabajo en la *balanza 1*, diga qué es lo que indica que ya se encontró el peso de "X".**
A, B, C, E	**80%**	**4**	Estudiantes que reconocen que para encontrar el peso de "X" es necesario que los platillos de la balanza queden en equilibrio.
D	**20%**	**1**	Estudiantes que aluden a que se debe colocar uno por uno las figuras de peso unitario en el platillo derecho (describen el procedimiento).

Tabla 3. Sistematización ítem 1 (escena 1del módulo virtual de la balanza)

De acuerdo a los resultados obtenidos en el ítem 1 que se muestran en la tabla 3, se observa que la mayoría de los estudiantes (4 parejas de 5 – 80%) reconocen que el peso de X se encuentra cuando los dos platillos de la balanza quedan en equilibrio, esto permite afirmar que la gran mayoría de estudiantes identifican de forma contundente que para encontrar el peso de X en la balanza es indispensable que los platillos de ésta quedan a un mismo nivel.

En el caso de la pareja de estudiantes (20%) que no aluden de manera precisa y contundente a la necesidad de que exista un equilibrio en los platillos de la balanza para responder a la pregunta, se observa que describen lo que hacen, es decir, aluden al proceso por el cual es posible llegar a equilibrar los platillos, esto es, ubicar una a una figuras de peso unitario. Lo anterior permite, ciertamente, afirmar que es posible que esta pareja de estudiantes si hayan reconocido que el equilibrio de los platillos es lo que permite identificar que se ha encontrado el peso de X, aun cuando no lo responden directamente, tal como ya se anotó.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	En el trabajo realizado con la *balanza 2,* qué es lo que indica que la ecuación dada está correctamente representada en la balanza.
B, E	**40%**	**2**	Estudiantes que reconocen que la ecuación dada (de manera sintáctica) está bien representada cuando los dos platillos de la balanza quedan en equilibrio.
A	**20%**	**1**	Estudiantes que aluden que la ecuación dada está bien representada cuando es la misma que la ecuación sintáctica que está ubicada debajo de la balanza.
C, D	**40%**	**2**	Estudiantes que afirman que la ecuación dada está bien representada cuando se ubican en los platillos de la balanza la cantidad de pesos estipulados por los términos de dicha ecuación.

Tabla 4. Sistematización ítem 2 (escena 2 del módulo virtual de la balanza)

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el ítem 2 que se muestran en la tabla 4, se observa que las dos primeras parejas de estudiantes (40%) reconocen que la ecuación se encuentra bien representada cuando los dos platillos de la balanza quedan en equilibrio, esto permite afirmar que los estudiantes identifican de manera contundente que la ecuación se encuentra correctamente representada si los platillos de la balanza están en un mismo nivel. En el caso de las dos últimas parejas de estudiantes (40%) no afirman de manera precisa de que exista un equilibrio en los platillos de la balanza para responder dicha pregunta, se observa que describen lo que hacen, es decir, apuntan hacia el proceso por el cual es posible llegar a equilibrar los platillos, en este caso, el ubicar la cantidad de pesos unitarios estipulados por los términos de la ecuación. Esto quiere decir que, es posible de que estas dos parejas de estudiantes hayan reconocido que el equilibrio de los platillos es lo que permite que la ecuación se encuentre correctamente representada, aun cuando no lo digan directamente.

Ahora bien, para el caso de la pareja de estudiantes (20%) aluden que la ecuación se encuentra bien representada siempre y cuando sea la misma con la ecuación sintáctica que aparece debajo de la balanza. Lo anterior permite, deducir que, necesitan de una prueba simbólica para dar cuenta de la correcta representación, es decir, realizan el proceso de colocar pesos necesarios hasta llegar a equilibrar los platillos, aunque esto, se encuentra implícito. Se interesan más la pareja de estudiantes por llegar a la misma ecuación y no responde tal como es.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso "1" de su platillo izquierdo.
A, C, E	**60%**	**3**	Estudiantes que afirman que se debe quitar del platillo derecho una figura de igual peso al retirado en el platillo izquierdo.
B, D	**40%**	**2**	Estudiantes que indican que el peso retirado del platillo izquierdo se debe transponer al platillo derecho y continuar con el proceso necesario (quitar y poner figuras) hasta encontrar el valor de "X".

Tabla 5. Sistematización ítem 3 (escena 3 del módulo virtual de la balanza)

Con respecto a los resultados obtenidos en el ítem 3 que se muestra en la tabla 5, se observa que la mayoría de los estudiantes (3 parejas de 5 – 60%) reconocen que para mantener el equilibrio de la balanza se debe quitar una figura de igual peso del platillo derecho al retirado en el platillo izquierdo. Esto permite afirmar que los estudiantes identifican de manera contundente que para mantener el equilibrio de la balanza es indispensable que la cantidad de figuras que se quita de un lado del platillo se debe hacer para el otro lado del platillo para que ésta quede a un mismo nivel.

Para el caso de las dos parejas de estudiantes (40%) aluden que el peso retirado del platillo izquierdo se debe trasponer al platillo derecho para después, seguir quitándole hasta llegar el valor de X. Esto permite, ciertamente, deducir que los estudiantes hayan reconocido que para que se mantenga el equilibrio entre los platillos se debe realizar una trasposición de términos para después quitarle (restar) una a una de las figuras de peso unitario y obtener la balanza equilibrada, aunque, no lo responde directamente, tal como se dijo.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso "X" de su platillo derecho.
A, D	**40%**	**2**	Estudiantes que indican que se debe quitar del platillo izquierdo una figura de igual peso al retirado en el platillo derecho.
B, E	**40%**	**2**	Estudiantes que indican que se debe quitar del platillo izquierdo de la balanza la cantidad de figuras unitarias que se corresponde con el peso de "X".
C	**20%**	**1**	Estudiantes que indican que se debe poner figuras de peso unitario en el platillo derecho hasta equilibrar la balanza.

Tabla 6. Sistematización ítem 3 (escena 3 del módulo virtual de la balanza)

De acuerdo a los resultados obtenidos en el ítem 3 que se muestran en la tabla 6, se observa que la mayoría de los estudiantes (4 parejas de 5) indican que para mantener el equilibrio de la balanza se debe quitar una figura de igual peso del platillo izquierdo al retirado en el platillo derecho, pero, solo se contempla que dos parejas de estudiantes (40%) aluden este proceso a una correspondencia entre las figuras de peso unitario con el peso de X, describiendo cada paso para llegar a equilibrar los platillos. Se puede decir que las cuatro parejas de estudiantes identifican de manera contundente que la balanza debe mantenerse en equilibrio, es decir, los platillos deben estar al mismo nivel, solo que dos parejas de estudiantes son más descriptivos en el proceso.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	A partir de la ecuación anteriormente representada en la balanza, escriba qué se debe hacer para retirar las dos figuras de peso "1" (cada una) que acompaña la figura de peso "X"
A, C, D, E	**80%**	**4**	Estudiantes que indican que es necesario restar dos unidades en ambos platillos de la balanza.
B	**20%**	**1**	Estudiantes que afirman que se debe restar una unidad a cada lado.

Tabla 7. Sistematización ítem 4 (escena 4 del módulo virtual de la balanza)

Con los resultados obtenidos en el ítem 4 que se muestran en la tabla 7, se observa que la mayoría de los estudiantes (4 parejas de 5 – 80%) reconocen que para retirar las dos figuras de peso unitario, es necesario restarle dos unidades en ambos platillos de la balanza. Esto permite afirmar que la gran mayoría de estudiantes comprenden de manera contundente la operación necesaria que se debe ejecutar para despejar una cantidad determinada en la ecuación representada en el modelo de la balanza.

PAREJAS	PORCENTAJE	CANTIDAD DE PAREJAS	A partir de la ecuación anteriormente representada en la balanza, escriba qué se debe hacer para dejar una sola figura de peso "X"
C, D, E	**60%**	**3**	Estudiantes que afirman que es necesario dividir entre dos para así obtener $x = 3$.
A	**20%**	**1**	Estudiantes que indican que se debe dividir en partes iguales los pesos en los dos platillos.
B	**20%**	**1**	Estudiantes que afirman que se debe quitar la cantidad de figuras de peso unitario que correspondan con el peso "X".

Tabla 8. Sistematización ítem 4 (escena 4 del módulo virtual de la balanza)

En esta última parte, con los resultados obtenidos en el ítem 4 que se muestran en la tabla 8, se observa que la mayoría de los estudiantes (3 parejas de 5 – 60%) reconocen que para dejar una sola figura de peso X, es necesario dividir entre de dos para obtener $x = 3$. Se puede afirmar que comprende de manera precisa la operación determinada que se debe ejecutar para despejar una cantidad determinada en la ecuación planteada por el modelo virtual, identificando en este caso el valor de X. Por otro lado, la pareja de estudiantes (20%) indican que se debe dividir en partes iguales los pesos en los dos platillos, es decir, identifican de manera contundente para dejar una sola figura de peso X, pero, lo hacen de manera general.

Sin embargo, la última pareja de estudiantes (20%) aluden a que se debe quitar (restar) la cantidad de figuras de peso unitario que correspondan con el peso de X. Lo anterior permite, ciertamente, afirmar que cometen error o no comprenden lo que se les está pidiendo y por ende los platillos de la balanza no estarán en equilibrio.

Ahora teniendo en cuenta estos resultados se puede afirmar que en las escenas 1 y 2 las respuestas generadas por los estudiantes ponen de manifiesto que la mayoría reconocen el equilibrio entre los platillos de la balanza al momento de colocar o quitar figuras de peso unitario o X. De lo cual se puede inferir, que la noción de equivalencia emerge al momento de trabajar con el modelo virtual balanza en estas dos escenas. De acuerdo con lo anterior, el que los estudiantes reconozcan el equilibrio en la balanza podría decirse que subyace posteriormente a la equivalencia entre los miembros derecho e izquierdo de una ecuación y permita construir un significado del signo igual como relación de equivalencia.

Con respecto a las respuestas obtenidas de las escenas 3 y 4, es posible pensar que la mayoría de los estudiantes reconoce el proceso de conservación del equilibrio a partir de realizar la misma acción en ambos platillos de la balanza, es decir, se rastrea que en gran parte de las aseveraciones realizadas por los estudiantes asumen una postura de que para conservar el equilibrio en la balanza si se quita una figura de peso unitario o X en uno de los platillos se debe retirar la misma cantidad de figuras en el platillo opuesto o por otro lado quitar las cantidades que correspondan al valor de una figura de peso X. Esto pone de manifiesto que cuando los estudiantes trabajan en ambos platillos de la balanza subyace al tratamiento que se realiza en ambos miembros de una ecuación emergiendo la propiedad uniforme de la igualdad, el inverso aditivo y multiplicativo considerado en este trabajo fundamental para producir ecuaciones equivalentes a una ecuación dada.

Ahora, se da inicio al segundo momento relacionado con la tabla donde se sistematizan las respuestas generadas por los estudiantes a las 5 ecuaciones del literal C de la escena 3 y un análisis más detallado de los procesos de resolución realizados por los estudiantes a las ecuaciones planteadas en la prueba piloto sección 1 de la misma escena, dando cuenta si los estudiantes logran resolver las ecuaciones como relación de equivalencia o si emergen algunos aspectos conceptuales mencionados en el capítulo anterior.

Encuentre el valor de “X” para las siguientes ecuaciones, escribiendo paso a paso el proceso que considere necesario. La letra “C” indica que la respuesta fu correcta, la “I” incorrecta y “NR” no resuelven (actividad resuelta en papel y lápiz).										
ITEM 3.C / **PAREJAS**	$\mathbf{7 = x + 2}$ $\mathbf{x = 5}$		$\mathbf{3x + 2 = 2x + 5}$ $\mathbf{x = 3}$		$\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$ $\mathbf{x = 2}$		$\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$ $\mathbf{x = 2}$		$\mathbf{2x + 6 = x + 1}$ $\mathbf{x = -5}$	
A.	**C**	Representan de manera correcta la ecuación utilizando figuras de peso X y 1 tomando como referencia el modelo de la balanza. Tachan dos figuras de peso unitario en ambos lados de la igualdad y posteriormente dibujan 5 figuras y se igualan a x.	**I**	Representan la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, pero en el lado izquierdo les falta una figura de peso 1. Posteriormente se eliminan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y obtienen como respuesta $x = 4$.	**C**	Representan la ecuación de manera correcta con figuras de peso 1 y X. Luego, tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y al final grafican una figura de peso X y la igualan con dos de peso 1.	**C**	Representan la ecuación de manera correcta con figuras de peso X y 1, luego, tachan la misma cantidad de figuras en ambos lados y al final grafican una figura de peso “X” y la igualan con dos de peso unitario.	**NR**	Dibujan figuras de pesos X y 1 para cada miembro de la ecuación, pero, no saben cómo resolverla. Posteriormente afirman que: “no se puede resolver con el método de la balanza, no encontramos resultados”.
B.	**C**	Hacen uso de la transposición de términos para restarle dos al siete y así obtienen $x = 5$. (no evocan a graficar figuras de peso X y 1).	**C**	Platean una transposición de términos de manera errónea. Luego, representan tres veces la x y dos veces 1 igualando a dos veces x y cinco veces 1. Tachan la misma cantidad de términos de x y 1 en ambos lados y obtienen finalmente $x = 3$. (ausencia del	**I**	Escriben seis veces x y él 1 igualando a tres veces x y siete veces 1, luego, tachan del lado izquierdo cinco veces x y el 1 y del lado derecho tres veces x y tres 1, para así llegar a $x = 4$. (ausencia a representar el modelo de la balanza).	**I**	Representan diez veces x y cuarenta 1 y igualando a cinco veces x y cincuenta veces1, luego, tachan del lado izquierdo nueve x y cuarenta 1 y del lado derecho, cinco x y cuarenta y cuatro veces 1, para así obtener $x = 6$.	**NR**	Representan dos veces x y seis veces 1 igualando a una x y un 1, después, tachan una sola x en ambos lados de la ecuación y no hacen nada más, puesto que, afirman lo siguiente: “no es el método para resolver”.

				modelo de la balanza).						
C.	**C**	Realizan una transposición de términos para restarle dos al siete, obteniendo $x = 5$.	**C**	Representan la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad graficando una figura de X y la igualan a tres.	**C**	Dibujan figuras de pesos X y 1 representando de manera correcta la ecuación, después, tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad, obteniendo tres figuras de peso X igualadas a seis figuras de peso 1. Finalmente llegan a que $x = 2$.	**C**	Representan de manera correcta la ecuación con 10 figuras de peso X y una sola figura de peso 40 igualándolo a 5 figuras de peso X y una sola de peso 50. Luego, descomponen la figura de peso 50 en una de peso 40 y peso 10. Tachan en ambos lados de la igualdad 5 figuras de peso X y la figura de peso 40 del lado izquierdo con la figura de peso 40 del lado derecho. Finalmente escriben que $5x = 10$ y tachan el 10, para así obtener $x = 2$.	**I**	Representan de manera correcta cada miembro de la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y posteriormente obtienen una figura de peso X y cuatro de peso 1. Finalmente escriben $x = 5$. (No tienen en cuenta el cambio del signo y por eso dejan positivo el 5 en vez de negativo).
D.	**C**	Representan cada miembro de la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, luego tachan dos figuras de peso 1 en ambos lados y obtienen $x = 5$.	**C**	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar la ecuación de manera correcta, tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados y obtienen como resultado x igual a tres figuras.	**C**	Representa las seis figuras de peso X con las tres figuras de peso X, cancelando en ambos lados tres figuras. Posteriormente, representan una figura de peso 1 con las siete figuras de peso 1, cancelan una figura de peso 1 del lado derecho con la que está sola en el lado izquierdo. Establecen una correspondencia y deducen que cada	**C**	Representan la ecuación con figuras de peso X y 1, después, tachan para eliminar la misma cantidad en ambos miembros, luego obtienen como respuesta $x = 2$.	**I**	Representan la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1en ambos lados y obtienen el resultado de $x = 5$. (No tienen en cuenta el cambio del signo y por eso dejan positivo el 5 en vez de negativo).

						$x = 2$.			
E.	**NR**	Representan siete figuras de peso 1 y no realizan ningún proceso que los lleve a una respuesta.	**C**	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1, posteriormente tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y obtienen que $x = 3$.	**C**	Representan la ecuación de manera correcta dibujando las figuras de peso X y 1, después, tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y así obtienen que $x = 2$.	**C**	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar la ecuación de manera correcta. Posteriormente tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de la igualdad y obtienen que $x = 2$.	**NR**	Representan la ecuación con figuras de peso X y 1, luego, tachan una figura de peso 1 en ambos lados de la igualdad y no llegan a la solución de la ecuación.

Tabla 9. Sistematización dela resolución de las ecuaciones del literal C de la escena 3 de la sección 1.

Pareja A

A partir de lo desarrollado por la pareja de estudiantes en todas las ecuaciones ($\mathbf{7 = x + 2}$; $\mathbf{3x + 2 = 2x + 5}$; $\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$; $\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$) se observa que evocan al modelo virtual de la balanza para resolverlas, es decir, representan cada ecuación utilizando figuras de peso X para las cantidades desconocidas y figuras de peso 1 para las cantidades conocidas, además tachan figuras iguales en ambos lados con el fin de encontrar el valor de la incógnita, tal como se muestra en la Figura 19.

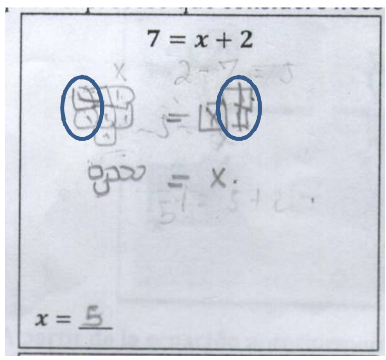


Figura 19. Resolucion de la ecuación $7 = x + 2$ ***por la pareja A.***

Obsérvese como al resolver la ecuación los estudiantes mantienen cierta lógica por tachar tantas figuras de peso 1 en el lado izquierdo como en el lado derecho, esto es, dos y dos. Lo anterior permite asegurar que así como en esta y en las siguientes tres ecuaciones, los estudiantes mantienen una equivalencia en las representaciones que hacen, puesto que, buscan todo el tiempo tachar la misma cantidad de figuras en ambos lados.

Particularmente, en la ecuación $\mathbf{3x + 2 = 2x + 5}$ a pesar de usar la misma lógica de tachar la misma cantidad de figuras en ambos lados, en las ecuaciones $\mathbf{7 = x + 2}$; $\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$ y $\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$ no llegan a una respuesta correcta porque al representar la ecuación haciendo uso del modelo les queda faltando una figura de peso 1, sin embargo, se mantiene la equivalencia entre las representaciones que hacen.

De este modo, es posible observar que en las cuatro primeras ecuaciones los estudiantes responden a una lógica ecuacional en la medida en que las representaciones que hacen en cada paso para resolver las primeras cuatro ecuaciones les permite mantener la equivalencia entre las partes, y con ello llegar a las respuestas correctas.

Es importante resaltar que en las ecuaciones $\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$; $\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$ los estudiantes luego de tachar la misma cantidad de figuras en ambos lados tanto de peso X como de peso 1, ellos al parecer establecen de manera intuitiva el valor de la incógnita, esto a partir de relacionar la cantidad de figuras de peso X que quedan en el lado izquierdo con la cantidad de figuras de peso 1 en el lado derecho, tal como se puede apreciar en la Figura 20.

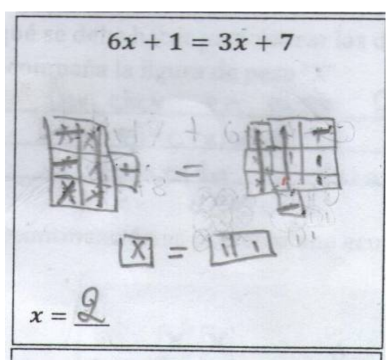


Figura 20. Resolucion de la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ por la pareja A.

Obsérvese como en la figura, parece ser que los estudiantes luego de tachar tres figuras de peso X en ambos lados y una de peso 1 en ambos lados, llegan a qué X es igual a dos figuras de peso 1.

En relación con la ecuación $\mathbf{2x + 6 = x + 1}$ se observa que los estudiantes hacen uso del modelo de la balanza virtual para representarla, sin embargo en virtud que la solución de dicha ecuación es un entero no positivo y que el modelo no permite dar cuenta de este tipo de soluciones, no logran llegar a la solución de la ecuación, pero además, no realizan ningún procedimiento de tachar figuras en ambos lados como lo habían hecho en las ecuaciones anteriores. Los estudiantes abiertamente lo hacen explícito que “no se puede resolver con el método de la balanza no encontramos resultado

Pareja B

De acuerdo con el trabajo realizado por esta pareja de estudiantes en las cuatro primeras ecuaciones ($\mathbf{7} = \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$; $\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}$; $\mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$; $\mathbf{10}\boldsymbol{x} + \mathbf{40} = \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{50}$) se puede observar que en las dos primeras intentan inicialmente resolverlas de forma simbólica, obteniendo en el primer caso una solución correcta, puesto que transponen el dos para restarle al siete (ver Figura 21). Tal procedimiento al parecer lleva a la solución correcta debido a lo sencillo del mismo.

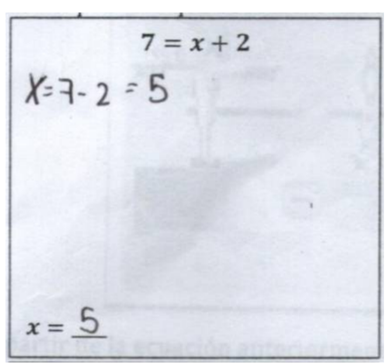


***Figura 21. Resolucion de la ecuación* $\mathbf{7} = \boldsymbol{x} + \mathbf{2}$ *por la pareja B*.**

Sin embargo, es posible apreciar como en la segunda de las ecuaciones la pareja de estudiantes debe evocar al modelo virtual de la balanza para representar la ecuación haciendo uso de X y 1 para poder tachar tantas de una como de la otra en el lado derecho como en el lado izquierdo, para así llegar a la solución correcta, en otras palabras, es el uso del modelo virtual de la balanza el que permite a los estudiantes llegar a la solución de la ecuación y no los tratamientos simbólicos que inicialmente intentaron realizar.

A las dos siguientes ecuaciones la pareja de estudiantes las representan mediante X y 1, en donde es posible observar cómo ellos establecen una correspondencia entre las figuras del lado izquierdo y el lado derecho indistintamente de si son o no iguales, es decir, tachan figuras de peso X del lado izquierdo con figuras de peso 1 el lado derecho, tal como se muestra en la Figura 22.

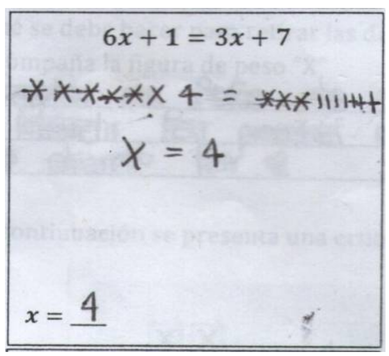


Figura 22. Resolucion de la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ por la pareja B.

Nótese como la pareja tacha cinco X y un 1 del lado izquierdo con tres X y tres 1 del lado derecho, con lo cual obtienen que X sea igual a cuatro. Esto permite ciertamente afirmar lo dicho, esto es, que se tachan X con 1 como si representaran las mismas cantidades. Lo anterior deja ver que al parecer hace falta conciencia en los estudiantes por dar cuenta que solo es posible tachar figuras que representan las mismas cantidades. Sin embargo, es posible apreciar que si hay una conciencia en ellos por dejar una sola X, es decir, que en el proceso de resolución debe quedar finalmente una y solo una X, debido a esto quizás los estudiantes tachan indistintamente figuras que no son iguales.

Finalmente, en la ecuación $\mathbf{2x + 6 = x + 1}$ se logra observar como los estudiantes evocando al modelo virtual de la balanza mantienen una equivalencia en el proceso que intentan desplegar para solucionarla al tachar la misma cantidad de figuras en ambos lados, sin embargo, explícitamente mencionan que el método no permite la solución de la ecuación.

Pareja C

En relación con la resolución de la ecuación $\mathbf{7 = x + 2}$ se observa como la pareja de estudiantes hacen uso de una trasposición de términos para restar dos al siete, manifestándolo explícitamente al resolverla tal como se muestra en la Figura 23.

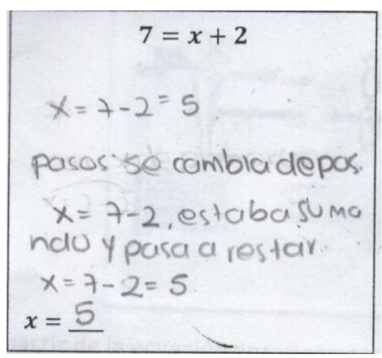


Figura 23. Resolucion de la ecuación $\mathbf{7 = x + 2}$ por la pareja C.

En la resolución de esta ecuación se logra apreciar como los estudiantes conocían el método de transposición de términos para la resolución de ecuaciones, particularmente saben que al trasponer un término es necesario cambiar el signo de éste tal como lo manifiestan en su afirmación “estaba sumando pasa a restar”.

En las siguientes tres ecuaciones $3x + 2 = 2x + 5$; $6x + 1 = 3x + 7$ y $10x + 40 = 5x + 50$ la pareja de estudiantes hace uso del modelo virtual de la balanza para representarlas utilizando figuras de peso X y 1, en las tres se nota como tachan la misma cantidad de figuras tanto de peso X como de peso 1 en un lado y en el otro, sin embargo, es importante destacar que en las dos últimas, los estudiantes en virtud de que después de tachar la misma cantidad de figuras de peso X en ambos lados continúan quedando en el lado izquierdo de las representaciones, establecen una correspondencia de manera intuitiva entre las cantidades de figuras de peso X que quedan en lado izquierdo con una cantidad equitativa de figuras de peso 1 en el lado derecho, tal como se muestra en la Figura 24.

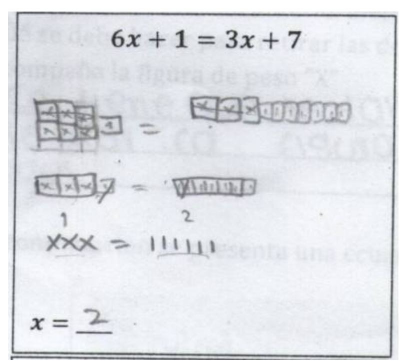


Figura 24. Resolucion de la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ por la pareja C.

En la ecuación $2x + 6 = x + 1$ los estudiantes la representan correctamente mediante el modelo virtual de la balanza con figuras de peso X y 1, se aprecia como mantienen la equivalencia entre las representaciones realizadas al tachar una figura de peso X y 1 en ambos lados, pero además, en busca de una solución para la ecuación fuerzan que la incógnita en ella sea igual a cinco, puesto que, fueron la cantidad de figuras de peso 1 que quedaron con una sola figura de peso X.

Pareja D

En todas las ecuaciones la pareja de estudiantes hace uso del modelo virtual de la balanza para representar las ecuaciones por medio de figuras de peso X y 1 sin etiquetar estas últimas, es decir, figuras sin el número uno. Así mismo, los estudiantes en todas las ecuaciones dan cuenta de la equivalencia que se debe mantener en cada uno de los pasos que realizan para solucionar la ecuación, puesto que se observa como tachan la misma cantidad de figuras de peso igual en ambos lados de las representaciones obteniendo en los cuatro primeros casos las respuestas correctas.

Hay que resaltar además que en las ecuaciones $\mathbf{6x+1=3x+7}$ y $\mathbf{10x+40=5x+50}$ los estudiantes luego de tachar la misma cantidad de figuras de peso X en ambos lados y de quedar algunos en el lado izquierdo en ambos casos, establecen al parecer de manera intuitiva el valor de la incógnita, haciendo corresponder la misma cantidad de figuras de peso 1 en el lado derecho con cada una de las figuras de peso X en el lado izquierdo, tal como se aprecia en la Figura 25.

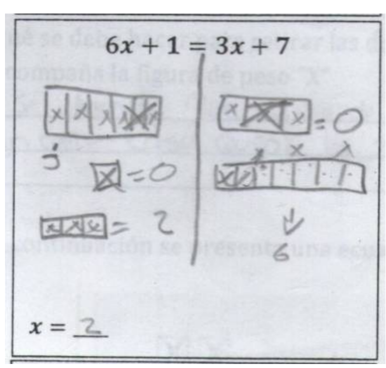


Figura 25. Resolucion de la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ por la pareja D.

Finalmente se observa como los estudiantes haciendo uso del modelo virtual de la balanza atienden a la equivalencia que se debe mantener al resolver la ecuación, pero además, fuerzan a que él valor de la incógnita sea cinco, en virtud que luego de haber tachado las correspondientes figuras en ambos lados fue este número de figuras de peso 1 las que quedaron, tal como se observa en la Figura 26.

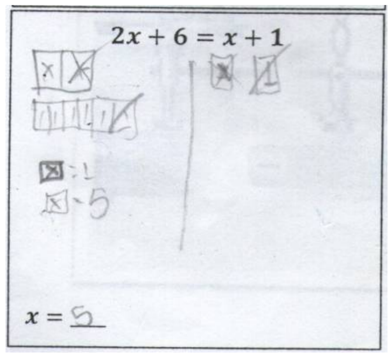


Figura 26. Resolucion de la ecuación $2x + 6 = x + 1$ *por la pareja D.*

Es importante resaltar además de lo anterior que ninguna de las representaciones que hacen para solucionar las cinco ecuaciones los estudiantes evocan a la igualdad entre las representaciones por medio del signo igual, sino que lo hacen por medio de una barra.

Pareja E

Esta pareja de estudiantes en todos los casos intentan resolver las ecuaciones haciendo uso de figuras de peso X y 1, es decir, evocando al modelo virtual de la balanza para resolver las ecuaciones. Sin embargo, en la primera de ellas se observa como representan solamente siete figuras de peso 1 en el lado izquierdo y no realizan ningún otro procedimiento.

Con respecto a las tres siguientes ecuaciones $\mathbf{3x + 2 = 2x + 5}$; $\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$ *y* $\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$ logran llegar a la solución correcta en ellas, tachando la misma cantidad de figuras de peso X en el lado izquierdo como figuras de peso X en el lado derecho y figuras de peso 1 en ambos lados. Hay que señalar que esta pareja en las dos últimas ecuaciones, luego de que han tachado la cantidad de figuras de peso X posibles en ambos lados, parece ser que establecen de manera intuitiva la cantidad de figuras de peso 1 que le correspondan a cada una de las figuras de peso X, tal como se deja ver en la Figura 27.

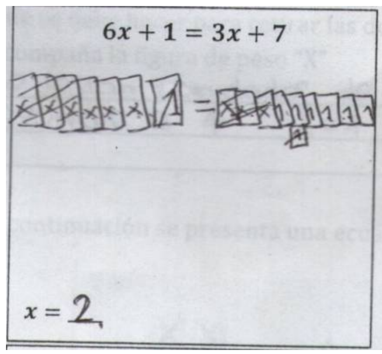


Figura 27. Resolucion de la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ por la pareja E.

Obsérvese como al resolver la ecuación $6x + 1 = 3x + 7$ la pareja de estudiantes tachan las cantidades de figuras en ambos lados que corresponden y posteriormente llegan de manera inmediata a la solución.

En relación con la última ecuación $2x + 6 = x + 1$ se aprecia cómo los estudiantes la representan con figuras de peso X y 1, y aunque es posible apreciar que reconocen que se debe mantener la equivalencia en el proceso de resolución de la ecuación al tachar una figura de peso 1 en ambos lados, no realizan ningún otro procedimiento.

A continuación se presenta la tabla 10, en donde se sistematizan las respuestas generadas por los estudiantes a las 7 ecuaciones del literal C de la escena 4 y un análisis más detallado de los procesos de resolución realizados por ellos a las ecuaciones planteadas en esta prueba piloto sección 1 de la misma escena.

Escena 4. Resuelva las siguientes ecuaciones escribiendo paso a paso todo el proceso que considere necesario para hallar el valor de "X".							
ITEM4.C / **PAREJAS**	$\mathbf{5 = 2 + x}$ $\mathbf{3 = x}$	$\mathbf{2x + 8 = 18}$ $\mathbf{x = 5}$	$\mathbf{20 = 10x}$ $\mathbf{2 = x}$	$\mathbf{16 = 5x + 11}$ $\mathbf{x = 1}$	$\mathbf{7x + 35 = 10x + 2}$ $\mathbf{x = 11}$	$\mathbf{6x + 8 = 4x + 26}$ $\mathbf{x = 9}$	$\mathbf{10x + 1 = 3x + 2}$ $\mathbf{x = \frac{1}{7}}$
A.	Transponen el cinco para restárselo al dos y de manera horizontal concluyen que $3 = x$ (se aprecia un uso incorrecto del signo igual).	Se observa de fondo que representan y resuelven la ecuación utilizando figuras de peso X y 1, pero luego borran lo realizado. Posteriormente, hacen uso correcto de la propiedad uniforme de la igualdad para restar ocho en ambos lados y posteriormente divide en ambos lados por diez, cometiendo un error, sin embargo, llegan a la solución correcta.	Se observa de fondo que representan y resuelven la ecuación utilizando figuras de peso X y 1, pero luego borran lo realizado y logran resolver la ecuación dividiendo veinte entre diez.	Se logra observar que representan y resuelven la ecuación utilizando figuras de peso X y 1, pero luego borran lo efectuado. Posteriormente, transponen el 16 para restárselo a 11 y, haciendo un uso lineal del signo igual, llegan a qué cinco menos $5x$ es igual a uno (uso incorrecto del signo igual).	Representan de manera correcta cada miembro de la ecuación utilizando figuras de peso X y 1, luego, tachan seis figuras de peso X y dos figuras de peso 1 en ambos lados. Después tachan una figura de peso X del lado izquierdo con una de peso X del lado derecho. Posteriormente dividen y obtienen como respuesta $x = 11$.	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar cada miembro de la ecuación de manera correcta, después, tachan cuatro figuras de peso X y ocho figuras de peso 1 en ambos lado. Posteriormente obtienen dos figuras de peso X igualadas a dieciocho figuras de peso 1, pero luego, afirman que la respuesta es $x = 9$.	No realizan ningún procedimiento.
	Realizan un trabajo aritmético poco entendible, pero aun así logran llegar a la respuesta de	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Luego, tachan la misma cantidad de	Representan la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, pero en el lado izquierdo	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Luego, tachan once figuras de peso	Representan cada miembro de la ecuación de manera correcta con figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan siete figuras de peso X con nueve	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan cinco figuras de peso X del lado izquierdo con	Representan cada miembro de la ecuación de manera correcta con figuras de peso X y 1. Posteriormente tachan tres figuras de peso X en ambos

B.	$3 = x$.	figuras en ambos lados, obteniendo $2x = 10$. Finalmente concluyen que $x = 5$.	falta una figura de peso 1. Posteriormente tachan nueve figuras de peso 1 del lado izquierdo con nueve de peso X del lado derecho. Finalmente obtienen que $x = 10$.	1 en ambos lados. Posteriormente tachan cuatro figuras de peso 1 del lado izquierdo con cuatro figuras de peso X del derecho, concluyendo que $x = 1$.	figuras de peso X en ambos lados. Luego, tachan cuatro figuras de peso 1 del lado izquierdo con dos figuras de peso 1 del lado derecho, obteniendo así que $31 = x$.	cuatro figuras de peso X del lado derecho. Luego, tachan ocho figuras de peso 1 del lado izquierdo con nueve figuras de peso 1 el lado derecho. Finalmente obtienen una sola figura de peso X igualada a diecisiete figuras de peso 1.	lados y adicionalmente una de peso 1 en ambos lados. Finalmente no terminan el procedimiento y no llegan a un valor exacto.
C.	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Luego, tachan dos figuras de peso 1 en ambos lados. Finalmente obtienen tres figuras de peso 1 igualadas a una figura de peso X.	Representan de manera correcta la ecuación con dos figuras de peso X y ocho de peso 1 igualándolas a una sola figura de peso 18. Después tachan ocho figuras de peso 1 en ambos lados, aunque, no se ve reflejado en el lado derecho, lo representan con una sola figura de peso 10. Luego esto lo igualan a dos figuras de peso X. por tanto,	Representan de manera correcta la ecuación con diez figuras de peso X igualándolas a una sola figura de peso 20. Luego, dividen por 5 en ambos lados de la igualdad, y obtienen 4 figuras de peso 1 del lado izquierdo y 2 figuras de peso X del lado	Representan de manera correcta la ecuación con una sola figura de peso 16 igualándola a cinco figuras de peso X y una sola figura de peso 11. Finalmente, dibujan una sola figura de peso 5 en el lado izquierdo igualadas a las cinco figuras de peso X (se observa que tacharon once figuras en ambos lados, pero no se ve	Representan de manera correcta la ecuación con una sola figura de peso 7X y una sola figura de peso 35 igualándolas a diez figuras de peso X cada una y dos de peso 1cada una. Luego tachan la figura de peso 7X del lado izquierdo con siete figuras de peso X del lado derecho y adicionalmente tachan dos figuras de peso 1del lado derecho con la sola figura de peso 35 del lado izquierdo. Posteriormente obtienen una figura de peso 33 igualada a	Representan de manera correcta la ecuación con una sola figura de peso 6X y ocho figuras de peso 1 cada una e igualándolas a una sola figura de peso 4X y una sola figura de peso 26. Luego, tachan las ocho figuras de peso 1 del lado izquierdo y del lado derecho le restan esta misma cantidad a la figura de peso 26. Después, tachan la figura de peso 4X del lado derecho y le restan esta misma cantidad a la figura de peso 6X del lado	Representan de manera correcta la ecuación con una sola figura de peso 10X y una sola figura de peso 1 igualándolas a una sola figura de peso 3X y dos figura de peso 1. Luego, hacen la eliminación quizá mentalmente (porque no se observa que tacharan) en ambos lados de la igualdad y obtienen como respuesta una sola figura de peso 7X igualada con una figura de peso 1, concluyendo que

		concluyen que $x = 10$.	derecho. Finalmente, dividen por 2 en cada lado para obtener que $x = 2$.	reflejado el procedimiento) afirmando que es el resultado final.	3 figuras de peso X. Después concluyen que $11 = x$.	izquierdo y obtienen una sola figura de peso 2X igualada a una figura de peso 18. Por ultimo dividen entre 2 y concluyen de que $x = 9$.	$x = 1$.
D.	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar cada miembro de la ecuación de manera correcta. Luego, tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados y obtienen como respuesta $x = 3$.	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados para obtener así $x = 5$.	Representan la ecuación de manera correcta con figuras de peso X y 1. Luego, tachan diez figuras de peso 1 del lado izquierdo con diez figuras de peso X del lado derecho y obtienen como respuesta $10 = x$.	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Luego, tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados y obtienen $5 = 5x$. Posteriormente dividen por cinco y llegan a que $1 = x$.	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Primero tachan siete figuras de peso X en ambos lados y, después, tachan dos figuras de peso 1 a cada lado de ésta, para luego obtener treinta y tres figuras de peso 1 igualándolas a tres figuras de peso X y así dividir en ambos lados por tres para obtener $x = 11$.	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar cada miembro de la ecuación de manera correcta. Posteriormente, tachan cuatro figuras de peso X en ambos lados. Después, tachan ocho figuras de peso 1 a cada lado de ésta. Luego, obtienen dos figuras de peso X igualadas a una sola figura de peso 18, para así dividir por dos y llegar a que $x = 9$.	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan tres figuras de peso X en ambos lados. Luego, tachan una figura de peso 1 a cada lado y así, obtener siete figuras de peso igualadas a una sola figura de peso 1. (Representan de manera simbólica $\frac{7x}{7} = \frac{1}{7}$, pero, dan como respuesta $x = 1$).

E.	Hacen uso de la propiedad simétrica de la igualdad. Posteriormente le restan dos a cada lado y obtienen de manera correcta la solución de $x = 3$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos y, luego, dividen por dos para así obtener que $x = 5$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, pero invirtiendo los miembros de cada lado. Luego, obtienen $x = 2$ (quizá dividen por diez, pero, lo harán mentalmente puesto que no se ve evidenciado en la hoja de trabajo).	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan once figuras de peso 1 en ambos lados. Luego, concluyen que $x = 1$ (quizá dividen por cinco mentalmente porque no se observa que tacharan).	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente tachan siete figuras de peso X y dos figuras de peso 1 en ambos lados y, al final obtienen $x = 11$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan cuatro figuras de peso X y ocho figuras de peso 1 en ambos lados. Finalmente obtienen como respuesta $x = 9$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan 3 figuras de peso X y una figura de peso 1 en ambos lados y, finalmente obtienen que $x = 1$, la cual sea incorrecta.

Tabla 10. Sistematización de la resolución de ecuaciones del literal C de la escena 4 de la sección 1.

Pareja A

De acuerdo al trabajo realizado por esta pareja de estudiantes, al resolver las ecuaciones propuestas es posible observar que para el caso de $\mathbf{2x + 8 = 18}$; $\mathbf{20 = 10x}$; $\mathbf{16 = 5x + 11}$; $\mathbf{7x + 35 = 10x + 2}$; $\mathbf{6x + 8 = 4x + 2}$, son resueltas por ellos haciendo uso del modelo virtual de la balanza. Sin embargo, en las tres primeras de ésta es notorio que borraron el proceso y luego lo reemplazaron por un procedimiento exclusivamente simbólico.

En relación con la ecuación $\mathbf{5 = 2 + x}$ se puede apreciar como los estudiantes hacen uso de la transposición de términos para restar cinco al dos, tal como se puede observar en la Figura 28.

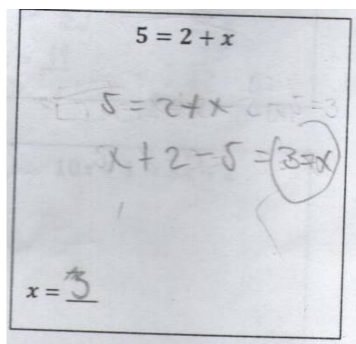


Figura 28. Resolucion de la ecuación* $\mathbf{5 = 2 + x}$ *por la pareja A.

A partir del procedimiento realizado es posible apreciar cómo los estudiantes no transponen el término adecuado, quizá ello se debe a que la incógnita quedaría en el miembro derecho, lo que no es usual en los tratamientos simbólicos, ciertamente fuerzan a que ésta quede en el miembro izquierdo. Además, de lo anterior los estudiantes fuerzan a que la solución sea positiva aun cuando el procedimiento realizado por ellos los lleve a una solución negativa ($\mathbf{-3 = x}$).

Teniendo en cuenta estas dos cuestiones, se resalta por un lado que los estudiantes no evocan a la propiedad uniforme de la igualdad y por otro, que hacen un uso lineal del signo igual lo que los conduce a violar la equivalencia entre los miembros dados en la ecuación. Probablemente suscita de este modo porque particularmente en esta ecuación al usar la propiedad uniforme de la igualdad en uno de los miembros de la ecuación queda cero. Del mismo modo, se observa un procedimiento muy similar cuando los estudiantes resuelven la ecuación $\mathbf{16 = 5x + 11}$.

Pues al igual que en el caso anterior, se observa cómo en esta solución de la ecuación se hace también el uso lineal del signo igual y no hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad en relación con el inverso aditivo, pero además, se ratifica que los estudiantes evitan que el número cero quede en uno de los miembros de la ecuación.

En relación con el proceso de solución para la ecuación $\mathbf{2x + 8 = 18}$ realizado por los estudiantes se observa como aquí a diferencia de los dos casos anteriores hacen un uso correcto de la propiedad uniforme de la igualdad en relación con el uso del inverso aditivo (cuando se resta ocho en ambos lados) y además como ellos evocan al uso del inverso multiplicativo, sin embargo se hace de manera errada en virtud que se divide por diez y no por dos que es el número que acompaña a la incógnita (verse Figura 29).

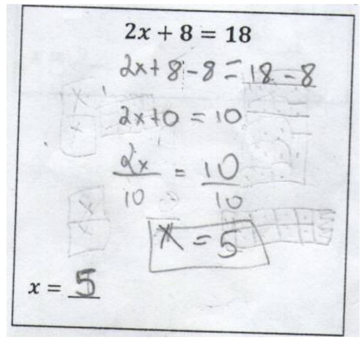


Figura 29. Resolucion de la ecuación $\mathbf{2x + 8 = 18}$ por la pareja A.

Sin embargo, es posible apreciar que los estudiantes al resolver la ecuación $\mathbf{20} = \mathbf{10x}$ dividen por el número que acompaña la incógnita, no obstante, en este procedimiento a diferencia del anterior no se hace uso de la propiedad uniforme de la igualdad. Además de esto se observa como en el proceso se pierde la ecuación y se pasa de ésta a una división $(\mathbf{20} \div \mathbf{10} = \mathbf{2})$.

El proceso de solución usado por los estudiantes en estas dos últimas ecuaciones deja entrever de alguna manera que hace falta una conciencia en ellos por saber cómo usar la propiedad uniforme de la igualdad en relación con el uso de inversos multiplicativos, puesto que, cuando se usa la propiedad uniforme de la igualdad parece ser que no saben con que dividir y cuando lo hacen se pierde la propiedad como tal.

Es importante mencionar que aunque en los cuatro procedimientos de las ecuaciones anteriores se llega a la solución correcta, sintácticamente todas presentan errores. Lo anterior se debe a quizá como se dijo inicialmente el uso del modelo virtual de la balanza les permitió saber de antemano cual era la resolución de cada una de las ecuaciones y así forzar los procedimientos sintácticos que hicieron para llegar a dicha solución.

Ahora bien las ecuaciones $\boldsymbol{7x + 35 = 10x + 2 \ y \ 6x + 8 = 4x + 26}$ son resueltas por los estudiantes evocando al modelo virtual de la balanza haciendo uso de figuras de peso X y 1 tachando la misma cantidad de figuras en ambos lados tanto de peso X como de peso 1. En ambos casos, al parecer ellos establecen de manera intuitiva el valor de la incógnita otorgando a cada una de las figuras de peso X que quedan en un lado una misma cantidad de figuras de peso 1 que quedaron en el otro.

En relación con la última ecuación ($\boldsymbol{10x + 1 = 3x + 2}$) los estudiantes no realizan ningún procedimiento.

Pareja B

En relación con la resolución de la ecuación $\boldsymbol{5 = 2 + x}$ se observa que los estudiantes si bien intentan realizar procedimientos de orden sintáctico, estos no son claros, sin embargo, a partir de lo que hacen es posible afirmar que lo que sí es claro es que ellos saben que la solución de la ecuación es tres, quizá esto se deba a que dicha ecuación es muy sencilla y fácilmente se puede realizar por métodos intuitivos como el recuento (cuantas unidades se deben sumar a dos para llegar a cinco).

Ahora, con respecto al proceso de resolución de la ecuación $\boldsymbol{2x + 8 = 18}$ que los estudiantes si bien evocan al modelo virtual de la balanza también dan cuenta de procedimientos sintácticos. De este modo, los estudiantes dan cuenta de la equivalencia que se debe mantener en el proceso de solución al tachar ocho figuras de peso 1 en ambos lados, tal como se aprecia en la Figura 30.

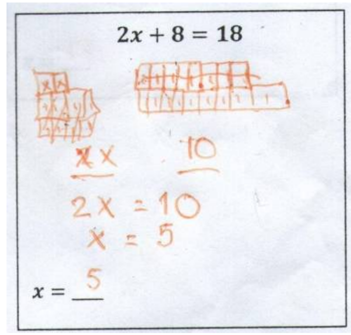


Figura 30. Resolucion de la ecuación $2x + 8 = 18$ por la pareja B.

En relación con las siguientes tres ecuaciones ($\mathbf{20 = 10}\boldsymbol{x}$; $\mathbf{16 = 5}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 11}$; $\mathbf{7}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 35 = 10}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 2}$) es posible observar que en todas, la pareja de estudiantes evocan al modelo virtual de la balanza para resolverlas, esto es, haciendo figuras de peso X y 1; además de esto, que en los tres procesos de resolución, ellos tachan indistintamente figuras de peso X con figuras de peso 1, como si éstas representaran la misma cantidad, tal como se muestra a continuación a manera de ejemplo en la Figura 31.

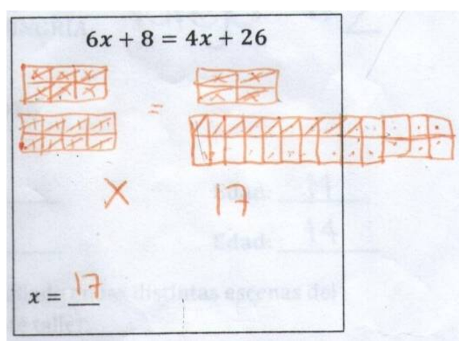


Figura 31. Resolucion de la ecuación $6x + 8 = 4x + 26$ por la pareja B.

Es importante señalar que en los tres casos los estudiantes tienen claro que finalmente debe quedar una y solo una figura de peso X, motivo por el cual en todos los casos ellos tachan figuras de ambos lados hasta quedar una sola X.

Con respecto a la última ecuación ($\mathbf{10}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 1 = 3}\boldsymbol{x}\mathbf{ + 2}$) se percibe cómo los estudiantes si bien evocan tanto al modelo virtual de la balanza como a representaciones simbólicas, no logran resolver la ecuación y los procedimientos realizados no son claros.

Pareja C

El proceso usado por esta pareja de estudiantes al resolver las ecuaciones $5 = 2 + x$; $2x + 8 = 18$; $20 = 10x$; $16 = 5x + 11$; $7x + 35 = 10x + 2$; $6x + 8 = 4x + 2$ y $10x + 1 = 3x + 2$ deja ver que evocan al modelo virtual de la balanza para resolverlas, utilizando figuras de peso X y 1 para representarlas. En relación con la primera ecuación, se observa como tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados, manteniendo la equivalencia entre los lados.

En las ecuaciones $2x + 8 = 18$ y $16 = 5x + 11$ los estudiantes evocan al modelo virtual de la balanza utilizando figuras de peso X y 1 para representarlas, tachando la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados. Sin embargo, en los dos casos los estudiantes asumen el valor de la incógnita a partir del número de figuras de peso 1 que quedaron, sin tomar en consideración que se tiene más de una figura de peso X. Lo anterior se refleja a manera de ejemplo en la Figura 32.

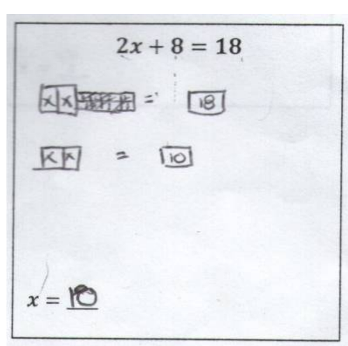


Figura 32. Resolucion de la ecuación $2x + 8 = 18$ por la pareja C.

Con respecto al proceso de resolución de la ecuación $\mathbf{20 = 10x}$ se observa que los estudiantes dividen dos veces en ambos miembros de la ecuación, primero por cinco y luego por dos, para así obtener la solución correcta de la misma, tal como se deja ver en la Figura 33.

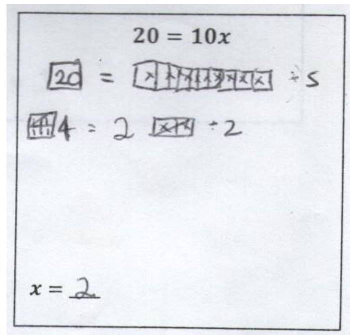


Figura 33. Resolucion de la ecuación $\mathbf{20 = 10x}$ ***por la pareja C.***

En relación con la solución de las ecuaciones $\mathbf{7x + 35 = 10x + 2}$ ***y*** $\mathbf{6x + 8 = 4x + 26}$ se aprecia como los estudiantes inician tachando en ambos lados figuras tanto de peso X como de peso 1, manteniendo la equivalencia entre dichos lados. Además de ello, se aprecia explícitamente que ellos dividen en ambos lados para así obtener el valor de la incógnita, tal como se puede ver en la Figura 34.

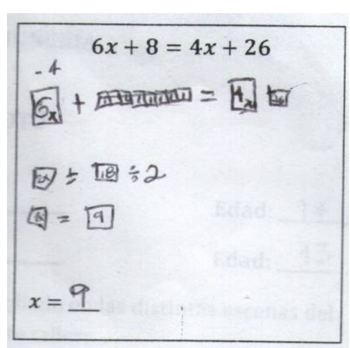


Figura 34. Resolucion de la ecuación $\mathbf{6x + 8 = 4x + 26}$ ***por la pareja C.***

Obsérvese cómo la pareja de estudiantes divide entre dos tanto a 2X como a 18, que si bien sintácticamente se rompe con la equivalencia entre los lados pues solo se representa tal división en el lado derecho, finalmente se efectúa en ambos lados.

Los procesos de solución de las ecuaciones efectuados por esta pareja permiten ver que, por un lado, logran mantener la equivalencia entre los lados al tachar figuras del mismo peso y por otro, que aunque pareciera que ellos tienen claro la necesidad de dividir en ambos lados para obtener así el valor de una incógnita, los procesos de solución de las ecuaciones $\boldsymbol{2x + 8 = 18\ y\ 16 = 5x + 11}$ contradicen lo anterior. En otras palabras, solo en algunos casos los estudiantes dividen en ambos lados y en otros casos se omite tal proceso lo que los lleva a errores.

Pareja D

De acuerdo con los procesos de resolución realizados por ésta pareja de estudiantes se observa que en las ecuaciones $\boldsymbol{5 = 2 + x}$; $\boldsymbol{2x + 8 = 18}$; $\boldsymbol{20 = 10x}$; $\boldsymbol{16 = 5x + 11}$; $\boldsymbol{7x + 35 = 10x + 2}$; $\boldsymbol{6x + 8 = 4x + 2\ y\ 10x + 1 = 3x + 2}$ evocan al modelo virtual de la balanza para representarlas, utilizando figuras de peso X y 1, y resolverlas. Con respecto a la primera ecuación, se aprecia como para resolverla mantienen la equivalencia entre los lados, puesto que tachan la misma cantidad de figuras de peso 1, obteniendo así la solución correcta $\boldsymbol{x = 3}$.

Con relación a la resolución de las ecuaciones $\boldsymbol{2x + 8 = 18}$; $\boldsymbol{16 = 5x + 11}$; $\boldsymbol{7x + 35 = 10x + 2\ y\ 6x + 8 = 4x + 2}$ se logra ver como los estudiantes inician manteniendo la equivalencia en ambos lados al tachar la misma cantidad de figuras (de peso 1 para los dos primeros casos y de peso X y 1 en los dos últimos casos) y además de ello, se aprecia cómo ellos en las tres últimas ecuaciones logran llegar a la solución correcta de cada una de ellas mostrando explícitamente que hacen una división, a manera de ejemplo como se muestra en la Figura 35, en donde se ve claramente que dividen por dos.

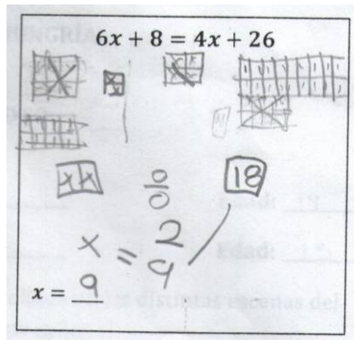


Figura 35. Resolucion de la ecuación $6x + 8 = 4x + 26$ por la pareja D.

Sin embargo, tal división no se hace evidente en la primera de éstas ecuaciones ($\mathbf{2x + 8 = 18}$) no obstante los estudiantes si llegan a la solución correcta, lo que parece indicar que se establece una correspondencia intuitiva entre la cantidad de figuras de peso X del lado izquierdo y la cantidad de figuras de peso 1 del lado derecho.

Ahora bien, en la resolución de la ecuación $\mathbf{20 = 10x}$ se observa que la pareja de estudiantes tachan indistintamente figuras de peso X con figuras de peso 1, como si éstas representaran la misma cantidad.

Además de esto se observa como la cantidad de figuras tachadas en ambos lados no se corresponden, puesto que si bien en el lado izquierdo se tachan diez, en el lado derecho se tachan solo nueve. De alguna manera esto deja apreciar como los estudiantes saben que no es posible retirar todas las figuras de peso X y que finalmente, debe quedar solo una.

Con respecto al proceso de resolución de la última ecuación realizado por esta pareja de estudiantes se logra observar como ellos en todo el proceso mantienen la equivalencia entre los lados, tanto al tachar la misma cantidad de figuras de peso X y 1, como cuando explícitamente dividen en ambos miembros de la ecuación entre siete. Esto último permite asegurar que los estudiantes hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad en relación con el inverso multiplicativo (ver Figura 36).

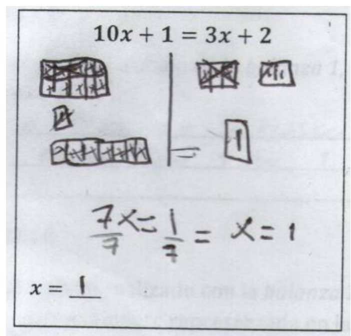


Figura 36. Resolucion de la ecuación $\mathbf{10x + 1 = 3x + 2}$ ***por la pareja D.***

Sin embargo, el proceso mismo de resolución efectuado por ellos deja ver que si bien la solución de la ecuación es no entera ($\boldsymbol{x = \frac{1}{7}}$) entonces dejan como solución un numero entero ($\boldsymbol{x = 1}$). Lo anterior permite deducir cierta resistencia de esta pareja de estudiantes por aceptar soluciones fraccionarias para ecuaciones.

Pareja E

En los procesos de resolución de las ecuaciones planteadas $\boldsymbol{5 = 2 + x}$; $\boldsymbol{2x + 8 = 18}$; $\boldsymbol{20 = 10x}$; $\boldsymbol{16 = 5x + 11}$; $\boldsymbol{7x + 35 = 10x + 2}$; $\boldsymbol{6x + 8 = 4x + 2}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{10x + 1 = 3x + 2}$ se observa como los estudiantes únicamente en la primera ecuación no evocan al modelo virtual de la balanza para resolverla, caso contrario que ocurre con las otras ecuaciones.

Con respecto a la resolución de la ecuación $\mathbf{5} = \mathbf{2} + \boldsymbol{x}$ es posible apreciar como los estudiantes invierten los miembros de la ecuación, es decir, hacen uso de la propiedad simétrica de la igualdad con el fin de que la incógnita quede en el lado izquierdo de la ecuación. Además, ellos pierden el sentido de la ecuación, puesto que la incógnita la desaparecen y a su vez, hacen uso lineal del signo igual, lo cual los lleva a generar sentencias aritméticas no equivalentes como por ejemplo, $\mathbf{2} - \mathbf{2} = \mathbf{3}$. Sin embargo, se puede percibir que los estudiantes hacen este paso al parecer buscando aplicar la propiedad uniforme de la igualdad en relación con el inverso aditivo (esto para restar dos en ambos lados del signo igual), lo que los lleva a la solución correcta de la ecuación planteada. Tal procedimiento se puede observar a continuación en la Figura 37.

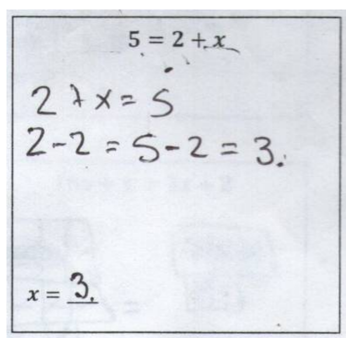


Figura 37. Resolucion de la ecuación* $\mathbf{5} = \mathbf{2} + \boldsymbol{x}$ *por la pareja E.

Con relación al proceso de solución de la ecuación $\mathbf{20} = \mathbf{10}\boldsymbol{x}$ se observa el único proceso que hacen los estudiantes para resolverla es representarla por medio de figuras de peso X y 1, invirtiendo los miembros de la ecuación, es decir, dibujando las diez figuras de peso X en el lado izquierdo y las veinte figuras de peso 1 en el lado derecho y posteriormente escriben la solución. Lo anterior parece indicar que posiblemente los estudiantes establecen una correspondencia intuitiva entre cada una de las figuras de peso X y un número equitativo de figuras de peso 1, puesto que no se ve un proceso de tachar, solo la representación.

Con respecto a las tres siguientes ecuaciones $\mathbf{16 = 5x + 11}$; $\mathbf{7x + 35 = 10x + 2}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{6x + 8 = 4x + 26}$ se aprecia que los estudiantes en el proceso de solución de ellas, manteniendo la equivalencia tachando la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados y finalmente logran llegar a la solución correcta de cada una, al parecer estableciendo una correspondencia intuitiva entre cada una de las figuras de peso X que quedaron con la cantidad de figuras de peso 1, puesto que, en estas ecuaciones no se observa ningún proceso de división que efectúan los estudiantes.

En el proceso de solución de la ecuación $\mathbf{10x + 1 = 3x + 2}$ los estudiantes mantienen la equivalencia tachando figuras de peso X y 1 en ambos lados. Posteriormente concluyen que el valor de la incógnita es el único número entero que queda en esa representación realizada por ellos, tal como se aprecia en la siguiente Figura.

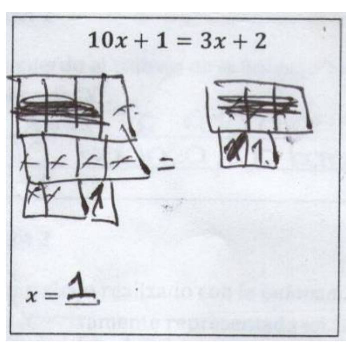


Figura 38. Resolucion de la ecuación $\mathbf{10x + 1 = 3x + 2}$ ***por la pareja E.***

Nótese como en la figura se observa que quedan siete figuras de peso X en el lado izquierdo con una figura de peso 1 en el lado derecho, lo que les permite a los estudiantes llegar a que $\boldsymbol{x = 1}$.

3.3.2 Prueba piloto sección dos

El análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba piloto sección 2, se presenta a continuación en la tabla 11, donde cada pareja de estudiantes realiza los distintos tratamientos para resolver las ecuaciones de primer grado planteadas para el modelo virtual de la balanza con poleas. Como ya se mencionó en la primera parte de la sección, se espera que ellos logren resolver las ecuaciones, pero, sin hacer uso de la balanza y poleas, es decir, que encuentren las operaciones sobre números y símbolos que les permita encontrar el valor de la incógnita, y lo registren de forma sintáctica. Este análisis se hace tan detallado como en la sección 1.

A continuación, se presenta los resultados obtenidos junto con sus respectivos análisis.

Escena 1(balanza y poleas 1). Representar en las siguientes balanzas con poleas cada una de las ecuaciones dadas según correspondan.				
ITEM 1 / PAREJAS	**a)** $-5 = -x - 2$	**b)** $4x = -7$	**c)** $2x - 3 = -x + 1$	**d)** $-3x + 1 = 2x - 1$
A.	Representan de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.	Representan de manera correcta la ecuación en el modelo de la balanza con poleas.	Representan de manera correcta, la ecuación sobre el modelo de la balanza con poleas.	Representa de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.
B.	Representan de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.	Representan de manera correcta la ecuación en el modelo de la balanza con poleas.	Representan de manera correcta, la ecuación sobre el modelo de la balanza con poleas.	Representa de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.
C.	Representan de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.	Representan de manera correcta la ecuación en el modelo de la balanza con poleas.	Representan de manera correcta, la ecuación sobre el modelo de la balanza con poleas.	Representa de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.
D.	Representan de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.	Representan de manera correcta la ecuación en el modelo de la balanza con poleas.	Representan de manera correcta, la ecuación sobre el modelo de la balanza con poleas.	Representa de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.
E.	Representan de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.	Representan de manera correcta la ecuación en el modelo de la balanza con poleas.	Cometen un error a la hora de interpretar el lado derecho de la igualdad $-x + 1$, en la balanza, no se percatan que el peso 1 es positivo y lo ubican en el platillo de las cantidades negativas.	Representa de manera correcta la ecuación ubicando tanto las cantidades positivas como negativas en los platillos sin ningún error.

Tabla 11. Representación de las ecuaciones de la escena 1(balanza y poleas 1) de la sección 1.

La tabla anterior muestra, entre otros aspectos, los resultados de las parejas de estudiantes al solicitarles que representaran las ecuaciones dadas ($\mathbf{-5 = -x - 2}$; $\mathbf{4x = -7}$; $\mathbf{2x - 3 = -x + 1}$; $\mathbf{-3x + 1 = 2x - 1}$) en la balanza con poleas a partir del trabajo previamente realizado en la escena 1(*balanza y poleas 1*). Lo anterior deja apreciar como las cuatro ecuaciones se logran representar con figuras de peso X y 1 de manera correcta por las parejas de estudiantes, atendiendo tanto a las cantidades positivas como negativas para ubicarlas en los platillos que les corresponde (ver figura 16). Sin embargo, la pareja E no representa la ecuación $\mathbf{2x - 3 = -x + 1}$ correctamente, puesto que ubica el término 1 en el platillo de las cantidades negativas, aun así, la tendencia por representar adecuadamente las ecuaciones dadas en la balanza con poleas salta a la vista. De acuerdo a esto es posible asegurar que las parejas de estudiantes comprenden la manera de representar ecuaciones en el modelo abordado.

A continuación se presenta la tabla 12, en donde se sistematizan las respuestas generadas por los estudiantes a las 4 ecuaciones de la escena 2(*balanza y poleas 2*) y un análisis más detallado de los procesos de resolución realizados por ellos a las ecuaciones planteadas en esta prueba piloto sección 2 de la misma escena.

A partir del trabajo realizado en la *balanza y poleas 2*, resuelva las siguientes ecuaciones:				
ITEM 2 / **PAREJAS**	**a)** $\boldsymbol{x-5=-3}$ $\boldsymbol{x=2}$	**b)** $\boldsymbol{-5x=-10}$ $\boldsymbol{x=2}$	**c)** $\boldsymbol{2x-5=-3}$ $\boldsymbol{x=1}$	**d)** $\boldsymbol{4x-6=3x-2}$ $\boldsymbol{x=4}$
A.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen que $x=2$.	Transponen el término $-5x$ para sumárselo al -10. Posteriormente, dividen por cinco y, así obtener el valor de la incógnita $x=-1$, la cual es incorrecta.	Suman el inverso aditivo de 5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $2x=2$. Luego, quizás hacen uso del inverso multiplicativo mentalmente (no se ve el proceso) porque llegan a que $x=1$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Posteriormente, le restan tres x a cuatro x del lado izquierdo y restarle dos a seis del lado derecho de la igualdad y obtienen como respuesta $x=4$.
B.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Posteriormente de manera simbólica dicen que $x=2$. (No se observa ningún proceso en la hoja de trabajo).	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Luego, tachan la misma cantidad de figuras de peso 1 en ambos lados y obtienen que $x=6$, pero es incorrecta. Posteriormente realizan de nuevo el procedimiento de manera simbólica, haciendo uso del inverso multiplicativo de -5 (aunque es poco entendible el procedimiento), obtienen como respuesta $x=2$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Posteriormente, tachan tres figuras de peso 1 en ambos lados, para luego, transponer las dos figuras de peso 1 que quedaron del lado izquierdo al lado derecho y así obtener dos figuras de peso X del lado izquierdo igualadas con éstas dos de peso 1. Finalmente, dividen (pero no es evidente por cuanto lo hacen) y les da $x=2$.	Representan de manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Posteriormente, tachan dos figuras de peso 1 y tres figuras de peso X en ambos lados. Finalmente transponen las cuatro figuras de peso 1 del lado izquierdo al lado derecho y concluyen que una figura de peso X es igual a cuatro figuras de peso 1.
C.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen que $x=2$.	Utilizan el inverso aditivo de -5 y de la propiedad uniforme de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita, pero, cuando no lo hacen, intentan volver hacerla pero esta vez aplican el inverso multiplicativo de -5 y obtienen $x=2$.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $2x=2$, pero finalmente concluyen que $x=1$.	Suman el inverso aditivo de -6 y hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad, logran obtener que $x=4$.
	Representan de manera	Representan de manera	Representan de	Representan de manera

D.	correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Posteriormente, transponen las cinco figuras de peso 1 negativas para ser sumadas a tres figuras de peso 1 negativas y así obtienen como respuesta $x = 2$.	correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Posteriormente, tachan cinco figuras de peso X del lado izquierdo con cinco figuras de peso 1 del lado derecho, para luego, llegar a que $x = 5$, la cual es una respuesta incorrecta.	manera correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Luego, transponen las cinco figuras de peso 1 negativas para sumárselas a las tres figuras de peso 1 negativas (señalan para mostrar el proceso), a su vez tachan una figura de peso X del lado izquierdo. Finalmente obtienen que $x = 1$.	correcta la ecuación dibujando figuras de peso X y 1, tal como se presenta en la balanza y poleas. Luego, tachan dos figuras de peso 1 y tres figuras de peso X en ambos lados. Posteriormente transponen las cuatro figuras de peso 1 (señalan para mostrar el proceso), y así obtener que $x = 4$.
E.	Representan de manera correcta la ecuación con figuras de peso X y 1, pero, no la tratan. Luego, de manera simbólica despejan la incógnita sumando el inverso aditivo -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen que $x = 2$.	Representan de manera correcta la ecuación con figuras de peso X y 1, pero, no la tratan. Posteriormente, hacen uso del inverso multiplicativo de -5 y de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen como resultado $x = 2$.	Representan de manera correcta la ecuación con figuras de peso X y 1, pero, no la tratan. Posteriormente, despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad y obtienen $2x = 2$. Luego, hacen uso del inverso multiplicativo de 2 y obtienen como resultado $x = 1$.	Representan de manera correcta la ecuación con figuras de peso X y 1, pero, no la tratan. Posteriormente, para despejar la incógnita, suman el inverso aditivo de -6 y hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad. Luego, usan la transposición de términos, para restar $3x$ a $4x$ y al final obtienen $x = 4$.[12]

Tabla 12. Sistematización de la resolución de ecuaciones de la escena 2 (balanza y poleas 2) de la sección 2.

[12] Aunque se diga que los estudiantes hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad, es preciso resaltar que ello no quiere decir que en los estudiantes haya una conciencia de dicha propiedad sino que ésta se presenta en la medida en que ellos en sus procesos suman o dividen en ambos lados por una misma cantidad. En este sentido se habla de que están evocando desde una perspectiva matemática, es decir, están haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad respecto al producto y a la adición en $\mathbb{R}$.

Pareja A

De acuerdo al proceso de resolución realizado por esta pareja de estudiantes en las ecuaciones $\boldsymbol{x-5}$ = $\boldsymbol{-3}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{2x-5}$ = $\boldsymbol{-3}$ se logra observar cómo ellos las resuelven sumando cinco en ambos miembros de cada una de las ecuaciones, particularmente, en la segunda ecuación se aprecia como los estudiantes pasan de $2x = 2$ a $x = 1$, lo que al parecer se hace realizando una correspondencia intuitiva entre la cantidad de x que hay (en el miembro izquierdo) y la cantidad de unidades correspondientes (ver Figura 39).

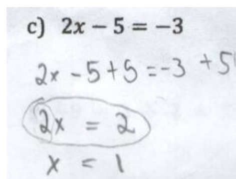


Figura 39. Resolucion de la ecuación c por la pareja A.

Ahora, cuando la pareja de estudiantes resuelve la ecuación $\boldsymbol{4x-6}$ = $\boldsymbol{3x-2}$ se aprecia claramente como hacen uso de la transposición de términos y por ningún lado evocan a la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la adición como sucedió en los dos casos anteriores, quizá esto se deba a que particularmente en esta ecuación es no aritmética, es decir, presenta una doble ocurrencia de la incógnita, esto quiere decir que, los estudiantes optan por transponer términos.

En relación con el proceso usado por los estudiantes al resolver la ecuación $\boldsymbol{-5x}$ = $\boldsymbol{-10}$ se aprecia como pierden la equivalencia de la ecuación omitiendo la igualdad con 0 que debió haber quedado $(0 = -10 + 5x)$. Al parecer lo anterior los lleva a usar de manera lineal el signo igual, violando la equivalencia de las ecuaciones y estableciendo falsas sentencias, como por ejemplo que $-10 + 5x = -1$. Llama la atención dos cosas más, por un lado, que pese a que el proceso de los estudiantes es confuso y errado, logran llegar a la solución correcta de la ecuación ($x = -1$), y por otro lado, cómo ellos pasan de una relación aditiva a una división (relación multiplicativa), (ver Figura 40).

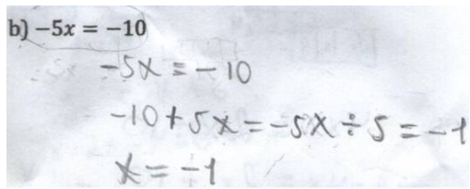


Figura 40. Resolucion de la ecuación b) por la pareja A.

Es importante resaltar que los procesos de resolución de estas cuatro ecuaciones realizados por esta pareja de estudiantes fueron hechos de manera simbólica y en ningún momento recurrieron al modelo virtual de la balanza con poleas para dar cuenta de las soluciones de dichas ecuaciones.

Pareja B

En relación con el proceso de resolución realizado por esta pareja de estudiantes para resolver la ecuación $\boldsymbol{x - 5 = -3}$ se logra apreciar que si bien optaron por representarla en el modelo virtual de la balanza con poleas, no realizan ningún “tratamiento” en esta representación. A la par de esto, los estudiantes eligen por realizar un tratamiento simbólico para llegar a la solución de la ecuación que, aunque no es muy claro (ver Figura 41), llegan a la solución de manera correcta. Quizá esto se deba a que la ecuación es sencilla y se puede resolver por métodos no formales como el recuento o el tanteo.

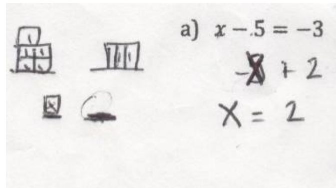


Figura 41. Resolucion de la ecuación a por la pareja B.

Ahora, con respecto al proceso de resolución de la ecuación $\boldsymbol{-5x = -10}$ se puede afirmar que al parecer en esta pareja de estudiantes no hay una conciencia por mantener la equivalencia de la ecuación dividiendo en ambos lados de la igualdad, aunque sí reconocen el hecho que hay que dividir. Tal procedimiento se puede apreciar en la Figura 42.

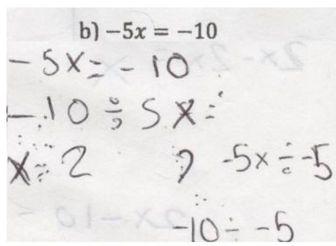


Figura 42. Resolucion de la ecuación b por la pareja B.

En relación con el proceso de resolución de la tercera y cuarta ecuación $(\boldsymbol{2x - 5 = -3};\ \boldsymbol{4x - 6 = 3x - 2})$, es posible apreciar como los estudiantes, a diferencia de los dos casos anteriores, evocan al modelo virtual de la balanza con poleas para representarlas y resolverlas, tal como se observa en la Figura 43.

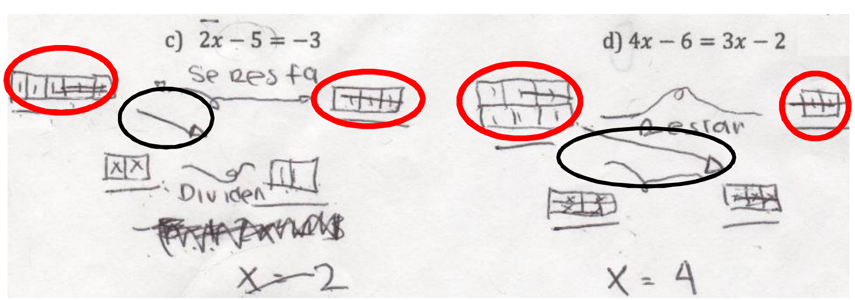


Figura 43. Resolucion de las ecuaciones c y d por la pareja B.

Particularmente, con respecto a la ecuación $\mathbf{2x - 5 = -3}$ se ve como los estudiantes al hacer uso del modelo virtual mantienen la equivalencia al tachar tres figuras de peso 1 que se encuentran en los platillos que representan las cantidades negativas (señalada con círculos rojos) en ambos lados. Además, es posible observar que al parecer por medio de la flecha (señalada en los círculos negros) los estudiantes indican la transposición de las figuras que quedan en el platillo de las cantidades negativas al platillo de las cantidades positivas del lado derecho de la representación, tal como se explora en el modelo virtual. Tal proceso les permite llegar, quizá de manera intuitiva al establecer correspondencias, al valor de la incógnita en el primer caso.

Pareja C

En los procesos de resolución realizados por esta pareja de estudiantes en las ecuaciones $\boldsymbol{x - 5 = -3\ y\ 2x - 5 = -3}$, se observa como ellos mantienen la equivalencia de la ecuación. Particularmente, en la segunda, se puede apreciar cómo los estudiantes llegan a la solución correcta, al parecer después de realizar de manera intuitiva una correspondencia entre las $2x$ que se obtienen en el proceso de resolución del lado izquierdo con las dos unidades del lado derecho.

Con respecto al proceso de resolución de la ecuación $\mathbf{4x - 6 = 3x - 2}$, es posible afirmar que es muy similar a los dos anteriores, sin embargo, es importante destacar que los estudiantes tan solo en algunas de las producciones de ecuaciones equivalentes suman en ambos lados de la igualdad y en otros se omite tal proceso, tal como se deja ver en la Figura 44.

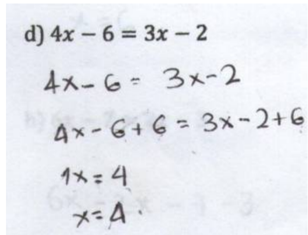


Figura 44. Resolucion de la ecuación d por la pareja C.

Finalmente en el proceso realizado por esta pareja de estudiantes al resolver la ecuación $-\mathbf{5}\boldsymbol{x} = -\mathbf{10}$, se puede apreciar como los estudiantes inician cambiando ambos miembros de la ecuación de un lado a otro (véase Figura 45). Quizá tal acción se ejecuta posiblemente para retirar los signos negativos que hay en cada miembro de la ecuación dada. En el proceso de resolución, los estudiantes mantienen la equivalencia de la ecuación, llegando a su solución.

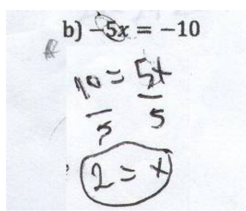


Figura 45. Resolucion de la ecuación b por la pareja C.

Es importante resaltar dos aspectos con respecto a esta pareja de estudiantes, por un lado, el proceso de resolución de la última ecuación donde dividen en ambos lados de la igualdad, acción que no se realizó en ninguno de los procesos de resolución de las tres ecuaciones anteriores. Por otro lado, es que se han alejado del modelo virtual de la balanza y deciden representar y resolver las ecuaciones planteadas de forma simbólica.

Pareja D

Observando los procesos de resolución realizados por esta pareja de estudiantes en las cuatro ecuaciones dadas ($\mathbf{x-5=-3}$; $\mathbf{-5x=-10}$; $\mathbf{2x-5=-3}$ **y** $\mathbf{4x-6=3x-2}$) de la escena 2 *(balanza y poleas 2)*, se resalta que en todas ellas utilizan el modelo virtual de la balanza para representarlas y resolverlas. Además, dibujan los cuatro "platillos", en las cuales se ubican las cantidades positivas y las cantidades negativas (dos para cada caso), evocando así al modelo virtual de la balanza, previamente trabajado (ver Figura 46).

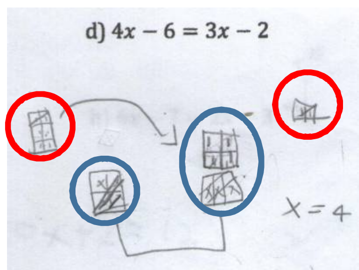


Figura 46. Representación de los cuatro "platillos" de la ecuación d por la pareja D.

Obsérvese, dentro de los círculos azules los "platillos" dibujados por los estudiantes para representar cuatro figuras de X en el lado izquierdo y tres figuras de peso X con cuatro figuras de peso 1 en el lado derecho (cantidades positivas). De manera semejante que el proceso de resolución de esta ecuación, los estudiantes resuelven la ecuación ($\boldsymbol{x-5=-3}$; $\boldsymbol{2x-5=-3}$), es decir, representando y ubicando las cantidades positivas y negativas en los "platillos" que corresponden. En todos tres procesos en cuestión, se aprecia una flecha que al parecer indica que la cantidad de términos o la cantidad de figuras que quedan negativas en el lado izquierdo se transponen al lado derecho de manera positiva, lo cual lo lleva en algunos casos como en el ejemplo ilustrado (Figura 46) a obtener directamente la solución o como en los otros dos casos que llegan a la solución por medio de una correspondencia intuitiva entre las cantidades de figuras de X que quedan con las cantidades de figuras de unidad que quedaron.

En el proceso de resolución de la ecuación $\boldsymbol{-5x = -10,}$ si bien los estudiantes logran representarla adecuadamente en el modelo tachan figuras de peso X con figuras de peso 1 indistintamente, es decir, como si estas representaran la misma cantidad.

Pareja E

Con respecto a los procesos de resolución utilizado por esta pareja de estudiantes en las ecuaciones $\boldsymbol{x-5=-3}$; $\boldsymbol{-5x=-10}$; $\boldsymbol{2x-5=-3}$; $\boldsymbol{4x-6=3x-2}$, se observa que si bien ellos optaron por representarla en el modelo virtual de la balanza con poleas, no realizan ningún "tratamiento" en esta representación. Sin embargo, los estudiantes optan por realizar un tratamiento simbólico para llegar a la solución de cada una de las ecuaciones.

En relación con la primera y cuarta ecuación ($\boldsymbol{x-5=-3}$ y $\boldsymbol{4x-6=3x-2}$), se aprecia como los estudiantes hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad para resolverlas, tal como se observa en la Figura 47.

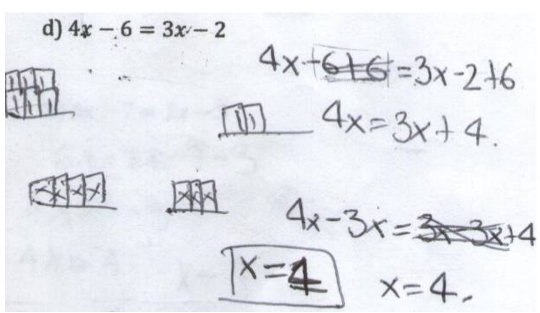


Figura 47. Representación y solución de la ecuación d por la pareja E.

En relación con el proceso de resolución de la segunda y tercera ecuación ($\mathbf{-5x = -10}$ y $\mathbf{2x - 5 = -3}$) los estudiantes hacen uso de la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la adición y al producto según corresponda, tal como se ilustra a manera de ejemplo en la Figura 48.

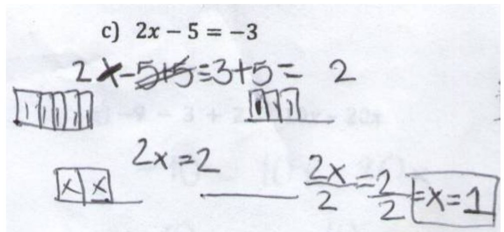


Figura 48. Representación y solución de la ecuación c por la pareja E.

Ítem 3. A partir del trabajo realizado en la *balanza y poleas 3*, resuelva las siguientes ecuaciones realizando paso a paso las operaciones que considere necesario para hallar el valor de la incógnita.					
ITEM 3 / **PAREJAS**	$\mathbf{-3 = x - 5}$ $\mathbf{2 = x}$	$\mathbf{-2x = 8}$ $\mathbf{x = 5}$	$\mathbf{2x - 6 = -4}$ $\mathbf{2 = x}$	$\mathbf{4x - 10 = 2x}$ $\mathbf{x = 1}$	$\mathbf{7x - 8 = x - 2}$ $\mathbf{x = 1}$
A.	Transponen el término -3 al lado derecho para sumárselo al -5 y su vez transponen la incógnita al lado izquierdo sin cambiarle el signo de ésta, al final cuando realizan la operación obtienen $x = -2$, la cual es incorrecta.	Transponen el término $-2x$ al lado derecho y a su vez -8 al lado izquierdo de la igualdad. Luego, hacen uso del inverso multiplicativo de 2 y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener finalmente que $4 = x$.	Transponen el -6 al lado derecho y -4 al lado izquierdo de la igualdad. Posteriormente, le restan cuatro al seis y obtienen dos. Luego, igualan $2x$ con 2 para dividir por dos en ambos lados y obtener así $x = 1$ (se aprecia un uso incorrecto del signo igual).	No realizan ningún procedimiento.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Luego, efectúan las respectivas operaciones aritméticas en ambos miembros para obtener $6x = 6$. Por último, usan el inverso multiplicativo de 6 y de la propiedad uniforme de la igualdad para llegar a que $x = 1$.
B.	Suman el inverso aditivo de -3 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $2 = x$ (durante el procedimiento no son claros los pasos que realiza).	Transponen los términos $-2x$ y -8 para trabajar la ecuación de manera positiva. Posteriormente, dividen por dos en ambos lados de la igualdad para obtener $4 = x$.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -6 en ambos lados de la igualdad, obteniendo $2x = 2$, luego, dividen por dos en ambos miembros y así llegan a que $x = 1$.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de $2x$ en ambos lados de la igualdad, obteniendo $2x - 10 = 0$, después, transponen -10, para luego, dividir por dos en ambos miembros de la igualdad para así obtener $x = 5$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Posteriormente, le restan x a siete x del lado izquierdo y restarle dos a ocho del lado derecho de la igualdad, para luego, dividir por seis en ambos lados y obtener como respuesta $x = 1$.
	Realizan dos procedimientos,	Hacen uso del inverso multiplicativo de 2 y de la	Despejan la incógnita sumando	Despejan la incógnita sumando	Despejan la incógnita sumando el inverso

C.	el cual el primero suman el inverso aditivo de -3 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $x - 2 = 0$. En el segundo, despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad llegan a que $x = 2$.	propiedad uniforme de la igualdad obtienen que $x = 4$.	el inverso aditivo de -6 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $2x = 2$. Posteriormente, dividen por dos en ambos lados de la igualdad y llegan finalmente a que $x = 1$.	el inverso aditivo de $2x$ y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $2x - 10 = 0$. Posteriormente, transponen el término -10 al lado izquierdo y dividen por dos en ambos lados de la igualdad y llegan finalmente a que $x = 5$.	aditivo de -8 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $7x = x + 6$. Luego, realizan el mismo procedimiento con el inverso de x para llegar a que $x = 1$.
D.	Dibujan figuras de peso X y 1 para representar la ecuación de manera correcta. Posteriormente pasan dos figuras de peso 1 del platillo de las cantidades negativas del lado derecho al platillo izquierdo de las cantidades positivas. Finalmente obtienen dos figuras de peso	Representan la ecuación de manera correcta dibujando figuras de peso X y 1. Posteriormente, tachan cuatro figuras de peso 1 del platillo de las cantidades negativas del lado derecho con una figura de peso X del platillo de las cantidades negativas del lado izquierdo. Finalmente, lo que queda lo llevan a los platillos positivos de sus respectivos lados y obtienen que una figura de peso X es igual a cuatro.	Representan la ecuación de manera correcta con figuras de peso X y 1. Después, tachan cuatro figuras de peso 1 en ambos platillos de las cantidades negativas. Posteriormente, transponen las dos figuras de peso 1 del platillo izquierdo de las cantidades negativas al platillo de las cantidades positivas del lado	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de $2x$ y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $2x - 10 = 0$. Después, transponen -10 y haciendo uso del inverso multiplicativo de 2 y de la propiedad uniforme de la igualdad llegan a que $x = 5$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Después, le restan x a siete x del lado izquierdo y le restan dos a ocho del lado derecho de la igualdad. Finalmente, al obtener $6x = 6$, hacen uso del inverso multiplicativo de seis y de la propiedad uniforme de la igualdad para llegar a que $x = 1$.

	1 igualadas a una figura de peso X.		derecho y, finalmente, tachan una figura de peso 1 con una figura de peso X y obtienen $x = 1$.		
E.	Despejan la incógnita sumando el inverso aditivo de -5 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen que $2 = x$.	Hacen uso de la transposición de términos para agrupar términos semejantes y posteriormente, hacen uso del inverso multiplicativo y de la propiedad uniforme de la igualdad para llegar a que $x = 4$.	Suman el inverso aditivo de -6 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $2x = 2$. Finalmente, haciendo uso del inverso multiplicativo de 2 y de la propiedad uniforme de la igualdad llegan así que $x = 1$.	Realizan la suma del inverso aditivo de $2x$ y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $2x - 10 = 0$. Posteriormente, hacen uso del inverso multiplicativo de 2 y de la propiedad uniforme de la igualdad llegan a que $x = 5$.	Realizan la suma del inverso aditivo de -8 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, obtienen $7x = x + 6$. De nuevo hacen uso del inverso aditivo x y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener $6x = 6$. Finalmente, dividen en ambos lados de la igualdad por seis y llegan a que $x = 1$.

ECUACIONES RESTANTES	$\boldsymbol{2x - 2 = x + 4}$ $\boldsymbol{x = 6}$	$\boldsymbol{-9 - 3 + 2 = 10x - 20x}$ $\boldsymbol{x = 1}$	$\boldsymbol{6x - 7 = 2x - 3}$ $\boldsymbol{x = 1}$	$\boldsymbol{3x + 4 = 2x + 3}$ $\boldsymbol{x = -1}$	$\boldsymbol{7x + 8 = 2x + 4}$ $\boldsymbol{x = \frac{-4}{5}}$
A.	Transponen el término -2 al miembro derecho y a su vez la incógnita al miembro izquierdo de la igualdad. Luego, realizan las respectivas operaciones	Transponen todos los términos ubicados en el lado izquierdo al lado derecho y a su vez todos términos del lado derecho los pasan al lado izquierdo. Luego, realizan las respectivas operaciones aritméticas en ambos miembros de la ecuación y logran llegar a que	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes, para luego, realizar su respectiva resta o suma en ambos lados (aunque es poco entendible el procedimiento), obtienen $-4x =$	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Posteriormente de manera intuitiva dicen que $x = 1$. (No se observa ningún proceso en la hoja de trabajo).	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes, para luego, realizar su respectiva resta o suma en ambos lados (aunque es poco entendible el procedimiento), obtienen $5x = 12$,

	aritméticas en ambos lados y finalmente, obtener que $x = 6$.	$10x = 10$. Finalmente, dividen por diez en ambos miembros y obtienen que $x = 1$.	-4, donde, haciendo uso del inverso multiplicativo de 4 y de la propiedad uniforme de la igualdad llegan a que $x = 1$.		donde, haciendo uso del inverso multiplicativo del 5 y de la propiedad uniforme de la igualdad llegan al resultado de $x = \frac{12}{5}$, la cual es incorrecta.
B.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes, para luego, realizar sus respectivas operaciones aritméticas en ambos lados de la ecuación y así obtener que $x = 6$.	Realizan las operaciones aritméticas en ambos lados de la ecuación (quizá lo hacen mentalmente puesto que no se ve evidenciado). Posteriormente, transponen los términos $-10x$ al lado izquierdo y -12 al lado derecho de la igualdad. Después, para despejar la incógnita, suman el inverso aditivo de 2 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad y a su vez dividiendo en ambos lados por diez, obtienen que $x = 1$.	No realizan ningún procedimiento.	No realizan ningún procedimiento.	Realizan la suma del inverso aditivo de 8 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad llegan a que $7x = 2x - 4$. Posteriormente, suman el inverso aditivo de $2x$ y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, llegan a que $5x = -4$. Finalmente, hacen uso del inverso multiplicativo de 5 y d la propiedad uniforme de la igualdad logran obtener $x = \frac{-4}{5}$.
C.	Realizan la suma del inverso aditivo de -2 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $2x = x + 6$. Después, suman	Realizan las operaciones aritméticas en ambos lados de la ecuación. Posteriormente, al obtener $-10 = -10x$, hacen uso del inverso multiplicativo de -10 y de la propiedad uniforme de la igualdad para llegar a que $x = 1$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes. Posteriormente, restan en ambos lados de la igualdad para obtener $4x = 4$. Finalmente, despejan la	Realizan la suma del inverso aditivo de 4 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $3x = 2x - 1$. Luego, haciendo uso del inverso aditivo de $2x$ y de la propiedad	Realizan la suma del inverso aditivo de 8 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $7x = 2x + 4$. Después, suman el inverso aditivo de $2x$ y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, llegan

	el inverso aditivo de x y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad, llegan a que $x = 6$.		incógnita haciendo uso del inverso multiplicativo de 4 y de la propiedad uniforme de la igualdad para así llegar a que $x = 1$.	uniforme de la igualdad, finalmente llegan a que $x = -1$.	a que $5x = -4$. Finalmente, hacen uso del inverso multiplicativo de 5 y d la propiedad uniforme de la igualdad logran obtener $x = \frac{-4}{5}$.
D.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes (sin embargo, no expresan el signo igual). Posteriormente, realizan una suma y obtienen como resultado $x = 6$.	Realizan las respectivas operaciones aritméticas en ambos lados de la ecuación. Después, transponen el termino $-10x$ al lado izquierdo y el -12 al ladeo derecho de la igualdad. Luego, hacen uso del inverso aditivo de 2 y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener $10x = 10$ y finalmente, dividir en ambos lados por diez y así llegar a que $x = 1$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes (sin embargo, no expresan el signo igual y no tienen en cuenta el cambio de signo) y realizar las respectivas restas en ambos lados de la igualdad. Finalmente, dividen en ambos lados por cuatro y así obtener $x = 1$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes (sin embargo, no expresan el signo igual y no tienen en cuenta el cambio de signo) y realizar sus respetivas operaciones aritméticas en ambos lados de la igualdad, no obstante, llegan a que $x = 7$, la cual es incorrecta.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes (sin embargo, no expresan el signo igual y no tienen en cuenta el cambio de signo) y realizar sus respetivas operaciones aritméticas en ambos lados de la igualdad, no obstante, llegan a que $5x = 12$, y la dejan hasta ahí.
E.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes (sin embargo, no expresan el signo igual y no tienen en cuenta el cambio de signo). Finalmente realizan una suma y obtienen como resultado	Realizan las respectivas operaciones aritméticas en ambos lados de la ecuación y finalmente, hacen uso del inverso multiplicativo de -10 y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener $x = 1$.	Hacen uso de la transposición para agrupar términos semejantes y restar en ambos lados de la igualdad (sin embargo, no expresan el signo igual y no tienen en cuenta el cambio de signo). Luego, hacen uso del inverso multiplicativo de 4	Hacen uso del inverso aditivo de 4 y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener $3x = 2x - 1$. Posteriormente, realizan el mismo procedimiento pero con el inverso aditivo de $2x$ y, finalmente, llegan a que $x = -1$.	Suman el inverso aditivo de 8 y haciendo uso de la propiedad uniforme de la igualdad obtienen $7x = 2x - 4$. Luego, realizan el mismo procedimiento pero con el inverso aditivo de $2x$ y, finalmente, dividen ambos lados de la igualdad por cinco y así llegar a que

	$x = 6$.		y de la propiedad uniforme de la igualdad para obtener $x = 1$.		$x = \frac{-4}{5}$.

Tabla 13. Sistematización de la resolución de ecuaciones de la escena 3 (balanza y poleas 3) de la sección 2.

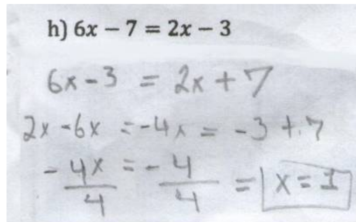
Pareja A

En los procesos de resolución de las ecuaciones realizadas por esta pareja de estudiantes a partir del trabajo efectuado en la escena *balanza y poleas 3*, se destaca en primera instancia que todos sus procesos se presentan de manera simbólica. Además, en la mayoría de la resolución de las ecuaciones, los estudiantes llegan a la respuesta correcta, sin embargo, se equivocan en las ecuaciones $\boldsymbol{-3 = x - 5}$ y $\boldsymbol{7x + 8 = 2x + 4}$; esta última cuya solución es no entera.

De manera particular y con respecto a la resolución de las ecuaciones $\boldsymbol{-3 = x - 5}$; $\boldsymbol{2x - 2 = x + 4}$ y $\boldsymbol{3x + 4 = 2x + 3}$, se aprecia como los estudiantes hacen uso de la transposición de términos para resolverlas, forzando a que la incógnita quede en el miembro izquierdo y no en el derecho, lo que los conduce a llegar a una solución incorrecta.

Además, cabe resaltar que, por un lado, los estudiantes no suman en ambos lados de la igualdad una misma cantidad, y por otro lado, que optan por usar de manera lineal el signo igual, violando la equivalencia entre los miembros dados de la ecuación.

En relación con el proceso de resolución de las ecuaciones $\boldsymbol{2x - 6 = -4}$; $\boldsymbol{4x - 10 = 2x}$; $\boldsymbol{7x - 8 = x - 2}$ y $\boldsymbol{6x - 7 = 2x - 3}$, se observa como los estudiantes las resuelven haciendo uso de la transposición de términos y dividiendo en ambos lados de la igualdad por una misma cantidad. Sin embargo, en la primera ecuación se aprecia de nuevo el uso lineal que hacen del signo igual violando la equivalencia entre los miembros de la ecuación, no obstante llegan al valor correcto de la incógnita. De la misma manera, se puede observar un proceso similar de los estudiantes al resolver la cuarta ecuación, donde hacen uso de la transposición de términos, pero sin tener en cuenta el cambio de signo de algunos términos, tal como se aprecia en la Figura 49.


h) $6x - 7 = 2x - 3$

$6x - 3 = 2x + 7$

$2x - 6x = -4x = -3 + 7$

$-\frac{4x}{4} = -\frac{4}{4} = \boxed{x = 1}$

Figura 49. Resolución de la ecuación h por la pareja A.

En el proceso de resolución de las ecuaciones $-2x = -8$ y $-9 - 3 + 2 = 10x - 20x$, es posible apreciar como en los estudiantes prevalece un proceso por el cual la cantidades negativas se eliminen de los miembros de la ecuación, transponiendo términos de un lado a otro con el fin de que éstas queden positivas. De igual forma, en ambos procesos de las dos ecuaciones, los estudiantes dividen en ambos lados por una misma cantidad.

Finalmente, en el proceso de solución de la ecuación $7x + 8 = 2x + 4$, se observa como los estudiantes hacen un uso lineal del signo igual violando con ello la equivalencia de los miembros en la ecuación. Posteriormente, dividen en ambos lados de la igualdad por una misma cantidad, para llegar al valor de la incógnita.

Los estudiantes transponen términos sin tener en cuenta el cambio de signo, por tanto, al realizar las respectivas operaciones aritméticas, solo conciben que el resultado sea positivo.

Pareja B

De acuerdo a los procesos de resolución realizados por esta pareja de estudiantes en las ecuaciones plateadas luego de trabajar en la escena *balanza y poleas 3,* se puede apreciar de manera general, como ellos las resolvieron de manera simbólica, es decir, en ninguna parte de los “tratamientos” de las ecuaciones se encontró o evidencio un uso del modelo virtual de la balanza con poleas. Así mismo, en la mayoría de las ecuaciones los estudiantes llegan a la solución correcta, inclusive en la ecuación $\mathbf{7x + 8 = 2x + 4}$ que tiene como raíz un valor no entero.

De manera particular, se observa como en el proceso de resolución de la ecuación $\mathbf{-3 = x - 5}$, los estudiantes si bien mantienen la equivalencia de las ecuaciones que generan sumando en ambos miembros una misma cantidad, es notorio como hay una resistencia en ellos por tener una expresión igualada a cero, tal como se aprecia en la Figura 50.

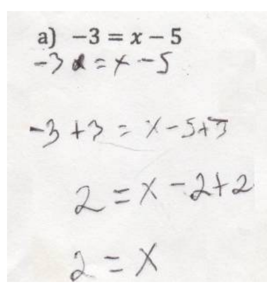


Figura 50. Resolución de la ecuación a por la pareja B.

Nótese como esta pareja de estudiantes no ubican en el miembro izquierdo de la igualdad la división entre -3 y 3 (la cual es nula); sino que ubican la cantidad que han sumado en ambos lados de la igualdad para despejar completamente la incógnita.

En contraste con lo anterior, se debe señalar que en el proceso de resolución de la ecuación $\mathbf{4x - 10 = 2x}$, los estudiantes al llegar a que uno de los miembros de la ecuación es cero (ver Figura 51).

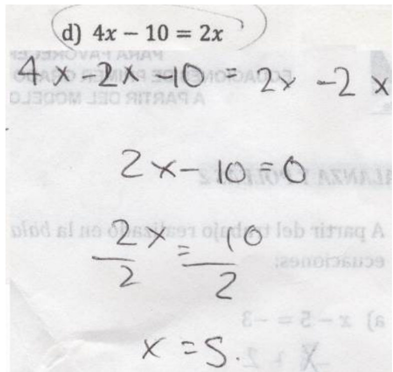


Figura 51. Resolución de la ecuación d por la pareja B.

Obsérvese, como se da una dicotomía entre ambos procesos de solución en tanto que, en la primera ecuación al encontrar una expresión igualada a cero genera una dificultad en los estudiantes para continuar su proceso de resolución de la ecuación para así hallar el valor de la incógnita, mientras que, en la segunda ecuación éste proceso no se ve reflejado aun cuando también se llega a una expresión igualada a cero.

Con respecto a las ecuaciones $\mathbf{-2x = -8}$; $\mathbf{2x - 6 = -4}$; $\mathbf{7x - 8 = x - 2}$; $\mathbf{2x - 2 = x + 4}$; $\mathbf{-9 - 3 + 2 = 10x - 20x}$ **y** $\mathbf{7x + 8 = 2x + 4}$, es posible apreciar como en todos los procesos de resolución de éstas, los estudiantes siguen de manera regular para resolverlas en el cual intervienen la transposición de términos, la suma o resta de una misma cantidad en ambos lados de la igualdad y la división en ambos miembros de la igualdad por una misma cantidad para finalmente llegar al valor de la incógnita de manera correcta.

Cabe resaltar que las ecuaciones $\boldsymbol{6x - 7 = 2x - 3}$ y $\boldsymbol{3x + 4 = 2x + 3}$ no fueron resueltas por los estudiantes.

Pareja C

Respecto a los procesos de resolución realizados por esta pareja de estudiantes en la escena *balanza y poleas 3,* se pueden destacar de manera general dos aspectos, el primero de ellos, es que en todos los procesos de resolución de ecuaciones se trabajó únicamente de forma simbólica. El segundo, es que en todos los procesos de resolución de las ecuaciones, los estudiantes llegan al valor correcto de la incógnita.

Particularmente en la primera ecuación $\boldsymbol{-3 = x - 5}$, los estudiantes realizan dos procesos de resolución, en ambos evocan la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la adición, (ver Figura 52), sin embargo, en el proceso de la izquierda es posible apreciar que, cuando los estudiantes llegan a que uno de los miembros de la igualdad es cero, no se culmina con el proceso. Al parecer ellos al encontrar una expresión igualada a cero, de alguna manera les genera una dificultad para llegar al valor de la incógnita.

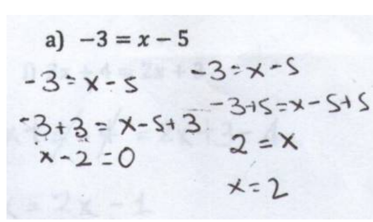


Figura 52. Resolución de la ecuación a por la pareja C.

En contraste con lo anterior, cabe destacar que en el proceso de resolución de la ecuación $\boldsymbol{4x - 10 = 2x,}$ los estudiantes al encontrar que uno de los miembros de la ecuación es cero, tal como se ilustra en la Figura 53, no es un impedimento para llegar al valor de la incógnita.

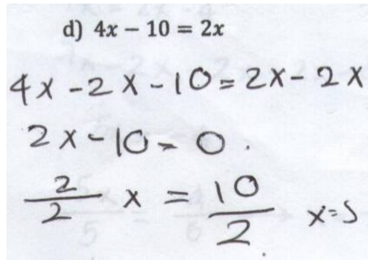


Figura 53. Resolución de la ecuación d por la pareja C.

Nótese, como de alguna manera se encuentra una dicotomía entre ambos procesos de solución, puesto que, en la primera ecuación al encontrar una expresión igualada a cero genera una dificultad en los estudiantes para continuar con el proceso de resolución de la ecuación para así llegar al valor de la incógnita, mientras que, en la segunda ecuación éste proceso no se ve instruido aun cuando también se llega a una expresión igualada a cero.

Con respecto a las ecuaciones restantes ($\mathbf{-2x = -8}$; $\mathbf{2x - 6 = -4}$; $\mathbf{7x - 8 = x - 2}$; $\mathbf{2x - 2 = x + 4}$; $\mathbf{-9 - 3 + 2 = 10x - 20x}$; $\mathbf{6x - 7 = 2x - 3}$; $\mathbf{3x + 4 = 2x + 3}$; $\boldsymbol{7x + 8 = 2x + 4}$), se observan como en todos esos procesos de resolución, los estudiantes suman, restan o dividen por una misma cantidad en ambos lados de la igualdad siempre que la ecuación lo amerite.

Se debe resaltar que en todos los procesos de resolución de la diez ecuaciones propuestas a los estudiantes después de haber trabajado en ésta escena *balanza y poleas 3,* se logra generar una cadena de ecuaciones equivalentes a partir del uso correcto de la propiedad uniforme de la igualdad respecto a la adición y al producto.

Pareja D

A partir del trabajo realizado por esta pareja de estudiantes en la última escena de la sección 2 *balanza y poleas 3,* con respecto a la resolución de las ecuaciones que se presentan, un primer aspecto a resaltar es que evocan al modelo virtual de la balanza con poleas para representar y resolver únicamente las ecuaciones de tipo aritmético cómo $-3 = x - 5$; $2x - 6 = -4$ y $-2x = -8$, en particular, las dos primeras de estas ecuaciones se resuelven de manera semejante, tal como se muestra a manera de ejemplo en la Figura 54.

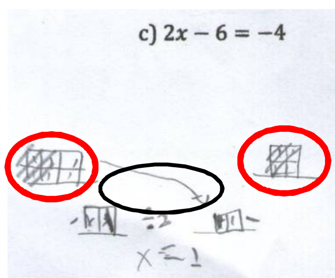


Figura 54. Representación y solución de la ecuación c por la pareja D.

En la resolución de la ecuación $2x - 6 = -4$, se observa como los estudiantes al hacer uso del modelo virtual, mantienen la equivalencia en ambos lados de la ilustración. También, es posible apreciar que al parecer los estudiantes indican por medio de la flecha (señalada con el círculo negro) la transposición de las figuras que quedan en el platillo izquierdo de las cantidades negativas al platillo de las cantidades positivas del lado derecho de la ilustración, tal como se realiza en el modelo virtual de la balanza con poleas. Al parecer este proceso, lleva a los estudiantes a encontrar de manera intuitiva el valor de la incógnita a partir de una correspondencia uno a uno entre la cantidad de figuras de peso X y la cantidad de figuras de peso 1 que quedan.

Llama la atención como los estudiantes a partir del trabajo realizado en esta escena que se propone en la balanza con poleas, interiorizan de alguna manera la transposición de cantidades de un lado a otro, pero además, hacen que las cantidades cambien de positivas a negativas y viceversa.

En relación con la ecuación $\boldsymbol{-2x = -8}$ (ver Figura 55), se observa que los estudiantes establecen una correspondencia quizá intuitiva entre la cantidad de figuras de peso X de un lado de la ecuación con la cantidad de figuras de peso 1 negativas que hay, puesto que les permite directamente tachar una figura de peso X del lado izquierdo con cuatro figuras de peso 1 del lado derecho. Este procedimiento de alguna manera permite evidenciar que está pareja de estudiantes no tuvo en cuenta que ambas cantidades tanto las figuras de peso X como las figuras de peso 1 eran negativas y por tanto se llevan a platillos del lado derecho sin hacer una transposición.

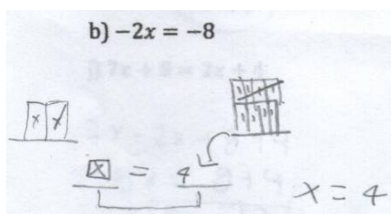


Figura 55. Resolución de la ecuación b por la pareja D.

Con respecto a las ecuaciones no aritméticas ($\boldsymbol{4x - 10 = 2x}$; $\boldsymbol{-9 - 3 + 2 = 10x - 20x}$; $\boldsymbol{7x - 8 = x - 2}$; $\boldsymbol{2x - 2 = x + 4}$; $\boldsymbol{6x - 7 = 2x - 3}$; $\boldsymbol{3x + 4 = 2x + 3}$ y $\boldsymbol{7x + 8 = 2x + 4}$) llama la atención como hay tres tendencias para resolverlas, las cuales se pueden agrupar de la siguiente manera; las dos primeras ecuaciones, el proceso de resolución está bien realizado y el valor de la incógnita que hallan los estudiantes es correcto. Las tres siguientes, ellos también llegan al valor de la incógnita aun cuando hay pasos incorrectos en el proceso de resolución de cada una de las ecuaciones. Por último, la dos restantes, se aprecia como los estudiantes cometen errores al tratar de resolverlas y por tanto llegan a valores que no satisfacen la incógnita.

A manera de ejemplo, se observa como los estudiantes en la Figura 56, resuelven la ecuación restando en ambos lados de la igualdad y al obtener que uno de los miembros de la ecuación es cero, transponen el término -10 al miembro que es nulo y finalmente dividen por dos en ambos lados para obtener el valor de la incógnita.

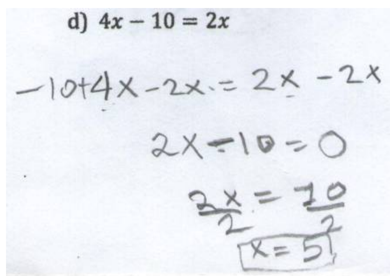


Figura 56. Resolución de la ecuación d por la pareja D.

En el segundo caso, se puede apreciar en la Figura 57, la resolución de la ecuación $\boldsymbol{2x - 2 = x + 4}$, donde los estudiantes la resuelven sin tener en cuenta la igualdad, llegan al valor correcto de la ecuación, puesto que transponen la incógnita ubicada en el lado derecho al lado izquierdo.

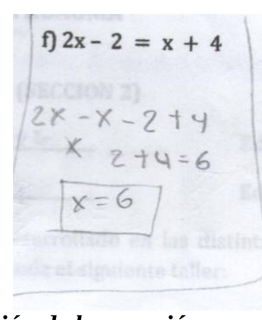


Figura 57. Resolución de la ecuación e por la pareja D.

Nótese, como los estudiantes aunque pierden la igualdad, cambian el signo de la incógnita, al parecer tienen en cuenta que se debe transponer, sin embargo, no ocurre lo mismo en ninguno de los tres casos con la cantidad constante.

Ahora, en relación con el tercer caso, en las dos últimas ecuaciones al igual que las tres anteriores, los estudiantes inician perdiendo la igualdad y a pesar que tienen conciencia de que deben transponer la incógnita, esto no lo hacen para la cantidad conocida y la asumen todo el tiempo como positiva, lo cual los lleva a generar un valor incorrecto para la incógnita.

Parece ser que cuando se transpone los términos de negativos a positivos es más claro para ellos que cuando se hace lo contrario.

Pareja E

En relación con los procesos de resolución realizados por esta pareja de estudiantes de las ecuaciones planteadas en la escena *balanza y poleas 3,* se puede destacar como ellos las resuelven todas de manera simbólica. Además, se aprecia que en todas las ecuaciones los estudiantes llegan al valor de la incógnita correcta incluyendo la ecuación $\boldsymbol{7x + 8 = 2x + 4}$ que tiene raíz una ración no entero.

De manera particular, llama la atención como esta pareja de estudiantes no se les presenta ninguna dificultad en el proceso de resolución de la ecuación $\boldsymbol{4x - 10 = 2x}$, cuando se encuentran con que uno de los miembros es nulo, esto es una igualdad respecto a cero.

En relación con las ecuaciones restantes $\boldsymbol{-3 = x - 5}$; $\boldsymbol{-2x = -8}$; $\boldsymbol{2x - 6 = -4}$; $\boldsymbol{7x - 8 = x - 2}$; $\boldsymbol{2x - 2 = x + 4}$; $\boldsymbol{-9 - 3 + 2 = 10x - 20x}$; $\boldsymbol{6x - 7 =}$

$2x - 3$; $3x + 4 = 2x + 3$ **y** $7x + 8 = 2x + 4$, se observa que los estudiantes hacen uso en algunos casos de la transposición de términos, en otros, suman o restan una misma cantidad en ambos lados y, solo los casos que ameriten, dividen en ambos miembros de la igualdad por una misma cantidad, por ejemplo, $-3 = x - 5$, no es necesario dividir en ambos lados. Sin embargo, se puede apreciar con respecto a las ecuaciones ($2x - 2 = x + 4$ y $6x - 7 = 2x - 3$) en el primer paso del proceso de resolución de cada una, los estudiantes pierden la igualdad entre los miembros en tanto que no expresan el signo igual. No obstante, esto no es una dificultad para que los estudiantes conozcan de que hay una necesidad de que se deben cambiar los signos de ciertas cantidades cuando se mueven de un lado a otro, en otras palabras, aunque ellos no ubican el signo igual, parece ser que si lo tienen en cuenta en sus procedimientos a la hora de cambiar el signo de unos términos con respecto a otros para llegar al valor de la incógnita, tal como se puede apreciar en la Figura 58.

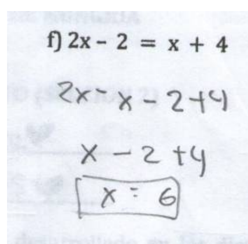


Figura 58. Resolución de la ecuación f por la pareja E.

CAPÍTULO 4

ALGUNAS CONCLUSIONES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

En el presente capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo, las cuales se exhiben en dos líneas; por un lado, para responder a los objetivos propuestos en éste, y por otro lado, entorno a los resultados obtenidos de la implementación de las hojas de trabajo uno y dos presentados en el capítulo anterior. Además de lo anterior, se presentan también algunas reflexiones didácticas que emergen del trabajo desarrollado con el fin de aportar elementos que mejoren la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el aula de clases.

4.1 Conclusiones

- El uso del modelo virtual de la balanza en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita propició un escenario en que los estudiantes lograron tomar conciencia sobre la necesidad de mantener la equivalencia en las ecuaciones, lo cual se reflejaba cuando ellos en el proceso de resolución de las ecuaciones planteadas hacían lo mismo en ambos lados de la balanza para mantener su equilibrio. De acuerdo con esto es posible indicar que se logró el propósito central de este trabajo, en el sentido de favorecer la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en los estudiantes objeto de estudio.

- En relación con el marco conceptual de referencia tomado en consideración, es posible indicar que algunas de las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado, la cuales fueron reportadas en la dimensión didáctica del capítulo 2, se logran superar haciendo uso del modelo virtual de la balanza, como por ejemplo, el hecho de introducir a los estudiantes de manera más asequible en proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita por métodos formales, dejando a un lado métodos como el intuitivo o el tanteo, los cuales pueden llegar a ser un obstáculo para la resolución de ecuaciones no aritméticas, y que son frecuentes aún en grados avanzados de escolaridad. Sin embargo, es importante resaltar que el modelo virtual de la balanza empleado en la propuesta se queda corto en atender otras dificultades, debido que este no permite abordar ecuaciones con raíces negativas, o ecuaciones del tipo $\frac{1}{a}x - b = \frac{1}{c}x$ donde sus coeficientes son racionales no enteros, o cuyas soluciones pertenezcan a este conjunto numérico.
- El empleo del modelo virtual de la balanza propició actividades instrumentadas en los estudiantes puesto que, se puede evidenciar el proceso de génesis instrumental, es decir, hacen uso del artefacto (software) y de los esquemas de uso (técnicas que permiten dar respuesta a una tarea dada) para resolver las ecuaciones de primer

grado con una incógnita, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrenta al modelo virtual, generan ciertos esquemas de uso que permite acciones instrumentadas con respecto al artefacto que se vuelve instrumento para lograr resolver las ecuaciones planteadas por éste, es decir, cuando hacían lo mismo en ambos lados de la balanza como quitar o poner la misma cantidad (en este caso se puede decir, que son esquemas de uso) con el fin de encontrar el valor de la incógnita. Aunque, el modelo virtual de la balanza empleado en la propuesta didáctica fue algo novedoso para los estudiantes, se pudo observar como ellos lograron trabajar con el artefacto, planteando acciones instrumentadas entre el usuario- artefacto, para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

A partir del análisis de las respuestas realizadas por los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir al resolver las ecuaciones hasta aquí propuestas, es posible resaltar que:

- En la mayoría de los casos, los estudiantes muestran una permanencia por el uso del modelo virtual de la balanza para representar y resolver las ecuaciones planteadas, esto es, dibujando figuras de peso X y 1, y cancelando la misma cantidad de figuras en ambos lados intentan llegar a la solución de la ecuación. Sin embargo, es de resaltar que en algunos casos, hay estudiantes que cancelan figuras que no representan el mismo peso, es decir, figuras de peso X con figuras de peso 1. Particularmente la pareja D muestra mayor apego al uso del modelo virtual de la balanza para representar y resolver la mayoría de las ecuaciones planteadas.

- El uso del modelo virtual de la balanza permite que los estudiantes generen, en su mayoría, ecuaciones equivalentes en tanto mantienen la equivalencia de los miembros en cada ecuación, esto es, cuando se tachan la misma cantidad de figuras de peso X y 1 en ambos lados de las representaciones (lo que evoca a la propiedad uniforme de la igualdad respecto a la adición). Sin embargo, esto no sucede en muchos casos cuando se debe dividir en ambos lados de la igualdad para despejar finalmente la incógnita. Lo anterior permite afirmar que para resolver ecuaciones en el modelo virtual de la balanza, hace más asequible a evocar a la propiedad uniforme de la igualdad respecto a la división, pero, no tanto a la propiedad uniforme de la igualdad respecto al producto, no obstante, se mantiene la cadena lógica de ecuaciones en la "mayoría" de las producciones de los estudiantes.
- En relación con los procesos usados por los estudiantes al resolver las ecuaciones presentadas en la escena 4, es posible afirmar que la expectativa de desempeño se logra en la mayoría de los casos, es decir, los estudiantes identifican el tipo de operación necesaria que se debe ejecutar para despejar una cantidad determinada en una ecuación representada en el modelo de la balanza. Sin embargo, se debe señalar que aunque, particularmente, si reconocen que para despejar finalmente la incógnita es necesario dividir, tal proceso no se realiza en varias

ocasiones o por muchas de las parejas, en ambos lados de la igualdad, con lo cual se altera la producción de ecuaciones equivalentes.

- Es posible observar en el proceso de solución de las ecuaciones donde la incógnita se encuentra ubicada al lado derecho, que los estudiantes fuerzan a que ésta quede finalmente en el lado izquierdo, cometiendo en algunos casos procedimientos erróneos, los que los lleva a generar la solución incorrecta de la ecuación.
- De manera estandarizada se hace notar el trabajo de los estudiantes por no terminar o incluso no hacer ningún proceso en las ecuaciones cuyas raíces son negativas o fraccionarias; quizá esto se deba tal como se ha venido anotando a que el modelo virtual de la balanza no permite representar y resolver este tipo de ecuaciones. Lo anterior corresponde a las expectativas de desempeño propuestas para este tipo de ítems (*ítem 3C e ítem 4C*).
- De manera general, se observa como en varias parejas de estudiantes cometen errores en la resolución de ecuaciones de primer grado, al intentar no dejar el cero en uno de los miembros de la ecuación; lo anterior, permite afirmar que, en todos los estudiantes no hay un reconocimiento de que es posible tener una expresión igualada a cero.
- Es importante señalar que aunque en este trabajo tiene sus limitaciones en el sentido que no se propusieron ecuaciones de primer grado con una incógnita cuyos coeficientes son racionales no enteros; desde la problemática misma se reconoce a partir de las investigaciones que

generan un mayor nivel de dificultad, por lo cual, esto deja abierto una frontera para empezar a trabajar ecuaciones de primer grado con una incógnita, donde hagan énfasis en el tratamiento de este tipo de ecuaciones que presentan estos coeficientes. Sin embargo, es importante destacar que este trabajo hasta aquí no lo puede generar debido a que el modelo virtual de la balanza en sí mismo no permite el manejo de estas cantidades, por tanto, queda abierta la posibilidad amplia de explorar este tipo de ecuaciones y además de generar modelos que puedan trabajar con estas cantidades.

4.2 Reflexiones didácticas

El trabajo realizado bajo los propósitos planteados permite pues realizar algunas consideraciones importantes para el trabajo de aula que se propone en relación con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, éstas a continuación se presentan.

- Para la enseñanza de la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita se considera importante hacer énfasis en la relación de equivalencia que guardan los miembros de la ecuación, con el fin de generar una cadena de ecuaciones equivalentes que permita llegar al valor de la incógnita. De este modo, se torna importante hacer explícito en la resolución de ecuaciones la emergencia de los axiomas de la igualdad (propiedad identidad, simétrica y transitiva), y los axiomas de la estructura algebraica de $\mathbb{R}$ (propiedad asociativa, distributiva, conmutativa, modulativa, inverso aditivo e inverso multiplicativo tanto para las operaciones de adición y multiplicación, además, la propiedad uniforme de a igualdad con respecto a $\mathbb{R}$). Lo anterior colaboraría con la ruptura de lo algorítmico y mecánico que traen los estudiantes a la hora de resolver ecuaciones por métodos intuitivo o tanteo, lo cual en muchas ocasiones es frecuente en las aulas clases, sin ningún sentido para ellos, de tal modo que, la ejercitación y uso de procedimientos algorítmicos propuesto por el (MEN, 1998), entendido “como un proceso general el cual adquiere un sentido y significado para los estudiantes que lo dotan a partir del uso de las propiedades mencionadas”.

- Es importante llamar la atención entorno a que así como los maestros en sus actividades de aula priorizan el trabajo con ecuaciones de primer grado con una incógnita real que tiene solución regularmente en Z y cuyos coeficientes pertenecen a este conjunto numérico, de igual manera, también se favorezca un trabajo con los estudiantes alrededor de ecuaciones inconsistentes, es decir, que no tenga soluciones, ecuaciones cuyos coeficientes sean racionales no enteros; y con ecuaciones que en su proceso de resolución uno de sus miembros se haga nulo, con lo que se esperaría que cuando los estudiantes lleguen a este tipo de equivalencias sean aceptadas y comprendidas con mayor naturalidad.

- Es importante resaltar que si bien se logró ciertamente el objetivo propuesto con la implementación de la secuencia presentada a los estudiantes, cabe mencionar que la intervención del maestro en ésta, hubiese podido potenciar el trabajo de aula que los estudiantes lograron, puesto que, con toda seguridad dicha participación hubiera generado en los estudiantes procesos de mayor conciencia para resolver las ecuaciones.
- La propuesta presenta costos altos para su implementación, es decir, se debe tener en cuenta con el tiempo de implementación, se necesita un análisis exhaustivos respecto a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, como observar la resolución de las ecuaciones desde múltiples dimensiones, cambiar la concepción de este trabajo, es decir, esta propuesta genera unos costos didácticos puesto que, rompe con los esquemas tradicionales de la enseñanza de las ecuaciones en sentido que es un software que ayuda para el aprendizaje de la resolución de las ecuaciones, pero que es poco trabajado en los colegios de la ciudad por qué no es una propuesta tradicional la cual no solo necesita de unos tiempos prolongados sino de la flexibilización del currículo que vincule modelos que no usualmente circule en los casos tradicionales.

BIBLIOGRAFÍA

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra.* Madrid, España: Síntesis.

Bednarz, N. Kieran, C. & Lee, L. (en prensa) Aproximaciones al álgebra. Perspectivas para la investigación y enseñanza. Cap.1. Traducción realizado en la Universidad del Valle, Área de Educación Matemática.

Bell, A. O'Brien, D. y Shiu, C. (1980). *Designing tea- ching in the light of research on understanding*. Kar- plus, pp. 119-125.

Benalcázar, L. (2012). *Las ecuaciones de primer grado en la escuela: Dificultades y tratamiento.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle – sede Pacífico. Buenaventura, Colombia.

Birkohff, G. & Maclane, S. (1970). *Álgebra moderna.* Barcelona, España: Vicens-vives, S.A.

Cabanne, N. (2010). *Didáctica de la Matemática: ¿Cómo aprender? ¿Cómo enseñar?* Buenos Aires, Argentina: Bonum, 5^a ed.

Castaño, J. (2008). *Lógica Ecuacional*. Tesis de Pregrado. Departamento de Matemáticas. Cali, Colombia.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori: Instituto de Ciencias de la Educación.

Filloy, E. & Kieran, C. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *En: Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 7(3),* pp. 229-240.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transition from Arithetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics,* 9 (2), 12-25.

Gallardo, A. & Rojano, T. (1987). *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico*. Researchs in Didactique dec Mathématiques, Vol. 9, pp. 155 - 188.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental.* BOLEMA 46 (42B).

Infante, L. & Hurtado, C. (2010). *Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra. Grows, D. A. Ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Traducción castellana de Luis Puig de la Universidad del Valle, Área de Educación Matemática.

Lucumi, C. & Riascos Y. (2009). *Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: La proporcionalidad en el contexto de la homotecia.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Luque, C. Mora, L. & Torres, J. (2006). *Estructuras análogas a los números reales.* Bogotá, Colombia: Nomos S.A.

Martínez, M. (2009). *De la modelación concreta a la sintaxis algebraica: estudio con alumnos de secundaria sobre la resolución de ecuaciones lineales utilizando el modelo virtual de la balanza.* Tesis de Maestría. Centro de investigación y estudios avanzados del I.P.N, México, Distrito Federal.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Pedreros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental.* Tesis de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Rojano, T. (1991). El álgebra en el currículum de la secundaria. La reforma de 1990. *Revista Educación Matemática,* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números, Vol. (*75), pp.5-20.

Ruiz, J. (2011). *Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: La función cuadrática en grado noveno de Educación Secundaria.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Santacruz, M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en Educación Matemática.* Tesis de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M & Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid, España: Síntesis.

ANEXOS

Anexo 1. Plan de estudios del colegio compartir de grado octavo en el segundo periodo.

ARQUIDIOCESIS DE CALI
FUNDACIONES EDUCATIVAS ARQUIDIOCESANAS
PLANES DE ESTUDIO - COLEGIOS ARQUIDIOCESANOS

AÑO LECTIVO: 2011 – 2012

COLEGIO:				
ÁREA:	MATEMÁTICAS			
COMPONENTES:	• Pensamiento numérico y sistemas numéricos. • Pensamiento espacial y sistemas geométricos. • Pensamiento métrico y sistemas de medidas. • Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.			
GRADO:	OCTAVO	PERÍODO:	SEGUNDO	
ENSEÑANZAS		EJES TEMÁTICOS	EVALUACIÓN	TIEMPO (SEMANAS)
COMPETENCIAS	HABILIDADES		INDICADORES DE DESEMPEÑO	
• El razonamiento • La modelación • Resolución y planteamiento de problemas • La comunicación • Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Resolver y formular problemas Simplificar Identificar Conjeturar Verificar Reconocer Justificar Aplicar Generalizar Seleccionar Construir Modelar Analizar	- Ecuaciones lineales. - Función lineal y afín. - Triángulos y cuadriláteros: Angulos internos y externos	• Resuelvo problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales. • Identifico las funciones lineales y sus propiedades, y las aplico en el planteamiento y solución de problemas en un contexto determinado. • Reconozco figuras geométricas como triángulos y cuadriláteros e identifico sus ángulos internos y externos.	12 Semanas
DIDÁCTICAS: Didáctica Conceptual Socrática, Constructivista, Explicativa, Comprehensiva-Estructural, Colectiva, Mixta.				
RECURSOS: Guías-taller, talleres pedagogizados, libros de texto, TICs, revistas, periódicos, enciclopedias temáticas, juegos didácticos, carteleras, láminas didácticas, tableros, marcadores.				

Anexo 2. Presentación de la hoja de trabajo sección 1.

ARQUIDIÓCESIS DE CALI

FUNDACIÓN EDUCATIVA SANTA ISABEL DE HUNGRÍA

COLEGIO COMPARTIR

PRUEBA PILOTO SECCIÓN 1

Nombre: ______________________________________ **Edad:** _______

Nombre: ______________________________________ **Edad:** _______

Apreciado estudiante, a partir del trabajo desarrollado en las distintas escenas del modelo virtual de la balanza, responda el siguiente taller:

BALANZA 1

1. De acuerdo al trabajo en la *balanza 1,* diga qué es lo que indica que ya se encontró el peso de “X”.

____

____

BALANZA 2

2. En el trabajo realizado con la *balanza 2,* qué es lo que indica que la ecuación dada está correctamente representada en la balanza.

____

____

BALANZA 3

3. A partir del trabajo realizado en la *balanza 3,* responda y resuelva:

a) Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso “1” de su platillo izquierdo

---

---

b) Qué se debe hacer para mantener el equilibrio de la balanza si se retira una figura de peso “X” de su platillo derecho

---

---

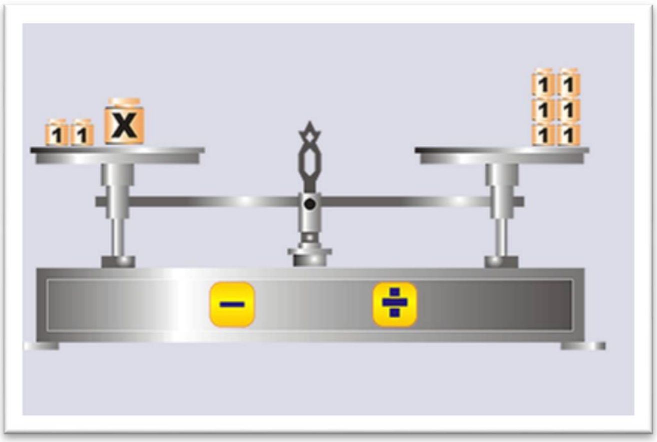
c) Encuentre el valor de “X” para las siguientes ecuaciones, escribiendo paso a paso el proceso que considere necesario:

$\mathbf{7 = x + 2}$	$\mathbf{3x + 2 = 2x + 5}$
$\mathbf{6x + 1 = 3x + 7}$	$\mathbf{10x + 40 = 5x + 50}$
$\mathbf{2x + 6 = x + 1}$	

BALANZA 4

4. A partir del trabajo desarrollado en la *balanza 4* desarrolle:

a) A continuación se presenta una ecuación representada en la balanza

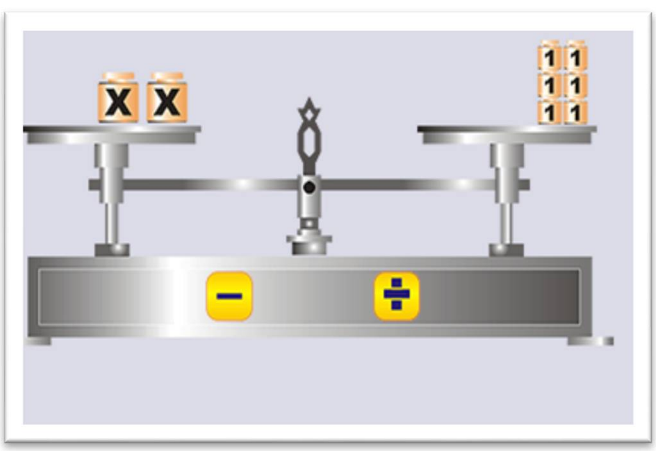


A partir de la ecuación anteriormente representada en la balanza, escriba qué se debe hacer para retirar las dos figuras de peso "1" (cada una) que acompaña la figura de peso "X"

____

____

b) A continuación se presenta una ecuación representada en la balanza



A partir de la ecuación anteriormente representada en la balanza, escriba qué se debe hacer para dejar una sola figura de peso "X"

____

____

c) Resuelva las siguientes ecuaciones escribiendo paso a paso todo el proceso que considere necesario para hallar el valor de “X”:

$$5 = 2 + x$$

$x =$

$$2x + 8 = 18$$

$x =$

$$20 = 10x$$

$x =$

$$16 = 5x + 11$$

$x =$

$$7x + 35 = 10x + 2$$

$x =$

$$6x + 8 = 4x + 26$$

$x =$

$$10x + 1 = 3x + 2$$

$x =$

Anexo 3. Presentación de la hoja de trabajo sección 2.

ARQUIDIÓCESIS DE CALI

FUNDACIÓN EDUCATIVA SANTA ISABEL DE HUNGRÍA

COLEGIO COMPARTIR

PRUEBA PILOTO SECCION 2

Nombre: ___________________________________ **Edad:** _______

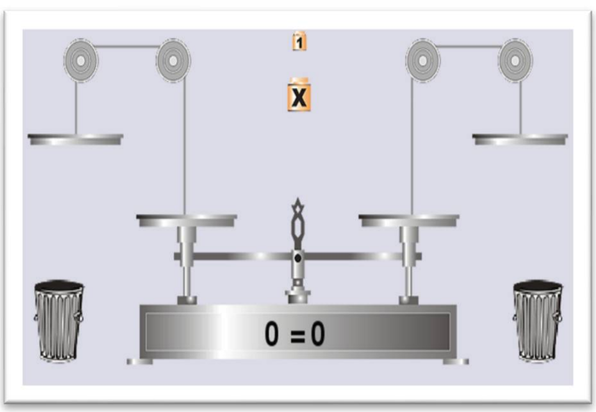
Nombre: ___________________________________ **Edad:** _______

Apreciado estudiante, a partir del trabajo desarrollado en las distintas escenas del modelo virtual de la balanza con poleas, responda el siguiente taller:

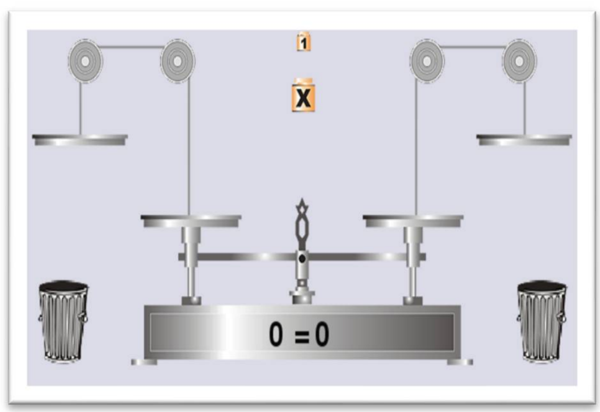
BALANZA Y POLEAS 1

1. De acuerdo al trabajo realizado en la *balanza y poleas 1,* representa en las siguientes balanzas con poleas cada una de las ecuaciones dadas según corresponda.

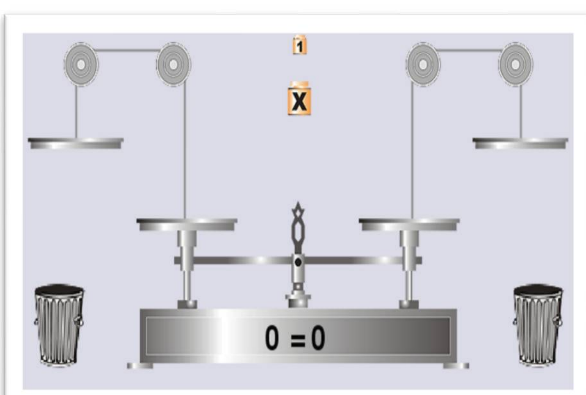
a) $-5 = -x - 2$



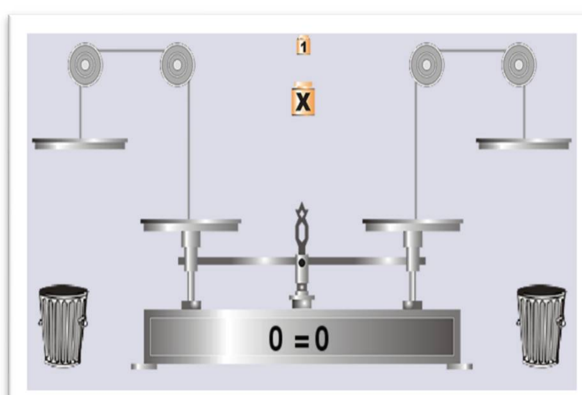
b) $4x = -7$



c) $2x - 3 = -x + 1$



d) $-3x + 1 = 2x - 1$



BALANZA Y POLEAS 2

2. A partir del trabajo realizado en la *balanza y poleas 2*, resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x - 5 = -3$

b) $-5x = -10$

c) $2x - 5 = -3$

d) $4x - 6 = 3x - 2$

BALANZA Y POLEAS 3

3. A partir del trabajo realizado en la *balanza y poleas 3*, resuelva las siguientes ecuaciones realizando paso a paso las operaciones que considere necesario para hallar el valor de la incógnita:

a) $-3 = x - 5$

b) $-2x = -8$

c) $2x - 6 = -4$

d) $4x - 10 = 2x$

e) $7x - 8 = x - 2$

f) $2x - 2 = x + 4$

g) $-9 - 3 + 2 = 10x - 20x$

h) $6x - 7 = 2x - 3$

i) $3x + 4 = 2x + 3$

j) $7x + 8 = 2x + 4$