Conexión entre la semejanza, la homotecia y el teorema de Thales. Una experiencia con estudiantes de 14-15 años

Élgar Gualdrón
Grupo de investigación en Matemática Pura y Aplicada
Universidad de Pamplona
egualdron@unipamplona.edu.co

Resumen

En este trabajo, se presentan los resultados preliminares de una investigación en la cual se están estudiando, entre otras cosas, las formas y la evolución del razonamiento que tienen los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la semejanza, a través de una unidad de enseñanza siguiendo las líneas de Charalambos (1991) y el modelo de razonamiento de Van Hiele siguiendo las líneas de Gutiérrez y Jaime (1998). La muestra del estudio es un grupo de estudiantes de noveno grado (14-15 años) de un colegio de Floridablanca-Santander (Colombia). Los análisis preliminares del conjunto de datos nos muestran interesantes formas de resolución de ciertas tareas en las cuales los participantes utilizan un lenguaje rico y muestran variadas formas de razonamiento.

Fundamentación teórica

Para el diseño y posterior análisis de las actuaciones de los estudiantes respecto de la unidad de enseñanza de la semejanza tuvimos en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998; Gualdrón, 2007) y los estudios de Charalambos (1991).

El estudio, desde el punto de vista de la enseñanza de la semejanza, tuvo en cuenta los de Charalambos (1991), quien caracterizó tres aproximaciones que deberían tenerse presentes cuando se considera la semejanza como objeto de enseñanza:

- Relación intrafigural: Donde se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra. Dentro de esta aproximación distingue:
- Cuando las figuras forman parte de una configuración de Thales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia, con sus correspondientes razones.
- Cuando las figuras aparecen como figuras separadas.
- Transformación geométrica vista como útil: La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como útil en la resolución de problemas.
- Transformación geométrica vista como objeto matemático: Se caracteriza porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Vasco (1998) plantea que “El currículo colombiano [en geometría] no se apoya en la geometría transformacional,…”. También, en relación a lo planteado por Vasco, Swoboda y Tocki (2002) plantean que el enfoque de enseñanza de la semejanza por transformaciones se dirige más a la matemática vista como ciencia y no está guiada por los aspectos psicológicos del aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, y dadas las edades de los estudiantes en las que pensamos desarrollar el estudio (14-15 años), decidimos contemplar únicamente la relación intrafigural y la transformación geométrica vista como útil.

El modelo de razonamiento de Van Hiele (Van Hiele, 1957; Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1996) está demostrando que es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Un buen ejemplo de ello es NCTM (2003). Este modelo, desde su aparición, ha sido ampliamente estudiado, no solamente en su aplicación (Jaime, 1993; Guillén 1997; Ding y Jones, 2006) sino también en su ampliación y/o mejoramiento (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1998). No obstante, la semejanza es un tema de geometría en el que la investigación sobre la aplicación del modelo de Van Hiele es muy limitada (Gualdrón, 2006). En nuestro estudio hemos utilizado los descriptores de nivel que resultaron de tener en cuenta los estudios previos de Gualdrón (2006) y una ampliación de estos.

Metodología

La muestra del estudio estuvo formada por 34 estudiantes (14-15 años) de un colegio de Floridablanca-Santander (Colombia). Era la primera vez que estos estudiantes recibían instrucción sobre el tema de semejanza. En el mismo curso ya habían desarrollado lo relacionado al teorema de Thales y, en un curso anterior, lo relacionado a las homotecias.

La unidad de enseñanza se diseñó teniendo en cuenta las fases y niveles del modelo de razonamiento de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998) y los resultados de estudios de Charalambos (1991).

Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cintas métricas, compás, transportador de ángulos, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

Metodología de trabajo en clase

En la experimentación estuvieron presentes la profesora titular y el investigador. Éste asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los estudiantes y, al mismo tiempo, colaborando con la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes durante las sesiones de clase.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. El medio escolar en el que se llevó a cabo la experimentación de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de tres estudiantes. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de nueve sesiones de 100 minutos y tuvo una duración de 8 semanas.

Los estudiantes se organizaron en grupos de tres, los cuales discutían la posible solución y luego, cada uno redactaba sus propias conclusiones.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Recogida de información

El conjunto de datos consta de cintas de video, hojas de trabajo de los estudiantes, algunas entrevistas a los estudiantes y notas de campo.

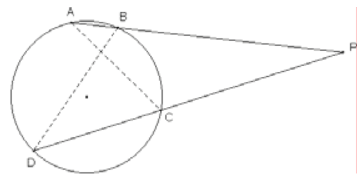
Las grabaciones en video se realizaron del trabajo realizado por los grupos de estudiantes. Se realizaron algunas entrevistas a estudiantes con el fin pedir más aclaraciones o justificaciones, pedir que explicaran lo que habían hecho y/o para plantear otra tarea análoga.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

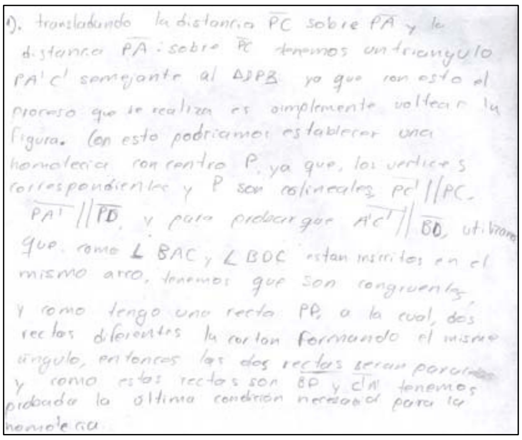
A continuación presentamos algunos de los aspectos que nos han parecido más relevantes del análisis de los datos que hemos recogido. Presentaremos algunos ejemplos representativos de formas de razonamiento y haremos algunos comentarios sobre ellos.

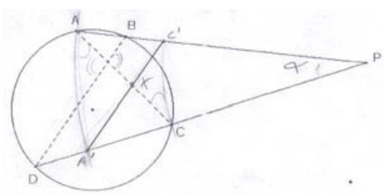
En la actividad Nº 24, como se muestra a continuación, que pedía la justificación de la semejanza de los triángulos formados en las partes 1 y 2, *Carlos* utiliza la homotecia para justificar la semejanza. Es decir, justifica primero por qué se presenta la homotecia y luego, la utiliza para justificar la semejanza.

24(1) Los segmentos AP y DP pertenecen a rectas secantes que se cruzan en el punto P y, a su ves, cortan a la circunferencia como aparece en la figura. Justifique por qué los triángulos APC y DPB son semejantes.



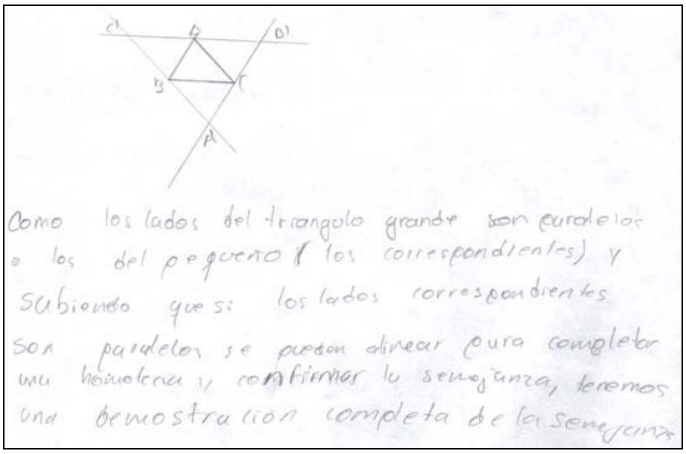
Actividad 24(1)


1). translad[illegible] la distancia $\overline{PC}$ sobre $\overline{PA}$ y la distancia $\overline{PA}$ sobre $\overline{PC}$ tenemos un triangulo PA'c' semejante al ΔDPB ya que con esto el proceso que se realiza es simplemente voltear la figura. Con esto podriamos establecer una homotecia con centro P, ya que, los vertices correspondientes y P son colineales $\overline{PC'} \parallel \overline{PC}$, $\overline{PA'} \parallel \overline{PD}$, y para probar que $\overline{A'C'} \parallel \overline{BD}$, utilizamos que como ∠ BAC y ∠ BDC estan inscritos en el mismo arco, tenemos que son congruentes, y como tengo una recta PP, a la cual, dos rectas diferentes la cortan formando el mismo ángulo, entonces las dos rectas seran paralelas y como estas rectas son BP y c'A' tenemos probado la última condición necesaria para la homotecia



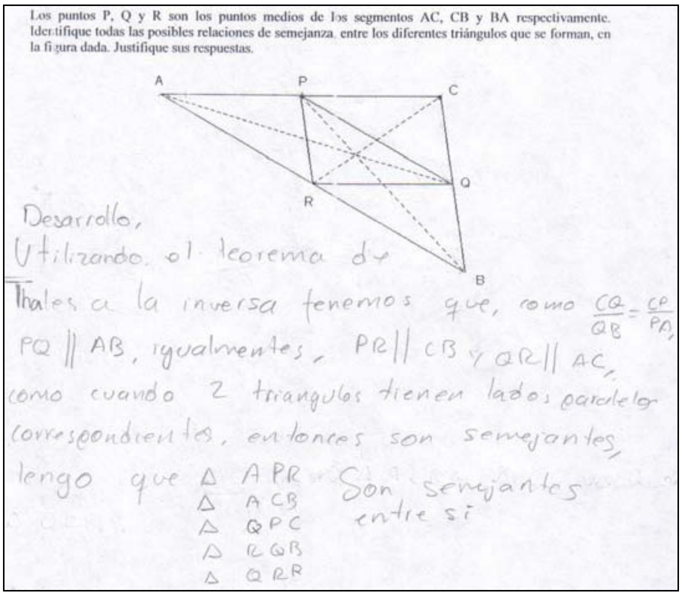
Respuesta de Carlos a la actividad 24(1)

24(2) Dibuje un triángulo cualquiera y, desde cada vértice, trace una recta paralela al lado opuesto. De esta manera obtiene un triángulo más grande. Justifique por qué este triángulo es semejante al inicial.



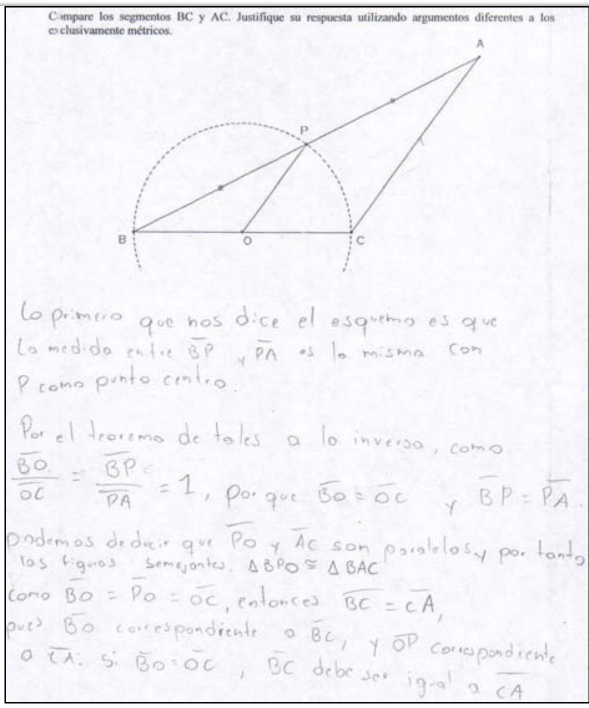
Respuesta de Carlos a la actividad 24(2)

En la actividad 21, como se muestra a continuación, *Carlos* utiliza el teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos dispuestos en la figura y luego, utiliza una propiedad matemática que han "descubierto" con su profesor ("Los triángulos en posición de Thales son semejantes").



Respuesta de Carlos a la actividad 21

En la actividad 37, como se muestra a continuación, *Francisco* utiliza el teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos dispuestos en la figura. Luego, utiliza una correspondencia adecuada, entre figuras semejantes, para justificar que los segmentos BC y AC son iguales.



Respuesta de Francisco a la actividad 37

El resultado del análisis parece indicar que el tratamiento dado a la semejanza (vinculándolo al concepto de homotecia y al teorema de Thales) fue un factor altamente positivo en la adquisición, por parte de los estudiantes, de más y mejores formas de razonamiento.

Conclusiones

Hemos analizado las argumentaciones que los estudiantes propusieron para justificar la semejanza y hemos encontrado que los estudiantes poseen más y mejores herramientas de razonamiento si los comparamos con los resultados de estudios previos (Gualdrón, 2006), en donde no se estableció ningún vínculo entre la semejanza y, el teorema de Thales y la homotecia. Nuestros hallazgos sugieren que en la enseñanza del tema se debería establecer un vínculo directo entre la semejanza y la homotecia y el teorema de Thales.

Los resultados de este estudio aportan a la literatura sobre formas efectivas de mejoramiento del razonamiento, específicamente, en tareas relacionadas con la semejanza.

Agradecimiento

El autor desea agradecer a Ángel Gutiérrez Rodríguez de la Universidad de Valencia (España) y a Joaquín Giménez Rodríguez de la Universidad de Barcelona (España) por la dirección de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1*, 31-48.

Charalambos, L. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques 11(23)*, 295-324.

Ding, L., y Jones, K. (2006). Students´ geometrical thinking development at grade 8 in Shangai. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceeding of the 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 382). Praga, República Checa.

Gualdrón, É. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado.* Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Valencia: Universitat de València.

Gualdrón, É. (2007). Una Aproximación a los indicadores de nivel de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. *Memorias del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Vol. 1, pp.369-380). Tenerife, España.

Guillén, G. (1997). *EL Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universitat de València.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20, 2 y 3*, 27-46.

Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3*, 237-251.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universitat de València.

Swoboda, E. y J. Tocki (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Crete, Grecia: 1-10.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, ERIC: Columbus, USA.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). Utrecht, Holanda (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991), Universidad de Utrecht. Holanda.

Vasco, C. E. (1998). Dynamic geometry in the colombian school curriculum. Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study. C. Mammana and V. Villani. Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Publishers. 5: 243-248.