Unidad similar en la construcción de la multiplicación: una mirada a los elementos

Hector Mauricio Becerra Galindo[12]
Jaime Humberto Romero Cruz[13]
Grupo Mescud, Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Grupomescud@Yahoo.Es

Resumen

En este artículo se resalta la existencia de la unidad similar -propuesta en Confrey (1994)- en el tratamiento que de las magnitudes hace Euclides en los Elementos. La proporción, la tercera y la cuarta proporcional, la extrema y media razón, así como los gnomones son objetos matemáticos que, en relación mutua en la actividad matemática euclidea, se proporcionan significado. El uso iterativo de la unidad similar potencia la construcción de figuras, como en el caso del pentágono, de secuencias potencialmente convergentes de figuras y magnitudes así como la generación de bases posicionales de representación.

Palabras Clave: Unidad, Unidad Similar, Magnitud, Proporcionalidad, Euclides.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo es un resultado de la investigación "*Análisis del uno y la unidad en la construcción de la multiplicación: una mirada a los elementos de Euclides y a los textos escolares*", cofinanciada por Colciencias y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. En la sección 1, además de ubicar el propósito general de este artículo, explicitamos algunos aspectos metodológicos y teóricos de la investigación, que sirven para el desarrollo de la sección 2. En la sección 2 presentamos la existencia de diferentes unidades en los elementos y destacamos la unidad similar en las magnitudes. En la sección 3, presentamos las conclusiones.

1.1 Propósito de este artículo

Queremos destacar a través de hallazgos de investigación, elementos que intervienen en una propuesta de conceptuación de la multiplicación como cambio de unidad (Mescud, 2005). Tal conceptuación podría ser usada para diversificar las prácticas escolares actuales, ancladas, casi únicamente, en el significado de la multiplicación como suma reiterada.

1.2 Aspectos Metodológicos de la investigación

La propuesta de conceptuación de la multiplicación como cambio de unidad ha mostrado ventajas didácticas y se encontró que la multiplicación en los Libros VII y VIII, X de los Elementos es consistente con este punto de vista. No obstante, dado el papel que diversos autores expresan acerca de la asignación que Euclides da a la **Unidad** y su determinación de excluir el uno del sistema de números,

---

[12] Joven Investigador del grupo MESCUD y Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco .José de Caldas.
[13] Investigador principal del grupo MESCUD, Docente en la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco .José de .Caldas y Estudiante del Doctorado de Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco .José de .Caldas, Universidad Pedagógica Nacional y Universidad del Valle

parece que el papel operatorio de la una y del otro debería estar ausente. Por otra parte, la presencia del uno y la unidad en distintas proposiciones de los Elementos parece contradecir el anterior supuesto. Por lo tanto, adoptamos el siguiente objetivo general.

1.2.1 Objetivo general

Indagar sobre el papel que el uno y la unidad tienen en la construcción de la multiplicación en los Elementos, particularmente en su aspecto operatorio, a fin de complejizar la conceptualización lograda hasta el momento por el grupo de investigación.

Para llevar a cabo este objetivo general nos propusimos el siguiente objetivo específico.

1.2.2 Objetivo específico

Caracterizar la unidad similar (Confrey, 1994) en los Elementos de Euclides (libros I, IV, V, VI, VII, VIII, X).

Para cumplir este objetivo se realizaron las siguientes actividades metodológicas:

1. Revisión documental, traducción, lectura y comprensión, de las teorías existentes.

2. Clasificación de la literatura revisada en Campos y objetos de estudio.

3. Análisis de la información.

4. Caracterización y uso de la unidad similar en los Elementos.

A continuación se presenta algunos aspectos teóricos, que exponen los objetos uno, unidad y multiplicación, que son analizados para reorganizar la teoría euclidiana de la magnitud y la unidad a fin de demostrar que son compatibles con algunos elementos utilizados por investigadores en didáctica de las matemáticas, permitiéndonos exaltar en la sección 2 la existencia en los Elementos de la unidad similar en magnitudes, y como está interviene en la construcción de la multiplicación.

1.3. Aspectos teóricos de la investigación

En esta sección se presentará una síntesis de la literatura escogida del campo matemático y didáctico, que tomamos especialmente por sus discusiones de los objetos uno, unidad y multiplicación, destacando los significados de los objetos en cada uno de los campos.

1.3.1 Matemático. Con respecto a la matemática, elegimos los libros I al X de los *Elementos de Euclides*, que sistematiza los elementos para hacer matemáticas en la cultura griega, y que remiten a las definiciones y proposiciones, relacionadas con la unidad, la proporcionalidad, la extrema y media razón, la tercera proporcional, la cuarta proporcional y la multiplicación.
1.3.2 Didáctico. Destacamos la literatura que estudia y se refiere al análisis, caracterización y uso de la unidad, el uno y la multiplicación. Confrey (1994), propone la *similaridad*[14] que define como: una *acción de crear simultáneamente* múltiples versiones de un original.

Plantea que la definición de la unidad en cualquier mundo es la relación invariante entre un sucesor y su predecesor, siendo ésta, en el mundo de la *similaridad,* la razón,

> *en un mundo n-similar, donde la acción sucesora es multiplicar por n, la unidad es n. En la similaridad, n puede ser visto como la acción multiplicativa invariante entre sucesor y predecesor. …En nuestro trabajo, para ayudar a nuestros lectores, llamamos la unidad en el mundo similar una unidad de crecimiento.* (p. 16)

[14] Traducimos como similaridad a la expresión *splitting* propuesta en Confrey (1994).

La multiplicación construida como *similaridad* repetida o lo que es igual a *n-similaridad en el mundo similar [...] entraña que partir, repartir, agrandar y crear conjuntos múltiples de grupos iguales son acciones precursoras y raíces de estas operaciones* (p. 17)

Este modelo alternativo de multiplicación que ha desarrollado Confrey (1994), es construido independientemente al de la suma repetida y es apropiado como modelo explicativo para tales situaciones exponenciales.

2. UNIDADES EN LOS ELEMENTOS

Para muchos estudiosos de los Elementos los libros VII-IX contienen una teoría de números, o la construcción aritmética de los Elementos. Por ejemplo, Puertas (Euclides, trad. 1991, p. 81) afirma:

> *Los libros VII – IX presentan y desarrollan la aritmética de los elementos. En conjunto, comprenden 102 proposiciones presididas por las 23 definiciones que Euclides introduce en el libro VII. Puede ser un signo de unidad esta agrupación de las definiciones a la cabeza del VII, que contrasta con el hábito anterior de irlas distribuyendo por cada uno de los libros I – VI.*

Nuestro interés no es discutir estas u otras afirmaciones similares, sino argumentar que en estos libros existe la conformación y uso de ciertos tipos de unidad, como el de la unidad similar.

Inicialmente *Euclides* en el libro VII, define la unidad como: *"...aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una".* [Euc. VII, Def. 1][15] y el número como: *"... una pluralidad compuesta de unidades"*. [Euc. VII, Def. 2]

Esto lleva a pensar, que el par (cosa, unidad) son un par inseparable que se manifiesta mediante la actividad de nominación, y que tratar de esta forma la *unidad* y una cosa *una*, la hace ver como un arquetipo, que permite al nominador cualquiera éste sea, reconocer ante sí la presencia de lo que llama cosa, reconocer que existe una cosa *una*.

Desde este punto de vista no estamos de acuerdo con Gardies respecto a lo que dice es la unidad para *Euclides*

> *la unidad es entonces el objeto concreto que se elige arbitrariamente como unidad, o como medida, poco importa que sea una piedra, una ficha, un objeto cualquiera, la condición es que se deje agrupar con otros objetos del mismo estatus.* (p. 29)

aunque sí es posible establecer maneras de ser para la unidad en los *Elementos*, hecho plausible si tenemos en cuenta el uso que *Euclides* hace de unidad. Por ejemplo, además del que de ella hace en la definición de número, la usa en las definiciones [Euc. VII, Def. 7, 12, 13 y 16], y particularmente en las proposiciones [Euc. VIII, Prop. 9 y 10], [Euc. IX, Prop. 8, 9 y 10], [Euc. IX, Prop. 11, 12 y 13].

Se puede observar en las proposiciones anteriores, que *Euclides* habla de **una unidad**, de esta manera está abriendo la posibilidad de su no unicidad y, por lo tanto, de la existencia de diferentes unidades. Pero también establece que estas posibles unidades serían tanto relacionales.

Esta posible existencia de diferentes unidades con usos diferentes condujeron a buscarlas en los *Elementos.*

[15] La abreviación significa: Euclides. Libro VII, Definición 1. Con "Prop." o "Noc." proposición y noción común respectivamente. Usaremos estas abreviaturas en este escrito.

2.1. Unidad similar en Magnitudes

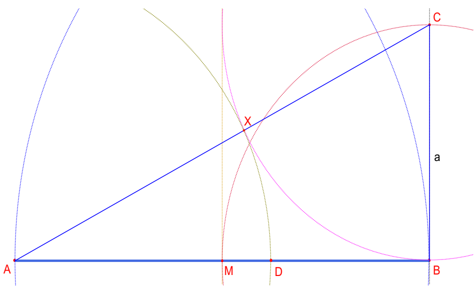
Euclides dice:*"Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón."* [Euc. V, Def. 6] y *"Una proporción entre tres términos es la menor posible."* [Euc. V, Def. 8], ésta última conduce a requerir un método de producción de la nueva magnitud a través de la razón. La demostración de [Euc. VI, Prop. 11] ofrece un método para hallar en una cierta magnitud la tercera proporcional. Esto hace que, el caso en que la forma de la magnitud sea una línea recta o se deje representar por una recta desde el punto de vista operatorio, sea óptimo porque según [Euc. VI, Prop. 11], siempre es posible *"Dadas dos rectas, hallar la tercera proporcional"*. Más aun, dada una recta, segmento, siempre es posible hallar otras dos, la segunda y la tercera o bien la primera y la segunda, de tal manera que estas tres sean continuamente proporcionales.

Otra técnica consiste en dividir la recta dada en extrema y media razón. Euclides vuelve operativa estas opciones usando la siguiente definición *"Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor."* [Euc. VI, Def. 3], que precisa la relación, y muestra una técnica para realizar tal cortadura. Técnica exhibida en la demostración de la proposición:*"Dividir una recta finita dada en extrema y media razón"*[16] [Euc. VI, Prop. 30]

Hoy es más usual presentar tal división de otra manera, que la conecta con una construcción del pentágono regular y entonces con otras dos inquietudes pitagóricas: la inconmensurabilidad y los procesos potencialmente infinitos, asumidas y teorizadas por *Euclides* en los *Elementos,* pero además la conecta con lo que en el Renacimiento se llamó Sección áurea o Divina proporción.

2.1.1 Una construcción de la Sección áurea, en magnitud longitud línea recta.

Esta construcción es tomada de Gutiérrez (1992, p.112):



Sea AB un segmento y M su punto medio. Trazamos *a* la perpendicular a AB en B. Con centro en B y radio BM trazamos la circunferencia cuya intersección con *a* determina el punto C. Trazamos segmento AC. Trazamos el arco de circunferencia de centro C y radio CB, que corta AC en X. Trazamos arco de circunferencia de centro A y radio AX, que corta AB en D. (Figura 1)

Los segmentos AB, AD, DB están en extrema y media razón; es decir, cumplen la siguiente relación proporcional AB:AD::AD:DB

Figura 1

[16] Existe otra técnica en la demostración de [Euc. II, Prop. 11] "Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante"

2.1.2 Una construcción de la Sección áurea, en magnitud área triangular

Construir tres triángulos ABC, ADC, DBC que estén en sección áurea.

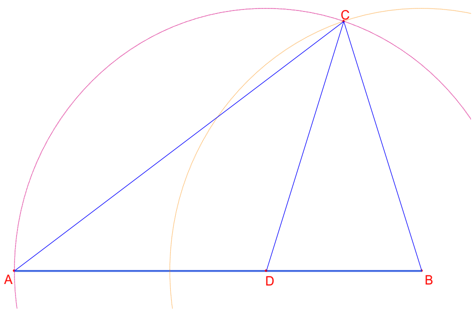


Figura 2

Sean AB un segmento y AD, DB segmentos que lo dividen en media y extrema razón. A partir de esta construcción, construiremos un triángulo isósceles ABC tal que: (1) sea semejante al triángulo BCD cuyo lado mayor CB sea igual al lado menor, CB, de ABC. (2) cada uno de los ángulos iguales sea el doble del ángulo restante 3) los triángulos ABC, ADC, DBC cumplan con ABC:ADC::ADC:DBC.

Dem de 1): Con centro en D y luego en B trazamos círculos de radio AD; sea C un punto de su intersección. Por construcción, los segmentos CD y CB resultan iguales a AD y por [Euc. Noc. 1] CD y CB son iguales. Así que, los triángulos DBC y ADC son isósceles. Por otra parte, puesto que AB:AD::AD:DB y AD es igual CB entonces por [Euc. V, Prop. 7] AB:CB::CB:DB y como ángulo DBC igual al ángulo ABC entonces por [Euc. VI, Prop. 6] los triángulos ABC y DBC son semejantes, así que ABC es isósceles, AC igual a AB y CB es menor que AB.

Dem de 2) Según [Euc. I, Prop. 5] son iguales entre sí los ángulos ABC y ACB, los ángulos DBC y BDC y los ángulos ACD y DAC. Como, además, según 1) en los triángulos semejantes los lados correspondientes son AB a CB, AC a CD y CB a BD, entonces los ángulos ABC, ACB, CDB y CBD son iguales entre sí, así como los ángulos BAC y BCD. Como el ángulo BDC es un ángulo externo del triángulo DAC, por [Euc. I, Prop. 32] el ángulo BDC es igual a la suma de los ángulos DAC y DCB que, además, son iguales entre sí. Así que el ángulo BDC es el doble del ángulo DAC y éste último, como ya hemos visto, es igual al ángulo BCD. Por todo lo anterior, hemos demostrado que cada uno de los ángulos iguales del triángulo ABC es el doble del restante.

Dem de 3) Como los triángulos ABC, ADC y DBC están ente las mismas paralelas, por [Euc. VI, Prop. 1] ABC:ADC::AB:DC, ADC:DBC::DC:DB y, como por construcción, AB:DC::DC:DB entonces por [Euc. V, Prop. 22] ABC:ADC::ADC:DBC.

Hemos demostrado 1), 2) y 3) como queríamos.

2.1.3 Gnomones en las magnitudes longitud y área triángular

Dado D un punto que parte la línea recta AB en los segmentos AD, DB en sección áurea. Entonces de las tres proporcionales AB, AD, DB el gnomon es la segunda AD. Y si ABC, ADC, DBC son tres magnitudes área triángular proporcionales, la segunda ADC es el gnomon[17].

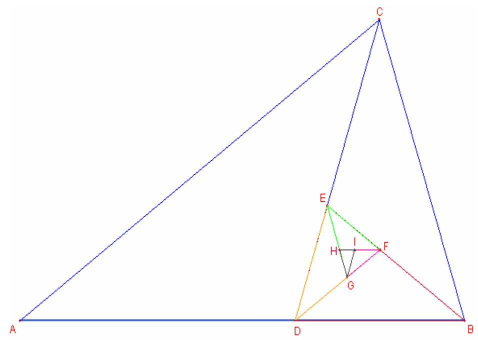


Figura 3

Ahora, si en cada caso agregamos a la primera magnitud o quitamos de ella gnomones, respetando la forma (Figura 3), obtenemos sendas series ordenadas con cada uno de los dos tipos de magnitudes. Además, los elementos de cada serie están en proporción continuada y los elementos igualmente espaciados, en cada una de ellas, guardan la misma razón. Si la cantidad de magnitudes entre las consideradas es n, tal misma razón es la razón n-plicada de la razón que guardan dos magnitudes sucesivas[18].

En la magnitud longitud línea recta obtenemos la siguiente proporción continuada potencialmente infinita: AC:CB::CB:DB::BD:DE::DE:EF… generando la siguiente serie: AC, CB, BD, DE, EF,…ordenada de mayor a menor.

En la magnitud área triangular obtenemos la siguiente proporción continuada potencialmente infinita ABC:ADC::ADC::CEB::CEB:BDF… generando la siguiente serie ABC, ADC, CEB, BDE, DGE… ordenada de mayor a menor.

Las series de magnitudes obtenidas mediante los tratamientos en 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3, longitud línea recta en un caso y área triangular en el otro, están en proporción continuada. Esto conduce a que magnitudes consecutivas están en la misma razón. Esta razón se puede caracterizar como una unidad similar, a partir de la que ha sido descrita en Confrey (1994, p.16) respecto de los números enteros como:

> *en un mundo n-similar, donde la acción sucesora es multiplicar por n, la unidad es n. En la similaridad, n puede ser vista como la acción multiplicativa invariante entre sucesor y predecesor. …En nuestro trabajo, para ayudar a nuestros lectores, llamamos la unidad en el mundo similar una unidad de crecimiento.* (p. 16)

---

17 La demostración de la segunda de las tres proporcionales, como el gnomon de la línea recta y del triángulo, se presenta en el informe académico final del "Análisis del uno y la unidad en la construcción de la multiplicación: una mirada a los Elementos de Euclides y a los textos escolares" .

18 [Euc. V, Def. 10]"Cuando cuatro magnitudes son [continuamente] proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que [guarda] con la segunda, y así siempre, secesivamente, sea cual fuere la proporción."

Tal unidad puede ser analizada como una razón constante ente números consecutivos. Para los casos trabajados, también se puede observar que la serie de triángulos isósceles o de segmentos obtenidos agregando, a partir de un primero, iterativamente el gnomon correspondiente, es creciente y los triángulos son semejantes. Cumpliendo de esta manera que

> *"…hay algunas cosas que aumentan y no se alteran, como el… [triángulo] …aumenta al incorporarle un gnomon y no queda en absoluto alterado". (Aristóteles C. 15 a 30)*

2.1.3 Usos

Dentro de los usos de la unidad similar destacamos tres:

- Construcción de figuras.
- Construcción de secuencias de magnitudes contínuamente proporcionales
- Convergencia potencial de secuencias de magnitudes proporcionales
- Generación de bases posicionales de representación de magnitudes

3. CONCLUSIONES

3.1 Unidad Similar en las magnitudes

- Es una unidad de crecimiento, asimismo es una unidad que es la misma razón entre las magnitudes que son continuamente proporcionales.
- Esta unidad es el principio multiplicativo en la construcción de magnitudes continuamente proporcionales.
- Este análisis evidencia la unidad similar como constructora de formas de multiplicación, que permite aumentar la colección sin alterar su estructura multiplicativa y pone de relieve una conexión entre multiplicación repetida, razones e intervalos de razones iguales y de igual numerosidad.

3.2 Generales

1. La extrema y media razón es un concepto que instrumentalizado, involucra técnicas que generan secuencias de magnitudes ya sea divergentes o ya sea convergentes pero, el cambio en tamaño y forma de sus magnitudes está totalmente controlado. Este hecho es relevante para una teoría de la aproximación, permite saber en qué cantidad de magnitudes continuamente proporcionales a una dada hay que incrementar una serie si con ella se requiere aproximar una cierta magnitud dada con un grado de aproximación dado.

2. En *Elementos* hay, entonces, formas de multiplicación distinguibles según el tipo de unidad y el tipo de proporcionalidad puestos en juego que son irreducibles unas a otras. Esto significa que respecto a la multiplicación, el trabajo geométrico con magnitudes debería ser estimulado.

Bibliografía

Confrey, J. (1994). *Splitting, Similarity and Rate of Chance: A New Approach to Multiplication and Exponential functions*. In: *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp.291-330). Albany: New York press.

Euclides. (1991). *Elementos***.** *Libros I-IV.* (Puertas, M., Trad.). Madrid: Gredos.

Euclides. (1994). *Elementos***.** *Libros V-IX.* (Puertas, M., Trad.). Madrid: Gredos.

Euclides. (1996). *Elementos***.** *Libros X-XIII.* (Puertas, M., Trad.). Madrid: Gredos.

Gardies, J. (2004). *De Quoi Parlait L` Arithmétique Euclidienne*. En *Du mode d'existence des objets de la mathématique* (pp. 27-43). París : Librairie Philosophique J. Vrin.

Gutiérrez, M. (1992). Notas de Geometría. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.