instituto
de educación
y pedagogía

Universidad
del Valle

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

GUSTAVO ADOLFO MORENO GIRALDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2015

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

GUSTAVO ADOLFO MORENO GIRALDO
CÓDIGO 0837150

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO:
LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2015

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos						
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	x			
Director:	Ligia Amparo Torres						
1er Evaluador:	María Teresa Narváez						
2do Evaluador:							
Fecha y Hora	Año:	2015	Mes:	03	Día: 03	Hora:	2 p.m.

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
MORENO GIRALDO GUSTAVO ADOLFO	200837150	3469

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ___________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ___________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

[firma]	María T. Narvaez	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones: X	**Recomendaciones:** ☐	**Razón del Desacuerdo – Alternativas:** ☐

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

- El Trabajo es interesante y el Tema pertinente desde la perspectiva curricular.
- Corregir a lo largo del documento los errores ortográficos y la falta de algunas palabras. También, la correspondencia entre número y genero y algunas Tablas.
- El trabajo es coherente y cumple con los objetivos propuestos de manera amplia.

	María T. Narvaez	
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos.

Autores:

Nombre: Gustavo A. Moreno Giraldo Firma: C.C. 1144044514.

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: 2/03/15

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE IMÁGENES

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme estar en estos momentos culminando satisfactoriamente mi carrera,

A la memoria del profesor Octavio Augusto Pabón, quien fue como mi papá académico, aquella persona que siempre estaba allí cada vez que lo necesitaba, quien me daba consejos, quien me hacía reír con sus chistes malos y discos extraños, quien se arriesgó a ser mi tutor y ayudar a elegir el tema de este trabajo de grado.

A mi tutora Ligia Amparo Torres y Evaluadora María Teresa Narváez, por permitirme trabajar a su lado y aprender de sus conocimientos y experiencias

A mis padres Gustavo Moreno y Consuelo Giraldo que con gran esfuerzo y dedicación lograron que estuviera hoy en día en el lugar que estoy, a mis hermanas Jennifer y Zaida por su apoyo incondicional en mi proceso académico.

A mi abuela Hilda, quien estoy muy agradecido de ser su nieto y tenerla a mi lado, gracias por ser como eres, pues gracias a ello soy quien soy en este momento.

A mi novia Lina Vanessa, quien fue un apoyo incondicional en el proceso de elaboración de este documento. Gracias por permitirme entrar en tu corazón y ser partícipe de tu vida.

A todos los profesores que me acompañaron durante mi carrera, gracias por guiarme y ayudarme a descubrir un mundo nuevo de conocimiento.

RESUMEN

En este trabajo de grado se presenta una aproximación al pensamiento algebraico a partir de una secuencia de tareas matemáticas que involucra el trabajo con patrones numéricos, en grado tercero de la Educación Básica; las actividades integran aspectos curriculares, didácticos y matemáticos particulares para este nivel. La secuencia de tareas está organizada por medio de situaciones que integran principios básicos del desarrollo del pensamiento numérico y pensamiento algebraico tales como, la variación, el cambio y la estructura multiplicativa.

Respecto a los resultados y análisis de resultados, se logró evidenciar que los estudiantes de este ciclo de escolaridad encuentran los primeros términos de la secuencia numérica, expresándolos por medio del lenguaje natural o lenguaje simbólico (numérico). También se observó, que utilizan diferentes estrategias para contestar las preguntas diseñadas, entre estas se encuentra, el conteo y las representaciones pictóricas.

Palabras Claves: Early Algebra, Generalización, Patrones numéricos, Pensamiento Algebraico y Estructura Multiplicativa.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en la Línea de Investigación Didáctica de las Matemáticas, del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. En este se estudia algunas de las condiciones y posibilidades que están involucradas en la elaboración y puesta en acto de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos, enfocadas en el Early Algebra *(álgebra temprana)* en el grado tercero de Educación Básica de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali.

Para esta propuesta se retoman algunas investigaciones sobre el Early Algebra, puesto que ocupan un lugar central en la didáctica de las matemáticas y se reconocen como un campo abierto a nuevas miradas teóricas, destacando su aporte a la superación de dificultades en el aprendizaje del álgebra y al desarrollo de procesos matemáticos como el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones numéricos o pictóricos, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Molina, 2011).

Por otro lado, se presenta la secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos fundamenta a partir de la dimensión Curricular, Didáctica y Matemática, como una alternativa que permite que los estudiantes de este grado de escolaridad adquieran herramientas conceptuales y procedimentales para que argumenten, construyan y conjeturen regularidades y generalizaciones.

Todo lo anterior, se organiza en este trabajo de la siguiente manera:

En el primer Capítulo, se presenta el planteamiento de la problemática, los objetivos y la justificación, en este se muestra la necesidad e importancia de diseñar una secuencia de tareas matemáticas que aporte al pensamiento algebraico a temprana edad.

En el segundo Capítulo, se da a conocer el Marco Teórico, que fundamenta la propuesta en torno a tres dimensiones básicas, a saber: La Dimensión Curricular, la cual habla sobre la importancia de promover en los primeros ciclos escolares ideas algebraicas y como se debe aproximar al estudiante al álgebra escolar. La Dimensión Didáctica; la cual expone y define, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en el álgebra escolar, la importancia de la propuesta *Early Algebra* en la Educación Básica Primaria, los patrones como piedra angular para promover el pensamiento algebraico temprano y la generalización, como parte importante de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Mientras que en la Dimensión Matemática, se definen los contenidos matemáticos que moviliza la secuencia de tareas matemáticas diseñada. La consolidación de cada una de estas dimensiones permitirá realizar el diseño de las secuencia de tareas matemáticas.

En el tercer Capítulo, se aborda la metodología empleada, se describe la implementación, los resultados y análisis de resultados; además, se presentan algunas conclusiones de la implementación. Lo anterior, se realiza con el propósito de observar si los estudiantes alcanzan una aproximación al pensamiento algebraico. Además, ver las estrategias que utilizan los estudiantes para encontrar un patrón numérico y expresarlo de manera general.

En el cuarto Capítulo, llamado conclusiones se examinan los resultados presentados en el capítulo tres, a fin de validar o refutar la pregunta problema y objetivos que se encuentran al inicio del trabajo. Al final de este capítulo, se presentan algunas reflexiones didácticas con relación a la implementación de la secuencia de tareas matemáticas.

Por último, se presenta la bibliografía y los anexos de este trabajo. En la bibliografía se encuentran las referencias de todos los autores, y textos que han servido de fundamentación teórica para la realización de este trabajo grado; y en los anexos algunos ejemplos de las tareas realizadas por los estudiantes.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

En el presente Capítulo se expone el problema que se abordó en este trabajo de grado, así como sus objetivos, la justificación y los antecedentes. Con relación al planteamiento del problema se tiene en cuenta las posturas de algunos autores, como Socas (2011), Molina (2009), Merino (2012), entre otros, con relación a la aproximación al pensamiento algebraico en el marco de la propuesta Early Algebra en un grado tercero de la Educación Básica. También se establecen los objetivos que dilucidan las metas a alcanzar en este trabajo. Luego, se expone en la justificación los argumentos sobre la importancia de abordar esta problemática; y por último, se mencionan brevemente los antecedentes en donde se presentan trabajos de investigación como tesis de pregrado y posgrado; los cuales, convergen en la importancia de involucrar el trabajo con patrones numéricos en los primeros grados de la escolaridad, para realizar una aproximación al pensamiento algebraico.

Por lo tanto, se trata de desarrollar una aproximación al pensamiento algebraico en un grado tercero de la Educación Básica Primaria Colombiana a través de una secuencia de tareas matemáticas que involucra el trabajo con patrones numéricos, en el marco de la propuesta Early Algebra.

1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico en la escuela es un paso importante para llegar a conceptos más complejas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, investigaciones en didáctica de las matemáticas desarrolladas en los últimos años, muestran la existencia de múltiples dificultades que presentan la mayoría de estudiantes en el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, como, la memorización de reglas sin sentido para resolver problemas algebraicos, el contenido matemático curricular limitado a lo numérico, la enseñanza de contenidos algebraicos sin tener en cuenta los conocimientos aritméticos del estudiante, el uso de métodos aritméticos en la resolución de problemas algebraicos (ocasionados por el corte didáctico entre aritmética y álgebra), entre otros.

Por su parte, Molina, Ambrose & Castro (2004) señalan que la enseñanza tradicional del álgebra escolar, no tiene en cuenta aquellas dificultades que se presentan en el tratamiento algebraico de solución de situaciones problema; permitiendo que el estudiante memorice reglas sin sentido y pierdan el interés en las matemáticas.

Butto (2011) resalta, que las dificultades que presentan la mayoría de los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra escolar, podría ser ocasionado por la manera en que se enfrenta el contenido curricular de matemáticas, pues por lo general, se enseña a partir de fuentes de significados limitadas, es decir, se toma como principio la simbolización numérica, dejando de lado contenidos que se podrían interconectan con otros dominios matemáticos, como el estadístico, numérico o geométrico.

A su vez, las dificultades son alimentadas por la manera en que los profesores orientan a los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, pues no introducen de manera apropiada las nociones básicas y se trabaja en contenidos algebraicos, como por ejemplo: sintaxis algebraica, expresiones y ecuaciones algebraicas, sin tener en consideración que el estudiante viene de trabajar con nociones aritméticas. Desarrollar un pensamiento numérico, implica que "los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos" (Butto, 2011, p.2).

Una de las dificultades que se presentan por el corte didáctico que existe entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico son las declaraciones generales, pues:

> Con frecuencia los estudiantes presentan dificultades al momento de escribir una declaración general en forma algebraica, esto lo podemos observar al momento de escribir la expresión general del rectángulo $l \times b$; pues gran cantidad de estudiantes, usan métodos informales que utilizaban y desarrollaban en sus clases de aritmética. (Mason, 1985, p.133)

Existen otras dificultades por el corte didáctico entre la aritmética y el álgebra escolar, como: el grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarla, sus características sintácticas, signos de operación, la interpretación del signo igual, el uso de paréntesis, sentido de las letras y sus reglas de utilización y el significado de las letras utilizadas como variables. También, en la transición de la aritmética al álgebra se evidencian dificultades de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y vice-versa (Mason, 1985; Palarea & Socas, 1994).

Para superar algunas de estas dificultades y facilitar el paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico, investigaciones como las de Warren, Cooper & Lamb (2006), Molina (2011), Carraher & Shliemann (2002), Socas (2011) y Barvara & Ameron (2003) proponen una introducción más temprana álgebra escolar, pues observan que estudiantes de 6 a 11 años pueden adquirir un pensamiento algebraico a partir de los contenidos curriculares de primaria. Lo anterior, no hace referencia, a trasladar el contenido curricular del álgebra a la Educación Básica Primaria, ni enseñar álgebra formal, sino, cambiar algunas de las prácticas habituales en el aula para romper con conceptos y prácticas de enseñanza tradicional y promover el pensamiento algebraico previamente a los cursos de álgebra. En esta dirección, en las últimas décadas se han desarrollado propuestas que favorecen superar las dificultades que presentan los estudiantes en la educación secundaria. Entre estas propuestas, se destacan la pre-algebra y Early Algebra*;* la cuales, se proyectan a la enseñanza y aprendizaje de ciertos aspectos de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra escolar.

Estas propuestas, presentan diferencias; por ejemplo, pre-algebra, tiene como objetivo facilitar la transición de la aritmética al álgebra, dadas las dificultades y errores que tiene los alumnos en álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la educación primaria. Mientras el objetico del Early Algebra, es presentar una alternativa de cambio curricular, en donde se argumenta la posibilidad de introducir el álgebra en los primeros grados de escolaridad (educación primaria), concatenándose de forma integrada con las tareas matemáticas de este ciclo de aprendizaje; además, ayuda a superar dificultades y a promover el pensamiento algebraico en edades tempranas. El Early Algebra, a su vez, considera que las dificultades que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del álgebra escolar, son debidas a la forma en que se enseña en las clases de matemáticas.

Bajo estas consideraciones, este trabajo toma la propuesta Early Algebra, ya que persigue fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico y trabajar de manera paralela el pensamiento numérico desde los primeros ciclos de educación obligatoria, además, promover un aprendizaje con comprensión de las matemáticas, facilitando el estudio posterior del álgebra en la educación secundaria y de manera dinámica desarrolla las matemáticas más complejas y profundas. A su vez, esta propuesta se compone de una amplia concepción del álgebra, que abarca el estudio de relaciones funcionales, la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones, el estudio y generalización de patrones, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones y el desarrollo y la manipulación del simbolismo (Kaput, 1998, citado por Molina, 2011).

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo toma en consideración el diseño de una secuencia de tareas matemáticas enfocadas al trabajo con patrones numéricos, ya que trabaja el pensamiento numérico y algebraico de manera paralela, además, favorece al desarrollo de la generalización, la cual es considerada por algunos autores como Mason (1985) como uno de los aspectos más importantes del álgebra escolar.

Es importante resaltar, que para el diseño de tareas matemáticas se tiene en consideración actividades que involucran situaciones que permiten analizar de qué forma cambia o aumenta la forma o el valor de una secuencia o sucesión de figuras o números; pues según el MEN (2006) esta clase de actividades movilizara conceptos algebraicos como la variación.

A partir de estas consideraciones, se plantea el siguiente interrogante de investigación.

¿Cómo, a partir de la implementación de una secuencia de tareas matemáticas con patrones numéricos se favorece un acercamiento temprano al pensamiento algebraico en el grado tercero de la Educación Básica Primaria?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1Objetivo General.

Favorecer un acercamiento temprano en estudiantes de grado tercero de la Educación Básica Primaria, al pensamiento algebraico a través de una secuencia de tareas matemáticas que involucran el trabajo con patrones numéricos.

1.2.2 Objetivos Específicos.

- Documentar la problemática desde la perspectiva curricular, didáctica y matemática e identificar algunos de los desarrollos recientes en el campo de la didáctica matemática en relación con el Early Algebra.

- Favorecer, en estudiantes de grado tercero de la Educación Básica, una aproximación al pensamiento algebraico, a partir de la implementación de una secuencia de tareas matemáticas, enfocada al trabajo con patrones.

- Analizar el aporte de la secuencia de tareas matemáticas en la comprensión del estudio patrones numéricos y algunos procesos matemáticos asociados a los mismos, en dichos estudiantes.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Motivados por las evidencias del potencial de la propuesta Early Algebra para promover el aprendizaje con comprensión de las matemáticas, y siendo conscientes de que el pensamiento numérico comprende gran parte de las matemáticas escolares abordadas durante la Educación Primaria, Se desarrolló este trabajo para aportar a la reflexión en el campo de la educación matemática, sobre la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico a temprana edad, a través del diseño de una secuencia de tareas matemáticas planteadas en un contexto que involucra el estudio de patrones numérico.

La secuencia de tareas matemáticas de este trabajo, se diseña con el propósito de introducir en grado tercero ideas algebraicas como la variación, el cambio y generalización, a partir del trabajo con patrones numéricos, pues según investigadores como Warren & Cooper (2005) y Trujillo (2008) los alumnos de este ciclo de escolaridad pueden aprender más matemáticas de la que se piensa, pues el contenido matemático del currículo de primaria permite enseñar simbolizar, generalizar y trabajar el pensamiento funcional.

Por otro lado, los documentos Curriculares vigentes para la Educación Básica Primaria en Colombia, destacan la importancia de dar inicio al desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de educación obligatoria, para promover la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las "funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico, y en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral" (MEN, 2006, p.66).

A su vez, los Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006) proponen trabajar el pensamiento algebraico en la educación primaria, a partir de los cinco pensamientos matemáticos que presenta el Ministerio de Educación Nacional: Numérico, Espacial, Métrico, Aleatorio y Variacional; Cabe mencionar, que estos pensamientos están estrechamente ligados con los sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos, algebraicos y analíticos, respectivamente. Este trabajo, toma en consideración el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico, porque aparte de movilizar una aproximación al álgebra escolar, permite la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo (MEN, 2006).

Ahora bien, otra razón por cual se impulsa este trabajo, puede asimilarse a las consideraciones de las que se nutre la propuesta *Early-Algebra*. En ese sentido, la NCTM (2000) argumenta que el álgebra ha de ser tratada desde la educación infantil en adelante; el objetivo, es ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior.

Cabe resaltar, que la propuesta Early Algebra no se encuentra vinculada directamente al Currículo Colombiano, como ocurre en países como Australia y Corea, cuyos currículos si están "algebrizados" (Merino, 2012). Por ejemplo, el Currículo Australiano marca como objetivo que los niños "desarrollen un creciente y sofisticado conocimiento sobre los conceptos matemáticos y fluidez en los procesos, y sean capaces de proponer y resolver problemas y razonar con números y álgebra, medidas y geometría, y estadística y probabilidad" (Merino, 2012, p.10), o el Currículo de Corea, que señala que la matemático en educación primaria se centra "en el desarrollo de seis habilidades: generalización, abstracción, análisis, dinamismo, modelización y organización" (Merino, 2012, p.10).

Bajo estas consideraciones, este trabajo propone a los estudiantes tareas que permitan hacer reflexiones frente a lo que observan cambia, aumenta, se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero principalmente, que comuniquen lo que observan y expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes maneras, que hagan conjeturas y que formulen hipótesis sobre la situación que analizan; reflexiones que hacen parte del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico y que involucran la identificación de patrones numéricos, el cual es el eje articulador de este trabajo.

Las tareas que se presentan en este trabajo, se encuentran diseñadas con base al contexto de la vida real, cada una de las secuencias se desprenden de un aspecto mencionado anteriormente, con el fin de presentar una propuesta distinta, atractiva, motivadora y que les signifique a los estudiantes y educadores, pues se busca integrar diferentes procesos matemáticos a través del diseño.

La realización de este trabajo, es una experiencia muy importante para el autor, porque constituye un reto a nivel personal como profesional y, sobre todo, un interés por conocer las capacidades algebraicas que tiene los estudiantes de la Educación Básica Primaria.

1.4 MARCO CONTEXTUAL

A continuación, se presentan las características generales del Colegio en donde fue implementada la secuencia de tareas matemáticas y algunas de las características generales de los estudiantes que presentaron dicha secuencia.

1.4.1 Características generales del Colegio

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali es una institución que ofrece Escuela Primaria, Secundaria y Media. A su vez, esta escuela se caracteriza por ser una de las más importantes y prestigiosas Normales del departamento, por su excelente nivel académico de sus estudiantes, docentes y egresados, y la oferta de su Programa de Formación Complementaria.

Esta organización, comparte una filosofía común: el compromiso con una educación rigurosa y de calidad, que se considera importante para los estudiantes. Es por ello, que forma normalistas superiores para el ejercicio de la docencia en educación preescolar y básica primaria, a través de procesos pedagógicos y curriculares, articulados dentro de un contexto social incluyente que permiten el desarrollo de un maestro de alta calidad.

1.4.2 Características generales de los estudiantes

La muestra seleccionada para realizar este trabajo investigativo la constituyen 24 estudiantes de grado 3° de la Educación Básica Primaria, con edades comprendidas entre los 7 y 8 años, que cursan la asignatura de matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, ubicada en la Carrera 22 # 2-65 Cali, Valle del Cauca en el año lectivo 2014. Este centro educativo abarca las etapas de Educación Infantil, Educación Básica y Educación Media.

La selección de los sujetos fue intencional, atendiendo al nivel educativo que cursaban los estudiantes y su disponibilidad para participar en esta investigación. No se identificó en los mismos ninguna característica reseñable que pudiera sesgar los resultados de investigación.

1.5 ANTECEDENTES

En este apartado se mencionan algunas de las investigaciones que han realizado diferentes autores con respecto a la introducción del enfoque Early Algebra y la integración de patrones en la Educación Básica Primaria.

Numerosos países como China, Shanghái, Singapur**,** Hong Kong**,** Estados Unidos, entre otros, toman en consideración el enfoque Early Algebra, ya que este integra el álgebra en los primeros ciclos de escolaridad matemática, dando fruto a que los estudiantes desarrollen pensamiento algebraico antes de ingresar al estudio formal del álgebra escolar. Lo anterior, puede ser argumentado por investigadores como Molina (2009) y Merino (2012), donde muestran como estudiantes de jardín hasta quinto de primaria pueden estructurar un pensamiento algebraico temprano a partir del contenido curricular matemático de este ciclo.

El trabajo con patrones en los primeros grados de escolaridad, ha sido discutido por algunos autores a lo largo de los últimos años, debido a que estos son considerados como una ruta hacia el aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar; además, promueve el pensamiento algebraico y aritmético paralelamente.

Uno de los aportes que permite demostrar lo anterior, es el trabajo de Maestría realizado por Eduardo Merino Cortés, estudiante y profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada en el año 2012 denominado: “*Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización”,* el cual se basa en una secuencia de tareas de aula orientadas a observar la capacidad que tienen los estudiantes de generalizar. Para el diseño de estas tareas, el autor toma en consideración el uso de patrones y los diferentes tipos de representaciones que se utilizan para generalizar un patrón ya sean verbales, tabulares, numéricas, pictóricas, simbólicas, entre otros.

Un segundo trabajo que se referencia para argumentar el trabajo con patrones en estudiantes de educación primaria, es una investigación realizada por Eduardo Merino, María Cañadas y Marta Molina en el año 2012 en la Universidad de Granada, titulado: *Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización*.

En esta investigación, el grupo de profesores trabajó la generalización por medio de secuencias de tareas matemáticas, con el objetivo de identificar y describir las estrategias que utilizan los alumnos, como patrones y representaciones (verbales, numéricas, pictóricas, algebraicas o tabulares) para generalizar. Pero su principal objetivo en esta investigación, es lograr mostrar que desde la educación primaria se puede trabajar el pensamiento algebraico a través del estudio de patrones ya sean numéricos o pictóricos, sin tener la necesidad de transponer el contenido curricular matemático de secundaria a primaria, sino que a partir del contenido curricular de este ciclo se puede desarrollar este pensamiento.

Este trabajo de investigación, se llevó a cabo en el grado 5° de primaria el cual se encuentra conformado por 20 estudiantes con edades de 9 a 10 años, se realizó en un colegio de Málaga en el curso académico 2011-2012, esté se desarrolló en dos etapas que involucraban diversa variables para llegar al proceso de generalización.

Algunas de las conclusiones a las que este grupo de investigación llego son las siguientes:

- Se evidencia el uso de estrategias para llegar a una generalización.

- El tipo de representación más usada por los alumnos es la verbal.

- El trabajo con generalizaciones pone de manifiesto que los estudiantes tienen conocimientos y herramientas necesarias para trabajar este tipo de tareas y podrían ser consideradas con la intención de fomentar el pensamiento algebraico.

Otro trabajo que promueve el pensamiento algebraico en los primeros años escolares es el de Handle With Care, titulado Conceptual Algebra Readiness for Everyone. Este proyecto tuvo como objetivo ayudar a los estudiantes a desarrollar el álgebra escolar por medio de actividades que involucren los números naturales y sus operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) Cabe aclarar, que la intensión del autor no es enseñar ecuaciones que involucren *x* y *y*, sino, que a partir de los números naturales y sus operaciones los estudiantes entiendan los conceptos básicos del algebra escolar para que así más adelante pueden resolver ecuaciones algebraicas. Cabe resaltar, que las actividades implementadas por este autor, permitieron observar que los estudiantes de Educación Primaria tienen la capacidad de generalizar y razonar algebraicamente.

Por último, se referencia un trabajo de grado realizado en el aula en el Colegio Bennett de la ciudad de Cali, el cual fue desarrollado por las profesoras Elizabeth Rivera Muñoz y Luisa Fernanda Sánchez Chaverra, el cual se titula: *Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: generalización de patrones numéricos* realizado en el 2012.

Este trabajo tiene como alternativa desarrollar el pensamiento variacional a partir de la Educación Básica Primaria, por medio de procesos de generalización de patrones numéricos, a través de una secuencia de actividades que promoverá dicho pensamiento. Este trabajo, surge de la necesidad de mejorar aquella transición que existe del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

La población a la cual fue dirigido este trabajo fue a estudiantes del grado tercero, que oscilan entre los 9 y 10 años de edad, en la jornada de la mañana. Durante la aplicación del proyecto se desarrollaron actividades muy concretas que llevan al estudiante a construir su propio conocimiento como lo son: actividades que estén enfocadas hacia el reconocimiento visual de patrones geométrico, actividades de reconocimiento de patrones a través de imágenes y reconocimiento de que existe una forma general para expresar un resultado.

Estas actividades permitieron evidenciar entre otros hechos, los siguientes:

- Se presentan pocas dificultades al momento de ver un patrón
- Se observa que a los estudiantes se les facilita identificar de manera más concreta los patrones numéricos.
- El uso de tablas como registro de representación, permite a los estudiantes identificar y establecer relaciones entre cantidades de una manera más eficaz.
- Los estudiantes desarrollan sin ninguna dificultad el *ver* y *decir* un patrón
- Los resultados registrados en este proyecto muestran la factibilidad de iniciar desde la los primeros años de la Educación Básica Primaria el desarrollo del razonamiento algebraico, partiendo de temas y conceptos curriculares de este nivel de escolaridad como por ejemplo el trabajo con patrones.

Estas investigaciones, nos proporcionan a nuestro trabajo una visión de cómo se encuentra el estado de los estudios sobre el trabajo con patrones numéricos y pictóricos y su aprendizaje por parte de los estudiantes en un aula de clases, así como las posibilidades y restricciones de la integración de los patrones en el aula.

CAPÍTULO 2: ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presenta el marco teórico de referencia del trabajo, organizado en torno a tres dimensiones: Dimensión Curricular, Dimensión Didáctica y Dimensión Matemática. Los asuntos aquí tratados permiten precisar el significado de los términos que se utilizan y ubicar la investigación dentro del contexto en el que se enmarca.

2.1 DIMENSIÓN CURRICULAR

Aunque en los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) de Colombia no se aborda explícitamente el enfoque del Early algebra, es un hecho que la contextualización y caracterización que se hace en tales documentos de conocimientos básicos, como el trabajo con patrones, se consideran centrales para dimensionar la puesta en acto de secuencias de tareas matemáticas en relación con el Early Algebra.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006), se promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ideas algebraicas a temprana edad; debido a que hay una necesidad de mejorar los desempeños académicos de los estudiantes de educación secundaria, especialmente de grados séptimo y octavo, pues enfrentan una serie de dificultades por la transición lineal que se tiene del trabajo numérico hacia el trabajo algebraico (símbolos, letras, variación, etc).

Ahora bien, para mejorar algunas de las dificultades que se presentan en esta transición, los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006) proponen que el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar tenga en cuenta los cinco pensamientos básicos: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional. A su vez, que contemple los cinco procesos generales de la actividad matemática: formulación, tratamiento y resolución de problemas; la modelación; la comunicación; el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. Para efectos de este trabajo, el pensamiento numérico, el pensamiento variacional y la modelación desempeñan un papel fundamental para el diseño de la secuencia de tareas matemáticas, pues el aprendizaje del álgebra corresponde a la utilización con sentido y al estudio de objetos algebraicos (variables, constantes, parámetros y formulas, por ejemplo) para lo cual es necesario ampliar el lenguaje aritmético y utilizar propiedades características de los números" (MEN, 2006).

Por su parte, el pensamiento numérico, se define como: la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones (MEN, 1998). El pensamiento numérico se desarrolla paulatinamente, a través de la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración, y por la comprensión del sentido y significado de las relaciones entre números. Además, este pensamiento evoluciona en la medida en que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y manifestándose de numerosas formas de acuerdo al desarrollo del pensamiento matemático.

Unos aspectos importantes que se manifiestan en el desarrollo del pensamiento numérico en los alumnos a temprana edad son: la comprensión de los números y de la numeración, cálculos con números y las estructuras aditivas y multiplicativas (suma, resta, multiplicación y división). Este último, es una parte importante del currículo de matemáticas en la educación primaria, ya que se dedica a la comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustracción, multiplicación y división. En cuanto a la estructura multiplicativa (multiplicación y división) "algunos investigadores han señalado que la comprensión de sus significados es mucho más difícil que la de la adición y la sustracción, debido a la estructura de la operación" (MEN, 1998).

Cabe mencionar, que la estructura multiplicativa, se ha considerado como la piedra angular de las matemáticas de la Educación Básica, Media y Superior, y la cúspide del desarrollo del pensamiento algebraico, ya que no solo moviliza operaciones aritméticas como la multiplicación y la división, sino también la variación, covariacion, proporción, razón, función, etc. Es por ello, que este trabajo toma en consideración la estructura multiplicativa (multiplicación y división) como concepto matemático a movilizar (Universidad de Antioquia, 2006).

Por otro lado, el pensamiento variacional, se entiende básicamente como "el que permite ver el reconocimiento, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, gráficos o algebraicos" (MEN, 2006, p. 66). Además, promover en los alumnos el tratamiento matemático de la variación y el cambio, el desarrollo de procedimientos y conceptos que remiten analizar, organizar y modelar matemáticamente problemas y situaciones de la práctica humana, de las propiedades matemáticas y las mismas ciencias.

Este pensamiento se encuentra concatenado con otros tipos de pensamiento básicos (el numérico, espacial, de medida, aleatorio o probabilístico). Incluso, existen otras áreas fuera de las matemáticas que se encuentran estrechamente relacionados con la variación, por ejemplo las ciencias naturales o sociales. Aunque la variación se enlaza con diversos tipos de pensamiento y se representa por sistemas algebraicos y analíticos, necesita de conceptos y procedimientos de sistemas numéricos (especialmente del sistema numérico real, pues permite la construcción de funciones con variable real); geométricos, de medidas y de datos, pues se pueden representar de manera variacional.

En esta dirección, los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) dan a conocer que el pensamiento variacional se relaciona directamente con el álgebra. De modo que la introducción del pensamiento algebraico se puede iniciar a temprana edad a través de actividades o tareas que involucren situaciones problema cuyos escenarios sean enfocados al estudio del cambio y la variación de la vida cotidiana. Estas actividades o tareas, pueden también ser iniciadas a través del trabajo con patrones, pues promueve caminos y acercamientos característicos para la comprensión y uso de conceptos y procedimientos de los sistemas analíticos y de las funciones.

Este concepto de patrón que es considerado como una noción paramatemática[1], permite el progreso del cálculo numérico y el cálculo algebraico de manera paralela en la Educación Básica y el cálculo diferencial e integral en la Educación Media; logra iniciar el estudio de sistemas de representación, como por ejemplo: el tabular, graficar y expresar reglas de manera simbólica o verbal (MEN, 1998). A su vez, los patrones se encuentra en diversos contextos matemáticos y numerosas situaciones de la vida diaria, por ejemplo: la música, el movimiento, la economía y la geometría. Incluso, promueve nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como: constante, función, razón o tasa de cambio, dependencia o independencia de una variable con respecto a otra.

Ahora bien, para desarrollar el pensamiento numérico y algebraico en los primeros grados de escolaridad, se propone que la secuencia de tareas matemáticas permita:

- Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras.
- Realizar conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia.
- Procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las

[1] Son nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas.

conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (MEN, 1998).

Con este tipo de tareas, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) pretenden que el estudiante tenga un aprendizaje comprensivo y significativo de algunos temas algebraicos (por ejemplo sistemas algebraicos y su manejo simbólico, y construcción de expresiones algebraicas) mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado, y a la vez, realizar una enseñanza de la aritmética más atractiva y promover un aprendizaje con comprensión.

Por otro lado, un aspecto importante para el diseño de una secuencia de tareas matemáticas para los primeros grados de escolaridad, es la Modelación, o también llamada Matematización, se encuentra íntimamente ligada a los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) y se define como "la detención de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas" (MEN, 1998, p.50). Al respecto, este proceso general que contempla a los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998), tiene como punto de partida situaciones problema reales, y por la importancia de trasladar esa situación a un problema matemático, plantea tareas o actividades que permitan descubrir relaciones y regularidades.

Para fines de este trabajo, las secuencias diseñadas se encuentran enfocadas en un contexto, el cual se encuentra conexo con los ambientes que rodean a los estudiantes, permitiendo darles sentido a las matemáticas que aprende, pero especialmente hacia el álgebra escolar. Se tendrá en cuenta, la estructura multiplicativa y el trabajo con patrones numéricos, pues permiten trabajar el pensamiento numérico y algebraico de manera paralela y ayuda a superar algunas de las dificultades que se presentan en el pensamiento numérico por ejemplo: la multiplicación y división, que son conceptos matemáticos difíciles de comprender a temprana edad.

Para dar cuenta de lo planteado, se mencionan algunos de los Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006), propuestos de primero a tercero, permitiendo observar que tienen una correspondencia significativa con la propuesta Early Algebra y lo mencionado anteriormente.

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Concretamente, este trabajo toma en consideración los referentes curriculares entorno al pensamiento numérico, el pensamiento variacional y modelación que contemplan los Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) los cuales son de vital importancia para el diseño y análisis de las secuencia de tareas Matemáticas de grado tercero. Con relación al pensamiento numérico, se retoma la estructura multiplicativa; ya que, no solo acerca a los estudiantes a la multiplicación y división, sino también a la variación, covariacion, contante y función. Con respecto al pensamiento variacional, se tomamos en consideración el estudio de regularidades, ya que se encuentran en sucesos de la vida cotidiana, por ejemplo en las formas, sonidos o sucesos del diario vivir. Y por último la modelación, puesto que la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas son parte fundamental de las matemáticas.

2.2 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

En esta dimensión, se presentan algunas dificultades que existen en el paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico y las alternativas para su tratamiento, centrando la atención en el enfoque Early Algebra y en el trabajo con patrones numéricos para potencializar el pensamiento numérico y algebraico de manera paralela, desde una secuencia de tareas matemáticas pensada para grado tercero.

2.2.1 Algunas dificultades presentadas en el Álgebra Escolar

Se reconoce que en la transición de la aritmética al álgebra escolar, se presentan algunas dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender álgebra; por ello, surgen diferentes investigaciones que muestran que clase de problemas comenten los estudiantes al momento de trabajar el álgebra escolar. En este apartado, tomaremos los trabajos de Godino (2003) y Mason (1985), en donde abordan algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en el estudio del aprendizaje del álgebra, entre ellas el significado de las letras; las concepciones erróneas en la notación y en el uso de las convenciones; la escritura de declaraciones generales; y comprensión de las ecuaciones y del signo igual.

El significado de las letras

En las matemáticas es común el uso de las letras, pues están inmersas en diferentes conceptos matemáticos, sin embargo cuando el estudiante se empieza a involucrar con actividades que lo llevan a interactuar con el significado de la letra, en su proceso emergen una serie de dificultades, Mason (1985) destaca algunas de ellas:

Algunos estudiantes, no comprenden que las letras pueden representar números; provocando que ignoren completamente la letra y la observen como si fueran objetos de colección; por ejemplo, la expresión 6n+8=14. Otros, tienen claro que las letras representan números, pero piensan que tales letras corresponden a un número de acuerdo a la posición que esta letra se encuentra en el abecedario; por ejemplo: a=1, b=2, c=3, d=4…Otros estudiantes, piensan que las letras siempre representan un único valor, por eso no entienden que cualquier letra puede representar un número general, por ejemplo; “*b+c=c+b”.* Algunos alumnos creen que cada letra tiene un único valor, por tanto las letras no pueden representar diversos números; por ejemplo; no comprenden que *“a+b+c*” es igual a *“a+m+c”.* Esto es debido a que observan que *b* no es el mismo *m.* Por último, estudiantes creen que las letras solo pueden ser números enteros y no fraccionarios o decimales y manejan las letras como objetos especiales; es decir, cuando simplifican una expresión, estos inventan reglas para poder operar dicha expresión, por ejemplo: *2a+5d+3a=10ad o 10ada.*

Por otro lado, Godino (2003) categorizo los siguientes seis niveles de interpretación de las letras de acuerdo al mínimo nivel requerido para una ejecución exitosa.

- *Letra evaluada*: La letra es asignada a un valor numérico desde el principio. Si se pregunta al niño, "Si 10+ x =15, ¿cuánto vale?", dirá que 5, sin hacer ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental.

- *Letra ignorada*: Es cuando el estudiante hace caso omiso a la presencia de la letra o no le brinda ningún significado. Por ejemplo, si al estudiante se le pregunta el valor de $a + b + 3$ cuando $a + b$ es igual *30*, este puede responder *33* sin pensar en ningún momento sobre la *a*, la *b* o la suma $a + b$.

- *Letra usada como objeto*: La letra es considerada como un objeto concreto. La frase matemática *5p + 4p* y la frase *cinco peras y cuatro peras*, consideran como equivalentes. La letra *p* se observa como la abreviatura del nombre de un objeto en particular. Esto sucede, especialmente en situaciones problema donde se involucran objetos concretos (lápices, mesas, sillas, etc.) y es de gran importancia discrepar los objetos y las cantidades de los mismo.

- *Letra usada como incógnita específica*: Los estudiantes consideran las letras como un número desconocido, pero específico que se puede operar sobre él; por ejemplo, ¿Cuál es el resultado de agregar *5* a *7n*? La respuesta esperada, *5+7n*, pero los estudiantes, dan a conocer respuestas como *7n* y *5*, *12n*, o *12*, en las que los elementos que intervienen son concatenados sin tener en cuenta la presencia de la letra.

- *Letra usada como un número generalizado*: La letra se observa como una representación de varios valores, no solo uno. Si se le pregunta a un estudiante que escriba la lista de todos los valores de C + D= 12 podemos ver que ofrecen uno o varios números que cumplan la condición, pero no identifican la necesidad de listar todos los valores.

- *Letra usada como variable*: La letra se ve como representado un rango de valores no específicos. Si se pregunta, ¿Qué es mayor 5n o n+5? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no específicos y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los niños prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado. Pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, entonces decimos que están en el estadio 6 y tratan la letra como variable.

Concepciones erróneas en la notación y en el uso de las convenciones

Los estudiantes con regularidad, presentan dificultades al momento de expresar una notación; al escribir la respuesta de una suma o resta por ejemplo, en la operación unen los términos involucrados para expresar la respuesta. Esto se debe, a que los estudiantes piensan que la solución se da siempre en un solo termino, por ejemplo, *a+b=ab* o *a-b=ab.*

Otro error que presentan los estudiantes según Mason (1985) al momento de introducirse al álgebra escolar, es que no tienen en cuenta el uso de paréntesis o convenciones al momento de operar algebraicamente, pues las toman como un algo innecesario y crean sus propias reglas para computar estos términos.

La escritura de declaraciones generales

Con frecuencia los estudiantes presentan dificultades al momento de escribir una declaración general en forma algebraica, esto se puede observar según Mason (1985) al momento de escribir la expresión general del rectángulo $l \times b$; pues gran cantidad de estudiantes, usan métodos informales que utilizaban y desarrollaban en sus clases de aritmética. Pero esto se debe, a que no son introducidos desde edades tempranas a usar o desarrollar métodos de generalización, esto permite llevarlos hasta los primeros indicios de las representaciones algebraicas.

Otra dificultad que se presenta al momento de realizar declaraciones generales, es que los estudiantes no son asertivos al momento de escribir o leer expresiones algebraicas, dado que tienden a responder e interpretar en términos de los significados que ellos intentan dar, y no de los significados literales.

Y por último, Mason (1985) determina que los estudiantes consideran las matemáticas como aquella asignatura empírica en donde el resultado solo se debe dar en forma numérica; no toman en consideración que las respuestas pueden ser también de manera algebraica, por ejemplo: $l \times b$.

Comprensión del signo igual

Investigaciones como las de Godino (2003) consideran que las interpretaciones que hacen los niños del signo = y de las ecuaciones pueden diferir de las que pretendemos en la enseñanza. Por ejemplo, los alumnos piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, 2 + 3 = 5, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones "2+3" y "5". Los alumnos piensan que cambiando la letra en una ecuación puede cambiar la solución; podemos encontrar que los alumnos dan soluciones diferentes a estas dos ecuaciones: $7X + 3 = 28$, y $7B + 3 = 28$; algunos alumnos pueden argumentar que X es mayor porque está más al final del alfabeto que B.

El profesor puede aprovechar este tipo de situaciones para ampliar el significado del signo =. Una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. Esto ayudará a los alumnos a superar su idea de que el signo = es una indicación de realizar un cálculo.

En síntesis, investigaciones como las de Mason (1985) y Godino (2003) consideran que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga esta clase de dificultades en los alumnos; es por ello que proponen trabajar con tareas que faciliten la transición e integración de ambas asignaturas mediante un enfoque llamado *Early Algebra*. Este enfoque, rompe con el énfasis tradicional y predominante de los primeros cursos escolares y favorece al desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria.

Es por lo anterior, que el diseño de la secuencia de tareas matemáticas y el análisis de este trabajo, tuvo en cuenta algunas de las dificultades mencionas anteriormente como las declaraciones generales y el significado del signo igual, con el fin de favorecer y desarrollar una enseñanza atractiva del pensamiento algebraico y numérico en la educación primaria.

2.2.2 Early Algebra

En las dos últimas décadas se ha presentado a nivel internacional, un gran número de investigaciones que exploran las capacidades que tienen los estudiantes de Educación Básica Primaria para solucionar tareas o actividades que movilizan el pensamiento algebraico (Socas, 2007). Estas investigaciones, dan a conocer que estudiantes de jardín, primero, segundo y tercero, pueden aprender y hacer más matemáticas de la que se suele enseñar en esta etapa escolar. Estas declaraciones, han derrocado la idea de que el pensamiento algebraico esta fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los alumnos de este ciclo de escolaridad (5-8 años de edad) (Butto, 2011).

Investigaciones como Carraher & Shliemann (2002) consideran que el pensamiento algebraico no debe ser prolongado sino anticipado, es decir, introducirse a edades tempranas (7- 11 años) para promover el pensamiento algebraico y dar mayor importancia a los contenidos curriculares de matemáticas de la escuela primaria. El objetivo central según Carraher & Shliemann (2002) de promover este pensamiento; es enriquecer la enseñanza tradicional de las matemáticas, y prevenir algunas de las dificultades que se presentan en el corte didáctico que existe entre el pensamiento algebraico y pensamiento numérico.

Molina (2004); Socas (2011), Kaput (1999) y Warren & Cooper (2005) centran la atención en la matemática de educación primaria, pues la consideran como el acceso clave al álgebra escolar; primero, por la destacada presencia de la aritmética en el currículo de matemáticas de educación primaria y segundo, por la intensa conexión existente entre estas dos sub-áreas. Además, sugieren que el álgebra y la aritmética se integren en el currículo tan pronto sea posible, pues el objetivo principal, es promover el pensamiento algebraico junto con el pensamiento aritmético de manera paralela, para obtener una mejor enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra escolar.

Lo señalado anteriormente, ha llevado al consenso de introducir el enfoque Early Algebra. Este enfoque, es una propuesta de cambio curricular, que trae un impacto de cambio en la educación matemática, pues promueve el pensamiento algebraico desde los primeros ciclos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El Early Algebra, no hace referencia a trasladar el contenido curricular de álgebra a la educación primaria, ni tampoco enseñar álgebra simbólica; lo que busca, es introducir una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas; para facilitar el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria y crear un aprendizaje basando en la comprensión de las matemáticas (Blanton & Kaput, 2011).

Ahora bien, investigadores como Molina (2009), Socas (2011) y Amit & Neria (2008) señalan que el enfoque Early Algebra prepara a los estudiantes a las matemáticas necesarias de este nuevo siglo y ayudara a trabajar las matemáticas más complejas desde edades muy tempranas. Para ello, se debe lograr que los estudiantes observen patrones, relaciones y propiedades matemáticas (Molina, 2009). A su vez, este enfoque propone que docentes de todos los niveles de escolaridad promuevan el álgebra escolar, no como una asignatura más que se debe enseñar en la educación primaria, sino como un elemento que favorezca el aprendizaje del álgebra y fomente una matemática atractiva para los estudiantes.

Hemos de señalar, que la propuesta Early Algebra, se encuentra ligado a una amplia concepción del álgebra escolar; la cual engloba: "el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones numéricos, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones" (Kaput, 1999, p.144).

A partir de esta amplia visión, se toma en consideración realizar el diseño de una secuencia de tareas matemáticas, enfocadas al trabajo con patrones numéricos, ya que 1) permite que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, argumenten, discutan y practiquen habilidades del cálculo (NCTM, 2000), 2) las matemáticas han sido descritas como la ciencia de los patrones; mientras que los patrones han sido considerados como la construcción central de las investigaciones matemáticas; (NCTM, 2000) y 3) Bednarz, Kieran y Lee (1996, citado por Molina, 2011) distinguen el álgebra como la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de funciones.

Es importante aclarar, que la Early Algebra no debe ser confundida con el enfoque Pre-algebra, pues a pesar de que ambas propuestas se enfocan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares antes de llegar al estudio formal del álgebra, presentan algunas diferencias en su finalidad.

El Pre-algebra, pretende suavizar la transición lineal que se tiene del paso aritmético al algebraico, para que así, se puedan superar aquellas dificultades comunes que se encuentran en el aprendizaje del álgebra escolar, generadas por la diferencia de estas dos áreas (Aritmética y Álgebra) en la educación primaria, además, pone en duda la idea de introducir conceptos algebraicos desde los primeros ciclos de escolaridad (Socas, 2011). En cambio, el Early Algebra, tiene unos objetivos más amplios, como ya se ha detallado en párrafos anteriores, pero es necesario añadir, que este enfoque incorpora modos de pensamiento algebraico al desarrollo curricular de educación primaria como parte integrante del pensamiento matemático de esta etapa educativa.

En conclusión, Molina (2009), Kaput (1999) y Butto & Rojano (2010) han mostrado un respaldo a la propuesta Early Algebra, a través del reconocimiento de la introducción de modos de pensamiento algebraico en el currículo escolar de la educación primaria ya que puede ayudar a: facilitar el acceso de todos los estudiantes al pensamiento y actividad algebraica, favoreciendo el desarrollo de una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de la educación secundaria, eliminar la abrupta introducción del álgebra en los niveles de educación secundaria, dar coherencia y profundidad a las matemáticas escolares, dar tiempo para el desarrollo progresivo y prolongado de los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como de los significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar.

2.2.3 Patrones

La Real Academia española ofrece la siguiente definición de patrón: "Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual" (RAE, 2001, pp. 959)

Castro, Cañadas y Molina (Citados por Merino, 2012) definen patrón como: "lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (p. 57).

Los patrones se encuentran relacionados con una regla general. Por ello, los estudiantes se basan en una conjetura que es cierta para casos particulares y han de validarla para más casos, para así deducir que la conjetura es cierta en general (Merino, Cañadas & Molina, 2012)

La relación entre patrones y generalización ha sido reconocida por diversos autores, Pólya (Citado por Merino, cañadas & Molina, 2012) señala que el "reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar, ya que al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos" (p.3).

Warren & Cooper (2006) señalan que los patrones son la mejor forma de promover el pensamiento algebraico en los primeros años escolares, pues su afinidad y comprensión ofrece elementos del pensamiento matemático que no están disponibles para ellos a través de cualquier otro medio en matemáticas.

Billings, Tiedt & Slater, (2008) subrayan que los patrones son la piedra angular para introducir a los estudiantes al pensamiento algebraico, dado que acercan a los estudiantes a conceptos como el de función variación, sucesión, entre otros. Pero también, a iniciar el estudio de sistemas de representación como por ejemplo: el tabular, graficar y el expresar una regla general.

En conclusión, la conexión que existe entre la generalización y el trabajo con patrones es un aspecto fundamental para promover el pensamiento algebraico. Es por ello, que el diseño de secuencias de tareas matemáticas de este trabajo, toma en consideración la definición de La Real Academia española y Castro, Cañadas & Molina (citados por Merino, 2012) sobre patrón, ya que permite explorar, reconocer, describir y crear patrones; además de analizar el cambio o aumento de la forma o el valor en una sucesión de números y calcular o refutar conjeturas iniciales.

2.2.4 Tipos de Patrones

Investigaciones como las de Warren & Cooper (2006) y Billings, Tiedt & Slater (2008) distinguen diferentes tipos de patrones – Patrones de Repetición, Patrones

Pictóricos y Patrones Numéricos. Estas investigaciones, señalan que estas clases de patrones, permiten el acercamiento a la generalización, conducir al desarrollo del pensamiento funcional, es decir, a las relaciones entre dos conjuntos de datos y reformular las actividades matemáticas comunes en la escuela primaria. A continuación, se comentara acerca de los patrones de repetición, pictóricos y numéricos.

Patrones de Repetición

Son patrones en los cuales existe una unidad de repetición discernible de una estructura cíclica, que puede ser generada por la aplicación repetida de una pequeña porción del patrón.

Existe una gran variedad de patrones repetitivos, por ejemplo; se puede representar por acciones (Acostado, Sentado, Acostado, Sentado…), como sonidos (Do, Re, Mi, Do, Re, Mi…) y como formas geométricas.

Es ejemplo de patrón de repetición el siguiente:

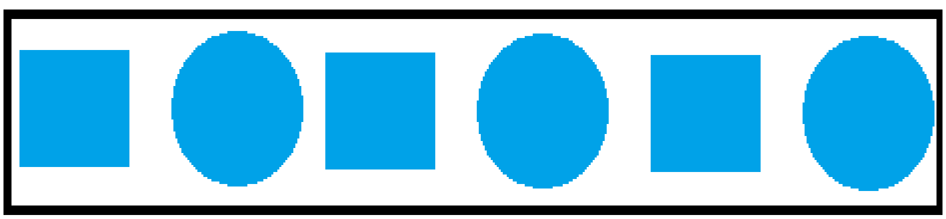


Imagen 1. Patrón de repetición

Patrones Pictóricos

Un patrón pictórico o también llamado patrón geométrico, es una secuencia de imágenes que presentan un cambio de un término al siguiente de manera predecible (Billings, Tiedt & Slater, 2008). Esta clase de patrones, contiene dos variables: Variable dependiente y variable independiente; la primera determina el número total de objetos que comprende la figura y la segunda, permite hallar la posición del patrón.

Es ejemplo de patrón de pictórico el siguiente:

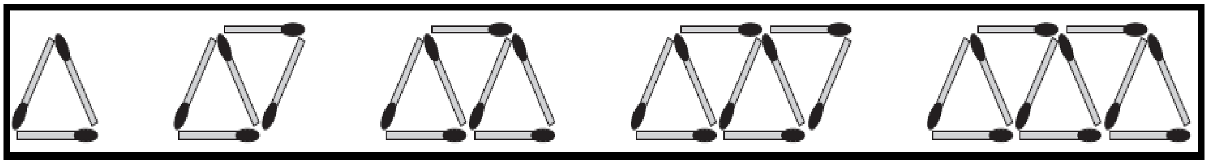


Imagen 2. Patrón pictórico

Cantidad de Triángulos	1	2	3	4	5	6
Número de Cerillos	3	5	7			

Tabla 1. Ejemplo de patrón pictórico a patrón numérico.

A menudo, esta clase de patrones se convierte en patrones numéricos, dando forma a estudiar el patrón numérico en lugar de utilizar la construcción física del patrón. Billings, Tiedt & Slater (2008) señalan que la construcción pictórica del patrón se convierte en una herramienta de gran alcance en los estudiantes al momento de generalizar relaciones y pensamiento funcional.

Patrones Numéricos

Los patrones numéricos, son una secuencia o lista de números, que se forman de acuerdo a una regla. Esta regla se construye a partir de operaciones básicas; ya sea suma, resta, multiplicación, división o la combinación de estas. Esta clase de patrones integra las estrategias de conteo, divisibilidad, proporcionalidad, relaciones funcionales, entre otros.

Es ejemplo de patrón de pictórico el siguiente:

15 23 31 36 47 59 63 74 79 97

Posición Numérica	1	2	3	4	5	6	7
Regla	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$	$\times 8 + 7$
Secuencia Numérica	15	23	31	36	47	59	63

Tabla 2. Ejemplo de patrón numérico

A través del uso de los diferentes tipos de patrones mencionados, los estudiantes progresivamente van desarrollando de manera coherente habilidades, que les permiten encontrar regularidades y usar sus procesos de gestión. Es por ello que la secuencia de tareas matemáticas diseñada en este trabajo de grado, incluye en sus actividades patrones numéricos, ya que surgen de situaciones sencillas; las cuales promueven conceptos matemáticos como el de funciones, ecuaciones y sucesiones.

2.2.5 Generalización

Kaput (1999) define la generalización como

> Extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p.136)

Amit y Neria (2008) recolectan diferentes definiciones sobre generalización: como pasar de la consideración de un objeto a la consideración de un conjunto que contiene ese objeto; o pasar de la consideración de un conjunto restringido al de un conjunto más amplio con el restringido. A su vez, definen la generalización como un proceso sofisticado y de gran alcance que implica reflexión y una reconstrucción hábil de los planes de estudio existentes. Además señalan que la generalización es una necesidad para la educación matemática y para llegar a ella se proponen dos acercamientos, bien sea por la creación de versiones “resúmenes abreviados” de conocimiento o por la creación de un isomorfismo (un mapeo) entre dos elementos.

En el campo de la didáctica de las matemáticas se reconoce un fuerte interés por el estudio de la generalización; pues ha sido considera por la comunidad internacional de didáctica del álgebra como uno de los cuatro acercamientos al pensamiento algebraico “La generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes en relación numérica, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales y la solución de problemas” (Butto &

Rivera, 2011, p3).

A su vez, la generalización tiene un papel importante dentro del álgebra escolar, como lo muestran Carraher, Martinez & Schliemann (2008), quienes consignan que la generalización es el preámbulo necesario para el estudio del álgebra. Para Mason (1985) quien considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, o incluso como la esencia del álgebra. En iguales condiciones, Cooper & Warren (2011) quienes consideran que el álgebra se aprende mejor como un conjunto de técnicas y conceptos ligados a la representación de relaciones cuantitativas y como una clase de pensamiento matemático para formalizar generalizaciones.

Cañadas, Castro y Castro (citados por Merino, 2012), mencionan que la relación entre el álgebra y la generalización se ha incrementado desde el trabajo de autores como Mason (1985) y Radford (2010) quienes mencionan que el lenguaje algebraico no es el único camino para generalizar, pues procesos verbales o gestuales también permiten llegar a expresar generalización.

Es importante resaltar, que investigaciones como las de Mason (1985) han demostrado que el reconocimiento de patrones es eficaz en el desarrollo de la habilidad de generalizar, pues el álgebra, y de hecho todas las matemáticas son sobre la generalización de patrones. A su vez, este autor agrega que la generalización es una vía para acceder al pensamiento algebraico y que para llegar a ella se debe tener en consideración cuatro fases, las cuales prepararan al estudiante al aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico antes de llegar a la educación secundaria:

Ver un Patrón: Hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común.

Decir un Patrón: Ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido.

Registrar un Patrón: Es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos).

Probar la validez de un Patrón: Para que una fórmula tenga validez debe probarse de diferentes formas. Pero también es importante que la regla sea correcta y, para eso, se necesita tener una noción de lo general, lo cual involucra la idea de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general. Para mostrar lo general es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características generales, lo que se logra observando características específicas en cada caso y haciendo notar que, a pesar de que cambien, lo hacen de manera regular (Mason, 1985. p. 17).

Con base a las fases que expone Mason (1985), se propone el diseño e incorporación de situaciones que les signifiquen a los estudiantes a partir del conocimiento que ellos ya adquirieron en el transcurso de sus años escolares, y el conocimiento de las dificultades que enfrentan en el aprendizaje escolar. Cabe aclarar, que los estudiantes de los primeros ciclos de escolaridad deben empezar a manipular conceptos y nociones algebraicos, como la generalización o pensamiento funcional, ya que, se movilizaría el pensamiento numérico y algebraico; y no se presentaría un corte didáctico entre grado séptimo y octavo.

2.2.6 Secuencia de Tareas Matemáticas[2]

Teniendo en cuenta la definición de Herbst (2011), una tarea matemática es el medio por el cual se puede representar el quehacer matemático, así mismo del hacer uso de objetos y procedimientos matemáticos. Es por ello que:

> Una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales. Tareas que involucran a los estudiantes en calcular, definir, conjeturar, representar, y demostrar son importantes, porque proveen a los estudiantes acceso a experiencias personales en el quehacer

[2] Para ampliación de este apartado ver "Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría" de la universidad de University of Michigan (2011) p.7.

matemático. (Herbst, 2011, p.3)

Según lo planteado en la presentación del problema de este trabajo de grado y lo citado anteriormente, se presenta una secuencia de tareas matemáticas entendida como una propuesta que no solo ofrece crecimiento cognitivo o emocional sino también crear reproducciones públicas de las prácticas matemáticas.

Lo anterior deja ver como se entiende en este trabajo qué es una secuencia de tareas matemáticas, los tipos de patrones que se va a trabajar en la secuencia diseñada y algunas dificultades y su posible solución cuando se está dando la transición aritmética-álgebra.

2.3 DIMENSIÓN MATEMÁTICA

De acuerdo a la problemática a trabajar en este proyecto, sobresale el contenido matemático correspondiente a patrones numéricos. Con relación a esta clase de patrones, es importante resaltar que se encuentran vinculados a los procesos de generalización y a la vez, se fundamentan bajo las nociones matemáticas de relación y función.

A continuación, se expone el fundamento matemático a partir de la teoría de las matemáticas.

2.3.1 Patrones y funciones, según los Lineamientos Curriculares

Según los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) “los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” los patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad” (MEN, 1998).

La introducción de función en los contextos descritos prepara al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes) (MEN, 1998; Rivera & Sánchez, 2012).

2.3.2 Función en la Educación Primaria

Las matemáticas han sido categorizadas por Scandura (citado por Warren y Cooper, 2005) en tres focos: las cosas (números, formas y variables); relaciones (las relaciones) entre las cosas; y transformaciones (los cambios) de las cosas. El poder de las matemáticas radica en las relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones. Haciendo abstracción, los patrones son la base de la estructura del conocimiento y la meta del aprendizaje de las matemáticas. Es por ello, que la enseñanza de las matemáticas se debe enfocar en: las habilidades de generalizar, y expresar y justificar sistemáticamente generalización matemática (Warren y Cooper, 2005).

Durante décadas, las escuelas primarias no profundizan en las relaciones y transformaciones, pues estas tienden a centrarse en el desarrollo de conceptos, por ejemplo, sobre las cosas y la utilización de relaciones particulares como el cálculo. Según Kieran (2004) los números y la aritmética a diferencia del álgebra no son considerados como objetos de estudio, pero si como procedimientos para llegar a una respuesta. Algo fundamental de la relación y la transformación es el concepto de la función, pues un esquema de cómo el valor de ciertas cantidades se refiere al valor de otras cantidades (Warren y Cooper, 2005) o de cómo los valores se cambian o se asignan a otras cantidades. Por lo tanto, una “función se define como una cantidad variable considerada en su relación con otra variable en función de la cual se puede expresar, por ejemplo, la altura de una en relación con la edad o los números en relación a la disminución de cada cinco" (Warren y Cooper, 2005, p. 151).

A su vez, Carraher, Martinez & Schliemann (2008) señalan que el estudio del cambio es fundamental para la comprensión de las funciones y los niveles más altos de las matemáticas que se basan en ella (por ejemplo, cálculo). Un estudio del cambio no sólo sirve en niveles más altos de matemáticas, sino también ayuda a una mejor comprensión de los procesos de la aritmética. Las primeras experiencias de cambio (por ejemplo, color, forma) son naturales e interesantes para los niños pequeños. Pues estas experiencias van más allá de simplemente encontrar y describir los patrones de cambio, pero también abarcan las ideas como el cambio cualitativo (por ejemplo, crecí más alto), el cambio cuantitativo (por ejemplo, crecí 2 cm más alto), las relaciones entre estos cambios (por ejemplo, si todo el mundo creció más en la misma cantidad y altura de John cambió de 143 cm a 145 cm, ¿cuánto la clase crezca?) y el uso de estas relaciones para resolver problemas (por ejemplo, si la altura de Alison es ahora 133 cm , ¿qué altura tenia ella antes de que crecierá?).

Piaget, Grize, Szeminska (citados por Warren & Cooper, 2005) muestran que niños de siete a nueve años son capaces de cuantificar funciones que implican proporciones directas. Si los niños pueden lidiar con relaciones funcionales tan temprano, el trabajo en funciones no debería posponerse hasta la escuela media o alta. El pensamiento funcional también ayuda a desarrollar una comprensión de las relaciones entre las operaciones, en particular la relación inversa: por ejemplo, si mi número se incrementa en 2 y ahora es 8, ¿cuál era mi número original? Se conjetura que estas ideas apoyan pensando en funciones en etapas posteriores, ayudan a los niños a explorar la aritmética como el cambio, hacer conexiones entre las diferentes operaciones (es decir, la suma y la resta son inversas entre sí) y proporcionan oportunidades para conjeturas y justificación a una edad temprana.

2.3.3 Relación y Función

En la educación secundaria tradicional, se puede observar que el concepto de función es involucrado en los tres últimos años de escolaridad, trabajándolo con gran potencialidad, a partir de numerosas definiciones, que son tomadas de los diferentes textos académicos de matemática. Tomaremos en consideración en este proyecto, el concepto de función que estable Stewart, Redlin & Watson en su libro de *Precalculo (2001)* matemáticas para el cálculo, tercera edición y algunos otros autores que realizan aporten a esta noción matemática.

Función

El estudio matemático de la función gira en torno a una clase de correspondencia llamada relación, que se define así:

> Una función f es una regla que designa a cada elemento de x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f (x), de un conjunto B (Stewart, Redlin & Watson, 2001, p, 132).

Por lo cual, cada elemento x del conjunto A, corresponde un único elemento del conjunto B definida $y = f(x)$. El conjunto A se llama dominio de la función o el conjunto de todos los posibles valores para la variable independiente, y el conjunto B, se identifica como todos los valores posible de $f(x)$, conforme x varia en todo el dominio de f, llamado imagen o Rango.

Ejemplo:

Sean A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {a, e, i, o, u} y f = {(1,a), (2,e), (3,i), (4,o), (5,u)}, f es una función de A en B porque:

1. El dominio de f es Df = {1, 2, 3, 4, 5} y este es igual a A.

2. Cada elemento del dominio aparece en f en una sola pareja (y solamente una).

En esta dimensión, cabe mencionar una definición formal de función, donde se destacan dos aspectos que mencionan Saldanha y Thompson (1998; citados por Del Castillo & Montiel, 1998. p. 1672).

- La función es una relación entre cantidades, las cuales pueden ser representadas por un par ordenado cuyas coordenadas representan valores de dos cantidades simultáneamente, y

- Con lleva a la idea de que dos valores de las cantidades pueden, en efecto variar.

Ahora bien, las funciones son consideradas como un saber para describir fenómenos, partiendo de contextos establecidos a partir de relaciones entre mundos que cambian, donde se pueden identificar las cantidades que permanecen invariantes y cuales cambian según la situación. A su vez, dan como un estudio de la matemática en aplicaciones directas de la vida real. Hitt (2002) señala que:

> A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. (p. 79).

Hablar de función, implica también hacer mención de los diferentes tipos de función, por ejemplo: función como relación de dependencia entre magnitudes, función lineal, cuadrática, cúbica, polinómica, trigonométrica, logarítmica, exponencial y afín. En este trabajo de grado, se toma en consideración tres tipos de función: Función como relación de dependencia entre magnitudes, función lineal y función afín; debido a que el estudio de esta secuencia debe establecer un conjunto de funciones de partida para el diseño de las tareas matemáticas de patrones numéricos.

Función como relación de dependencia entre magnitudes

La variación que se presenta en los problemas geométricos y físicos ofrece dos perspectivas para definir el concepto de función, siendo la primera por medio de la dependencia entre cantidades y la segunda tiene un sentido conjuntista en tanto el recorrido de las variables en intervalos numéricos que son sujetas a las cantidades.

Por su parte, Euler en 1748, definió una relación de dependencia entre cantidades de la siguiente manera “una cantidad es función de otra cantidad”. En otras palabras, se concibe en tanto la cantidad variable está en función de la otra cantidad.

A continuación se presentara la definición de función, dada en términos de la dependencia entre cantidades: Dadas dos cantidades, decimos que la primera está en función de la segunda cuando cada valor de la segunda determina solo un valor de la primera.

Variable y variabilidad

Se entenderá el concepto de variable en los siguientes términos:

Una variable, es una cantidad cualquiera que aumenta o disminuye.

La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudiarán a través del cálculo diferencial, no obstante las variables adoptan el movimiento en diferentes contextos de las Matemáticas:

- Aritmético: Se concibe como números reales contenidos en la recta real. Por ejemplo, en un segmento de recta, la variable x se mueve en el intervalo (a,b) tomando una cantidad inconmensurable de valores. La variación de x en el intervalo (a,b) es supuesto por la cantidad de valores que es susceptible de tomar.

- Geométricos: las variables como x se asignan a las cantidades que cambian o adquieren movimiento en las figuras geométricas. Las figuras suelen ser puntos, distancias, áreas, ángulos, radianes, volúmenes, etc.

Por otra parte, la cantidad de variación que se puede establecer a partir de la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ es llamada variabilidad. Se expresara este concepto de la siguiente manera:

La variabilidad es el conjunto de todas las variaciones del movimiento de un fenómeno.

Como se puede observar la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ indica con más claridad la dependencia entre las dos cantidades, toda vez que represente totalmente la variabilidad producida por el fenómeno; dicha expresión es llamada función. En el caso de la fórmula $A = \frac{a}{2}y$ esta idealiza el caso particular de una de las variaciones producidas por el fenómeno, toda vez que permite considerar al movimiento en un estado fijo de constancia.

Ecuación $A = \frac{a}{2}y$ Función: $A(y) = \frac{a}{2}y$

Tomando el concepto de función anteriormente mencionado, en la multiplicación y división, podemos encontrar ejemplos de patrones que rigen por la constante que acompaña a la variable sea cualquiera el valor de la variable, solo por estar acompañada de una constante va siguiendo una secuencia que al finalizar serán múltiplos o divisores.

La Multiplicación como Estructura Multiplicativa[3]

La multiplicación, se puede observar que es la relación *f(n)=n x f (1),* la cual, se puede obtener por dos vías: a partir del análisis escalar o del análisis funcional.

[3] Para ampliación de este apartado ver unidad n° 3 del módulo pensamiento variacional de la universidad de Antioquia (2006) páginas 77-88.

En el primero, el análisis por escalar, la multiplicación por *n* es el resultado de analizar como la variación en uno de los espacios, determina los valores posibles en el otro espacio (en cierta forma, las llama das tablas de multiplicar tienen su origen en una mirada de la multiplicación como un problema de variación conjunta de dos espacios de medida). Este tipo de análisis pone en relación las variaciones en uno de los espacios de medida con respecto a las variaciones en el otro. O dicho de otra forma, cambios en un espacio de medida, generan cambios simétricos en el otro espacio de medida.

Esto es, en un problema típico de multiplicación, al valor de la unidad en un espacio de medida (*E1*), se corresponde con un valor *k* en el otro espacio de medida (*E2*). De esa forma, si en el espacio *E1* el valor de unidad se itera 2, 3, …, *n-veces*, entonces el valor *k* en el espacio *E2* se itera esta misma cantidad de veces, de tal forma que a 2 veces la unidad se le corresponde 2 veces el valor de *k*, a 3 veces la unidad se le corresponde 3 veces el valor de **k**, y así sucesivamente.

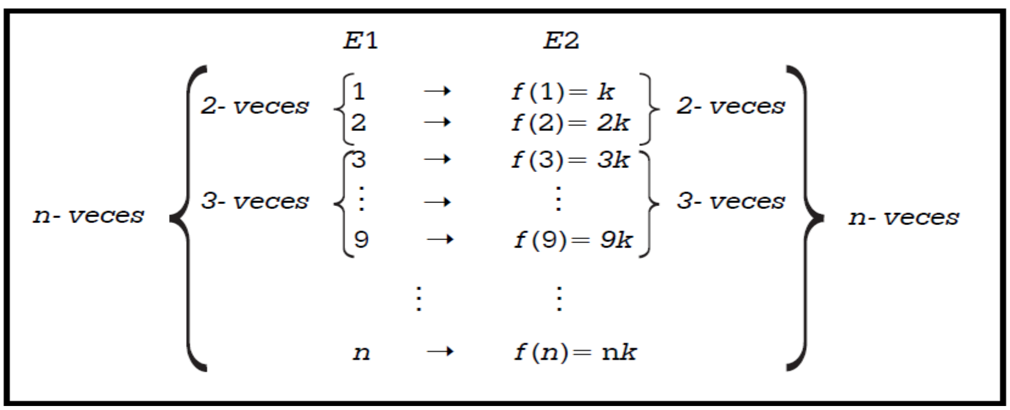


Imagen 3. Análisis por Escalar

Por su parte, el procedimiento funcional, es a través del planteamiento de una relación entre los dos espacios de medida, es decir, reconocer que la multiplicación de *n*, produce el valor de *f(n)*. Esto es válido en tanto se tiene que para todo par de valores correspondientes, uno de cada espacio de medida, se cumplen las siguientes equivalencias $\frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = \cdots = \frac{f(n)}{n} = f(1)$. Por lo tanto *n* *f*(1)= *f(n)* (estos es, se reconoce a *f*(1) como el valor de la constante de proporcionalidad).

La División como Estructura Multiplicativa[4]

En cuanto a la división[5], se puede obtener por dos casos, la primera cuando el problema pide calcular el valor de una unidad, es decir el valor de *f(1)*, suponiendo conocidos los valores de *n* y *f(n)*, y la segunda, cuándo se solicita encontrar la cantidad de unidades que se corresponden con un valor dado de *f(n)*, es decir, calcular el valor de *n*, bajo el supuesto que se conocen los valores de *f(1)* y *f(n)*. Los esquemas de ambos tipos de división serían:

$$\text{Caso 1:}\quad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \rightarrow & x = f(1) \\ n & \rightarrow & f(n) \end{array} \qquad\qquad \text{Caso 2:}\quad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \rightarrow & f(1) \\ x = n & \rightarrow & f(n) \end{array}$$

Imagen 4. Esquema de la División

En el primer caso, cuando los números son números enteros, se genera la división como partición, en otras palabras, es una división en la cual una cantidad dada, *f(n)*, debe ser repartida en *n* de partes iguales, y por lo tanto, el problema consiste en encontrar el tamaño, el valor, de cada una de esas partes.

En general, situaciones problema que involucren esta clase de divisiones requieren del reconocimiento de la relación escalar, pues al saber que *f(n)* es el resultado de tener *n* veces *f(1)*, entonces se puede comprender por qué la repartición de *f(n)* en *n* partes iguales produce el valor de *f(1)*. Adicionalmente, esta acción permite comprender que la división que se debe realizar es la operación inversa de la multiplicación.

[4] Para ampliación de este apartado ver unidad n° 3 del módulo pensamiento variacional de la universidad de Antioquia (2006) páginas 77-88.

En el segundo tipo de división se debe conocer el valor de la unidad, para así, calcular cuantas unidades se pueden obtener con una cantidad determinada *f(n)*. Si las cantidades numéricas son enteros, esta se denomina división repartición o división día, la cual trata de saber la cantidad de grupos que se pueden formar con una determinada cantidad, una vez conocido el valor de cada grupo.

En síntesis, este trabajo se enfoca en el desarrollo del pensamiento algebraico a partir del diseño de una secuencia de tareas matemáticas que involucra la estructura multiplicativa vista como función y el trabajo con patrones numéricos. Esto se da con el fin de promover ideas algebraicas a estudiantes de Educación Básica Primaria y superar el corte didáctico que existe entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Cabe mencionar, que los aspectos curriculares, didácticos y matemáticos son de suma importancia, y por tanto, se articulan en la secuencia de tareas que se presenta a continuación.

CAPÍTULO 3: PATRONES NUMÉRICOS EN EL ÁLGEBRA TEMPRANA

En este capítulo, se presentan los aspectos relacionados con el diseño e implementación de una secuencia de tareas Matemáticas como una aproximación al álgebra temprana a través de patrones numéricos, en un grado tercero de la Educación Básica de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, donde se incluye su descripción, que involucra conceptos matemáticos y expectativas de desempeño de las situaciones y las tareas de las situaciones de esta secuencia. Además, se exponen los resultados y análisis de los resultados de los registros de los estudiantes que participaron en el estudio.

3.1 SOBRE LA SECUENCIA DE TAREAS

Para el diseño, puesta en acto y análisis de las situaciones, se toman en consideración los referentes teóricos ya mencionados a lo largo de este trabajo, tales como Mason (1985), Molina (2009) y la NCTM (2000). De acuerdo con Mason (1985), para anticipar el pensamiento algebraico en la educación matemática temprana se deben promover actividades o tareas que permitan ver, decir, registrar y probar un patrón. En relación con Molina (2009), se debe promover el pensamiento algebraico por medio de la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Mientras que la NCTM (2000) argumenta que para crear un aprendizaje significativo de las matemáticas se deben proponer actividades que permitan que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, argumenten, discutan y practiquen habilidades del cálculo.

Es por ello, que para el diseño de esta secuencia de tareas matemáticas que aquí se propone, se tiene en cuenta que estás deben, permitir explorar, reconocer y describir patrones; como también analizar el cambio, el aumento o disminución de la forma o el valor en una sucesión de números, y calcular o refutar conjeturas iniciales para expresar un patrón en lenguaje natural o simbólico.

3.1.1 Diseño y descripción de la Secuencia

La secuencia de tareas Matemáticas sobre la aproximación al pensamiento algebraico a través de la identificación y registro de patrones numéricos estuvo dirigida a estudiantes de grado tercero de la Educación Básica de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

La secuencia de tareas está conformada por dos situaciones, que a su vez, se dividen en tareas, tal como se aprecia en la tabla 3.

Situación 1: La multiplicación como patrón				
Tareas	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Cantidad de preguntas por Tareas	5	2	3	6
Situación 2: La multiplicación como relación				
Tareas			Tarea 1	Tarea 2
Cantidad de preguntas por tarea			5	5

Tabla 3. Organización de las Tareas de la Secuencia

A continuación, figuran los aspectos que se tuvieron en cuenta en la elaboración del diseño de la secuencia.

Para el diseño de la secuencia, tal como se mencionó anteriormente, se parte del marco teórico presentado en el capítulo dos, en el que se menciona que los patrones son un aspecto importante para el primer acercamiento al álgebra escolar.

Propósito de la Situación 1

La situación 1 trabaja con patrones numéricos y se enfoca en las cuatro fases que presenta Mason (1985), en su libro *Rutas y Raíces hacia el Álgebra*, expuestas en el Capítulo II del presente trabajo, las cuales son: *ver*, *decir*, *registrar* y *probar* la validez de un patrón

Se pretende que los estudiantes en las tareas de la situación, vean el patrón partiendo de la secuencia numérica e identificando en ella lo que cambia y lo que permanece constante. Además, que los estudiantes exprese el patrón de manera oral (*decir*) a sus compañeros de clase. También, se procura que el estudiante utilice el lenguaje natural o simbólico para registrar el patrón de la secuencia numérica planteada; y por último, que el estudiante a partir de casos particulares *pruebe la validez del patrón*.

Las tareas de la situación 1 se estructuran de la siguiente manera: La tarea 1 y la tarea 2 tienen como propósito, que a partir de la secuencia numérica el estudiante *vea* y *diga* el patrón, y que analice lo que cambia y permanece constante. Mientras que en la tarea 3 y 4 se pretende que el estudiante aparte de *ver* y *decir* el patrón, *registre* y *pruebe la validez* del mismo; en estas tareas se utiliza la tabla como registro de representación para que el estudiante construya la secuencia numérica, la cual presenta los múltiplos de 3 y 4; y escriba una expresión matemática en lenguaje natural o simbólico. Cabe resaltar, que estas dos últimas tareas buscan que el estudiante tenga acercamiento a la generalización de patrones numéricos.

Por último, esta situación tiene como propósito movilizar la estructura multiplicativa como contenido matemático a partir de patrones numéricos; teniendo en cuenta que esta se puede ver como: suma de sumandos iguales, multiplicación, división, y transformación.

Propósito de la Situación 2

En la situación 2 se plantea como punto de partida un patrón pictórico, en el cual se espera que las tareas permitan movilizar la primera fase que propone Mason (1985) -el *ver*- dado que a partir de la visualización del patrón, el estudiante identifica de manera predecible lo que cambia y permanece constante en la representación gráfica.

La situación posibilita realizar la transición del patrón pictórico al patrón numérico, de manera que el estudiante pueda seguir la secuencia numérica sin utilizar la representación pictórica.

A su vez, la situación permite que el estudiante tenga un refuerzo a la generalización, así como a las cuatro fases que presenta Mason (1985): ver, decir, registrar y probar la validez de un patrón.

Finalmente, en esta situación se promueven diferentes tipos de representaciones tabulares, numéricas y pictóricas. Sin embargo, el patrón numérico de esta situación se caracteriza por combinar dos operaciones matemáticas como la multiplicación y la suma, involucrando un nivel de dificultad más alto para los estudiantes. Las tareas permiten que el estudiante analice las relaciones numéricas, relaciones funcionales elementales, la variación, el cambio, el aumento, o disminución de una sucesión pictórica y numérica.

3.1.2 La Secuencia

Situación 1: La multiplicación como Patrón

Propósitos:

- Movilizar un acercamiento a la generalización de patrones numéricos que involucran la multiplicación y división.

- Movilizar la relación numérica (multiplicación) a partir de un patrón numérico.

Contenidos matemáticos involucrados:

- La multiplicación como suma de sumandos iguales, como transformación y como relación inversa

- La variación y relación numérica en patrones numéricos.

Expectativas de desempeño:

- Comprender enunciados gráficos y verbales para identificar patrones numéricos.

- Identificar los procesos aritméticos que permiten dar solución a las preguntas planteadas.

- Utilizar el lenguaje natural o simbólico para expresar la regla general del patrón numérico.

- Reconocer las regularidades, situaciones de cambio y variación en situaciones problema.

- Identificar la relación que existe entre el número de comensales y el número de mesas.

Situación 2: La multiplicación como relación

Propósitos:

- Movilizar la articulación de dos relaciones numéricas (multiplicación y adición) en un patrón pictórico y numérico.

- Lograr que los estudiantes registren el patrón en forma verbal, numérico-verbal o leguaje simbólico.

- Propiciar la prueba de un patrón numérico.

Contenidos Matemáticos involucrados:

- Relaciones numéricas: Multiplicación y adición

- Relaciones funcionales elementales como la multiplicación como transformación.

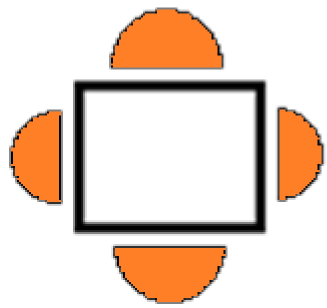
Expectativas de desempeño:

- Construir secuencias numéricas a partir de patrones pictóricos.
- Representar el patrón numérico por medio de un lenguaje numérico-verbal o lenguaje simbólico
- Escribir los primeros términos de una secuencia numérica.
- Hallar un término de la secuencia numérica.

Secuencia de Tareas Matemáticas

Situación 1: La multiplicación como Patrón

En el restaurante de Nano, a menudo se utilizan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 4 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas por comensales sentados.



Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

Teniendo en cuenta las mesas para 4 comensales, es decir, con 4 asientos, contesta las siguientes preguntas.

1 a. Escribe la cantidad de comensales que como mínimo se pueden sentar en una mesa.

b. Escribe la cantidad de comensales que como máximo se pueden sentar en una mesa.

2 ¿Cuántos comensales como mínimo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?

3 ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?

4 ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en 10 mesas en 20 mesas?

5 Indica la operación que utilizaste para llegar desde el número de mesas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1		
2	2x4	
3		
4		
		28
		36
		44

2. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.

a. Escribe lo que le sucede al número de personas cada vez que aumenta el número de mesas.

b. Escribe la cantidad que se mantiene constante en la tabla.

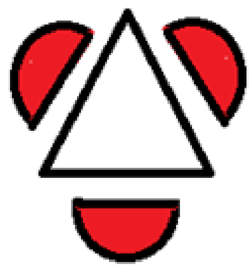
c. Escribe el número de meses que se necesitan si hay 40 comensales.

d. Indique con 8 mesas ¿Cuántos comensales, máximo se puede sentar?

e. En los casos c y d indica el procedimiento que utilizaste para dar respuesta.

Tarea 3: Tablas y Transformaciones.

Supongamos que en el restaurante, el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa es de 3, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 3 comensales. Contesta las siguientes preguntas.



1. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información anterior.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Comensales
1		
2		
3		
		12
		15
		18

2. Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas de tres asientos.

3. Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:

a. 15 mesas.

b. 30 mesas.

c. 55 mesas.

d. 100 mesas.

Tarea 4: Comensales vs Mesas.

En el restaurante de Nano, todas las mesas de 4 asientos se llenaron por igual. Teniendo en cuenta que cada mesa de este restaurante tiene el número máximo de comensales, encontrar el número mínimo de mesas que ocupan estos comensales.

1. Indica en cuántas mesas se pueden sentar 4 comensales.

2. Escribe en cuántas mesas se pueden sentar 8 y 12 comensales.

3. Escribe la operación que utilizaste para llegar desde el número de comensales al número mínimo de mesas que pueden usar estos.

4. Completa la siguiente tabla.

Número de Comensales	**Procedimiento**	**Número de mesas**
4		1
		2
12		
20		
36		
		10
100		

5. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla

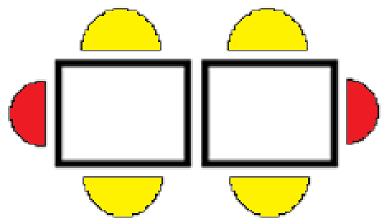
a. Indica como varia el número de comensales cuando aumenta el número de mesas.

b. Indica que número permanece constante en la tabla.

6. Encuentra una expresión que permita encontrar la cantidad de mesas en que se pueden sentar cualquier cantidad de comensales de tal manera que no sobren asientos.

Situación 2: La multiplicación como Relación.

En el restaurante de Nano, a menudo se juntas mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo 6 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas juntas por comensales sentados.



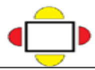
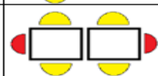
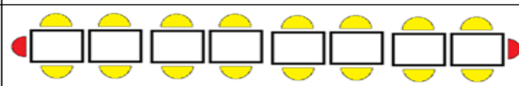
Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

1. Indique cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos mesas juntas.
2. Escribe cuántos comensales se puede sentar en tres mesas juntas. Dibújalas.
3. Escribe cuántos comensales, como máximo, se pueden sentar en cuatro, cinco y diez mesas juntas.
4. Indique cómo podría calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas.
5. Escribe la operación que utilizó para llegar desde el número de mesas juntas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en mesas juntas:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Representación	Número de Comensales
1		4
2		6
3		
4		
		
		20
10		

2. Conteste las siguientes preguntas con relación a la tabla.

   a. Escribe qué sucede cada vez que Nano agrega otra mesa. ¿Cuántas personas más pueden ir sentadas?

   b. Escribe que permanece constante y que varía cada vez que se agrega una mesa.

3. Si Nano te da el número de mesas juntas ¿Cómo puedes encontrar el número máximo de comensales que pueden sentarse?

4. Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas juntas.

5. Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:

   a. 17 mesas.

   b. 34 mesas

   c. 55 mesas.

   d. 100 mesas.

3.2 METODOLOGÍA DE TRABAJO CON LA SECUENCIA DE TAREAS

Para la implementación de esta secuencia se realizaron seis (6) sesiones, cada una con un tiempo aproximado de 60 minutos, las situaciones se realizaron en la jordana de la tarde en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

Las tareas planteadas se trabajan de manera individual y las plenarias se realizan de manera grupal. La persona que dirige las tareas es quien realiza la investigación, y otro sujeto externo a este trabajo de grado es quien toma los registros audiovisuales y notas de voz.

Durante el desarrollo de la investigación se realiza las preguntas consignadas en las tareas, permitiendo que los estudiantes den a conocer su opinión frente a los procesos matemáticos que realizan para determinar el patrón y llegar a una generalización. Los registros fueron de dos tipos, siendo el primero el audiovisual, en el que se implementan dos cámaras digitales para realizar filmaciones y registros fotográficos; y siendo el segundo notas de voz en el que se consigna las opiniones de los estudiantes al desarrollar las actividades planteadas.

3.3 IMPLEMENTACIÓN

En este apartado se presentan algunos detalles de la población y la organización de las actividades en el aula.

3.3.1 Población

El desarrollo de la secuencia de tareas se lleva a cabo en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali de carácter público en el grado tercero de Primaria de la jornada de la tarde.

El grupo está conformado por alumnos cuyas edades oscilan entre los 7 y 9 años de edad. Este grupo se conforma por 24 estudiantes de los cuales 10 son niñas y 14 son niños, la mayoría asisten de manera regular a las clases.

3.3.2 Actividad en el Aula

La secuencia de tareas sobre la aproximación al pensamiento algebraico a partir de patrones numéricos en tercero de Básica de Primaria se implementa en la institución mencionada anteriormente en el periodo comprendido entre el 29 de octubre y el 13 de Noviembre del 2014, en las cuales se llevaron a cabo las seis sesiones. En la implementación el autor interactúa con los estudiantes a través de las tareas propuestas; se les menciona a los alumnos que pueden preguntar cualquier cosa que no entiendan, sin embargo no se les resuelve la cuestión de la tarea, quien dirige la actividad reformula el enunciado, para que sean los mismos estudiantes quienes den la respuesta, además se le menciona que contesten las preguntas de manera organizada.

Las tareas de la Situación 1 y Situación 2, se realizan de manera individual, al finalizar cada tarea se presenta una plenaria en la cual los estudiantes dan a conocer sus opiniones respecto al desarrollo de las preguntas y las estrategias implementadas para dar respuesta a las preguntas diseñadas en cada tarea.

3.4 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se presenta el análisis de las respuestas generadas por los estudiantes del grado tercero de Básica Primaría, de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Este análisis inicialmente organiza las respuestas de los estudiantes en tablas de acuerdo a la situación, la tarea, la pregunta y la tipificación de la respuesta, teniendo en cuenta los registros escritos y audiovisuales.

En la realización de las tablas se utilizan algunas convenciones para organizar los datos.

S (n): Significa n situaciones, donde n=1, 2, 3, 4.
T (n): Significa n tareas, donde n=1, 2, 3, 4.
P (n): Significa n preguntas, donde n=1, 2, 3, 4.
R (n): Significa n respuestas, donde n=1, 2, 3, 4.

Fa: Significa frecuencia absoluta

Fr: Significa frecuencia relativa

3.4.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 1 (S1)

Situación 1: La Multiplicación como Patrón

Descripción general de la aplicación de la actividad

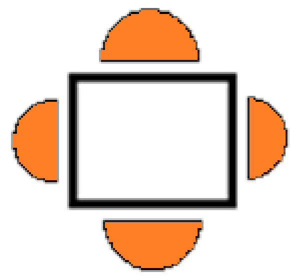
La situación 1 consta de cuatro tareas las cuales se aplicaron en cuatro sesiones; siendo la primera el día 29 de octubre del 2014 y la última el 13 de noviembre del 2014, el tiempo implementado en cada tarea fue en promedio de 60 minutos. En el grado tercero de la Escuela Normal Superior de Cali hay 24 estudiantes; sin embargo, durante la aplicación de la situación algunos estudiantes no fueron participes en el desarrollo de las tareas, debido a que no asistieron a clase.

Esta situación comienza luego de entregar a cada estudiante la copia de la tarea a desarrollar. En un primer momento, se realiza la lectura de la consigna con los estudiantes y se verifica que hayan interpretado la situación; pues a partir de la lectura de adaptación se comprenden las tareas 1, 2, 3 y 4. En un segundo momento, se les expone a los estudiantes que realicen las tareas de manera individual; no obstante, se aclara a los participantes que si no comprenden alguna de las preguntas planteadas pueden recurrir al investigador para tratar de solucionar sus dudas.

Al finalizar cada tarea de la situación 1 se realiza una plenaria la cual tiene una duración de 10 minutos, con el objetivo de que los estudiantes expongan y discutan las estrategias implementadas al momento de responder las preguntas planteadas, posibilitando un espacio de reflexión en la clase.

Resultados y análisis de resultados de la Tarea 1 (T1)

En el restaurante de Nano, a menudo se utilizan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 4 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas por comensales sentados.



Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

Teniendo en cuenta las mesas para 4 comensales, es decir, con 4 asientos, contesta las siguientes preguntas.

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 1, Pregunta 2 y Pregunta 3 (T1P1P2P3)

Población: 24 estudiantes

Pregunta 1: a. Escribe la cantidad de comensales que como mínimo se pueden sentar en una mesa. b .Escribe la cantidad de comensales que como máximo se pueden sentar en una mesa.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Los estudiantes determinan el número mínimo de comensales por mesa (1) y el número máximo (4). Algunos solo responden con el número de personas otros indican en sus respuestas si el número es máximo o mínimo.	24	100%

Tabla 4. Tipificación S1, T1, P1

Pregunta 2: ¿Cuántos comensales como mínimo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas? **Pregunta 3:** ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que determinan el número de comensales que se pueden estar sentados como mínimo en 2 (2), en 3 (3) y 4 (4) mesas separadas y como máximo en 2 (8), 3 (12) y 4 (16) mesas separadas. Los estudiantes escriben en forma retorica o simbólica. Explicitan lo máximo y mínimo por el orden de preguntas.	14	58%
R2	Estudiantes que responden las preguntas de manera acertada pero involucrando el signo igual para determinar el número mínimo y máximo de comensales por mesa (2 mesas= 2 personas mínimo).	3	13%
R3	Estudiantes que hallan el número mínimo y máximo de comensales en 2, 3 y 4 mesas, pero en forma de razón (máximo 2/8, 3/12, y 4/16).	5	21%
R4	Estudiantes que responden las preguntas de manera incompleta o errada.	2	8%

Tabla 5. Tipificación S1, T1, P2, P3

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en las preguntas 1, 2 y 3 según las tablas 4 y 5 todos los estudiantes encuentran el número mínimo y máximo de comensales que se pueden sentar en una mesa del restaurante de Nano. Esto indica que los estudiantes comprenden el enunciado de la situación expuesta.

De otra parte, en la pregunta 2 y 3 se encuentra que la mayoría de los estudiantes, el 92%, responde acertadamente el número de comensales que se pueden sentar como mínimo o como máximo en 2, 3 y 4 mesas separadas. Para determinar el número máximo y mínimo de comensales los estudiantes recurren al conteo y al cálculo mental. Sin embargo, al momento de registrar estos datos lo hacen de diferentes formas, unos en forma retórica, otros en forma numérica, otros combinando estas formas. Con relación a los que lo hacen de forma numérica se nota que algunos dan el número preciso y otros involucran mesas y comensales en forma de razón o igualdad (Ver imagen 5 y 6).

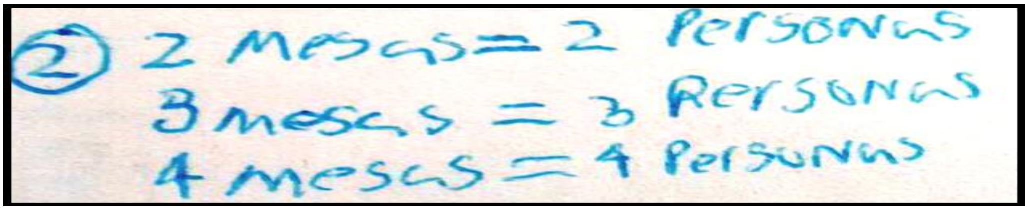


Imagen 5. S1, T1, P2

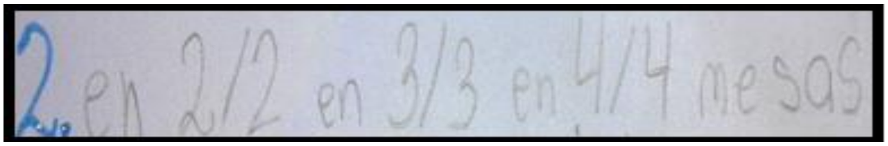


Imagen 6. S1, T1, P2

Lo anterior deja apreciar que los estudiantes utilizan diferentes formas de representar las respuestas a partir de visualizar el enunciado retorica o gráfico y enunciarlo con los elementos que tiene a su disposición en este nivel, lenguaje natural y lo numérico.

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 4 y Pregunta 5 (T1P4P5)

Población: 24 estudiantes

Pregunta 4: ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en 10 mesas, en 20 mesas?			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que logra hallar el número máximo de comensales sentados de manera acertada. Estos para relacionar el número de mesas y el número de comensales involucran el signo igual (10 mesas = 40 comensales), la razón (10/40) o respuestas directas (40 comensales y 80 comensales).	16	67%
R2	Estudiantes que determinan el número de comensales que pueden estar sentados como máximo en 10 (40) y 20 (80) mesas. Algunos justifican su respuesta utilizando la multiplicación (10x4=40 y 20x4=80), la suma de sumando iguales (4+4…=40) o representaciones pictóricas.	5	21%
R3	Estudiantes que no logran identificar el número máximo de comensales sentados o responden la pregunta de manera incompleta.	3	12%

Tabla 6. Tipificación S1, T1, P4

Teniendo en cuenta las respuestas de la pregunta 4 según se muestran en la tabla 6. Todos los estudiantes responden la pregunta, ya sea de manera correcta, errada o incompleta. El 88% de los estudiantes responde de manera acertada, logrando hallar el número máximo de comensales que se pueden sentar en 10 mesas y 20 mesas. Mientras que solo el 12% no logran identificar el número máximo de comensales sentados o responden la pregunta de manera incompleta. Esto da a conocer que los estudiantes comprenden el enunciado y en su mayoría contestan adecuadamente a pesar de que la cantidad de mesas es mayor en comparación a las preguntas 1 y 2.

Se puede evidenciar en la tabla 6, que el 67 % de los estudiantes utilizan diferentes tipos de registro para expresar su respuesta, entre ellos el signo igual, la razón y las respuestas directas las cuales se expresan por medio de una representación simbólica o retórica. Por su parte, el 21% de los estudiantes determinan el número máximo de comensales sentados utilizando diferentes tipos de representaciones. La primera son las representaciones pictóricas, donde el estudiante realiza el dibujo de 10 y 20 mesas con sus respectivos comensales y los cuenta uno por uno (ver imagen 7). La segunda estrategia, es la suma de sumando iguales, donde el estudiante suma n veces el número 4, donde n significa número de mesas. Por último, se utiliza un patrón para determinar el número máximo de comensales sentados nx4 (número de mesas por 4) (Ver imagen 8).

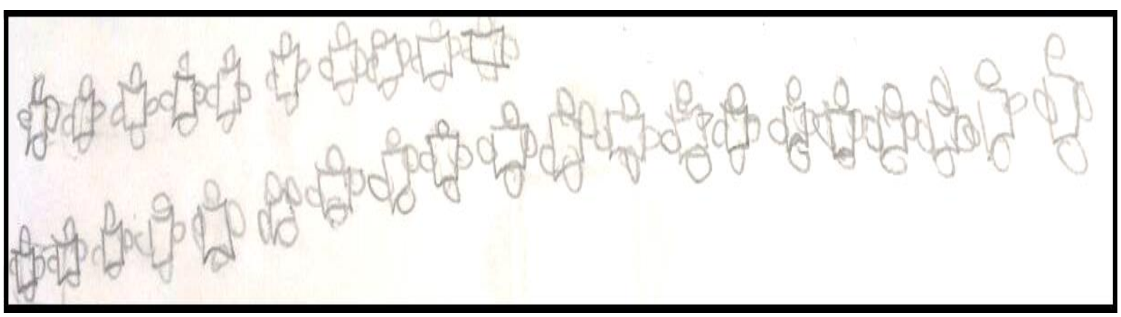


Imagen 7. S1, T1, P4

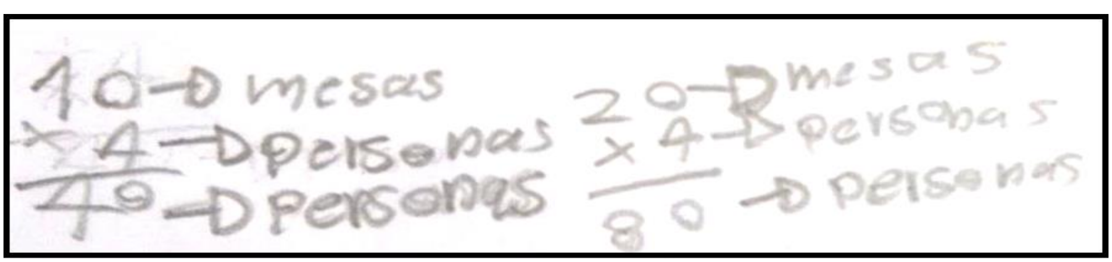


Imagen 8. S1, T1, P4

Teniendo en cuenta lo anterior, se pude deducir que los estudiantes en su mayoría presentaron características con la primera fase que propone Mason (1985) con relación al *"ver un patrón"* y han identificado la relación entre numero mesas y número de comensales para continuar con la secuencia numérica. Además, se puede observar en esta pregunta que los estudiantes realizan conjeturas sobre el valor que sigue en la secuencia por medio de dibujos u otros representaciones lo cual corresponde a la propuesta del MEN (1998), para desarrollar el pensamiento numérico y pensamiento algebraico en los primeros años.

Pregunta 5: Indica la operación que utilizaste para llegar desde el número de mesas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.			
Tipo de Pregunta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que por medio de la multiplicación encuentran el número máximo de comensales sentados. Algunos mencionan las variables expuestas en esta situación (Multiplicamos el número de mesas y el número de personas 10x4=40),	18	75%
R2	Estudiantes que por medio de la suma de sumandos iguales hallan el número máximo de comensales sentados.	2	8%
R3	Estudiantes que utilizan representaciones pictóricas para encontrar el número máximo de comensales sentados.	1	5 %
R4	Estudiantes que responden de manera incoherente.	3	12%

Tabla 7. Tipificación S1, T1, P5

Por otro lado, con relación a la tabla 7, un total de 24 estudiantes responden la pregunta. El 88 % de los estudiantes indican la operación que utilizaron para encontrar el número máximo de comensales; mientras que el 12% responde la pregunta de manera incoherente.

A su vez, el 88% de los estudiantes utiliza diferentes estrategias para encontrar el número máximo de comensales sentados, entre estas estrategias se encuentran la multiplicación, la suma de sumandos iguales y las representaciones pictóricas, además se puede inferir que la estrategia más utilizada por los estudiantes (75%) fue la multiplicación mientras que las menos utilizadas fueron la suma de sumandos iguales (8%) y las representaciones pictóricas (5%).

Lo anterior corresponde a la propuesta por el MEN (1998) en donde los estudiantes intentan formular un procedimiento o algoritmo que permita reproducir un patrón y calcular los términos siguientes en la secuencia numérica. Además, deja apreciar que los estudiantes tienen la capacidad de *ver un patrón*, esto lo podemos observar por medio de las diferentes estrategias y registros implementados para calcular el número máximo de comensales sentados.

Resultados y análisis de resultados de la tarea 2 (T2)

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 1 (T2P1)

Población: 22 estudiantes

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa:

Pregunta 1: Completa la siguiente tabla.

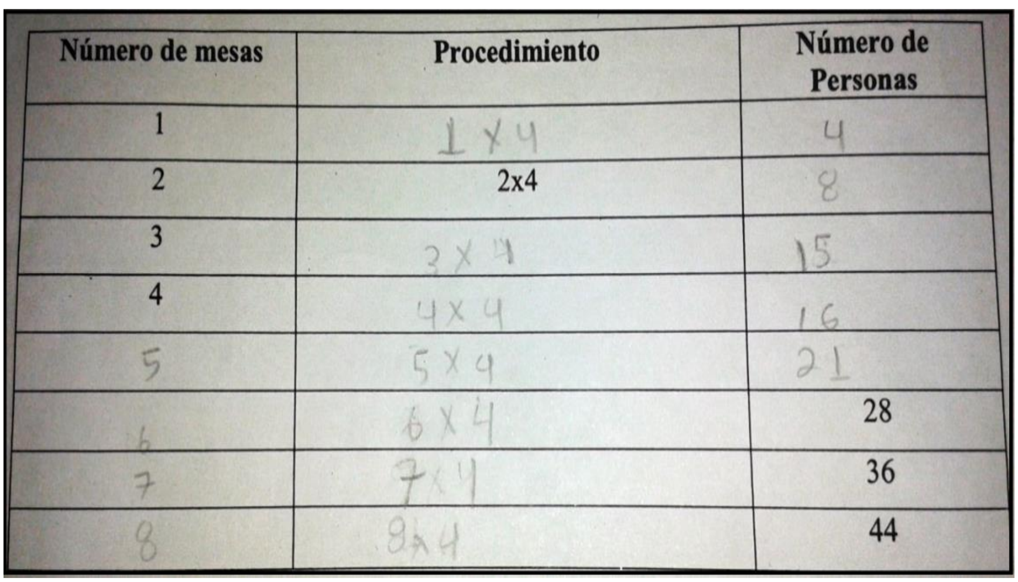
Número de mesas	**Procedimiento**	**Número de Comensales**
1		
2	2x4	
3		
4		
		28
		36
		44

Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que completan la tabla utilizando el patrón nx4 (número de mesas por 4), para identificar el número máximo de comensales y el número de mesas.	13	68%
R2	Estudiantes que completan la tabla utilizando el patrón nx4, pero con dificultades al momento de hallar el número de mesas que pueden ocupar 28 (7), 36 (9) y 44 (11) comensales.	9	32%

Tabla 8. Tipificación S1, T2, P1

Como se observa en la tabla 8, 22 estudiantes contestaron la pregunta. En cuanto a las estrategias utilizadas, los 22 estudiantes presentan un patrón apropiado y completo (número de mesas por 4 ó 4 por número de mesas). El 68% de estos estudiantes completan la tabla involucrando el patrón anteriormente mencionado, logrando identificar el número máximo de comensales sentados y el número de mesas. Cabe resaltar, que este porcentaje de estudiantes no presento dificultad al momento de identificar el número de mesas, ya que para encontrar este valor, buscaban un número que multiplicado por 4 diera el número de personas (28, 36 y 44).

Por otro parte, el 32% de los estudiantes completan la tabla utilizando el patrón nx4 (número de mesas por 4). Este porcentaje de estudiantes no presenta dificultad al momento de hallar el número de comensales, ya que multiplican el número de mesas por 4; pero si se presentan dificultades al momento de encontrar el número de mesas a partir del número de comensales (Ver imagen 9). La dificultad anterior, se presenta porque los estudiantes siguen la secuencia numérica del número de mesas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) y la multiplican por 4, sin percatarse que al momento de realizar el producto no va a coincidir con el número de comensales dado (28, 36 y 44).



Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	1x4	4
2	2x4	8
3	3x4	15
4	4x4	16
5	5x4	21
6	6x4	28
7	7x4	36
8	8x4	44

Imagen 9. S1, T2, P1

Lo anterior, permite confirmar lo que señala Billings, Tiedt & Slater (2008) quienes subrayan que los patrones son la piedra angular para introducir los sistemas de representación, en este caso la representación tabular, pues observamos que el 68% de los estudiantes no presenta dificultades para completar dicha tabla. A su vez, se puede deducir que los estudiantes se han dado cuenta que la multiplicación no es simplemente una suma de sumandos iguales sino una transformación, es decir, han identificado como a partir de ciertas cantidades (número de mesas) se refiere a otras cantidades (número máximo de comensales).

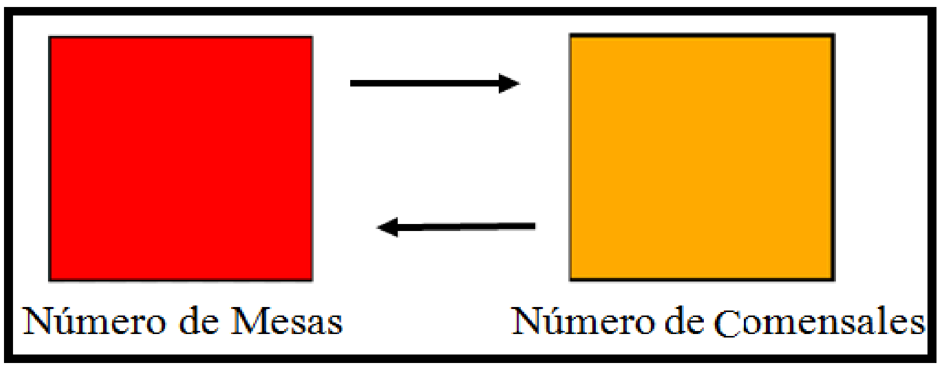


Imagen 10. Multiplicación como transformación

Además, los estudiantes llegan a la primera fase que propone Mason (1985), pues observan lo que está pasando de un número a otro, creando conjeturas del siguiente término de la secuencia. También se observa un acercamiento a la tercera fase de Mason (1985) el registrar, pues los estudiantes cuando han expresado en palabras la generalidad, hacen el registro escrito involucrando números o palabras, como se observa en la imagen 9.

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 2 (T2P2)

Población: 22 estudiantes

Pregunta 2: Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.			
a. Escribe lo que le sucede al número de personas cada vez que aumenta el número de mesas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que logran identificar que el número de comensales aumenta.	12	55%
R2	Estudiantes que responden de manera errónea.	10	45%
b. Escribe la cantidad que se mantiene constante en la tabla.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que responden que el 4 es la cantidad que se mantiene constate en la tabla. Determinados estudiantes explican por qué se mantiene constante este número (4 se mantiene constante en la tabla porque es la cantidad de sillas que hay en la mesa).	22	100%
c. Escribe el número de mesas que se necesitan si hay 40 comensales.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que por medio de la representación verbal expresan la cantidad de mesas que se necesitan para 40 comensales. Algunos de ellos registran la operación realizada (Multiplicación).	17	77%
R2	Estudiantes que por medio de representaciones pictóricas hallan el número de mesas que se necesitan para ubicar 40 (10) comensales.	2	9%
R3	Estudiantes que responden de manera incorrecta.	3	14%
d. Indique con 8 mesas ¿Cuántos comensales, máximo se puede sentar?			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que logran encontrar el número máximo de comensales sentados a partir de representaciones pictóricas o la multiplicación.	11	50%
R2	Estudiantes que por medio de la representación verbal expresan la cantidad de comensales que pueden sentar en 8 mesas.	11	50%
e. En los casos c y d indica el procedimiento que utilizaste para dar respuesta.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que utilizaron la multiplicación y las representaciones pictóricas para hallar el número de mesas y el número máximo de comensales sentados.	20	91%
R2	Estudiantes que no responden el literal e	2	9%

Tabla 9. Tipificación S1, T2, P2

De acuerdo con los registros escritos, se observa que en el literal *a*, el 55% de los estudiantes logran identificar que el número de comensales aumenta. Lo anterior, permite inferir que los estudiantes han identificado las variables que se presentan en esta situación, es decir, que han logrado reconocer que la cantidad de comensales aumenta dependiendo de la cantidad de mesas. Por otro lado, el 45% de los estudiantes asocia el aumento a la multiplicación, aunque no logro expresarlo de la manera adecuada, utilizando frases como "*se multiplican las personas*" o "*se multiplica el número mayor*" para querer decir que se aumentan las personas.

Por otro lado, con relación al literal b, todos los estudiantes responden de manera acertada, es decir, identifican la cantidad que se mantiene constante en la situación e incluso algunos de ellos explican por qué se mantiene constante este número. Esto puede deberse, al registro tabular utilizado en la pregunta 1, el cual permite visualizar el número constante, que en este caso es el número 4.

Lo anterior, permite evidenciar que los estudiantes en su mayoría están desarrollando una aproximación al pensamiento algebraico, dado que según el MEN (1998), los niños cuando logran analizar e identificar lo que cambia, aumenta, disminuye o permanece constante en una secuencia numérica o geométrica están movilizando el pensamiento algebraico.

Respecto al literal c, los estudiantes utilizan dos tipos de representación para expresar la cantidad de mesas que pueden ocupar 40 comensales. La más utilizada fue la representación verbal con un 77%, donde los estudiantes escribían en su respuesta la cantidad de comensales, cabe mencionar que algunos de estos estudiantes explicaron su respuesta por medio de la multiplicación, es decir, buscaron un número que multiplicado por 4 les diera 40. La estrategia menos utilizada por los estudiante fue la representación pictórica con un 9%, en la cual los estudiantes realizan un dibujo teniendo en cuenta que en una mesa solo pueden ir sentados 4 comensales, los estudiantes continúan la secuencia de dibujos hasta completar 40 comensales; y a partir de los dibujos realizados cuentan la cantidad de mesas que necesitan (Ver imagen 11). Por otro lado, el 14% de los estudiantes no llegan a la respuesta, dado que utilizan el patrón nx4 de manera incorrecta, es decir, multiplican el número de comensales por 4; esto permite observar, que los estudiantes no diferencian la variable independiente de la variable dependiente, logrando así llegar a respuestas como 80 y 160 mesas (Ver imagen 12).

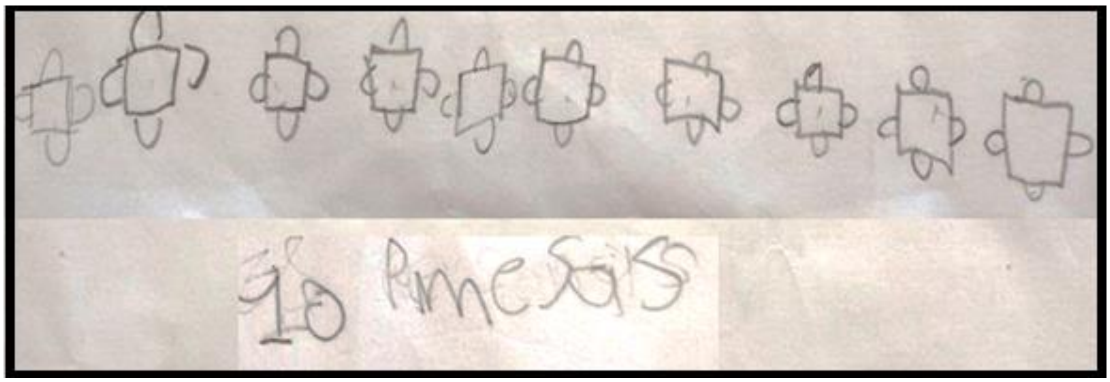


Imagen 11. S1, T2, P2

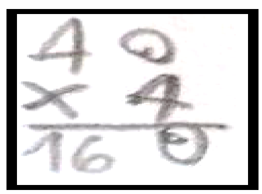


Imagen 12. S1, T2, P2

Con relación al literal d, se puede apreciar que los estudiantes logran encontrar el número máximo de comensales que se pueden sentar en 8 mesas; el 50% de estos estudiantes utilizan dos estrategias, siendo la primera las representaciones pictóricas, donde el estudiante dibuja 8 mesas con sus respectivos comensales; la segunda estrategia es la multiplicación (nx4), es decir, el estudiante realiza el producto de 8 mesas por 4 comensales. A su vez, el 50% de estudiantes restante utiliza la representación verbal para expresar la cantidad de comensales que se pueden sentar en 8 mesas.

En el literal e, se evidencia que el 91% de los estudiantes utilizaron el patrón nx4 (número de mesas por 4) y las representaciones pictóricas para hallar el número de mesas y el número máximo de comensales sentados. Mientras que el 9% de los estudiantes no contesta el literal e.

Logrando evidenciar que los estudiantes no utilizan la suma de sumandos iguales como estrategia para hallar el número máximo de comensales, al parecer los estudiantes trabajan con mayor facilidad la multiplicación y las representaciones pictóricas.

Se puede concluir, que los estudiantes en su mayoría pueden identificar las regularidades y las reglas que rigen estas regularidades logrando así identificar lo que es constante, y lo que varía, así como lo plantea el MEN (2006). Además, se puede observar que los estudiantes utilizan diferentes estrategias para hallar el número de mesas o el número máximo de comensales, como lo pictórico, en donde los estudiantes siguen una secuencia de imágenes para encontrar una expresión aritmética (regla) que permita encontrar la cantidad de comensales sentados en cualquier número de mesas.

Finalmente, se puede deducir que para los estudiantes fue más fácil trabajar de número de mesas a número de comensales que de número de comensales a número de mesas, al parecer por que los estudiantes identifican con mayor facilidad lo que aumentado que lo que está disminuyendo.

Resultados y análisis de resultados de la Tarea 3 (T3)

Tarea 3: Tablas y Transformaciones.

Supongamos que en el restaurante, el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa es de 3, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 3 comensales. Contesta las siguientes preguntas.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1 (T3P1)

Población: 22 estudiantes

Pregunta 1: Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información anterior.

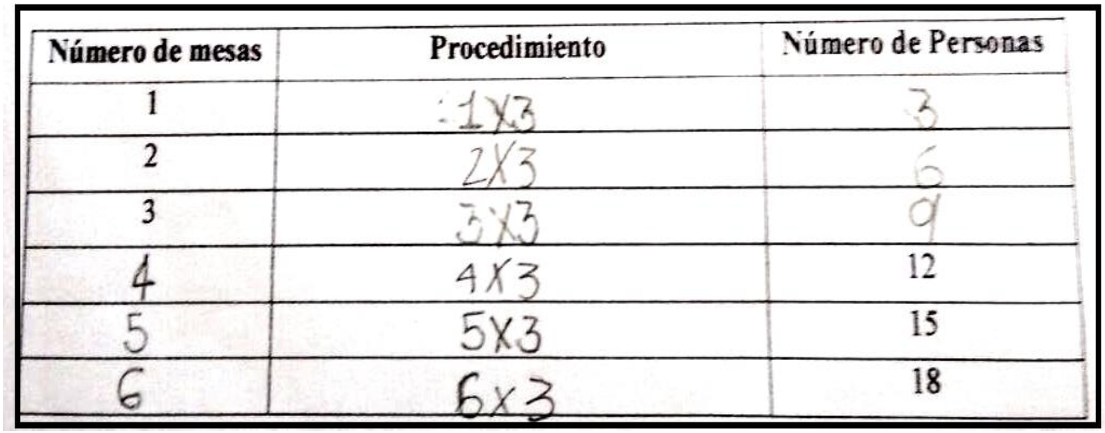
Número de mesas	**Procedimiento**	**Número de Personas**
1		
2		
3		
		12
		15
		18

Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que completan la utilizando el patrón nx3, para identificar el número de personas que pueden estar sentadas en 1(3), 2(6) y 3(9) mesas y el número de mesas que pueden ocupar 12(4), 15(5) y 18(6) comensales.	22	100%

Tabla 10. Tipificación S1, T3, P1

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 según la tabla 10, todos los estudiantes encuentran el número máximo de comensales sentados y número mínimo de mesas. Esto indica que los estudiantes comprenden el enunciado de la situación expuesta.

De otra parte, el 100% de los estudiantes utilizan el patrón nx3 para determinar el número máximo de comensales que se puede sentar en 1, 2 y 3 mesas, y el número mínimo de mesas que pueden ocupar 12, 15 y 18 comensales. Lo anterior deja apreciar, que los estudiantes a partir de un patrón numérico construyen una regla, la cual se encuentra conformada por la multiplicación de dos cantidades, en este caso, número de mesas por el número de comensales (Ver imagen 13).



Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	1X3	3
2	2X3	6
3	3X3	9
4	4X3	12
5	5X3	15
6	6x3	18

Imagen 13. S1, T3, P1

Cabe mencionar que los estudiantes de grado tercero, pueden completar una tabla siguiendo un patrón de comportamiento. Además, no se observa que hayan utilizado estrategias como las representaciones pictóricas o suma de sumandos para encontrar el número de comensales o número de mesas, lo cual puede deberse a que los estudiantes reconocen un patrón numérico y de manera implícita aplican la relación $f(n) = nf(1)$ presentada en el marco teórico, a través del análisis por escalar.

Se puede concluir, que el 100% de los estudiantes logran completar de manera correcta la tabla, lo cual puede deberse a que tuvieron en cuenta los comentarios realizados durante las plenarias de las tareas anteriores. Se puede decir, que los estudiantes se encuentran más familiarizados con el registro tabular, dado que identifican el número de personas a partir del número de mesas y el número de mesas a partir del número de comensales sin dificultad, al parecer reconocen de manera implícita la multiplicación como análisis escalar.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 2 (T3P2)

Población: 22 estudiantes

Pregunta 2: Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas de tres asientos.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que escriben que para hallar la cantidad de comensales sentados en cualquier cantidad de mesas, se debe multiplicar 3 por número de mesas. Algunos estudiantes escriben, que para encontrar el número de comensales sentados se debe multiplicar cualquier número por 3.	11	50%
R2	Estudiantes que escriben que para hallar la cantidad de comensales sentados se debe multiplicar, cabe mencionar, que no registran la cantidad con la que se debe operar.	11	50%

Tabla 11. Tipificación S1, T2, P2

Como se puede observar en la tabla 11, 22 estudiantes respondieron la pregunta. Analizando el uso de estrategias, el 50% de los estudiantes recurren a la multiplicación, logrando identificar el patrón apropiado (nx3). Cabe señalar, que esta cantidad de estudiantes escribe su expresión por medio de una representación verbal; es decir, utilizan el lenguaje natural para comunicar y dar a entender el procedimiento que se debe realizar para hallar la cantidad de comensales sentados.

A su vez, en los registros se puede encontrar dos expresiones, siendo la primera multiplicar 3 por cada número de mesas, logrando identificar un patrón y la segunda, multiplicar cualquier número por 3; cabe aclarar, que los estudiantes cuando escriben "multiplicar cualquier número", hacen referencia al número de mesas y no al número de comensales, por ello, se puede deducir que los estudiantes usan un patrón apropiado pero incompleto (Ver imagen 14 y 15).

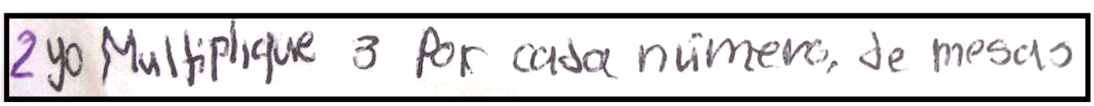


Imagen 14. S1, T3, P2

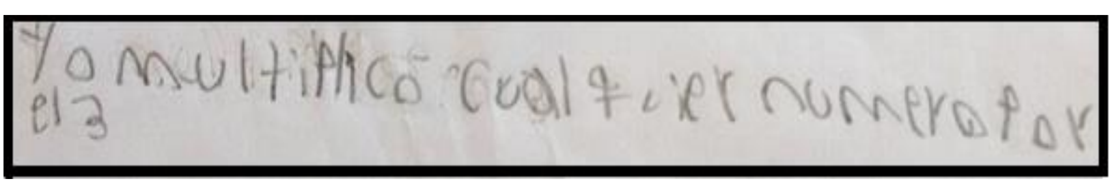


Imagen 15. S1, T3, P2

Por otra parte, podemos ver que el 50% de los estudiantes restantes, responden la pregunta mencionando que para hallar el número máximo de comensales sentados se debe *"multiplicar"*. Estos estudiantes, aunque reconocen la operación para hallar el número máximo de comensales, no explicitan las cantidades que se deben operar y por tanto no hay evidencia de que hayan identificado el patrón.

En conclusión, se puede apreciar que los estudiantes tienen la capacidad de encontrar una expresión que les permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas, además, utilizan un registro verbal para representar el patrón nx3. Esto permite afirmar, que los estudiantes explorar y reconocen un patrón, a su vez, practican habilidades del cálculo, así como lo expone la NCTM (2000), un aprendizaje significativo de las matemáticas debe permitir que los estudiantes exploren y reconozcan patrones. Por otro lado, se puede observar que los estudiantes no usan la suma de sumandos iguales o figuras pictóricas como estrategia para solucionar dicha situación, sino que en su totalidad utilizan la multiplicación para hallar el número máximo de comensales, incluso aquellos que no identifican el patrón.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 3 (T3P3)

Población: 22 estudiantes

<table>
<tr><td colspan="4">Pregunta 3: Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:
a. 15 mesas.
b. 30 mesas.
c. 55 mesas.
d. 100 mesas.</td></tr>
<tr><th>Tipo de Respuesta</th><th>Descripción</th><th>Fa</th><th>Fr</th></tr>
<tr><td>R1</td><td>Estudiantes que utilizan el patrón (nx3) para hallar el número de comensales sentados. Algunos estudiantes, no llegan al resultado correcto porque presenta dificultades al momento de multiplicar dos cantidades (15x3=55).</td><td>13</td><td>59%</td></tr>
<tr><td>R2</td><td>Estudiantes que utilizan el patrón (nx3) para hallar el número de comensales sentados, cabe resaltar, que indican en su respuesta que el resultado son comensales y no mesas (15x3=45 comensales). Algunos estudiantes, no llegan al resultado correcto porque presenta dificultades al momento de multiplicar dos cantidades (15x3=55).</td><td>9</td><td>41%</td></tr>
</table>

Tabla 12. Tipificación S1, T3, P3

De acuerdo con los registros escritos, se pudo observar que el 100% de los estudiantes utilizan el patrón nx3 para calcular el número de comensales (Ver imagen 16). Sin embargo, algunos de ellos presentan dificultad al momento de operar las dos cantidades, especialmente en las multiplicaciones llevando (literal a y c).

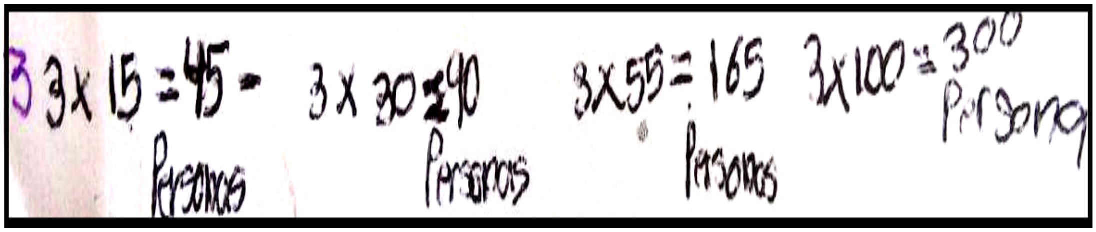


Imagen 16. S1, T3, P3

Cabe resaltar, que 9 estudiantes en sus respuestas identifican que la variable dependiente corresponde al número de comensales y lo hacen de manera explícita en los registros escritos. Mientras que 13 estudiantes solamente realizan la operación aritmética sin mencionar que el número obtenido hace referencia al número de comensales.

La mayoría de estudiantes se encuentran en la tercera fase (registrar un patrón) que propone Mason (1985), ya que por medio del lenguaje natural está haciendo visible el patrón que ha identificado, además está permitiendo registrar las ideas o conjeturas a las que ha llegado. La pregunta permite poner en práctica habilidades de cálculo, por medio de la implementación del patrón.

Resultados y análisis de resultados de la Tarea 4 (T4)

Tarea 4: Comensales vs Mesas.

En el restaurante de Nano, todas las mesas de 4 asientos se llenaron por igual. Teniendo en cuenta que cada mesa de este restaurante tiene el número máximo de comensales, encontrar el número mínimo de mesas que ocupan estos comensales.

Situación 1: Tarea 4, Pregunta 1 (T3P1)

Población: 23 estudiantes

Pregunta 1: Indica en cuántas mesas se pueden sentar 4 comensales. **Pregunta 2:** Escribe en cuántas mesas se pueden sentar 8 y 12 comensales.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que encuentran el número de mesas que pueden ocupar 4 (1), 8 (2) y 12 (3) comensales.	10	43%
R2	Estudiantes que encuentran el número de mesas que pueden ocupar 4 (1), 8 (2) y 12 (3) pero confundiendo las variables expuestas.	4	17%
R3	Estudiantes que encuentran el número de mesas para 4 (1) comensales, pero no para 8(2) y 12(3) comensales.	5	23%
R4	Estudiantes que no contestan la pregunta.	4	17%

Tabla 13. Tipificación S1, T4, P1, P2

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en las preguntas 1 y 2 según la tabla 13, el 60% de los estudiantes encuentran el número de mesas que pueden ocupar 4 (1), 8 (4) y 12 (3) comensales, sin embargo, algunos de ellos colocan en sus respuestas número de personas y no número de mesas. Esto quiere decir, que tienen dificultades al momento de diferenciar las variables número de mesas y número de comensales. A pesar de lo anterior, se puede observar que realizan un cálculo adecuado para encontrar el valor correcto.

Por otro lado, en las preguntas 1 y 2 el 23% de los estudiantes encuentran el número de mesas para cuatro comensales, pero no para 8 y 12 comensales, dado que al momento de operar, multiplican estas dos cantidades obteniendo así como resultado el número 96. Por consiguiente, los estudiantes no identifican el número mesas que pueden ocupar 8 y 12 comensales, ya que al parecer no comprenden el enunciado de la tarea 4. Por otra parte, el 17% de los estudiantes no contestan las preguntas 1 y 2, al parecer por no comprenden el enunciado, no saber calcular el número de mesas o por falta de tiempo.

Lo anterior deja apreciar que la mayoría de estudiantes responden de manera acertada la cantidad de mesas que necesitan 4, 8 y 12 comensales, al parecer se encuentran en la primera fase que propone Mason (1985), en la que el estudiante ve un patrón a partir de regularidades observadas. Además los estudiantes, al parecer implementan cálculos mentales para determinar el número de mesas a partir del número de comensales, puesto que no hay una evidencia en sus escritos de un procedimiento aritmético o pictórico.

Situación 1: Tarea 4, Pregunta 3 (T4P3)

Población: 23 estudiantes

Pregunta 3: Escribe la operación que utilizaste para llegar desde el número de comensales al número de mesas que pueden usar estos.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que utilizan la multiplicación para hallar el número de mesas que pueden ocupar 4 (1), 8 (2) y 12 (3) comensales. Algunos estudiantes utilizan este procedimiento teniendo alguna dificultad.	14	61%
R2	Estudiantes que utilizan la suma de sumandos iguales o representaciones pictóricas para determinar la cantidad de mesas.	4	17%
R3	Estudiantes que responden de manera incoherente.	5	22%

Tabla 14. Tipificación S1, T4, P3

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en la pregunta 3 según la tabla 14, el 61% de los estudiantes utilizan la multiplicación como estrategia para hallar el número de mesas de acuerdo a la cantidad de comensales sentados. Sin embargo, parte de estos estudiantes presentan dificultades al momento de realizar la operación aritmética, ya que multiplican comensales por comensales (8 x 12), sin comprender que deben buscar un número que multiplicado por cuatro les dé el número de comensales $(\_\_ x\,4 = 8)$, estrategia que fue utilizada por la mayoría de los estudiantes. Esto indica que los estudiantes están utilizando la multiplicación como estrategia privilegiada al momento de solucionar una situación problema, incluso se podría decir que tienen un primer acercamiento de manera implícita a las ecuaciones de primer grado.

Por su parte, el 17% de los estudiantes utiliza la suma de sumandos iguales o las representaciones pictóricas para responder de manera acertada la pregunta expuesta. Respecto a la suma de sumandos iguales, se puede observar en los registros que el estudiante utiliza una representación numérica la cual consiste en sumar el patrón base (4) las veces que sean necesarias hasta obtener la cantidad de comensales que se les ha señalado (4 + 4 + 4 = 12), es decir, tratan de encontrar cuántas veces esta el 4 en 12 (3 veces), o cuántas veces está en 4 en 8 (2 veces) para obtener la respuesta. Con relación a las representaciones pictóricas, los estudiantes dibujan las mesas y los comensales, teniendo en cuenta que en cada mesa deben ir 4 comensales; cuando obtienen 8 o 12 comensales utilizan el conteo para averiguar el número de mesas.

El 22 % de los estudiantes responden de manera incoherente, lo cual podría deberse a que no comprendieron el enunciado de la pregunta, pues responden de la misma manera que en la pregunta 1 y 2.

Se puede decir en esta pregunta que los estudiantes utilizan diferentes estrategias para hallar el número de mesas a partir del número de comensales, siendo la más utilizada la multiplicación, aunque se continúan observando dificultades en el desarrollo del procedimiento aritmético, y las estrategias menos utilizadas es la suma de sumandos iguales y las representaciones pictóricas. Esto nos deja apreciar, que los estudiantes exploran y argumentan, así como lo expone la NCTM (2000), pues para hallar el número mesas en que se pueden sentar *n* comensales se debe buscar (explorar) la operación aritmética indicada para encontrar el valor correcto de la secuencia numérica; además, los estudiantes argumentan el por qué se utiliza la multiplicación o división como estrategia matemática para contestar las preguntas.

Situación 1: Tarea 4, Pregunta 4 (T4P4)

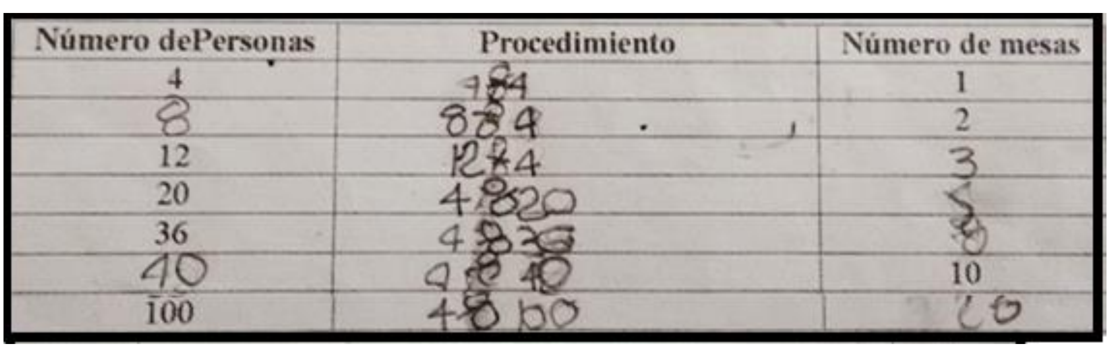
Población: 23 estudiantes

Pregunta 4: Completa la siguiente tabla.		
Número de Personas	**Procedimiento**	**Número de mesas**
4		1
		2
12		
20		
36		
		10
100		

Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que completan la tabla utilizando la división. Algunos de ellos cometen errores al encontrar el número de mesas o el número de comensales	15	65%
R2	Estudiantes que completan la tabla utilizando la multiplicación.	3	13%
R3	Estudiantes que completan la tabla utilizando la multiplicación y la división.	5	22%

Tabla 15. Tipificación S1, T4, P4

En la tabla 15 se puede observar que el 65% de los estudiantes utilizan la división como estrategia matemática para hallar el número de mesas y el número de comensales; para encontrar el número de mesas, ellos dividen el número de comensales por cuatro $(12 \div 4)$; y al momento de encontrar el número de comensales, buscan un número que al dividirlo por cuatro les dé el número de mesas $(\_\_ \div 4 = 10)$. Es importante resaltar, que en los registros escritos de los estudiantes, una cantidad mínima presenta algunos errores al completar la tabla de la pregunta 4, entre ellos, se destacan los siguientes: Confunde la ubicación adecuada del divisor y el dividendo en el procedimiento (4÷40 en vez de 40÷4) (Ver imagen 17)



Número dePersonas	Procedimiento	Número de mesas
4	4÷4	1
8	8÷4	2
12	12÷4	3
20	4÷20	5
36	4÷36	[illegible]
40	4÷40	10
100	4÷100	[illegible]

Imagen 17 S1, T4, P4

Cabe resaltar, que los estudiantes aplican la división por partes o como lo llama el Dr Vasco, “la división entre”, es decir, una cantidad numérica dada, *f(n),* debe ser repartida en *n* de partes iguales, y por lo tanto, el problema consiste en encontrar el tamaño, el valor, de cada una de esas partes.

Por otro lado, 3 de los 23 estudiantes utilizan la multiplicación como estrategia para identificar el número de mesas y el número de comensales, dos de los estudiantes cometen errores al momento de encontrar la cantidad de mesas, ya que en el procedimiento multiplican el número de personas por cuatro (100 x 4). Uno de los tres estudiantes utilizan la multiplicación de manera correcta, pues para hallar el número de mesas busca un número que multiplicado por cuatro dé el número de personas (__ x 4=20) y para hallar el número de personas multiplica las mesas por cuatro (8 x 4), cabe resaltar que los estudiantes se dan cuenta que la multiplicación no es simplemente una suma de sumandos iguales sino que la multiplicación es una transformación en la que a partir del número de personas se puede obtener el número de mesas o viceversa (Ver imagen 18).

Número dePersonas	Procedimiento	Número de mesas
4	1X4	1
8	2X4	2
12	3X4	3
20	5X4	4
36	9X4	9
40	10X4	10
100	25X4	25

Imagen 18. S1, T4, P4

El 22 % de los estudiantes completa la tabla utilizando la multiplicación y la división como estrategias para encontrar el número de comensales y el número de mesas, algunos de ellos prefieren usar la división cuando van a hallar el número de mesas, es decir, dividen el número de personas por cuatro y prefieren usar la multiplicación para hallar el número de comensales, es decir, se multiplica el número de mesas por cuatro (Ver imagen 19).

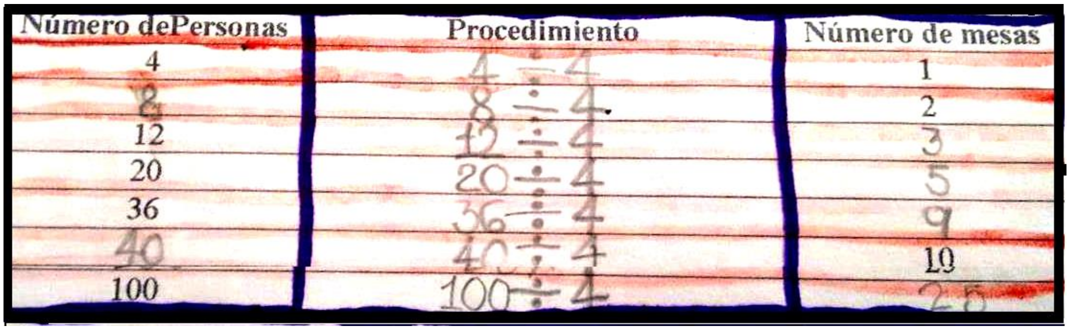


Imagen 19 S1, T4, P4

Por lo anterior, se puede decir que la estrategia más utilizada por los estudiantes es la de relación inversa (división), además se continua utilizando la multiplicación en algunos casos. Se destaca el nivel de abstracción que están logrando los estudiantes al involucrar cálculos aritméticos que muestran los primeros indicios de las ecuaciones de manera implícita, tal es el caso de la multiplicación (__ x 4= 100) y de la división (__÷4=25). A su vez, se puede deducir que se encontraron dos tipos de patrones, uno referido a la multiplicación (nx4) y otro referido a la división (C÷4).

Situación 1: Tarea 4, Pregunta 5 (T4P5)

Población: 23 estudiantes

Pregunta 5: Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.			
a. Indica como varia el número de comensales cuando aumenta el número de mesas			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que indican que el número de mesas aumenta.	3	13%
R2	Estudiantes que indican que el número de comensales aumenta.	11	48%
R3	Estudiantes que no responde el literal a.	9	39%
b. Indica que número permanece constante en la tabla.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que responden que el número 4 permanece constante en la tabla.	14	61%
R2	Estudiantes que no responde el literal b.	9	39%

Tabla 16. Tipificación S1, T4, P5

Respecto a la tabla 16 con relación al literal a, se puede decir que el 13% de los estudiantes identifican que la cantidad de mesas aumenta, mientras que el 48% logra reconocer de manera acertada que los comensales varían a medida que el número de mesas aumenta. Lo anterior, permite deducir que la mayoría de los estudiantes tienen un primer acercamiento al pensamiento algebraico, puesto que a partir de las regularidades observadas en la pregunta anterior reconocen lo que cambia o lo que aumenta basándose en el patrón numérico. Además, por medio del registro verbal logran expresar las situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural. Sin embargo, el 13% de los estudiantes presenta dificultad al momento de identificar la cantidad que aumenta. Cabe mencionar, que el 39% de los estudiantes no contesta el literal a, esto puede deberse a que los estudiantes no entendieron la pregunta o no sabían la cantidad que varía respecto al número de mesas.

Con respecto al literal b, el 61% de estudiantes logra responder de manera acertada la pregunta, puesto que identifica el número que permanece constante (4). Esto puede deberse a que los estudiantes utilizaron el registro tabular para reconocer que el valor constante es el cuatro. Mientras que, el 39% de los estudiantes no contesta a la pregunta, lo cual puede ser resultado de que los estudiantes no entendieron la pregunta o no sabían la cantidad que es constante.

Se puede inferir que, los estudiantes probablemente tiene la capacidad para reconocer las cantidades que varían y permanecen constantes, logrando así, llegar cada vez más al pensamiento variacional, pues según MEN (2006) cuando se ha identificado algo que cambia, aumenta o permanece constante se está movilizando el pensamiento variacional.

Situación 1: Tarea 4, Pregunta 6 (T4P6)

Población: 23 estudiantes

Pregunta 6: Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de mesas en que se pueden sentar cualquier cantidad de comensales, de tal manera que no sobren asientos.

Tipo de Respuesta	Descripción	Fa	Fr
R1	Estudiantes que escriben que para hallar la cantidad de mesas se debe dividir el número de personas por cuatro	11	48%
R2	Estudiantes que escriben que para hallar la cantidad de mesas se debe de multiplicar	6	26%
R3	Estudiantes que no responden.	6	26%

Tabla 17. Tipificación S1, T4, P6

Teniendo en cuenta la tabla 17 se puede observar que el 48% de los estudiantes encuentran una expresión en lenguaje natural, que permite hallar de manera correcta la cantidad de mesas a partir del número de comensales utilizando la división. En los registros escritos, se pueden observar la expresión para calcular la cantidad de mesas: “dividir el número de personas por el cuatro” (Ver imagen 20). Cabe señalar, que los estudiantes registran por medio del lenguaje natural lo que ven y dicen del patrón, encontrándose en la tercera fase propuesta por Mason (1985) denominada “registrar un patrón”. A su vez, se puede decir que las preguntas anteriores permitieron que los estudiantes comprueben la validez del patrón.

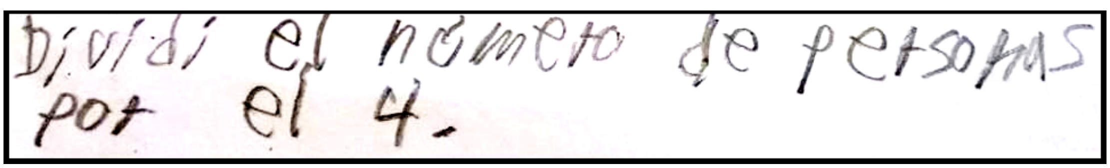


Imagen 20. S1, T4, P6

El 26% de los estudiantes por medio del registro verbal expresan haber utilizado la multiplicación. Algunos de ellos, mencionan que para hallar el número de mesas de debe de “inventar un número que multiplicado por el cuatro no queden asientos ejemplo 6 x 4 =24”, esto quiere decir que se debe buscar un número que multiplicado por el cuatro dé como resultado el número de personas, se nota que los estudiantes intentan escribir una expresión de manera general. Mientras que otros, expresan “la encontramos multiplicando” sin mencionar las cantidades que se deben operar, en este caso, se nota que los estudiantes solamente identifican la operación a realizar y no la expresión. Finalmente, el otro 26% de los estudiantes no contesta la pregunta, lo cual puede deberse a que no entienden la pregunta o no logran encontrar la expresión que les permite hallar la cantidad de mesas en que se puede sentar cualquier cantidad de comensales.

Lo anterior, permite inferir que la mayoría de los estudiantes encuentran una expresión general utilizando el lenguaje natural, la cual permite hallar cualquier cantidad de mesas a partir del número de comensales; cabe destacar que este proceso es complejo y difícil, pero los estudiantes están iniciando el proceso para desarrollar un primer acercamiento a la generalización, que es uno de los procesos generales importantes en el desarrollo de pensamiento matemático y que de acuerdo a Mason (1986) es un preámbulo necesario para el estudio del álgebra.

3.4.2 Resultados y análisis de resultados de la Situación 2 (S2)

Situación 2: La Multiplicación como Relación.

Descripción general de la aplicación de la actividad

La situación 2 consta de dos tareas las cuales se aplicaron en dos sesiones; siendo la primera el día 17 de noviembre del 2014 y la última el 18 de noviembre del 2014, el tiempo implementado en cada tarea fue en promedio de 60 minutos. En el grado tercero de la Escuela Normal Superior de Cali hay 24 estudiantes; sin embargo, durante la aplicación de la situación algunos estudiantes no fueron participes en el desarrollo de las tareas, debido a que no asistieron a clase.

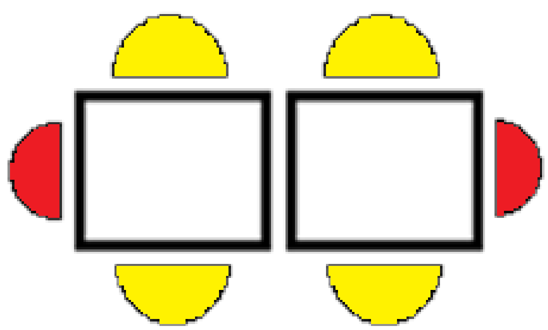
Esta situación comienza luego de entregar a cada estudiante la copia de la tarea a desarrollar. En un primer momento, se realiza la lectura de la consigna con los estudiantes y se verifica que hayan interpretado la situación; pues a partir de la lectura de adaptación se comprenden las tareas 1 y 2. En un segundo momento, se les expone a los estudiantes que realicen las tareas de manera individual; no obstante, se aclara a los participantes que si no comprenden alguna de las preguntas planteadas pueden recurrir al docente para tratar de solucionar sus dudas.

Al finalizar cada tarea de la situación 2 se realiza una plenaria la cual tiene una duración de 15 minutos, con el objetivo de que los estudiantes expongan y discutan las estrategias implementadas al momento de responder las preguntas planteadas, posibilitando un espacio de reflexión en la clase.

Es importante resaltar, que esta situación pretende que el estudiante observe la multiplicación como suma de sumandos iguales, como transformación, como patrón y como una estructura multiplicativa; partiendo de una situación que involucra un patrón pictórico.

Resultados y análisis de resultados de la tarea 1 (T1)

En el restaurante de Nano, a menudo se juntas mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo 6 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas juntas por comensales sentados.



Situación 2: Tarea 1, Pregunta 1 y Pregunta 2 (T1P1P2)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 1: Indique cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos mesas juntas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que encuentran el número máximo de comensales sentados en 2 (6) mesas juntas.	20	95%
R2	Estudiantes que no determinan el número máximo de comensales sentados en 2 (6) mesas juntas.	1	5%

Tabla 18. Tipificación S2, T1, P1

Pregunta 2: Escribe cuántos comensales como máximo se pueden sentar en tres mesas juntas. Dibújalas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
T1	Estudiantes que encuentran el número máximo de comensales que se pueden sentar en 3 mesas juntas, lo hacen a partir de representaciones pictóricas (8).	21	100%

Tabla 19. Tipificación S2, T1, P2

Teniendo en cuenta las respuestas a las preguntas 1 y 2 de la situación 2, se observa según las tablas 18 y 19 que más del 95% de los estudiantes encuentran el número máximo de comensales que se pueden sentar en 2 y 3 mesas juntas. Lo que significa que identifican la variación de la situación; es decir, que visualizan el patrón a partir de su representación. Esto deja apreciar lo que permanece constante y lo que varía, en términos de distribución de comensales en las mesas.

Lo anterior, permite observar que la gran mayoría de estudiantes reconoce el concepto de variación, puesto que identifican la cantidad que aumenta y permanece constante en la situación problema. En este caso, la actividad en sí misma permite el desarrollo del pensamiento algebraico dado que el estudiante identifica el aumento de una serie de figuras y logra expresar los términos siguientes de la secuencia utilizando los registros escritos y pictóricos, tal como lo establece el MEN (2006).

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 3 (T1P3)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 3: Escribe cuántos comensales, como máximo, se pueden sentar en cuatro, cinco y diez mesas juntas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que encuentran de manera acertada el número de comensales que se pueden sentar en 4, 5 y 10 mesas juntas de manera numérica sin escribir las operaciones pertinentes	10	48%
R2	Estudiantes que se apoyan en los esquemas o dibujos de las mesas para dar la respuesta acertada a lo solicitado.	9	43%
R3	Estudiantes que realizan parcialmente el procedimiento o responden en forma incorrecta	2	9%

Tabla 20. Tipificación S2, T1, P3

De acuerdo a las respuestas de los estudiantes en la pregunta 3 de la situación 2, se puede apreciar en la tabla 20 que cerca de la mitad de los estudiantes (48%) encuentran la respuesta sin necesidad de realizar los gráficos de las mesas, lo que indica que reconoce el patrón de comportamiento sin apoyo visual, si no en forma de cálculo mental. Lo que significa que los estudiantes en relación con las respuestas a las preguntas 1 y 2 han avanzado en la comprensión del patrón de variación. Así mismo, las respuestas de los estudiantes dejan apreciar que reconocen el patrón, lo expresan utilizando un simbólico (numérico) y determinan los siguientes términos de la secuencia numérica. Es este sentido, los estudiantes de manera implícita aplican la relación $f(n) = nf(1)$ presentada en el marco teórico, a través del análisis por escalar.

Se puede concluir, que la mayoría de estudiantes logran obtener un acercamiento al pensamiento variacional; ya que logran reconocer la regularidad y el patrón de la situación 2, además describen cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural y representaciones pictóricas (MEN, 1998). Además, se puede evidenciar en esta situación lo expuesto por Cañadas y Castro (2007), que los estudiantes se basan en una conjetura que cierta para algunos casos y que han de validar para otros casos, lo cual les permite deducir que la conjetura es cierta en general.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 4 (T1P4)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 4: Indique cómo podría calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que calculan la cantidad de comensales que se pueden sentar entre 13 mesas multiplicando el número de mesas por 2 y sumándole a este resultado 2, lo que da acertadamente 28 comensales.	13	62%
R2	Estudiantes que calculan la cantidad de comensales solicitado utilizando representaciones pictóricas.	4	19%
R3	Estudiantes que realizan el cálculo en forma incorrecta.	4	19%

Tabla 21. Tipificación S2, T1, P4

Como se puede observar en la tabla 21, 21 estudiantes respondieron la pregunta. Analizando el uso de estrategias, el 62% de los estudiantes recurren a la multiplicación y a la suma, logrando identificar el patrón apropiado (nx2+2). Cabe señalar, que esta cantidad de estudiantes escribe su expresión por medio de una representación verbal; es decir, utilizan el lenguaje natural para indicar como calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas.

A su vez, en los registros escritos se puede encontrar que los estudiantes tienen dificultad en la comprensión del signo igual, pues los estudiantes usan el signo igual en un sentido unidireccional en el cual se conecta el problema con el resultado numérico (13x2=26), sin embargo no se dan cuenta de que el signo igual relaciona dos procesos que dan el mismo resultado y por tanto en este caso el signo se utiliza de manera incorrecta (Ver imagen 21).

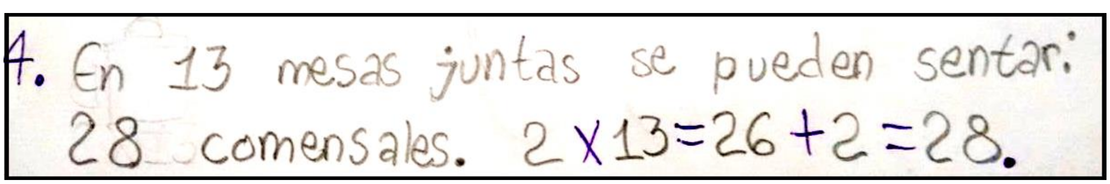


Imagen 21. S2, T1, P4

Por otra parte, la estrategia menos utilizada por los estudiante fue la representación pictórica con un 19%, en la cual los estudiantes realizan un dibujo teniendo en cuenta la ubicación de las mesas. A partir de los dibujos realizados cuentan la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas. Es importante mencionar, que la cantidad de estudiantes que utilizan la representación pictórica es menor, lo que indica que la mayoría de estudiantes identifican el patrón de comportamiento sin apoyo visual.

En conclusión se puede afirmar, que la actividad promueve el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes de grado tercero, en la cual se evidencia la comprensión del concepto de las operaciones como la suma y la multiplicación de números naturales. Sin embargo los estudiantes presentan dificultad en la comprensión del signo igual. Así mismo, se puede observar un acercamiento a la generalización, ya que la mayoría de los estudiantes reconocen el patrón, lo cual es esencial para desarrollar la habilidad de generalizar (Mason, 1985).

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 5 (T1P5)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 5: Escribe la operación que utilizó para llegar desde el número de mesas juntas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que expresan en lenguaje natural, que utilizaron la multiplicación y la suma para calcular el número máximo de comensales a partir del número de mesas.	11	53%
R2	Estudiantes que utilizan representaciones pictóricas para calcular el número máximo de comensales a partir del número de mesas.	3	14%
R3	Estudiantes que no contestan la pregunta.	7	33%

Tabla 22. Tipificación S2, T1, P5

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en la pregunta 5 según la tabla 22, el 53% de los estudiantes utilizan el lenguaje natural para indicar la operación que utilizaron para calcular el número máximo de comensales. Cabe resaltar, que la estrategia utilizada por los estudiantes son las operaciones aritméticas, en los registros escritos expresan que multiplican dos por el número de mesas y le suman al resultado 2; logrando así identificar el patrón de la tarea 1 de la situación 2 (2xM+2) (Ver imagen 22) Sin embargo, algunos estudiantes en sus respuestas solo mencionan las operaciones que realizaron por ejemplo: "Utilice la multiplicación con una suma para hallar el resultado”. Cabe resaltar que los estudiantes identifican las relaciones numéricas que presentan esta situación, en este caso la multiplicación y adición.

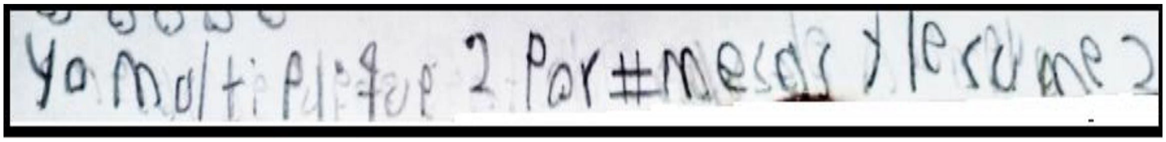


Imagen 22. S2, T1, P5

Por otro lado, se puede observar en la tabla anterior que el 14% de los estudiantes continúan implementando los registros pictóricos para calcular el número máximo de comensales, estos estudiantes utilizan el conteo para determinar la respuesta correcta. Lo cual muestra que los estudiantes no tienen clara la operación aritmética que permite encontrar la cantidad de comensales. También se pudo observar que, el 33% de los estudiantes no contestaron la pregunta. Lo cual puede ser porque no interpretaron el enunciado o por la misma complejidad de la pregunta.

Teniendo en cuenta lo anterior, la mitad de los estudiantes han adquirido un primer acercamiento al pensamiento variacional y numérico, puesto que reconocen e idéntican lo que varía y lo que permanece constante, y lo expresan por medio del lenguaje natural siendo conscientes de las operaciones aritméticas implicada. A su vez, se puede observar, que los estudiantes de este ciclo de escolaridad encuentran con mayor facilidad una regla general a partir de representaciones pictóricas. También, se pude decir que la generalización se convierte en un proceso complejo para los estudiantes cuando no están trabajando con representaciones pictóricas, ya que no identifican con facilidad la regularidad del patrón numérico.

Resultados y análisis de resultados de la Tarea 2 (T2)

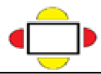
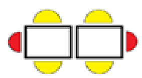
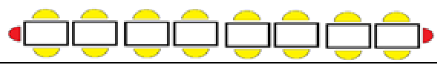
Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en mesas juntas:

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 1 (T2P1)

Población: 21 estudiantes

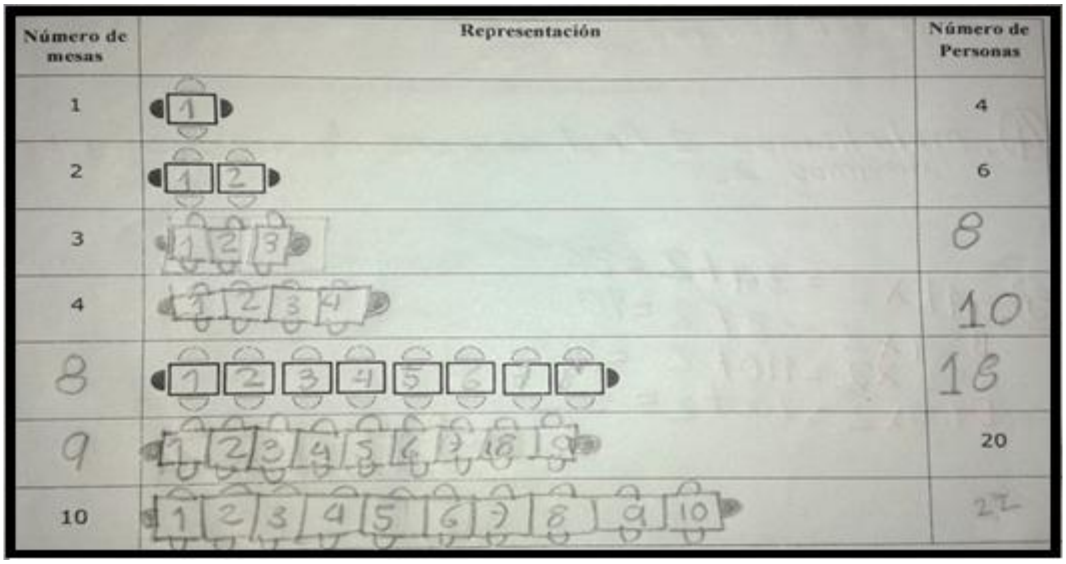
Pregunta 1:
Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Representación	Número de Personas
1		4
2		6
3		
4		
		
		20
10		26

Tipo de Respuesta	Descripción	Fa	Fr
R1	Estudiantes que completan la utilizando representaciones pictóricas.	21	100%

Tabla 23. Tipificación S2, T2, P1

Teniendo en cuenta las respuestas de la pregunta 1 según la tabla 23, todos los estudiantes encuentran el número máximo de comensales sentados y número de mesas. Esto indica que los estudiantes comprenden el enunciado de la situación expuesta. Además, el 100% de los estudiantes utilizan el patrón pictórico para determinar el número máximo de comensales que se puede sentar en 3, 4 y 10 mesas juntas y el número de mesas que pueden ocupar 20 comensales (Ver imagen 23). Cabe resaltar que los estudiantes identifican las relaciones funcionales elementales, tales como la multiplicación como transformación.



Número de mesas	Representación	Número de Personas
1	1	4
2	1 2	6
3	1 2 3	8
4	1 2 3 4	10
8	1 2 3 4 5 6 7 8	18
9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	20
10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	22

Imagen 23. S2, T2, P1

Algunos estudiantes al momento de realizar los dibujos colorean las sillas que se encuentran en los extremos de las mesas, pues les facilita diferenciar las sillas que permanecen constantes, de las sillas que varían conforme aumenta el número de mesas. También se puede observar en los registros escritos que algunos estudiantes al completar la tabla no dibujan de manera exacta la representación pictórica como se expresa en los dos primeros términos; sin embargo, esto no altera las respuestas al momento de calcular el número de comensales y el número de mesas.

Lo anterior, deja apreciar que los estudiantes a partir de la visualización de un patrón pictórico son capaces de identificar la regla para calcular los términos siguientes en la secuencia. De manera que, se puede afirmar que los estudiantes ven el patrón pictórico pues identifican que existe algo en común en la secuencia pictórica, lo cual refleja una de las fases que propone Mason (1985). Cabe resaltar que este tipo de pregunta facilita iniciar el estudio de uno de los sistemas de representación con los estudiantes de los primeros grados, en este caso el registro tabular, que como se puede evidenciar fue manejado de manera correcta por los estudiantes.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 2 (T2P2)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 2: Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.			
a. Escribe qué sucede cada vez que Nano agrega otra mesa. ¿Cuántas personas más pueden ir sentadas?			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que escriben que cada vez que se agrega una mesa aumentan dos comensales	18	86%
R2	Estudiantes que no contestaron la pregunta	3	14%
b. Escribe que permanece constante y que varía cada vez que se agrega una mesa.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que identifican que las sillas blancas varían y las sillas negras permanecen constante	18	86%
R2	Estudiantes que no contestaron la pregunta	3	14%

Tabla 24. Tipificación S2, T2, P2

Como se puede observar en la tabla 24, con respecto al literal a, el 86% de los estudiantes responden de manera acertada la pregunta, pues en los registros escritos se puede evidenciar que los estudiantes mencionan que la cantidad de comensales que aumenta cada vez que Nano agrega una mesa es dos. Lo cual indica, que los estudiantes son conscientes de que al aumentar una cantidad (número de mesas) la otra cantidad aumenta (número de sillas), es decir, reconocen de manera implícita la variable dependiente (sillas) y la variable independiente (mesas).

Con respecto al literal b el 86% de los estudiantes logran identificar a partir de las representaciones pictóricas la cantidad de comensales que varía y la cantidad de comensales que permanece constante cada vez que aumenta el número de mesas. Es importante mencionar, que en los registros escritos se evidenció un tipo de respuesta acertada, en la cual, los estudiantes utilizan el color de las sillas para determinar lo que es constante y lo que varía (permanece constante son las sillas negras y las que varían son las sillas blancas).

Lo anterior, deja apreciar, que los estudiantes de este ciclo escolar reconocen un patrón numérico, lo expresan matemáticamente y saben que debe seguir un orden guiado por la cantidad que representa el número elegido para formar su serie numérica; además, implícitamente los estudiantes aplican la relación $f(n) = n(f1)$ presentada en el marco teórico, a través del análisis por escalar, donde los números 1, 2, 3, 4… representan el primer espacio de medida, adicionalmente, el valor de la unidad se repite 2 veces, al igual que los valores del otro espacio de medida, pues el cambio que genera el espacio de medida en el primer espacio se refleja en el otro.

Es importante resaltar, que los estudiantes están adquiriendo un aprendizaje significativo del álgebra escolar, pues analizan e identifican en situaciones problema lo que cambia, aumenta o varía. Se destaca el hecho de que los estudiantes en su mayoría (86%) están en la capacidad de reconocer la cantidad que aumentan y la cantidad permanece constante, porcentaje que ha aumentado con relación al desempeño de los estudiantes en las actividades anteriores, lo cual, permite reflexionar sobre la importancia de que el docente proponga tareas de este tipo para que los estudiantes de grado tercero comprendan estos conceptos propios del pensamiento variacional y del álgebra en general.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (T2P3)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 3: Si Nano te da el número de mesas juntas ¿Cómo puedes encontrar el número máximo de comensales que pueden sentarse?			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que escriben que para hallar el número máximo de comensales que se pueden sentar en mesas juntas hay que sumar y multiplicar	16	76%
R2	Estudiantes que no contestaron la pregunta.	5	24%

Tabla 25. Tipificación S2, T2, P3

Con respecto a la tabla 25, se puede apreciar que el 76% de los estudiantes expresan en un lenguaje natural que, para hallar el número máximo de comensales a partir del número de meas juntas, se debe sumar y multiplicar. Lo cual indica que los estudiantes identifican las operaciones implicadas en el patrón; pero no determinan las cantidades que se deben multiplicar y sumar para obtener la cantidad exacta de número de comensales, lo que quiere decir que los estudiantes tienen alguna idea intuitiva del patrón de la situación, pero lo expresan de manera incompleta.

Se puede decir además que el patrón pictórico no solo ha permitido identificar lo que varía y permanece constante, sino que ha posibilitado un primer acercamiento al patrón numérico. Tal como se expone en el marco teórico, los patrones pictóricos se convierten en patrones numéricos dando la posibilidad de que el estudiante no utilice una construcción física del patrón. Cabe resaltar, que el paso de un patrón a otro no se da de manera inmediata, el docente debe de construir tareas que propicien el paso del patrón pictórico al numérico.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 4 (T2P4)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 4: Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas juntas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que escriben que para hallar la cantidad de comensales sentados se debe multiplicar el número de mesas por 2 y sumarle 2 (nx2+2) o multiplicar 2 por el número de mesas y sumarle 2 (2xn+2).	16	76%
R2	Estudiantes que no contestan la pregunta.	5	24%

Tabla 26. Tipificación S2, T2, P4

Como se puede observar en la tabla 26, 21 estudiantes respondieron la pregunta. Analizando el uso de estrategias, el 76% de los estudiantes recurren a la multiplicación y la suma, logrando identificar el patrón (Ver imagen 24). Cabe señalar, que esta cantidad de estudiantes escribe su expresión por medio de una representación verbal; es decir, utilizan el lenguaje natural para comunicar y dar a entender el procedimiento que se debe realizar para hallar la cantidad de comensales sentados.

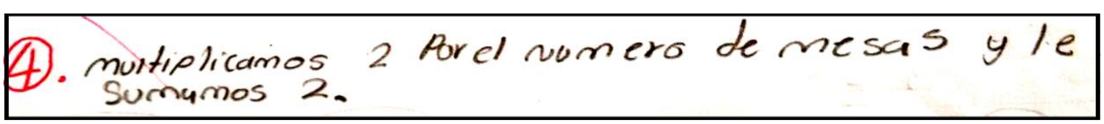

4. multiplicamos 2 Por el numero de mesas y le Sumamos 2.

Imagen 24. S2, T2, P4

A su vez, en los registros escritos se puede encontrar dos expresiones, siendo la primera "multiplicar 2 por el número de mesas y sumarle 2" $(2xn + 2)$ y la segunda “multiplicar el número de mesas por 2 y sumarle 2” ($nx2 + 2$); cabe aclarar, que algunos estudiantes al momento de registrar su expresión utilizan el signo “x” para hacer referencia que hay que multiplicar 2 por el número de mesas, por ejemplo: $2\ x$ número de mesas juntas se le suma 2 de los lados.

En conclusión, se puede apreciar que los estudiantes tienen la capacidad de encontrar una expresión que les permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar, además, utilizan un registro verbal para representar el patrón $nx2 + 2\ o\ 2xn + 2$. Por otro lado, se puede observar que los estudiantes no usan figuras pictóricas como estrategia para solucionar dicha situación, sino que en su totalidad utilizan la multiplicación y la suma para hallar el número máximo de comensales. Además, los estudiantes en su mayoría han llegado a la generalización por medio de la secuencia de imágenes que se presentan en la situación. Acercar a los estudiantes a la generalización es una parte importante en el aprendizaje de las matemáticas, en especial en el álgebra escolar, pues la generalización es una ruta hacia el álgebra o incluso la esencia de ella (Mason, 1996). Así mismo, Kaput (1999) afirman que la generalización es el preámbulo necesario para el estudio del álgebra, de ahí la importancia de incluir estos conceptos en las tareas que se proponen a los estudiantes de grado Tercero.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 5 (T2P5)

Población: 21 estudiantes

Pregunta 5: Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay: a. 17 mesas. b. 34 mesas. c. 55 mesas. d. 100 mesas.			
Tipo de Respuesta	**Descripción**	**Fa**	**Fr**
R1	Estudiantes que utilizan el patrón (nx2+2) para hallar el número de comensales sentados.	17	81%
R2	Estudiantes que no contestan la pregunta	4	19%

Tabla 27. Tipificación S2, T2, P5

Teniendo en cuenta los registros escritos, se pudo observar que el 81% de los estudiantes utilizan el patrón nx2+2 para calcular el número máximo de comensales sentados. Mientras que el 19% de los estudiantes no responden a la pregunta, ya sea por su complejidad o por no identificar el patrón.

Se puede observar en los registros escritos de la pregunta 5 que los estudiantes expresaron sus respuestas de dos manera. En la primera, los estudiantes realizan la multiplicación de manera vertical y efectúan la suma de manera vertical (Ver imagen 25) y en la segunda los estudiantes realizan la multiplicación y la suma de manera horizontal. En esta última, se observa que los estudiantes no tienen claridad al momento de utilizar el signo igual, en este caso n x 2 $\neq$ $C + 2$ por ejemplo: 17 x 2 = 34 + 2 =36 (Ver imagen 26).

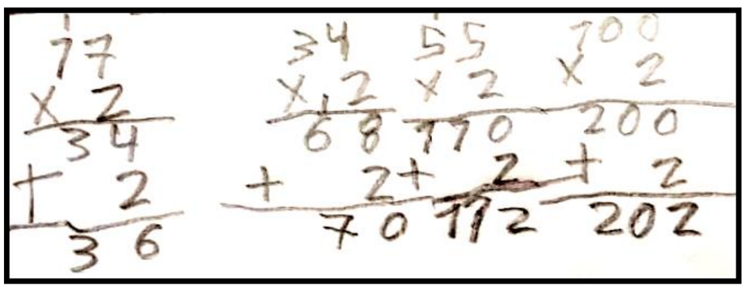


Imagen 25. S2, T2, P5

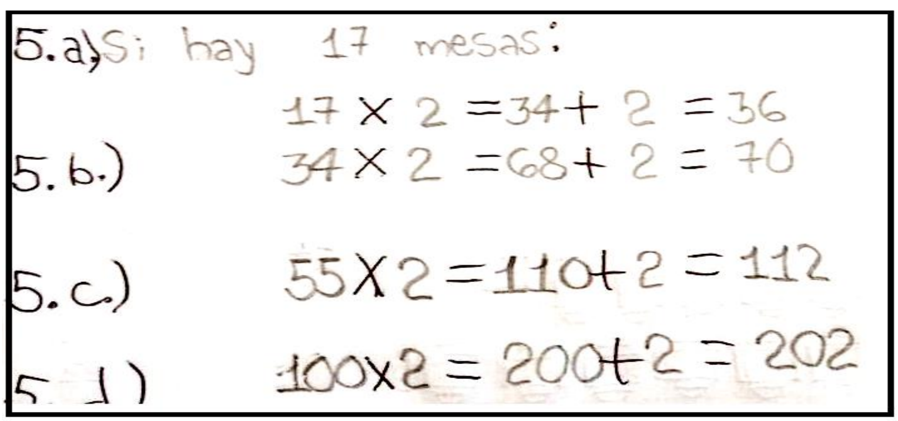


Imagen 26. S2, T2, P5

En conclusión, la mayoría de estudiantes ponen en práctica el patrón encontrado en la pregunta 4, para calcular el número de comensales a partir del número de mesas. A su vez, la tarea en sí misma permite evidenciar la cuarta fase que propone Mason (1985) en la que el estudiante pone a prueba la validez del patrón, es decir, comprueba que el patrón encontrado tiene validez para otras situaciones particulares. Así mismo se puede evidenciar, que los estudiantes presentan dificultad al momento de manipular el signo igual puesto que se usa el signo igual en un sentido unidireccional en el cual se conecta el problema con el resultado numérico (100x2=200+2=202).

3.5 ALGUNAS CONCLUSIONES DE LA IMPLEMENTACIÓN

A partir de los resultados de la implementación de la secuencia de tareas matemáticas, aplicada a estudiantes de grado tercero de primaria de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, y sus análisis se puede concluir que:

- La presentación de contenidos matemáticos, a través de una serie de tareas organizadas en forma de una secuencia, permite a los estudiantes movilizar conceptos algebraicos como el de variación, relación y constante; además de conceptos aritméticos como la estructura multiplicativa, por análisis escalar, como transformación y como suma de sumandos iguales; nociones que son claves para el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros ciclos escolares.

- A pesar que la secuencia realizada en este trabajo no finaliza con tareas que evalúen los conceptos aritméticos y algebraicos anteriormente mencionados, se trató de movilizar, conceptualizar y formalizar cada uno de ellos, por medio de tareas que desde lo contextual llevaron a lo operativo.

- Las tareas realizadas no fueron suficientes para promover por completo el pensamiento algebraico en educación primaria, sin embargo, permitió que los estudiantes analizaran la forma en que cambia y aumenta una secuencia de números o figuras; y realizaran conjeturas respecto a los términos siguientes de la secuencia en los patrones geométricos y numéricos; lo cual es de vital importancia para iniciar el estudio del álgebra escolar según los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencia Matemática (MEN, 2006).

- Los estudiantes presentaron un avance, respecto a la generalización al expresar los tres o cuatro primeros términos de la secuencia numérica utilizando el lenguaje natural, el lenguaje simbólico (numérico), las representaciones como dibujos o tablas; incluso intentaron formular un procedimiento o fórmula que permitiera calcular los próximos términos y refutar las conjeturas de sus compañeros de clase.

- Los estudiantes de grado Tercero de Básica Primaria mostraron mayor interés cuando desarrollaban las tareas que involucraban patrones pictóricos, al parecer sentían gusto y placer al realizar las representaciones pictóricas y la decoración de las mismas. El uso de patrones pictóricos les produce a los estudiantes seguridad al expresar los resultados y completar las tablas. Los resultados aquí obtenidos muestran que las tareas realizadas a partir de patrones pictóricos le permitió a los estudiantes identificar con mayor facilidad lo que varía y permanece constante en el patrón, lo cual es fundamental para encontrar la expresión general que representa el patrón.

- El desarrollo e implementación de la secuencia de tareas basadas en patrones numéricos, permitió que los estudiantes de grado Tercero de Básica Primaria lograrán dar sentido y significado a los contenidos aritméticos y algebraicos que intervienen en cada una de las tareas planteadas en las dos situaciones. Cabe resaltar, que los resultados obtenidos concuerdan con lo esperado de acuerdo a las investigaciones ya mencionada en el capítulo 2, las cuales afirman que los estudiantes a temprana edad pueden desarrollar un pensamiento algebraico a través de los contenidos curriculares de primaria.

- El diseño e implementación de una secuencia de tareas para realizar una aproximación al pensamiento algebraico en estudiantes de grado Tercero de Básica primaria desde una perspectiva didáctica, curricular y matemática, es pertinente pues permite afrontar la problemática aquí planteada con respecto al corte didáctico que existe entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Los resultados aquí obtenidos son positivos respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, vale la pena poner a prueba este tipo de trabajos en otros contextos escolares para promover el pensamiento algebraico desde los primeros ciclos de la escolaridad.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

A continuación se presentan algunas conclusiones generales y reflexiones relacionadas con la aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas Matemáticas de patrones numéricos; específicamente en grado tercero, aplicada en la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali.

4.1 CONCLUSIONES GENERALES

Con relación al primer objetivo específico de este trabajo se puede concluir que:

Se logró articular distintas perspectivas desde lo curricular, didáctico y matemático relacionados con la problemática. Desde lo curricular integra la importancia de promover el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad, tomando como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006). Desde lo didáctico, se tienen en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, la propuesta Early Algebra, el trabajo con patrones numéricos y la generalización. Y desde lo matemático, se integra los conceptos de variación, variabilidad, relación y función. Los aspectos anteriormente mencionados son de suma importancia ya que la articulación y fundamentación de cada uno de ellos permite realizar y poner en práctica la secuencia de tareas matemáticas.

De igual forma con relación al segundo objetivo específico, el cual hace referencia a la implementación de la secuencia de tareas matemáticas se concluye que:

- Los estudiantes de grado Tercero de Básica Primaria desarrollan con facilidad las tres primeras fases que presenta Mason (1985) “ver” ”decir” y “registrar”, iniciando con el ver, a partir de una secuencia numérica y pictórica, para luego expresarlo de manera oral a sus compañeros y por último registrarlo por medio del lenguaje natural o numérico verbal; las tres fases anteriores son fundamentales para que los estudiantes tengan un acercamiento a la generalización, la cual marca el punto de partida para el estudio del álgebra escolar.

- Los estudiantes identifican un patrón numérico a partir de un patrón pictórico, puesto que a partir de la visualización se puede deducir lo que permanece constante y lo que varía. Esta clase de patrones posibilitan que el estudiante identifique los primeros términos de la secuencia numérica apoyándose en la realización de dibujos.

Y respecto al tercer objetivo específico, el cual hace referencia al aporte de la secuencia de tareas matemáticas en la comprensión del estudio patrones numéricos y algunos procesos matemáticos asociados a los mismos, se concluye que:

- Los estudiantes logran familiarizarse con las representaciones tabulares, las utilizan de manera adecuada y las adoptan como una manera de organizar el patrón numérico y/o pictórico. Así mismo, este tipo de registro ayuda al estudiante a identificar lo que permanece constante y lo que varía en la secuencia numérica o pictórica, incluso permite ser más consciente de los procedimientos matemáticos requeridos. También se puede decir, que los registros tabulares ayudan establecer relaciones numéricas entre cantidades, en las cuales, se observa la multiplicación como transformación. Por estas razones se establece que los registros tabulares son una estrategia eficaz para promover el pensamiento algebraico a través del trabajo con patrones pictóricos y/o numéricos.

- El diseño y estructura de la secuencia de tareas matemáticas propuestas en este trabajo, ayudo a que los estudiantes dieran más sentido e importancia a contenidos matemáticos como: la estructura multiplicativa, la variación, el cambio y las relaciones numéricas, las cuales intervinieron en cada tarea de este trabajo; lo cual permite afirmar que existió un primer acercamiento al álgebra escolar y la generalización de patrones numéricos.

- Los estudiantes reflejan antecedentes importante al parecer desde los inicios de su escolaridad, en donde se muestra que hay dificultades respecto a la conceptualización de igualdad y razón; estas dificultades al parecer surgen de las experiencias que tienen en la escuela, de manera particular en los grados iniciales con relación a las matemáticas, puesto que los estudiantes no le atribuyen el sentido y significado correspondiente a estos conceptos. Estas dificultades son propias del corte didáctico que existe entre el álgebra y la aritmética y por tanto deben ser corregidas desde los primeros años.

- La estructura multiplicativa es un componente matemático muy importante para trabajar los patrones numéricos y pictóricos; ya que sus contenidos matemáticos ayudan a la argumentación, construcción y elaboración de conjeturas de generalidades que se presentan desde casos particulares a casos generales. Este es el caso de las tareas propuestas con las tablas de multiplicación (2, 4 y 3), y los problemas que involucran ambas operaciones (División y multiplicación).

- La implementación de la secuencia de tareas permitió que los estudiantes lograran movilizar diferentes contenidos matemáticos como la variación, el cambio, la suma de sumandos iguales, la multiplicación, la división e incluso lograr realizar procesos aritméticos para dar solución a las preguntas planteadas.

- La secuencia de tareas matemáticas ayuda a los estudiantes a tener un primer acercamiento a la generalización, a través del contexto empleado en cada situación, identificando la variación y el cambio que presentan los patrones numéricos y pictóricos; además de la relación de cantidades planteada en cada tarea.

4.2 ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS

A continuación se presentan algunas reflexiones didácticas que estas ligadas a este trabajo, con el fin de aportar a la reflexión de los interesados en el tema de desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria.

- Diseñar una secuencia de tareas Matemáticas es algo complejo, lo cual requiere disposición, tiempo y actitud crítica por parte del maestro en ejercicio o en formación; pues ésta, debe concatenar y movilizar conceptos, desempeños en los estudiantes, procesos y variedad de contextos, referente a lo curricular, didáctico y matemático.

- La secuencia de tareas Matemáticas debería ser coherente y estar concatenada entre sí para generar un aprendizaje significativo e integral. Además, debe promover contenidos matemáticos como el de función, función lineal o función a fin.

- La secuencia de tareas Matemáticas debería integrar escenarios geométricos o numéricos para que el estudiante puede analizar de una manera más eficaz lo que cambia, aumenta o disminuye. También, la secuencia como tal, debe permitir que el estudiante realice conjeturas, exprese los primeros términos de una secuencia numérica o pictórica por medio de un lenguaje natural o simbólico.

- El registro tabular es de suma importancia en el estudio de patrones numéricos, ya que acerca al estudiante a la generalización de patrones y al objeto matemático trabajar, puesto que hace más visibles las regularidades y las variaciones del patrón

- El tiempo es un factor importante al momento de desarrollar las tareas, pues estas no deben sobrepasar los 50 o 60 minutos, ya que los estudiantes a esta edad se les debe brindar un espacio para que interactúen y hablen con sus compañeros de clase.

- Para el desarrollo de pensamiento algebraico y pensamiento variacional se pueden realizar actividades movilicen conceptos como la variación, el cambio, la suma de sumandos iguales, la multiplicación, la división e incluso operaciones aritméticas.

- Los patrones numéricos son una buena alternativa para promover desarrollo de pensamiento algebraico y pensamiento variacional. Los patrones numéricos al hacer parte de una secuencia de actividades diseñada a partir de aspectos curriculares, didácticos y matemáticos, permiten que el estudiante tenga un primer acercamiento a la generalización, el cambio y la variación.

- Por último, este trabajo es un aporte a los docentes que se interesen por realizar una aproximación al álgebra temprana desde los primeros grados de la escolaridad, pues le permitirá implementar diferentes tareas utilizando patrones numéricos para lograr dicha aproximación, en este sentido, el docente no solo enriquecería sus prácticas pedagógica sino que también podría desempeñar el papel de investigador resultado de su propia experiencia como docente, logrando así potenciar su trabajo en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

Amit, M., & Neria, D. (2008). Rising to the challenge: using generalization in pattern roblems to unearth the algebraic skills of talented prealgebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Barvara, A., & Ameron, V. (2003). Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 41*(54), 63-75.

Billings, E., Tiedt, T., & Slater, L. (2008). Research, Reflection, Practice: Algebraic Thinking and Pictorial Growth Patterns. *Teaching Children Mathematics, 14* (8), 302-308

Blanton, L., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. *ZDM Mathematics Education, 37*(1), 34-42. doi: 10.1007/BF02655895.

Butto, C. & Rivera, T., (2011). *La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*. Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México. México.

Butto, C., (2011). *Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de tecnologías digitales: Un estudio teórico-experimental en el nivel básico*. Universidad Pedagógica Nacional. Ciudad de México. México.

Butto, C., & Rojano, T., (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo. *Educación Matemática, 22* (31), 113-148.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, M. V. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education 40*(1) 3-22. doi: 10.1007/s11858-007-0067-7.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2002). The transfer dilemma. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 1-24.

Cooper, T., & Warren E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds), *Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 187-214). London, NY: Springer.

Del Castillo, A. & Montiel, G. (1998). *Desarrollo del Pensamiento Covariacional en un Ambiente Gráfico Dinámico. Hacia una Génesis Instrumental*. Recuperado el 24 de Octubre de 2012, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009b)-ALME22-.pdf.

Godino, J. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros.* Recuperado el 7 de septiembre de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 5–22

Hitt F. (2002). *Funciones en Contexto*. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Mason, J. (1985). *Rutas hacia el Álgebra y Raíces del álgebra*. (C. Agudelo, Trad.)Tunja, Colombia. Tunja: UPTC.

Merino, E. (2012). *Patrones y Representaciones de Alumnos de 5° de Educación Primaria en una Tarea Generalización*. Universidad de Granada, Granada, España.

Merino, E., Cañadas, M. C. & Molina, M. (Septiembre, 2012). Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. En J. Cardeñoso (Coordinador), *Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico* del XVI Simposio de la SEIEM, Jaén, España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, D. C.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias. Bogotá*, D. C.

Molina, M, (2011). Integración del Pensamiento Algebraico en la Educación Básica. Un Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Años. En M. Martinho (Presidente), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigagáo em Educagao Matemática* EIEM, Sao Paulo, Brasil.

Molina, M., (2004). Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Universidad de Granada, Granada, España.

Molina, M., (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento Algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Ambrose, R., & Castro, E. (2004). In the transition from arithmetic to algebra: misconceptions of the equal sign. *PME, 28*(1), 1-8.

N.C.T.M. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA.

Palarea, M., & Socas, M., (Mayo, 1994). *Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico*. I Seminario Nacional Sobre Lenguaje y Matemáticas.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. *PME 4*(1), 73-80.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid España: Autor.

Rivera, E, & Sánchez, L. (2012). *Desarrollo del Pensamiento Variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de Patrones Numéricos.* Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Socas, M., (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. En M. Machín, Investigación en educación Matemática. Simposio llevado a cabo en el XI SEIEM, San Cristóbal de la Laguna, España.

Socas, M., (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. *Números, 77* (1), 5-34.

Stewart, S., Redlin, R., & Watson, S. (2001). *Precálculo, matemáticas para el cálculo*, tercera edición.

Trujillo, P., (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros*. Universidad de Granada. Granada, España.

Universidad de Antioquia. (2006). *Módulo 2. Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos*. Medellín: Artes y Letras LTDA.

Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6* (2), 150-162.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. APMC, 11(1), 9-14.

Warren, E., Cooper, T. & Lamb, J., (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. doi: 10.1016/j.jmathb.2006.09.006.

ANEXOS

ANEXO 1

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Tomas mauricio ... rodrigues **Grado:** 3.3

Situación 1: La Multiplicación como Patrón.

En el restaurante de Nano, a menudo se utilizan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 4 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas por comensales sentados.

Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

Teniendo en cuenta las mesas para 4 comensales, es decir, con 4 asientos, contesta las siguientes preguntas.

1. a. Escribe la cantidad de comensales que como mínimo se pueden sentar en una mesa.
   b. Escribe la cantidad de comensales que como máximo se pueden sentar en una mesa.
2. ¿Cuántos comensales como mínimo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?
3. ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?
4. ¿Cuantos comensales como máximo se pueden sentar en 10 mesas en 20 mesas?
5. Indica la operación que utilizaste para llegar desde el número de mesas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

1A una mesa una persona
d en una mesa se pueden sentar maximo 4 comesales
10 mesas
2 en dos mesas dos personas en tres mesas tres personas y
en cuatro mesas cuatro personas

ANEXO 2

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Katalina Sarmiento Sanchez **Grado:** 3-3

Situación 1: La Multiplicación como Patrón.

En el restaurante de Nano, a menudo se utilizan mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 4 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas por comensales sentados.

Tarea 1: Comprendiendo la Situación. Cuadrado Quintero

Teniendo en cuenta las mesas para 4 comensales, es decir, con 4 asientos, contesta las siguientes preguntas.

1. a. Escribe la cantidad de comensales que como mínimo se pueden sentar en una mesa.
   b. Escribe la cantidad de comensales que como máximo se pueden sentar en una mesa.
2. ¿Cuántos comensales como mínimo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?
3. ¿Cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos, tres y cuatro mesas?
4. ¿Cuantos comensales como máximo se pueden sentar en 10 mesas en 20 mesas?
5. Indica la operación que utilizaste para llegar desde el número de mesas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

Solución:

1. a) 1 Persona.
   B) 4 Personas.
2. en 2/2 en 3/3 en 4/4 mesas
3. en 2/8 en 3/12 en 4/16 mesas
4. $10 \times 4 = 40$ $\quad$ $20 \times 4 = 80$

ANEXO 3

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: valentina Tabare Trujillo **Grado:** 3 3 c

Foto P1

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	1 x 4	4
2	2x4	8
3	3 x 4	15
4	4 x 4	16
5	5 x 4	21
6	6 x 4	28
7	7 x 4	36
8	8 x 4	44

2. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.

a. Escribe lo que le sucede al número de personas cada vez que aumenta el número de mesas.

b. Escribe la cantidad que se mantiene constante en la tabla.

c. Escribe el número de meses que se necesitan si hay 40 comensales.

d. Indique con 8 mesas ¿Cuántos comensales, máximo se puede sentar?

e. En los casos c y d indica el procedimiento que utilizaste para dar respuesta.

ANEXO 4

Solucion

a cada vez aumentan mas las presenas
b. semanitiene con 4
c. senesitan 10 mesas
d como se multiplica 4x8=32
e en los casos C Y D el p procedimiento fue fue multiplicar

ANEXO 5

	Escuela Normal Superior Farallones de Cali
	UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Katalina Sarmiento Sanchez. **Grado:** 3-3

folo C.

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	1x4	4
2	2x4	8
3	3x4	12
4	4x4	16
5	5x4	20
7	7x4	28
9	9x4	36
11	11x4	44

2. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.

a. Escribe lo que le sucede al número de personas cada vez que aumenta el número de mesas.

b. Escribe la cantidad que se mantiene constante en la tabla.

c. Escribe el número de meses que se necesitan si hay 40 comensales.

d. Indique con 8 mesas ¿Cuántos comensales, máximo se puede sentar?

e. En los casos c y d indica el procedimiento que utilizaste para dar respuesta.

Desarrollo:

2.) A: Se multiplica las Personas.
B: el número 4
C: en 10 mesas se pueden sentar 40 Personas 4x 10=40
D: 32 mesas 8 x 4=32

ANEXO 6

	Escuela Normal Superior Farallones de Cali
	UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Daniela Ayala Patiño

Foto 8-2.

Grado: 3-3

Tarea 3: Tablas y Transformaciones.

Supongamos que en el restaurante, el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa es de 3, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 3 comensales. Contesta las siguientes preguntas.

Falcao
T.Q.M.

James
te amo

1. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información anterior.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	3x1	3
2	3x2	6
3	3x3	9
4	3x4	12
5	3x5	15
6	3x6	18

2. Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas de tres asientos.

3. Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:

a. 15 mesas.
b. 30 mesas.
c. 55 mesas.
d. 100 mesas.

Solución

2 yo Multiplique 3 por cada número, de mesas

3 3x 15 = 45 - Personas 3 x 30 = 90 Personas 3x55 = 165 Personas 3x100 = 300 Persona

ANEXO 7

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Gabriela -y- ana sofia. Soto **Grado:** 3-3

Tarea 3: Tablas y Transformaciones.

Supongamos que en el restaurante, el número máximo de comensales que pueden estar sentados en una mesa es de 3, es decir, que en cada mesa se pueden sentar como máximo 3 comensales. Contesta las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la información anterior.

Número de mesas	Procedimiento	Número de Personas
1	1X3	3
2	2X3	6
3	3X3	9
4	4X3	12
5	5X3	15
6	6x3	18

2. Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas de tres asientos.

Utilizamos la multiplicacion.

3. Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:

a. 15 mesas.
b. 30 mesas.
c. 55 mesas.
d. 100 mesas.

15x3=45 comensales 30X3=90 comensales 55x3=165 comensales 100x3=300 comensales

ANEXO 8

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Gabriela Gómez Quimbayo **Grado:** 3-3

Tarea 4: Comensales vs Mesas.

En el restaurante de Nano, todas las mesas de 4 asientos se llenaron por igual. Teniendo en cuenta que cada mesa de este restaurante tiene el número máximo de comensales, encontrar el número mínimo de mesas que ocupan estos comensales.

1. Indica en cuántas mesas se pueden sentar 4 comensales.
2. Escribe en cuántas mesas se pueden sentar 8 y 12 comensales.
3. Escribe la operación que utilizaste para llegar desde el número de comensales al número mínimo de mesas que pueden usar estos.
4. Completa la siguiente tabla.

Número dePersonas	Procedimiento	Número de mesas
4	4 ÷ 4	1
8	8 ÷ 4	2
12	12 ÷ 4	3
20	20 ÷ 4	5
36	36 ÷ 4	9
40	40 ÷ 4	10
100	25 x 4	25
100	100 ÷ 4	25

5. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.
   a. Indica como varia el número de comensales cuando aumenta el número de mesas.
   b. Indica que número permanece constante en la tabla.

6. Encuentra una expresión que permita encontrar la cantidad de mesas en que se pueden sentar cualquier cantidad de comensalesde tal manera que no sobren asientos.

ANEXO 9

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Gabriela Gómez Quimbayo **Grado:** 3-3

Tarea 4: Comensales vs Mesas.

En el restaurante de Nano, todas las mesas de 4 asientos se llenaron por igual. Teniendo en cuenta que cada mesa de este restaurante tiene el número máximo de comensales, encontrar el número mínimo de mesas que ocupan estos comensales.

1. Indica en cuántas mesas se pueden sentar 4 comensales.
2. Escribe en cuántas mesas se pueden sentar 8 y 12 comensales.
3. Escribe la operación que utilizaste para llegar desde el número de comensales al número mínimo de mesas que pueden usar estos.
4. Completa la siguiente tabla.

Número dePersonas	Procedimiento	Número de mesas
4	4 ÷ 4	1
8	8 ÷ 4	2
12	12 ÷ 4	3
20	20 ÷ 4	5
36	36 ÷ 4	9
40	40 ÷ 4	10
100	25 x 4	25
100	100 ÷ 4	25

5. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.
   a. Indica como varia el número de comensales cuando aumenta el número de mesas.
   b. Indica que número permanece constante en la tabla.

6. Encuentra una expresión que permita encontrar la cantidad de mesas en que se pueden sentar cualquier cantidad de comensalesde tal manera que no sobren asientos.

ANEXO 10

SOLUCIÓN

1. En 1 mesa se pueden sentar 4 comensales.

2. En 2 mesas se pueden sentar 8 comensales y en 3 mesas 12 comensales.

3. Yo utilice la división.

5. a) Aumenta el número de mesas.

b.) El número que permanece es el 4.

6. Dividí el número de comensales por el 4.(número de sillas)

ANEXO 11

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: **Grado:** P.6

Tarea 4: Comensales vs Mesas.

En el restaurante de Nano, todas las mesas de 4 asientos se llenaron por igual. Teniendo en cuenta que cada mesa de este restaurante tiene el número máximo de comensales, encontrar el número mínimo de mesas que ocupan estos comensales.

1. Indica en cuántas mesas se pueden sentar 4 comensales.
   En 1
2. Escribe en cuántas mesas se pueden sentar 8 y 12 comensales.
   En 8 se pueden sentar 2 y en 12 3 personas
3. Escribe la operación que utilizaste para llegar desde el número de comensales al número mínimo de mesas que pueden usar estos. Utilize la suma
4. Completa la siguiente tabla.

Número dePersonas	Procedimiento	Número de mesas
4	4 ÷ 4	1
8	8 ÷ 4	2
12	12 ÷ 4	3
20	20 ÷ 4	5
36	36 ÷ 4	9
40	40 ÷ 4	10
100	100 x 4	25
100	100 ÷ 4	25

5. Contesta las siguientes preguntas con relación a la tabla.
   a. Indica como varia el número de comensales cuando aumenta el número de mesas.
   Si porque en el numero de mesas aumenta
   b. Indica que número permanece constante en la tabla.
   El número 4.
6. Encuentra una expresión que permita encontrar la cantidad de mesas en que se pueden sentar cualquier cantidad de comensalesde tal manera que no sobren asientos.
   Dividi el número de personas por el 4.

ANEXO 12

Lozano 5° Luan

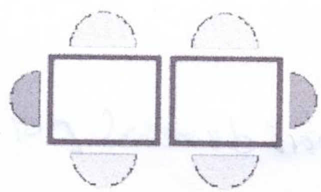
Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: JHOJan DaviD villegas Diaz **Grado:** 3° 3

Situación 2: La multiplicación como Patrón.

En el restaurante de Nano, a menudo se juntas mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo 6 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas juntas por comensales sentados.



Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

1. Indique cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos mesas juntas.
2. Escribe cuántos comensales se puede sentar en tres mesas juntas. Dibújalas.
3. Escribe cuántos comensales, como máximo, se pueden sentar en cuatro, cinco y diez mesas juntas.
4. Indique cómo podría calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas.
5. Escribe la operación que utilizó para llegar desde el número de mesas juntas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

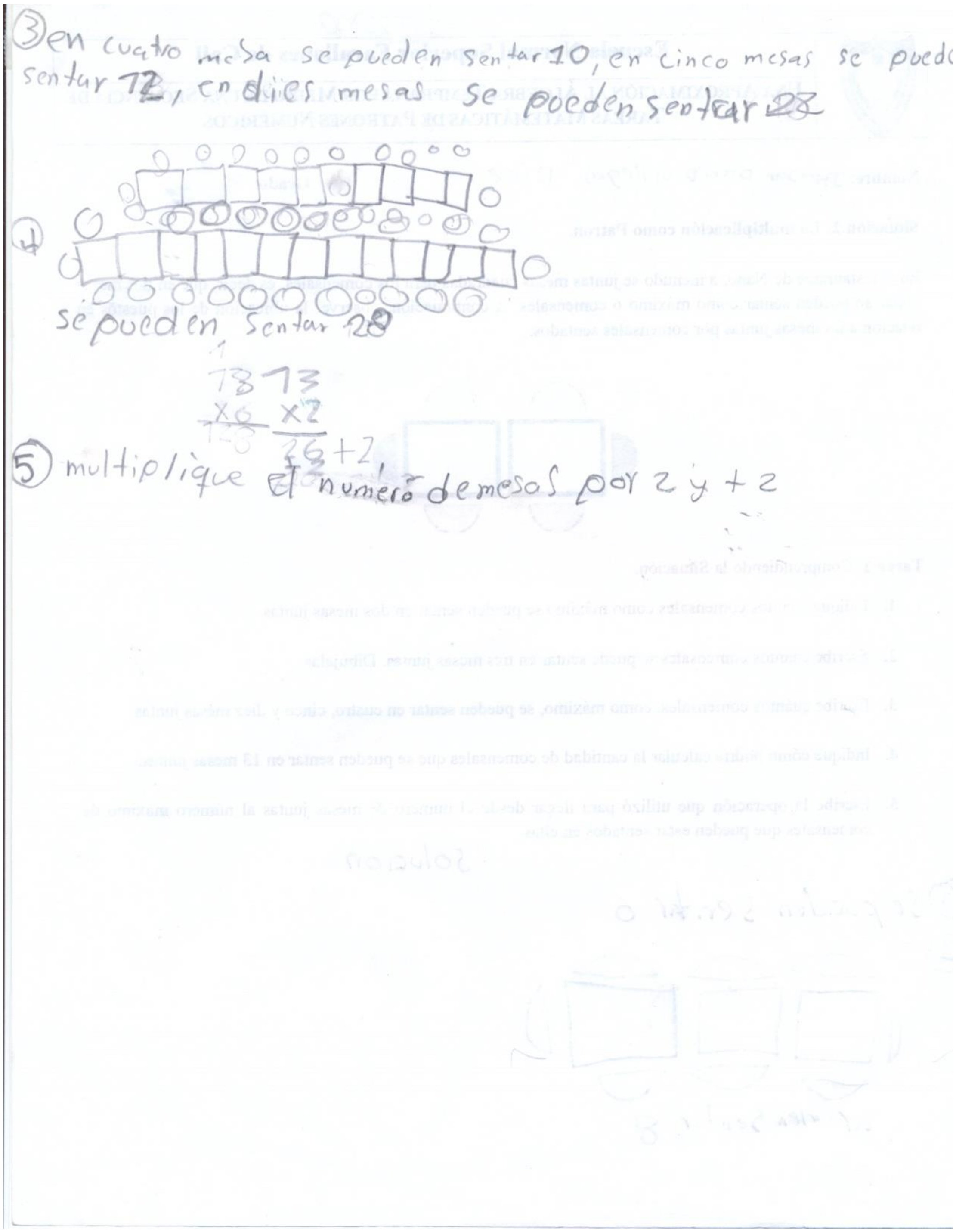
Solucion

(1) Se pueden sentar 6

(2)

sepueden sentar 8

ANEXO 13


3) en cuatro mesa se pueden sentar 10, en cinco mesas se pued sentar 12, en dies mesas se pueden sentar 22

4) se pueden sentar 28

13 x2 = 26 + 2

5) multiplique el numero de mesas por 2 y + 2

ANEXO 14

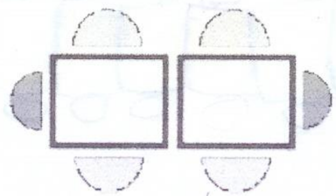
Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: Alexandel salxicu R, vela **Grado:** 3-3

Situación 2: La multiplicación como Patrón.

En el restaurante de Nano, a menudo se juntas mesas cuadradas para los comensales, es decir, que en dos mesas juntas se pueden sentar como máximo 6 comensales. A continuación, observe la ubicación de los puestos en relación a las mesas juntas por comensales sentados.



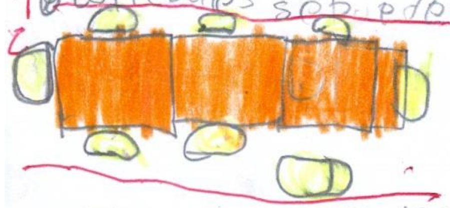
Tarea 1: Comprendiendo la Situación.

1. Indique cuántos comensales como máximo se pueden sentar en dos mesas juntas.
2. Escribe cuántos comensales se puede sentar en tres mesas juntas. Dibújalas.
3. Escribe cuántos comensales, como máximo, se pueden sentar en cuatro, cinco y diez mesas juntas.
4. Indique cómo podría calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en 13 mesas juntas.
5. Escribe la operación que utilizó para llegar desde el número de mesas juntas al número máximo de comensales que pueden estar sentados en ellas.

Desarrollo

1 6 comesules se pueden sentd en 2 mesas

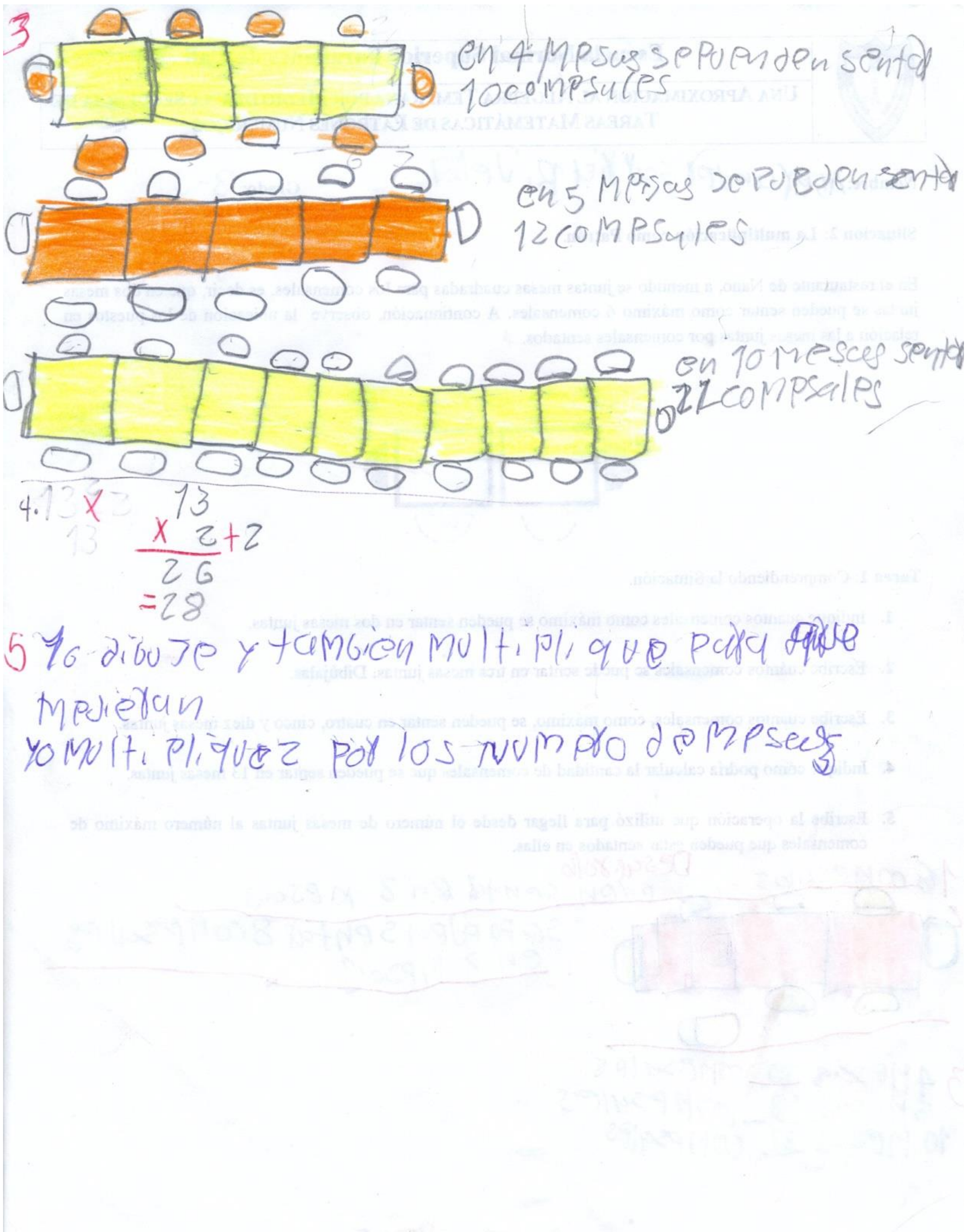
2



se pueden sentar 8 comesales en 3 mesas

3 4 mesas 10 comesales
5 mesas 12 comesales
10 mesas 21 comesales

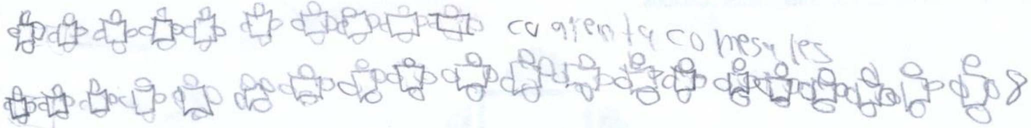
ANEXO 15


3
en 4 mesas se pueden sentar 10 comesales
en 5 mesas se pueden sentar 12 comesales
en 10 meses sentar 22 comesales
4. 13 x 2
13 x 2 + 2
26
= 28
5 Yo dibuje y tambien multipli que para que me dieran
yo multipliqué 2 por los numero de mesas

ANEXO 16

3) en dos mesas do 8 comesales se pueden sentar. en tres 12 comensales
en tes mesa 12 comesales
en cuatro mesas 16 comesales

4



co arenta comesales

8 o comesales

5 Somar encuatro en cuatro

ANEXO 17

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: lorent margoth montaño Arboleda. **Grado:** tercero 3-3

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en mesas juntas:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Representación	Número de Personas
1	1	4
2	1 2	6
3	1 2 3	8
4	1 2 3 4	10
8	1 2 3 4 5 6 7 8	18
9	1 2 3 4 5 6 7 6 9	20
10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	26 22

2. Conteste las siguientes preguntas con relación a la tabla.

   a. Escribe qué sucede cada vez que Nano agrega otra mesa. ¿Cuántas personas más pueden ir sentadas?

   b. Escribe que permanece constante y que varía cada vez que se agrega una mesa.

ANEXO 18

Solución

2a. Va Aumentando el numero de comesales 2 comesales.

2B. los que mantienen constantemente los comesales negros y los que varian son los comesales Blancos Arriba y Abajo

3. el Sumar y multiplicar.

4. multiplicamos 2 Por el numero de mesas y le Sumamos 2.

5. a 17 x 2 = 34 + 2 = 36
B 34 x 2 = 68 + 2 = 70
C 55 x 2 = 110 + 2 = 112
D 100 x 2 = 200 + 2 = 202

ANEXO 19

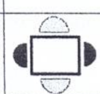
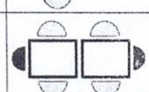
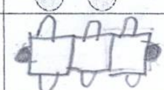
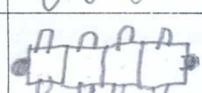
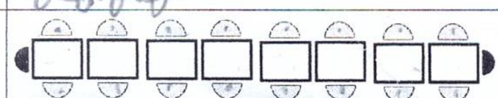
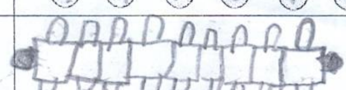
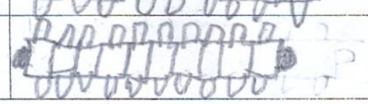
	Escuela Normal Superior Farallones de Cali
	UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

Nombre: ERick Andrey obando Narvaez. **Grado:** 3-3

Tarea 2: Tablas y Transformaciones.

Teniendo en cuenta el número máximo de comensales que pueden estar sentados en mesas juntas:

1. Completa la siguiente tabla.

Número de mesas	Representación	Número de Personas
1		4
2		6
3		8
4		10
8		18
9		20
10		26

voltee la hoja

2. Conteste las siguientes preguntas con relación a la tabla.

   a. Escribe qué sucede cada vez que Nano agrega otra mesa. ¿Cuántas personas más pueden ir sentadas?

   b. Escribe que permanece constante y que varía cada vez que se agrega una mesa.

ANEXO 20

Escuela Normal Superior Farallones de Cali

UNA APROXIMACIÓN AL ÁLGEBRA TEMPRANA POR MEDIO DE UNA SECUENCIA DE TAREAS MATEMÁTICAS DE PATRONES NUMÉRICOS

3. Si Nano te da el número de mesas juntas ¿Cómo puedes encontrar el número máximo de comensales que pueden sentarse? Multiplicar y sumar

4. Encuentra una expresión que permita calcular la cantidad de comensales que se pueden sentar en cualquier número de mesas juntas. el número de mesas el 2 lo multiplicamos por y le sumos 2 de los lados.

5. Usa la expresión encontrada para calcular el número de comensales si hay:

a. 17 mesas.
b. 34 mesas.
c. 55 mesas.
d. 100 mesas.

solución

2 a aumenta en 2 el número de comensales.

b varian los comensales blancos. y permanecen constantes los negros.

5

17	34	55	100
x 2	x 2	x 2	x 2
34	68	110	200
+ 2	+ 2	+ 2	+ 2
36	70	112	202