La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático

CARLOS ADRIÁN ZEA SALDARRIAGA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
SANTIAGO DE CALI
2012

La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático

CARLOS ADRIÁN ZEA SALDARRIAGA

Trabajo de grado presentado al Programa Académico Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática como requisito para optar al título de Magíster en Educación Matemática.

Director

Dr. Luis Cornelio Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
SANTIAGO DE CALI
2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
SANTIAGO DE CALI
2012

CARLOS ADRIÁN ZEA SALDARRIAGA, 1973

La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático

Materias o temas: Historia de las Matemáticas, Educación matemática

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

instituto de educación y pedagogía

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 20 de Abril de 2012
ESTUDIANTE: CARLOS ADRIAN ZEA SALDARRIAGA - CODIGO: 0608205
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: **"LA INSTAURACIÓN HISTÓRICA DE LA NOCIÓN DE VECTOR COMO CONCEPTO MATEMÁTICO"**
DIRECTOR DE TESIS: Profesor LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO
EVALUADORES: Profesora GABRIELA ARBELAEZ ROJAS Profesor PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE
COMENTARIOS DE LOS JURADOS • El trabajo fué bien escrito y fácil de leer.
APROBADO X *APLAZADO* ___ *RECHAZADO* ___

DIEGO GARZON

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO
Director de Tesis

Profesor GABRIELA ARBELAEZ ROJAS
Jurado - Evaluador

Pedro V. Esteban D.

Prof. PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE
Jurado – Evaluador

Prof. DIEGO GARZON CASTRO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones)

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO 5

AGRADECIMIENTOS 9

RESUMEN 10

INTRODUCCIÓN 11

CAPÍTULO 1 16

EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS NOCIONES BÁSICAS DEL ANÁLISIS VECTORIAL 16

1. Dos líneas del desarrollo histórico de la noción de vector 16

1.1 La línea matemática en el desarrollo del análisis vectorial 18

1.1.1 Las tres componentes epistemológicas de la noción de vector 18

1.1.2 Relaciones de los elementos de la triada implícitos en la noción de vector ... 20

1. 1.3 El concepto de una geometría de situación de Leibniz 41

1.2 El proceso de la representación de los vectores 42

1.2.1 La representación de los números complejos y las magnitudes vectoriales 43

1.2.2 La propuesta de representación de complejos de Wallis y Wessel 44

1.2.3 La representación de los complejos a finales del siglo XVII y principios del XIX 48

1.2.4 La representación de los complejos de Jean Robert Argand 50

1.3 La línea física en el desarrollo del análisis vectorial 52

1.3.1 Galileo y el movimiento compuesto 53

1.3.2 Newton y la matematización del movimiento 57

1.3.3 Fourier y la matematización del calor 59

CAPÍTULO 2 63

LOS PROGRAMAS MATEMÁTICOS DE HAMILTON Y GRASSMANN 63
2.1 William Hamilton y el surgimiento del análisis vectorial 64
2.2 Hermann Gunther Grassmann y el surgimiento del análisis vectorial 65
2.2.1 Theorie der ebbe und flut de Grassmann 66
2.2.2 El sistema vectorial de Grassmann 68
2.2.3 Las bases filosóficas del sistema de Grassmann 69
2.2.4 La teoría de las formas aplicada a los vectores 70
2.2.5 Multiplicación exterior de Grassmann 71
2.3 Difusión de los sistemas de Hamilton y Grassmann e incidencia en otras investigaciones 73
2.3.1 Fundamentos del análisis vectorial de Saint-Venant 73
2.3.2 La translación de una magnitud dirigida por Matthew O´brien 75
CAPÍTULO 3 77
LA TRANSICIÓN DE LOS CUATERNIONES A LOS VECTORES 77
3.1 Los cuaterniones de Hamilton 78
3.2 Características de los cuaterniones 81
3.3 Cantidades extensivas de Grassmann 83
3.4 Elementos del análisis vectorial de Gibbs 85
3.5 Aportes de Oliver Heaviside al análisis vectorial 87
3.6 Aportes de William Kingdon Clifford al análisis vectorial 89
3.7 La importancia de la creación de los cuaterniones 91
3.8 Los problemas de recepción y difusión de los tratados de análisis vectorial 91
CAPÍTULO 4 95
TRATADO DE PETER TAIT 95

4.1 Revisión del capítulo I del tratado de Tait: de los vectores y su composición 96

4.1.1 Las cantidades imaginarias como rotaciones 97

4.1.2 La definición formal del vector como objeto matemático 100

4.1.3 La adición de vectores 101

4.1.4 Múltiplo escalar de un vector 103

4.1.5 Componentes de un vector 104

4.1.6 Interpretaciones físicas 105

Las curvas en el espacio 106

La matematización del movimiento. 106

Descripción de la velocidad instantánea 108

4.2 Revisión del capítulo II del tratado de Tait 109

4.2.1 Razones vectoriales 110

4.2.2 Primera forma de representación de un cuaternión 112

4.2.3 Estructura algebraica de los cuaterniones 113

La ley anticonmutativa para la multiplicación de cuaterniones 113

4.2.4 Los $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ en el sistema de Tait 115

4.2.5 Segunda forma de representación de un cuaternión 117

4.2.6 Tercera representación de un cuaternión en forma general 119

Producto de vectores utilizando componentes 119

CAPÍTULO 5 121

CONCLUSIONES 121

5.1 Obstáculo epistemológico en la construcción histórica de la noción de vector 121

5.2 Noción de vector desde diferentes contextos 123

5.3 Problemática histórica presente en la formación los conceptos matemáticos. 128

5.4 Obstáculo epistemológico presente en la noción de vector, desde una concepción geométrica 131

5.5 El principio de permanencia como obstáculo... 132

5.6 Obstáculo epistemológico en la ontología de los números negativos 133

5.7 Importancia de Tait en la historia del análisis vectorial 135

5.8 La presentación axiomática: el obstáculo del formalismo 136

BIBLIOGRAFÍA 139

AGRADECIMIENTOS

Ante todo quiero darle gracias a Dios, a mi esposa y mi hijo Joseph Adrián Zea, por darme cada día fuerzas para seguir luchando y alcanzar las metas que me propongo. Por brindarme su confianza y sus consejos, que sirvieron de ayuda para comprender y entender mejor las cosas. Por darme la fortaleza y el estimulo necesario, para la elaboración de mi tesis. Le pido a Dios que me los proteja, me los bendiga y me los guarde.

Doy gracias a Dios por darme la oportunidad de ser padre de un niño tan inteligente y cariñoso como Joseph Adrián Zea, que es la razón de mi vida y no se alcanza a imaginar cuanto lo quiero.

Gracias a mi madre y a mis hermanas por su apoyo incondicional y sus buenas energías en todo momento de mi vida, que Dios las bendiga y las proteja. Nunca olviden, que las quiero muchísimo.

Muchísimas gracias a mi director de tesis Luis Recalde, por su paciencia e insistencia para iniciar y lo más importante culminar mis estudios. Por ayudar a visualizar las ideas, por enseñarme a tener espíritu de lucha, por sus consejos, colaboración en cada momento de mi vida, por su entrega y compromiso, sobre todo por la calidad de ser humano que lo caracteriza.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se presentan algunos aspectos de la evolución conceptual de la noción de vector. Los resultados se obtuvieron a partir de revisiones con trasfondo histórico-epistemológico. Se establecieron dos líneas de desarrollo histórico: la línea matemática y la línea física. Aunque se analizan algunos aspectos de la línea física, en especial en lo concerniente a la modelación de algunos fenómenos naturales, nos centramos en la línea matemática. Mostramos que la evolución del álgebra genera el ambiente propicio para acoger estructuralmente a estos nuevos objetos de naturaleza no necesariamente numérica. La construcción histórica de la noción de vector se fue manifestando en la medida que se iban identificando elementos de causalidad de la triada: magnitud, dirección y número. En este proceso contribuyeron matemáticos de diferentes entornos geográficos, entre los que sobresalen Euclides, Descartes, Galileo, Newton, Hamilton, Grassmann y Maxwell, entre otros. Dedicamos una parte de la tesis al libro *Elementary Treatise on Quaternions* del matemático y físico escocés Peter Tait porque es un texto clave para entender la instauración del moderno análisis vectorial.

Por último planteamos algunas reflexiones en torno a nuestro análisis histórico-epistemológico, con la finalidad que esta investigación sirva de fuente de consulta, para estudiantes y profesores, como para didactas e historiadores de las matemáticas. Desde esta perspectiva, pudimos identificar la presencia de algunos *obstáculos epistemológicos* que podrían ser utilizados como referencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los cursos de álgebra lineal o análisis vectorial.

Palabras Claves: análisis histórico-epistemológico, vector, cuaternión, obstáculos epistemológicos.

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal, cálculo avanzado, teoría electromagnética, análisis vectorial, entre otros, son cursos primordiales a la hora de entender el proceso de la matematización de algunos fenómenos de la naturaleza. Estos cursos presentan un alto nivel de dificultad para los estudiantes. Una de las razones de esto se debe a la introducción de la noción de vector, el cual involucra un tratamiento operativo y conceptual diferente al que hasta ese momento estaban acostumbrados los estudiantes.

Sabemos que el análisis vectorial es una de las disciplinas más importantes en la matematización de la física. Históricamente, es una rama de las matemáticas poco estudiada. Generalmente, se desconocen los debates y discusiones que se dieron durante muchos siglos para la adopción de la noción vector.

Es poca la bibliografía especializada sobre la evolución histórica del análisis vectorial que circula en nuestro medio. En los libros de historia de las matemáticas típicos como *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* de Morris Kline (Klein, 1992), *Historia de las Matemáticas* de Carl Boyer (Boyer, 1987), *Historia de las Matemática*s de Bourbaki N. (Bourbaki, 1972) y *A History of vector analysis. The evolution of the ideas of a vectorial system* de Michael Crowe (Crowe, 1985), entre otros, encontramos fragmentos dispersos con escaso análisis epistemológico. Estos libros no tienen una presentación secuencial o sistemática del desarrollo de las nociones ligadas al análisis vectorial. Aportar en este sentido, es el objetivo principal de este trabajo de tesis. Desde esta perspectiva, se intenta describir epistemológicamente el desarrollo histórico de la noción *vector* de manera sistemática, de tal suerte que los interesados puedan identificar algunos elementos explicativos, que ayuden en los procesos de aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal y del cálculo vectorial. En otras palabras, se pretende exponer los elementos de causalidad que permitieron la evolución histórica de la noción de vector.

La investigación se realizó a la luz de tres conceptos fundamentales, presentes implícitamente en la noción de vector, que corresponden a la triada: número, magnitud y dirección. Se analizan las relaciones condicionales presentes entre los elementos de la triada y las controversias que se dieron para su conceptualización. La tesis se desarrolla en dos etapas: primero se hace un análisis historiográfico donde se muestra cómo fue surgiendo la evolución de la noción de vector a través de dos líneas como son la matemática y la física; segundo, se hace un análisis epistemológico de la instauración de la noción de vector, mediante el uso de la triada: número, magnitud y dirección, la cual muestra cómo mediante la relación de estos tres aspectos dieron lugar a esta noción. Para el alcanzar el objetivo propuesto se han desarrollado cinco capítulos.

En el primer capítulo: *El Desarrollo Histórico de las Nociones Básicas del Análisis Vectorial*, se describen las primeras huellas de un tratamiento vectorial. Para ello, se identifican dos líneas diferentes pero interrelacionadas, una de ellas proviene principalmente de las matemáticas y la otra de la física.

En la línea matemática, se investiga la relación intrínseca entre *magnitud, dirección* y *número*. En este sentido se muestra que la construcción histórica de la noción de vector se encuentra fuertemente interrelacionada con tres aspectos fundamentales. Para ello se inicia con un seguimiento evolutivo del concepto de número y su representación. Desde esta perspectiva, se toma como referencia la dicotomía entre número y magnitud, seguida por Euclides, el problema de la solución de ecuaciones y la primera representación de las cantidades negativas por parte de Descartes. De igual manera, se analiza la ampliación de los sistemas numéricos, y el nacimiento de una nueva rama de las matemáticas, en el siglo XVII, como lo es el *álgebra*. En este sentido, se empiezan a construir expresiones que permitan describir la modelación de figuras y movimientos, tal como lo propone Leibniz en su *geometría de situación*.

Posteriormente, se aborda la problemática de los diferentes intentos de representación de los números complejos propuestas por John Wallis, Caspar Wessel, Gauss y Argand, entre otros.

En la línea física, presentaremos el desarrollo de una nueva teoría matemática iniciada por Galileo, Newton y Fourier, entre otros, a la hora de intentar matematizar algunos fenómenos de la naturaleza, lo cual dio lugar a la creación de métodos vectoriales tales como el concepto de *paralelogramo de fuerzas y velocidades*.

En el segundo capítulo: *Los Programas Matemáticos de Hamilton y Grassmann*, se describen las dos más fuertes tradiciones que ejercieron una gran influencia en el surgimiento del análisis vectorial moderno.

En el apartado 2.1, se exponen las ideas previas de Hamilton, relativas al descubrimiento del álgebra del cuaternión. Precisamente, el descubrimiento de los cuaterniones acabó con la vieja tradición del álgebra, instaurando el nacimiento de un álgebra moderna que trascendía las viejas leyes operativas.

En el apartado 2.2, se describen las nociones básicas que guiaron a Grassmann en la construcción de su sistema matemático muy similar al de Hamilton, pero un poco más complejo. Los trabajos de Grassmann son de una gran originalidad y su tratamiento vectorial se acerca bastante a los tratamientos modernos.

En el apartado 2.3, se hace la presentación de las ideas primordiales de otros sistemas matemáticos similares al análisis vectorial moderno que fueron fuertemente influenciados en su construcción por los sistemas de Hamilton y Grassmann.

En el tercer capítulo: *La Transición de los Cuaterniones a los Vectores*, se muestran los diferentes aportes proporcionados por los matemáticos a la hora de la formación de la noción de vector que toman como referencia los cuaterniones de Hamilton.

El cuarto capítulo: *Revisión del Tratado* de Peter Tait, está dedicado al análisis de los dos primeros capítulos del libro de Tait, *Elementary Treatise on Quaternions*, el cual es considerado como el texto clave para entender la instauración del moderno análisis vectorial, ya implícito en *Lectures on Quaternions* de Hamilton.

Cabe destacar que Tait fue un seguidor de la producción intelectual de Hamilton, y dedicó muchos años de su vida a difundir las nociones que aparecían oscuras en las publicaciones de Hamilton.

Aquí se ha utilizado la versión francesa del tratado de Tait, la cual fue traducida entre 1882 y 1884 de la segunda edición inglesa de 1873. Ésta presenta varios artículos nuevos, algunas demostraciones de geometría superior, teoremas importantes que no fueron presentados en la primera edición inglesa de 1867.

En el quinto capítulo presentamos algunas conclusiones generales relativas al estudio realizado. Se trata de sintetizar los aspectos más relevantes de la indagación y aventurar algunas hipótesis de índole histórico-epistemológico sobre la noción *vector*.

Para la realización de este trabajo nos hemos centrado en muchos documentos de tipo historiográfico y principalmente nos hemos detenido en tres obras:

1. *A History of Vector Analysis* de Crowe (Crowe, 1985).
2. *Le Nombre Une Hidra Án Visages* de Dominique Flament (Flament, 1997).
3. *ElementaryTreatise on Quaternions* de Tait (Tait, 1873).

Del libro de Crowe hemos utilizado la tercera edición inglesa de 1994. Este texto es considerado de referencia obligada para quien quiera tener un panorama genérico del desarrollo del análisis vectorial. Este trabajo sirvió de base para desarrollar muchos de los aspectos historiográficos plasmados en los primeros cuatro capítulos.

Del libro de Dominique Flament se ha utilizado algunos artículos que tienen relación directa con el objetivo central de este trabajo. Vale la pena destacar, que son artículos de buena profundidad conceptual. Principalmente, se ha tomado como referencia los siguientes artículos:

1. Maxwell *et la traduction intuitive du calcul vectoriel* de Manuel G. Doncel.
2. *Around and around: quaternions, rotations and Olinde Rodrigues* de Jeremy Gray.
3. *“Vecteurs ” ? 151 ans de déloyaux services* de Jacques Lavau.
4. *L´interaction entre les débats sur le statut des nombres négatifs et imaginaires et l´émergence de la notion de segment orienté* de G. Schubring.

Una de las fuentes principales de esta investigación es el libro de Peter Güthrie Tait (1876) titulado *Elementary Treatise on Quaternions*, 1873. En este libro se vislumbra un primer acercamiento de la construcción formal de la noción de vector, a su vez presenta un capítulo en donde se expone las primeras ideas del moderno análisis vectorial.

Es necesario reiterar que la importancia histórica del tratado de Tait no sólo se debe al hecho que contiene muchos conceptos fundamentales del moderno análisis vectorial, sino porque es un libro básico en la socialización del análisis vectorial.

Tait dividió su libro en dos tratados, de los cuales aquí hemos analizado los dos primeros capítulos del primer tratado. De estos capítulos hicimos un estudio epistemológico que nos permitió analizar la primera noción de la noción de vector como clase de equivalencia.

Esperamos que de alguna manera, esta investigación permita a los estudiantes y docentes en ejercicio, tener una mejor aprehensión de la noción de vector. Más allá de un caso particular, se trata de que tomen conciencia de la importancia de los estudios históricos, pues el conocimiento de la evolución histórica de los conceptos nos muestra las razones epistemológicas que han dado lugar a las teorías modernas, lo cual tiene un alto valor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO 1

EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS NOCIONES BÁSICAS DEL ANÁLISIS VECTORIAL

1. Dos líneas del desarrollo histórico de la noción de vector

Históricamente, podemos reconocer dos afluentes importantes en el surgimiento de la noción de vector:

(i) El desarrollo del álgebra como disciplina abstracta que va acogiendo objetos no necesariamente con características numéricas.

(ii) La matematización de algunos fenómenos físicos.

En este orden de ideas, la ampliación de los sistemas numéricos y la fundamentación de su campo teórico permitieron el surgimiento de una nueva concepción de álgebra. A inicios del siglo XIX, el álgebra abstracta cumplían las operaciones de la aritmética básica. Con el objetivo de justificar estas operaciones con expresiones literales que se conservaban en los números irracionales, negativos y complejos, George Peacock (1791-1858) concibió una distinción entre álgebra aritmética y álgebra simbólica. Como primera medida álgebra aritmética trabajaba con símbolos representando los enteros positivos, es decir se permitían operaciones que cumplieran la propiedad de cerradura. Mientras que el álgebra simbólica era un poco más amplia, porque no tenía restricciones a los enteros positivos. En otras palabras, cualquier conjunto numérico debía de seguir cumpliendo este principio, como lo manifestó George Peacock.

Históricamente, el primero que hizo una separación con el principio de permanencia de forma establecido por el álgebra ordinaria de Peacock fue William Hamilton (1805-1865) con la creación de sus cuaterniones al abandonar la ley conmutativa de la multiplicación. A partir de este momento se comienza ampliar la concepción de álgebra existente, propiciando el nacimiento de otras nuevas álgebras las cuales no cumplirían el principio de permanencia de forma.

Aunque, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) sintió la necesidad de implementar la concepción de álgebra de una forma más general, que le permitiera describir las entidades geométricas simbólicamente. Es decir, el álgebra como estaba constituida no decía nada de las construcciones geométricas de una figura, en síntesis buscaba un sistema que sirviera como un método practico a la hora de analizar, interpretar y modelar la naturaleza, el cual permitiera expresar una situación, ángulos y movimientos.

Por otro lado, las primeras huellas de un tratamiento vectorial lo encontramos a principios del siglo XVII, cuando la física exigió a la matemática la descripción cuantitativa del movimiento. En ese momento primaba la tradición explicativa aristotélica, y no se contaba con un aparato analítico para describir un fenómeno tan sencillo como la velocidad.

Uno de los primeros pensadores que se propone este cometido es Galileo, quien establece un tratamiento que se aleja de la tradición aristotélica. En su famoso libro, *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas Sobre Dos Nuevas Ciencias* (Galilei, 1978), Galileo utiliza repetidamente unos diagramas de velocidades, similares a la representación triangular usada por el matemático, italiano, Nicolás Oresme en el siglo XIV. Además, de esta misma época datan los trabajos del matemático holandés Simón Stevin (1548-1620), quien formuló explícitamente el principio del paralelogramo de fuerzas.

En la descripción de la trayectoria del movimiento parabólico, Galileo se dio cuenta que se componía de un movimiento horizontal y otro vertical; para describirlo era necesario combinar estos dos movimientos mediante una nueva operación "*suma*", la cual no se podía realizar por los medios convencionales; había necesidad de incorporar un nuevo método. A partir de aquí, se evidencia un momento histórico donde los matemáticos sienten la necesidad, por un lado de constituir un nuevo campo teórico con sus nuevos entes denominados vectores, los cuales son elementos teórico-prácticos que se mostraron fundamentales en la modelización de fenómenos físicos.

Durante el siglo XVIII, diferentes entidades físicas exigían un cambio de representación debido al surgimiento de cantidades con un nuevo estatus, las cuales no eran representables en el marco estructural existente. En esencia, lo que se buscaba era un lenguaje matemático que describiera algunos fenómenos físicos. En este orden de ideas, Newton se da a la tarea de matematizar la fuerza resultante que es causada por la suma de dos fuerzas individuales aplicables a un cuerpo, este problema lo soluciona mediante la representación del paralelogramo de fuerzas o velocidades. Otros de los aportes importantes de matematización de la naturaleza, en la línea que nos interesa, lo encontramos en *la teoría analítica del calor*, incorporada por el matemático francés Joseph Fourier. En este tratado, Fourier establece relaciones físico-matemática, con un método, en el cual incorpora objetos cuantificadores, pero que no corresponden a números propiamente dichos.

1.1 La línea matemática en el desarrollo del análisis vectorial

Matemáticamente hablando, el desarrollo del análisis vectorial se enmarca en una problemática conceptual de más de veinte siglos que giró en torno a la ontología de los números. El marco del universo numérico se fue ampliando por las exigencias en la búsqueda de soluciones a las ecuaciones. La teoría de ecuaciones evolucionó en la medida que el álgebra se constituía como nueva disciplina matemática, y con la emergencia de la geometría analítica.

Algunas de las nuevas disciplinas matemáticas fueron manifestándose como resultado directo o indirecto de la ampliación de los sistemas numéricos. Para entender un poco este proceso es indispensable que tengamos en cuenta el marco conceptual, que influyó en el desarrollo de las nociones matemáticas. Los aspectos fundamentales de esta discusión se pueden localizar en la antigüedad griega. En este orden de ideas, es importante conocer el desarrollo evolutivo del concepto de número y su representación, como la relación intrínseca entre número, magnitud y dirección, que permitieron el nacimiento de la noción de vector.

1.1.1 Las tres componentes epistemológicas de la noción de vector

Las diversas investigaciones como: Maxwell *et la traduction intuitive du calcul vectoriel* de Manuel G.Doncel (Doncel, 1997), *Around and around: quaternions, rotations and Olinde Rodrigues* de Jeremy Gray (Gray, 1997), *"Vecteurs " ? 151 ans de déloyaux services* de Jacques Lavau (Lavau, 1997) y *L´interaction entre les débats sur le statut des nombres* *négatifs et imaginaires et l´émergence de la notion de segment orienté* de G. Schubring (Schubring, 1997) realizadas en torno a la noción vector, muestran que su construcción histórica se encuentra fuertemente ligada a tres aspectos fundamentales: *Número*, *Magnitud* y *Dirección*. En si cada uno de estos aspectos, a su vez, presentan dificultades en su aprehensión, en la comunicación de saberes y en su enseñanza-aprendizaje causando mayor desconcierto en el momento de entender la construcción formal de la noción de vector.

Precisamente, el problema central que abordamos en esta tesis fue el de realizar un análisis histórico-epistemológico de la evolución de la noción de vector, estableciendo una red de causalidades en torno a las nociones de número, magnitud y dirección. Esto lo haremos mediante el uso de la triada, la cual nos mostrará que la noción de vector se estableció históricamente a partir de las diversas tensiones entre estos tres aspectos, como se muestra en la figura 1.

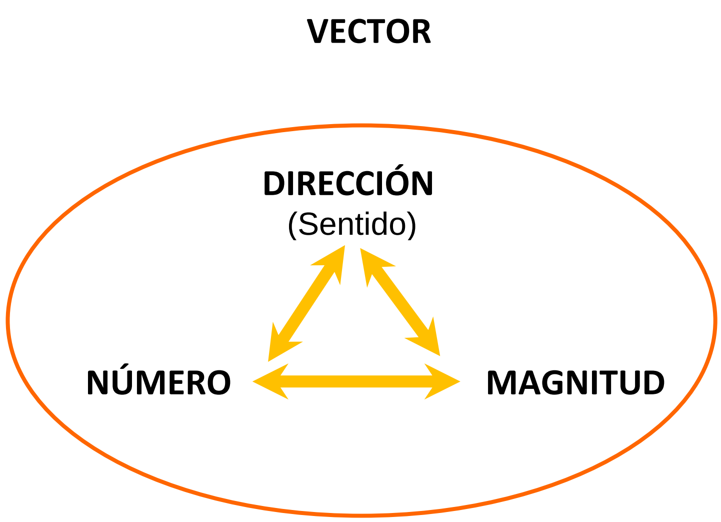
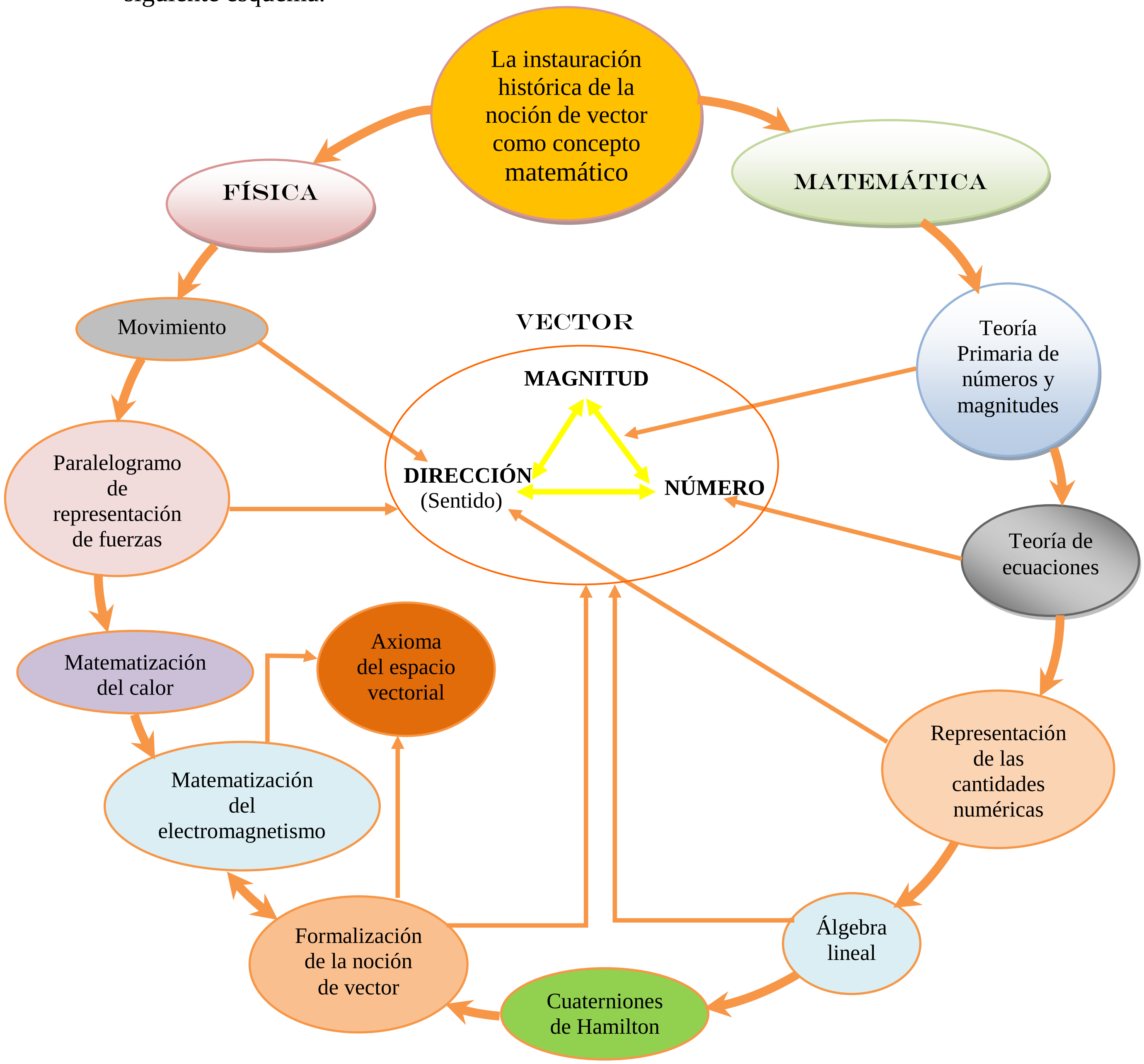


Figura 1. Muestra los elementos de la triada implícitos en la definición formal de vector y las posibles interrelaciones entre dichos elementos.

Estas posibles interrelaciones de la triada nos permitirán acceder un poco a la construcción formal de la noción de vector. En este sentido, pretendemos encontrar otras clases de relaciones entre las componentes de la triada. A su ves, instaurar los elementos de causalidad que propicien una mejor comprensión de la noción *vector*.

Con el objetivo de tener un panorama genérico de la secuencia de esta investigación, podemos ubicar unos grandes momentos en la instauración de la noción de vector en el siguiente esquema.



Vale la pena resaltar que al final profundizaremos en cada uno de estos aspectos.

1.1.2 Relaciones de los elementos de la triada implícitos en la noción de vector

Relación número–magnitud

Antes de abordar esta relación, es necesario analizar de alguna manera la naturaleza ontológica de los objetos matemáticos y el tipo de existencia que ellos poseen. Filosóficamente hablando, se pueden distinguir dos puntos de vista básicos:

i. El realismo platónico (Platón 427-347 a. C.).
ii. El constructivismo nominal aristotélico (Aristóteles 384-322 a. C.).

Desde una visión del realismo platónico, las matemáticas están formadas por un universo de objetos que existen independientemente del mundo fenomenológico y de nosotros. Los objetos matemáticos no necesitan de ningún soporte material y especulativo, para tener vida propia, como lo hace notar Descartes:

> Cuando imagino un triángulo, encuentro que no ha podido estar en ningún lugar del mundo o de mi pensamiento una tal figura, sin embargo, hay una cierta naturaleza de forma, una esencia determinada de esta figura, la cual es inmutable y eterna, que no he podido inventar y que no depende, de ninguna manera, de mi espíritu (Descartes, 1947).

Por otro lado, tenemos el punto de Aristóteles (384-322 a. C.), quien instaura una ontología de los objetos matemáticos en su obra: *Metafísica*. Para Aristóteles, existen tres doctrinas que tienen como finalidad el ser en sus diversas designaciones:

i. ***La física***: se encarga del estudio de los seres de acuerdo a su movimiento, sin importar su esencia ni sus accidentes. Aristóteles era reacio a investigaciones de tipo cuantitativas, su principal interés era el estudio de cualidades sensibles. Es por esta razón que la categoría de la cantidad aparece en un plano secundario.
ii. ***La teología***: estudia el ser en cuanto al ser.
iii. ***La matemática***: estudia los seres pero no en cuanto a su movimiento, sino simplemente en cuanto son cuerpos ya sea sin ninguna dimensión, de una dimensión, de dos dimensiones o de tres dimensiones.

Para Aristóteles los objetos matemáticos son seres abstractos, desposeídos de materialidad, accidentales e inmóviles. Accidentales porque provienen del mundo físico. Los objetos matemáticos son construidos por medio de un ejercicio mental de abstracción y generalización llamada *aphairesis*, en el cual el matemático elimina las propiedades sensibles, quedándose únicamente con aquellas que tienen que ver con la cantidad y la forma.

Basado en el enfoque del constructivismo nominal aristotélico, Euclides desarrolló su programa matemático; es necesario tener en cuenta esto para entender el manejo que le dio Euclides a la teoría de números y magnitudes. Euclides las presenta bien diferenciadas en dos líneas teóricas. No obstante, intentó construir vías de contacto entre ellas; concretamente, entre las magnitudes conmensurables y los números.

A finales del siglo IV los pitagóricos, consideraban los números como la naturaleza sustancial de las cosas o como su origen, como lo afirma Aristóteles en esta cita:

> En tiempo de estos filósofos y antes que ellos, los llamados pitagóricos fueron los primeros que, dedicados a las matemáticas, impulsaron esta ciencia. Absorbidos por los estudios de la matemática, llegaron a creer que los principios de los números eran los principios de todos los seres. (Aristóteles, 1999)

Desde este enfoque, la tesis pitagórica planteaba que el "número" es una estructura determinada, descriptible aritméticamente, que está inmersa en las cosas y constituye su naturaleza propia. En esencia, el pensamiento pitagórico planteaba que la naturaleza de las cosas hay que reducirla al "número" a las leyes determinables numéricamente. Es decir, en las cosas hay una estructura determinada por números a manera de una construcción aritmética, que permite reconocer cualidades inherentes a las cosas. Desde este punto de vista, los números constituyen la base de la medida de todas las cosas.

La propuesta de Euclides era sistematizar todos los conceptos matemáticos existentes; su libro, *Elementos,* responde a una necesidad teórica de la cual él es el intérprete. Precisamente, lo axiomático constituye la base primordial del modelo euclidiano, el cual sirve para dar respuesta a la problemática surgida, por un lado, con la aparición de las magnitudes inconmensurables y, por otro, con la emergencia de las paradojas de Zenón de Elea (489?-430 a. C.). Estas paradojas, evidenciaron el problema que conlleva a la descomposición de un segmento finito en un número ilimitadamente creciente de partes.

Sea un segmento finito de 0 a 1 y $1/2$ su punto medio; ahora procedemos a señalar el nuevo punto medio $1/4$ del segmento de $1/2$ a 1, y así ilimitadamente, como lo muestra la figura 2:

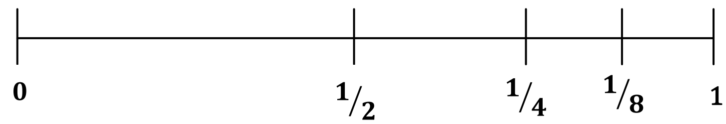


Figura 2: Muestra la descomposición de un segmento finito de 0 a 1 en un número indefinido de partes.

De la figura 4, tenemos que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$, "es una suma infinita de términos". Aquí evidenciamos, de acuerdo a las concepciones aristotélicas, que la primera experiencia de adición y divisibilidad infinita en la matemática y en la física nos conduce a paradojas.

Con la aparición de las magnitudes inconmensurables en los procesos de medición, la concepción de número se complica. Por esta razón, se ve necesario hacer un estudio de su naturaleza ontológica.

El problema de lo inconmensurable tiene sus antecedentes en la escuela pitagórica. Una de las primeras evidencias de las magnitudes inconmensurables corresponde a la medida de la diagonal D, del cuadrado con uno de sus lados L. Utilizando reducción al absurdo, se demuestra que no se pueden encontrar dos números, n y m tales que $nD = mL$. Otro ejemplo, aparece cuando se requiere medir de la diagonal de un pentágono regular con uno de sus lados, que da lugar a la razón continua, llamada *razón áurea*. Esta demostración utiliza un procedimiento denominado *Antiphaeresis*[1], el cual es el proceso de encontrar la mayor magnitud que mida a otras dos magnitudes dadas. Este proceso, aplicado a los números se utiliza para encontrar el máximo común divisor entre dos números aplicando el algoritmo de Euclides para la división, como se muestra a continuación:

Sean a, b números y $a > b$, debemos de encontrar el máximo común divisor entre ellos, procedemos de la siguiente manera:

[1] De una manera formal se encuentra en el libro VII de los *Elementos* de Euclides para los números y en el libro X para las magnitudes.

Si dividimos a entre b, por el algoritmo de la división, tenemos que $a = b.c_1 + r_1$, donde c_1 es el primer cociente y r_1 el primer residuo. Despejando r_1, tenemos que: $r_1 = a - b.c_1$. Ahora si dividimos a entre r_1 y por el método de recurrencia, tendremos lo siguiente:

$$\begin{gathered} r_1 = a - b.c_1 \\ r_2 = b - r_1.c_2 \\ r_3 = r_1 - r_2.c_3 \\ r_4 = r_2 - r_3.c_4 \\ . \\ . \\ . \\ r_n = r_{n-2} - r_{n-1}.c_n \end{gathered}$$

De lo anterior podemos concluir:

i. Si $r_1 = 0$, entonces el MCD de los números dados a y b es a.
ii. $r_n = 0$, donde $n > 1$, entonces el MCD de los números a y b es r_{n-1}.

Este mismo proceso se puede aplicar a las magnitudes, cuando necesitamos hallar la mayor magnitud que divida a otras dos magnitudes dadas, así:

Sean XY y WZ segmentos y $XY > WZ$, debemos de encontrar el máximo común divisor entre ellos, procedemos así:

Al segmento XY le restamos el segmento WZ nos queda el segmento KT, como lo muestra la figura 3:

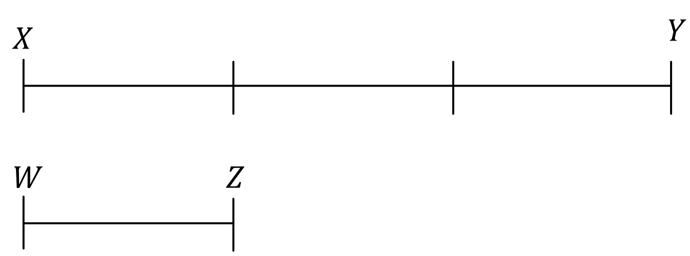


Figura 3 Muestra como Euclides media el segmento XY mediante una comparación sucesiva con el WZ

Ahora si $WZ < KT$, le restamos el segmento WZ al segmento KT, si sobra continuamos este proceso, así sucesivamente. Después de todo este proceso anterior, si llegamos a un segmento $UV < WZ$, por el algoritmo de la división, podemos decir que existe un número t talque $XY = tWZ + UV$. De aquí concluimos que:

(i) Si $UV = 0$, se puede decir que WZ mide a XY un número exacto de veces.

(ii) Si $UV \neq 0$, entonces WZ no mide a XY un número exacto de veces.

En esencia, el proceso mediante el cual se miden dos magnitudes se llama *Antanairesis*; consiste en comparar dos segmentos, a y b, y determinar las veces que uno de los segmentos está contenido en el otro. Si sobra un pedazo de segmento se sigue comparando; en caso de que este proceso finalice en un número finito de pasos, se denominan magnitudes conmensurables; pero en caso contrario, se denominan magnitudes inconmensurables.

Modernamente, los segmentos A y B son conmensurables si existe n y m tales que:

$$nA = mB.$$

En caso contrario, son inconmensurables si para todo n, m cumple que:

$$nA \neq mB.$$

En estas consideraciones aparece un tratamiento opuesto entre los números (*arithmos*) y las magnitudes continuas (*megethos*); entre lo aritmético y lo geométrico. Esto es debido a la concepción filosófica de la naturaleza ontológica del número que enmarca unos lineamientos a seguir. El número es finitamente divisible y la magnitud lo es de manera infinita. En este sentido, para Aristóteles, la matemática constituye una doctrina teórica que da cuenta de la cantidad. Concibiendo por cantidad, aquello que es divisible en elementos constitutivos. Desde esta perspectiva, Aristóteles reconoce dos tipos de cantidades:

i. Los números que son divisibles en partes no continuas.
ii. Las magnitudes que pueden dividirse en partes continuas.

En este orden de ideas, la filosofía aristotélica está marcada por un precipicio conceptual entre lo geométrico y lo aritmético. De esta filosofía se nutrió Euclides para constituir sus postulados, definiciones y axiomas. Es por esta razón, que Euclides sigue la misma disparidad entre estos dos conceptos, tanto así que desarrolló una teoría para cada uno. Por ejemplo, en el libro V desarrolló la teoría para magnitudes, mientras que el libro VII la hace para números[2]. Sin embargo, es de singular importancia, en la línea de indagación que nos

---

[2] Vale la pena resaltar que en los libros VII, VIII y IX, Euclides trabaja la aritmética, estableciendo de alguna forma en términos modernos las operaciones y razones entre números naturales y sus propiedades, como lo plantea Luis Recalde en su libro *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, 2001.

convoca, constatar un tratamiento operacional entre los números y las magnitudes, muy semejante al producto entre vectores y escalares. Este tratamiento se percibe fundamentalmente en el libro V, que lo dedica al estudio de las magnitudes. Los conceptos base de este capítulo son los de razón y proporción.

> **Definición V.3**: Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad. (Euclides, 1999, pág. 787).

En esta definición se evidencia que la razón entre dos magnitudes establece una relación cuantitativa entre ellas.

> **Definición V.4**: Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere la otra (Euclides, 1999, pág. 787).

En esta definición, la operación de multiplicar una magnitud se refiere a tomar un número determinado de copias de ella: Si A representa un segmento, nA significará:

$$\underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{n \text{ veces}}$$

En este sentido, la definición 4 expresa que dos magnitudes A y B tienen razón si existe un número n, tal que $nA > B$. Además, modernamente podemos ver que esta multiplicación esboza, de alguna manera, la operatividad entre entidades diferentes: los números y las magnitudes. Aunque Euclides no utiliza la simbología moderna ni la conceptualización moderna, podemos vislumbrar una prefiguración de la multiplicación de un vector por un escalar. Este aspecto va a tomar fuerza en la definición de proporción:

> **Definición V. 5**: Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda, es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta (Euclides, 1999, pág. 787).

Esta definición manifiesta que si tenemos cuatro magnitudes A, B, C y D, entonces A y B están en la misma razón que C y D, cuando para todo p y q se establece lo siguiente:

i. Si $p\,A > qB$ entonces, $p\,C > qD$.

ii. Si $p\,A = qB$ entonces, $p\,C = qD$.

iii. Si $p\,A < qB$ entonces, $p\,C < qD$.

En el mismo sentido anterior, si pensamos en el universo de los segmentos euclidianos y su respectivo universo numérico, podemos vislumbra, en las primeras cuatro proposiciones del libro V, propiedades de los espacios vectoriales:

> **Proposición V.1**: Dado cualquier número de magnitudes, sean cuales fueran. Equimúltiplos de otras magnitudes en igual número, cualesquier que fueren las veces que de una de ellas sea múltiplo de alguna, ese múltiplo será de todas las demás (Euclides, 1999, pág. 790).

El enunciado de la proposición V.1 puede ser traducido, como la ley distributiva de la multiplicación de un escalar sobre la suma de vectores:

$$mA + mB + mC = m(A + B + C).$$

> **Proposición V.2**: Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera lo es de una cuarta y una quinta es el mismo múltiplo de la segunda, que una sexta lo es de una cuarta, la primera y la quinta juntas serán el mismo múltiplo de la segunda que la tercera y la sexta lo son de la cuarta (Euclides, 1999, pág. 790).

Esta proposición muestra en forma moderna la propiedad distributiva de la suma de escalares con respecto a la multiplicación por un vector.

$$mA + nA = (m + n)A$$

> **Proposición V.3**: Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta (Euclides, 1999, pág. 790).

Este enunciado puede ser traducido, como la ley asociativa de la multiplicación de escalares:

$$n(mA) = (n.m)A$$

> **Proposición V.4**: Si una primera magnitud tiene con una segunda, la misma razón que una tercera con una cuarta, los equimúltiplos de la primera y la tercera tendrán la misma razón que los de la segunda y la cuarta tomados en su orden (Euclides, 1999, pág. 790).

Modernamente, proposición V.4 es:

Si $A : B = C : D$, entonces $mA : nB = mC : nD$.

> **Proposición V.5**: Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra, que una magnitud restada a la primera lo es de otra restada a la segunda; la magnitud que queda de la primera será también el mismo múltiplo de la magnitud que queda de la segunda que la magnitud entera de la magnitud entera (Euclides, 1999, pág. 790).

En términos modernos el enunciado de la proposición V.5 puede ser visto, como:

Si $A : B = C : D$, entonces $A : B = A - C : B - D$

De las proposiciones anteriores del libro *Elementos* de Euclides, podemos concluir que si se interpreta de manera conveniente, constituye una de las propiedades del producto entre escalares y vectores.

Esa forma de combinar números y magnitudes es utilizada por Euclides para desarrollar su teoría de magnitudes. Incluso en el libro X, proposición 5, establece una correspondencia explícita entre lo aritmético y lo geométrico, como se nota en la siguiente proposición:

> **Proposición X.5**: Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número (Euclides, 1999, pág. 791).

Fue a principios del siglo XIX que René Descartes (1596-1650), en su libro *La Geometría*[3] concibe una relación intrínseca entre número y magnitud. Descartes, estableció que las magnitudes lineales, al igual que los números, no sólo se pueden sumar y restar, sino además multiplicar, dividir y extraerle la raíz cuadrada. Para ello introduce un segmento unidad, con el fin de dotar a los segmentos de una operatividad aritmética, como a los números y es aquí donde empieza a operar las magnitudes al igual que a los números. Esto lo hace aplicando la *Teoría de Proporciones de Euclides.*

[3] (Descartes, 1947).

René Descartes y la representación geométrica de cantidades negativas

Esta relación se dio gracias a la necesidad de representar las cantidades negativas en un sentido opuesto al positivo. La representación de las cantidades negativas fue incorporada por Descartes en la solución de las ecuaciones de tercer grado; esto lo hace en el libro III, cuando se propone solucionar el problema de la trisección del ángulo a partir de parábolas, círculos y sólidos. Es aquí donde se vislumbra una clara evidencia de la adopción de las raíces negativas como solución de ecuaciones. Desde esta perspectiva, estas raíces son aceptadas de un modo operativo, simplemente como cantidades, sin el estatuto de número.

Con Descartes se amplía el campo numérico en cuanto a su representación y operatividad, porque empieza a vislumbrar la posibilidad de la existencia de otros tipos de números, a parte de los positivos con una ontología propia.

Descartes inicia su proyecto geométrico definiendo una operatividad para las magnitudes semejante a la de los números. Para ello ve la necesidad de introducir una nueva magnitud, la cual llamó ***unidad***. Ésta le permitió trasladar las operaciones de los números al campo de las magnitudes, como se evidencia a continuación.

Para el producto de dos segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AC}}$, se define con base a la cuarta proporcional. Es decir, con respecto a los segmentos dados, se traza el segmento $\overline{\boldsymbol{BE}}$ paralelo al segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ y se define el segmento $\overline{\boldsymbol{AD}}$ como la unidad. De acuerdo a la figura 4, por teoría de proporciones, se tienen que:

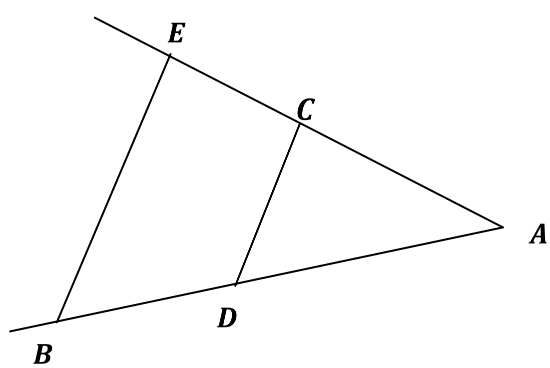


Figura 4: Muestra como Descartes realizaba la multiplicación de dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, mediante la utilización del segmento unidad $\overline{AD}$ y la Teoría de Proporciones.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

Luego por ley fundamental de las proporciones tenemos que: $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ Como $\overline{AD} = 1$, sustituyéndolo en la ecuación anterior, entonces se tiene que $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

Posteriormente, para la división de dos segmentos Descartes busca encontrar la cuarta proporcional de acuerdo a la figura 5:

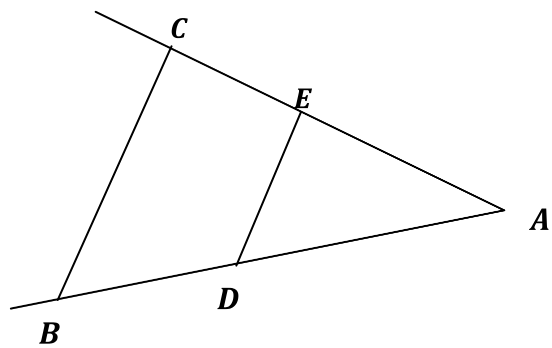


Figura 5: Muestra como Descartes realizaba la división de dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, mediante la utilización del segmento unidad $\overline{AD}$ y la Teoría de Proporciones.

Por teoría de proporciones aplicado a la figura 5, se tiene que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, sustituyendo $\overline{AD} = 1$, se tiene: $\overline{AE} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

Adicionalmente, utilizó su método para extraer la raíz cuadrada a un segmento $\overline{AB}$. Tomando como segmento unidad $\overline{BC} = 1$, se traza el segmento $\overline{AC}$, tal que $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. A continuación, se dibuja una semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AC}$, como muestra la figura 6, así:

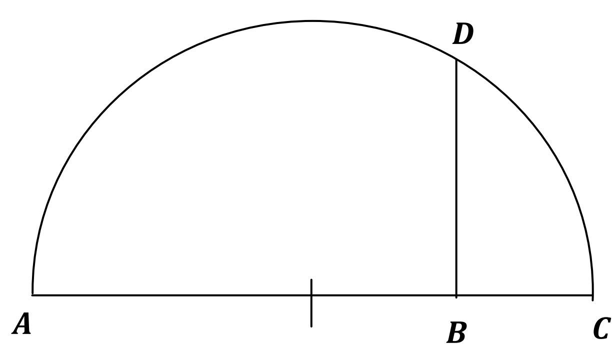


Figura 6: Muestra como Descartes extrae la raíz cuadrada a un segmento $\overline{AB}$, mediante la utilización del segmento unidad $\overline{BC}$ y la Teoría de Proporciones.

Por Teoría de Proporciones tenemos que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$, aplicando la ley fundamental de las proporciones, tenemos que: $\overline{BD} . \overline{BD} = \overline{AB} . \overline{BC}$[4], o lo que es lo mismo $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}}$, dado que $\overline{BC} = 1$.

Descartes utiliza esta maquinaria de la teoría de las proporciones y el álgebra de representación de segmentos para la solución de ecuaciones algebraicas. En otras palabras, por medio de la geometría analítica, se instaura un poderoso método de solución de ecuaciones.

La búsqueda de procesos algorítmicos mediante los cuales resolver ecuaciones cúbicas, y de mayor grado, abrió el camino para el fortalecimiento del álgebra, como una nueva rama de las matemáticas. A través de esta disciplina, se amplía el marco de las operaciones de la aritmética básica, y a su vez propicia el desarrollo de una nueva simbología a la hora de representar los nuevos números. Aunque estos son aceptados de un modo operativo, colocando en cuestión su naturaleza ontológica.

En el siglo XVI, proliferan las investigaciones y los debates en torno a la solución de ecuaciones polinómicas de grado n, de la forma $Pn(x) = 0$. Esto dio lugar a debates y discusiones de varios matemáticos italianos de la talla de Nicolo Fontana (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576)[5] y Rafael Bombelli (1526-1573), centrando sus esfuerzos en encontrar algoritmos que resolvieran ecuaciones cúbicas.[6] Precisamente Cardano, encontró soluciones complejas, pero las rechazó por no encontrarles ninguna aplicabilidad ni ninguna representatividad geométrica. Por su parte Nicolo Fontana, conocido como Tartaglia, ha pasado a la posteridad como uno de los más grandes algebristas, pues fue el primero en conseguir un algoritmo para la solución de las ecuaciones cúbicas. Sin embargo, no tuvo claridad respecto a las soluciones negativas y complejas. En este sentido, los aportes de Descartes fueron decisivos.

---

[4] Algunos historiadores interpretan la definición V.9 de los *Elementos* de Euclides: *si tres magnitudes están en proporción, se dice que la primera tiene una razón duplicada de la que tiene la segunda*, como una definición del producto entre magnitudes.
[5] Estos métodos de solución de ecuaciones de Cardano (1501-1576) aparecieron sistematizados en su libro *Ars Magna*.
[6] Niccolo Tartaglia (1500-1557) las resuelve llevándolas a una simbología algebraica particular (Recalde, 2001, pág. 104).

En primer lugar, Descartes resuelve ecuaciones de segundo grado, $x^2 = \pm\ a x + b^2$, donde a, b son cantidades lineales. Para ello, construye un triángulo rectángulo ABO de lados $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$ y b; luego traza una circunferencia con centro en O y radio $\overline{\boldsymbol{OA}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$, donde la línea b es la tangente a ella, como muestra la figura 7:

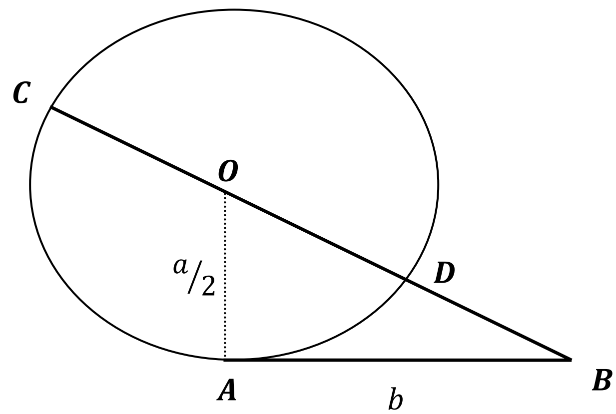


Figura 7: Muestra como Descartes resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = \pm\ a x + b^2$, donde a, b son cantidades lineales, mediante la utilización de segmentos formados por tangentes y secantes.

Entonces, el segmento $\overline{\boldsymbol{CB}}$ corresponderá a la solución x, pues dado que el segmento $\overline{\boldsymbol{DB}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, se tendrá por medio de segmentos formados por tangentes y secantes que $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$ [7]. Este es un proceso que permite obtener, de una forma geométrica, las soluciones positivas de una ecuación.

Posteriormente, Descartes resuelve la ecuación de la forma $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$, para ello traza una circunferencia de radio $\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$, como muestra la figura 8:

---

[7] Para llegar a esta ecuación algebraica Descartes utiliza la proposición 36 del libro III de los *Elementos:* "*Si desde un punto exterior a un círculo le trazan dos rectas, una de las cuales lo corta y la otra solo lo toca, el rectángulo comprendido por toda la recta secante y su parte exterior entre el punto y la periferia convexa del círculo equivale al cuadrado de la tangente*". En otras palabras, si se trazan un segmento tangente y un segmento secante desde un punto exterior a un circulo, entonces, el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

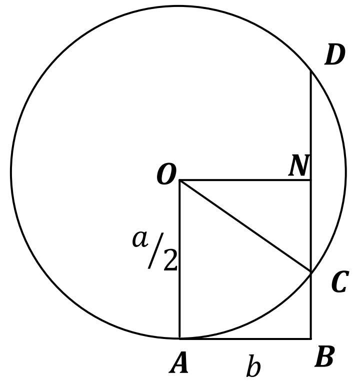


Figura 8: Muestra como Descartes resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma $x(x-a)+b^2=0$, donde a, b son cantidades lineales, mediante la utilización de segmentos formados por tangentes y secantes.

Desde el punto A de la circunferencia, se traza el segmento tangente $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$. Supongamos ahora el segmento $\overline{\boldsymbol{BC}} = \boldsymbol{x}$, entonces $\overline{\boldsymbol{NC}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x}$, y dado que el triángulo ONC es rectángulo, además $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{ON}} = \boldsymbol{b}$, tenemos que:

$$\overline{\boldsymbol{OC}}^{\,2} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x}\right)^2 + \boldsymbol{b}^2 = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

Resolviendo la ecuación anterior, tenemos que:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} - \sqrt{\frac{\boldsymbol{aa}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{bb}}$$

Ahora de acuerdo a la figura 10, tomamos $\overline{\boldsymbol{BD}} = \boldsymbol{x}$, entonces $\overline{\boldsymbol{ND}} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$, $\overline{\boldsymbol{OD}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$ y dado que el triángulo ONC es rectángulo, tenemos que:

$$\overline{\boldsymbol{OD}}^{\,2} = \left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \boldsymbol{b}^2 = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)^2$$

Para que los casos anteriores tengan sentido deberá cumplirse que $a/2 \geq b$; en caso contrario, las soluciones de las ecuaciones serían raíces imaginarias, las cuales carecerían de representación geométrica. Descartes tomaba las raíces imaginarias como cantidades necesarias para la solución de ecuaciones.[8] Vale la pena recordar que Girolamo Cardano

---

[8] Descartes dice: "si el círculo que tiene su centro en O y pasa por el punto A no toca ni corta la línea BCD, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que pueda asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible". Luis Recalde, *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, Pág.133.

(1501-1576) en 1845, solucionó un problema algebraico que consistía en encontrar dos números cuya suma era 10 y cuyo producto fuera 40. Cardano planteó una solución formal del problema, que suministraba la raíz cuadrada de un número negativo denominados *números ficticios* y comprobó efectivamente que cumplieran las propiedades requeridas. Aunque los números imaginarios aparecieron en el álgebra en la solución de ecuaciones, los progresos en su tratamiento no se dieron en el álgebra, sino bajo la influencia de las necesidades imperiosas del análisis matemático. Precisamente, en los marcos del análisis gradualmente se buscaban e introducían las reglas de las operaciones formales con los números imaginarios y complejos.

La representación de cantidades negativas fueron incorporadas por Descartes en la solución de las ecuaciones de tercer grado; esto lo hace en el libro III, cuando se propone solucionar el problema de la trisección del ángulo, como lo detallamos a continuación.

Se desea trisecar el ángulo $\prec AOD$; entonces tracemos el arco AD de la circunferencia unitaria. Aplicando el Método Analítico de Descarte, suponemos el problema resuelto y luego procede a definir:

Sea $\overline{\boldsymbol{AD}} = \boldsymbol{b}$ la cuerda conocida y $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{x}$ la cuerda desconocida, como se muestra en la figura 9:

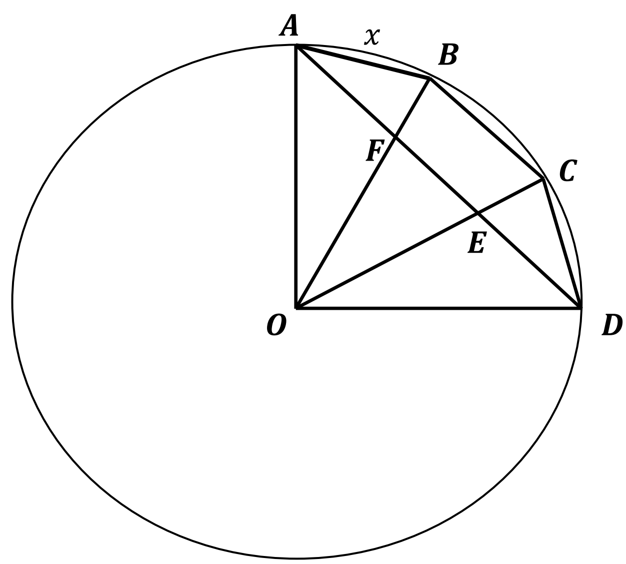


Figura 9: Muestra como Descartes resuelve ecuaciones de tercer grado, cuando se propone solucionar la trisección del ángulo $\prec AOD$.

De acuerdo a la construcción se tiene, $\Delta\, OAB \sim \Delta\, AFB,$ por semejanza de triángulos, resulta:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BO}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{BF}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}}$$

Como $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{x}$ y $\overline{\boldsymbol{OB}} = \mathbf{1}$, entonces por ley fundamental de las proporciones, tenemos que: $\overline{\boldsymbol{BF}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$.

Similarmente se tiene que $\Delta\, OFE \sim \Delta\, OBC,$ por semejanza de triángulos, nos da:

$$\frac{\overline{\boldsymbol{OB}}}{\overline{\boldsymbol{OF}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{BC}}}{\overline{\boldsymbol{FE}}}$$

Luego por sustitución $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\overline{\boldsymbol{FE}}}$. y reemplazando el segmento $\overline{\boldsymbol{FE}} = \boldsymbol{q}$, ahora por ley fundamental de las proporciones, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{q}$$ [9]

Descartes notó que esta ecuación no satisfacía la solución a lo Tartaglia, entonces, procedió a solucionarlo por medio de parábolas, círculos y sólidos[10], de la siguiente manera:

Sea AFG la trayectoria la parábola, descrita por la ecuación $y = x^{2}$, donde y es el eje de la parábola. Supongamos los segmentos $\overline{\boldsymbol{AC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, $\overline{\boldsymbol{CD}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{2}}$, $\overline{\boldsymbol{EF}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$. Tracemos el segmento $\overline{\boldsymbol{DE}}$ por el punto *D*, perpendicular al eje de la parábola e igual a $\frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{2}}$. Ahora con radio $\overline{\boldsymbol{EA}}$ y centro en E se traza la circunferencia *AFG*, como se muestra en la figura 10:

[9] Descartes aplicó el método de Tartaglia para solucionarlo.

[10] La elección de curvas para la resolución geométricas de las ecuaciones fueron tomados de la geometría analítica. Esto se debió porque permitían con mayor facilidad resolver ecuaciones algebraicas a partir de la construcción de curvas. Por ejemplo, L´Hopital, Sterling, Bernoulli, Newton, Cramer y Fourier, entre otros, llegaron a la idea de construir las raíces de la ecuación, $\boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$. Como los puntos de intersección de la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} + \cdots + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{x}$, y la recta $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}$. Posteriormente, estas construcciones se basaron en la suma de las curvas: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$,…, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}$.

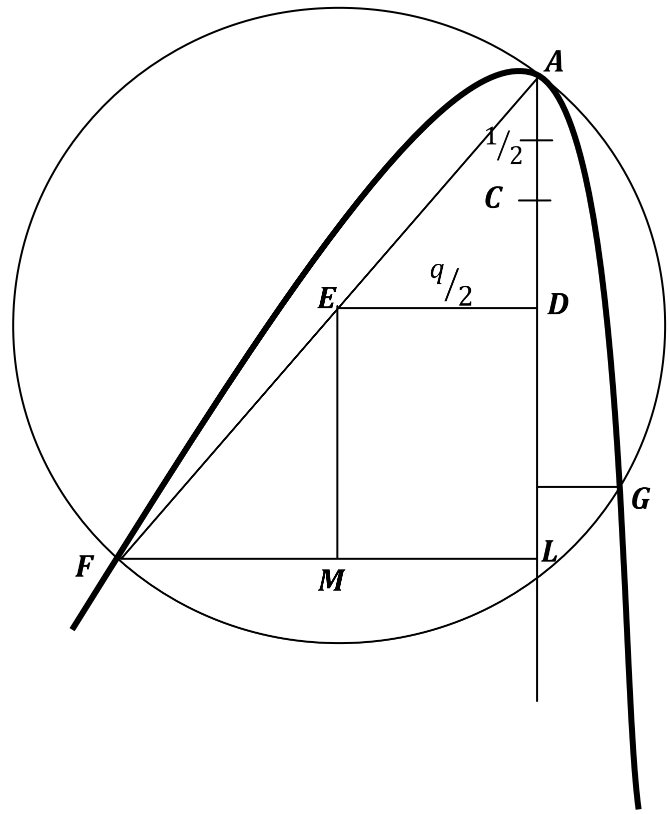


Figura 10: Muestra como mediante la utilización de parábolas, círculos y sólidos. Descarte dio solución a la ecuación $x - x^3 = a$.

Las raíces de la ecuación están dadas por las líneas perpendiculares al eje de la parábola trazadas desde los puntos de intersección entre la parábola y la circunferencia, tal es el caso de los puntos F y G.

Observando la gráfica podemos dar cuenta de los sentidos de ubicación de estos puntos, los cuales son opuestos; aquí se vislumbra una clara evidencia de la adopción de las raíces negativas como solución de ecuaciones. Desde esta perspectiva, estas raíces son aceptadas de modo operativo, simplemente como cantidades, sin estatuto de numérico.

Vale la pena resaltar que Girolamo Cardano (1501-1576), no sólo admite en su libro *Ars Magna*, el concepto de los números negativos, sino que formula las leyes que los gobiernan. Además, predice otro tipo de número que denominó *ficticio* o *sofisticado*, correspondiente a la raíz cuadrada de un número negativo.

Posteriormente, el matemático francés Girard Desargues (1591-1661) en 1629, propuso que las soluciones absurdas de una ecuación algebraica deberían ser aceptadas por las siguientes razones:

i. Ellas substituyen la falta de otro tipo de soluciones.
ii. Podrían dar una regla general que permitiera determinar las raíces de ciertas ecuaciones.
iii. Todo esto nos muestra los cambios sustanciales en la solución de problemas geométricos, como la trisección del ángulo, los cuales no se pueden resolver en la tradición geométrica euclidiana.
iv. A su vez tienen en todo caso su propia utilidad.

Con Descartes, el método algebraico empieza a mostrar toda su potencia. Sin embargo, en los trabajos de Vieta ya se alcanza a vislumbrar el método analítico cartesiano[11]. Vieta introduce su ***álgebra speciosa***, que alcanza una completa simbolización con Descartes, cuya notación no difiere en lo esencial de la actualmente empleada. Los símbolos literales del *álgebra speciosa* tienen una significación general. Es decir, que pueden indicar números, superficies, cuerpos, tiempos, pesos, etc. De igual forma, para Descartes el análisis era un método poderoso que servía de guía para solucionar problemas de toda índole; los problemas geométricos constituían uno de los tantos campos de aplicación.

Relación magnitud–dirección

Este tipo de relación se puede vislumbrar en los trabajos de Grassmann, donde empieza a combinar los conceptos de longitud y dirección, cuando introduce las magnitudes extensivas, las cuales son hipernúmeros con n componentes. Esta relación presenta problemas, puesto como todos sabemos la dirección viene dada por la medida de ángulos y la definición misma de ángulos presenta problemas porque, a su vez, es una magnitud, pero

[11] En esencia, los fundamentos de toda la *Geometría* de Descartes se sitúan dos ideas:

i. La introducción de una magnitud variable.
ii. La utilización de las coordenadas rectangulares (cartesianas)

se mide de manera diferente a las de longitudes, entonces, la pregunta sería ¿qué tipo de magnitud es?

1.1.2.1 La representación de las cantidades negativas y el concepto de segmento dirigido

Jean Robert Argand (1768-1822) interpretó los números negativos como una extensión de los números positivos. Para Argand, la fundamentación de los números negativos se daba como consecuencia de la fusión entre dirección y magnitud. La representación de las cantidades numéricas a través de magnitudes, permitió representar las cantidades negativas en un segmento orientado, de acuerdo a un proceso que se detalla a continuación.

Sea el segmento de línea $\overline{OP}$ con centro en O. Ahora si lo hacemos rotar 180° en sentido contrario a las manecillas del reloj, obtenemos el segmento de línea $\overline{OR}$, pero con dirección opuesta a $\overline{OP}$, como muestra la figura 11:

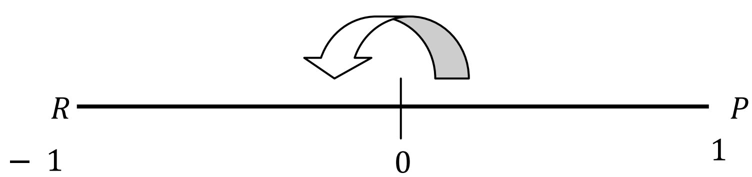


Figura 11: Muestra la clara evidencia de la existencia de los números negativos, cuando hacemos rotar 180° en sentido contrario de las manecillas del reloj un pedazo de segmento $\overline{OP}$ con centro en O, generando el *mismo* segmento pero en dirección contraria. Algebraicamente es: $\overline{OP} = -\overline{OR}$.

Podemos observar aquí, esta idea de dirección corresponde a un antecedente importante en la búsqueda de una representación geométrica para los vectores. De antemano esto nos índica que, históricamente, el concepto de vector no sólo está ligado al concepto de segmento dirigido, sino a la evolución de los números negativos[12].

La historia de los números negativos es un capítulo aparte con sus discusiones, ajustes, problemáticas en las cuales tuvieron mucho peso los valores culturales y sociales, como lo

[12] Aunque ya D´Alambert había dado algunas puntadas en su célebre artículo de la *Enciclopedia*.

ha hecho notar Schubring en su artículo *L' interaction entre les débats sur le statut des nombres négatifs et imaginaires et l' émergence de la notion de segment orienté*, (Schubring, 1997).

En el siglo XV, aparecieron los primeros textos matemáticos con tratamiento de números negativos. En esa misma época los negativos no sólo representaban cantidades, sino que también se operaba con ellos. Precisamente en esta época se introduce la tradición, que durará varios siglos, de aceptar el funcionamiento operatorio de lo negativo como raíces de ecuaciones algebraicas, aunque se ponía en tela de juicio su naturaleza ontológica.

A principios del siglo XVIII, el matemático francés Pére Charles René Reyneau (1656-1728), en su tratado *La Science du Calcul des Grandeurs en Général* (1728), clarifica la naturaleza de las cantidades. Para ello, realiza la introducción de cantidades negativas atendiendo a la dirección y dice que las magnitudes negativas son tan reales como las positivas. De igual forma Grassmann no le veía ningún problema en aceptar lo negativo como geométricamente idóneo. Mientras que el matemático Bernard Fontenelle (1657-1757), en su libro *Éléments de la Géométrie de l'infini* (1727), hace una reflexión sobre las cantidades negativas, la cual extiende a las cantidades imaginarias. Posteriormente, incorpora la idea de magnitudes positivas o negativas como objetos numéricos (número o cantidad) y específicos (opuesta a otra), porque respectivamente dan cuenta de una longitud y una dirección.

El matemático francés, Caspar Wessel (1745-1818), en su ensayo *La Represéntation Analytique de la Directión* (1798) contribuyó al esclarecimiento sobre la naturaleza de las cantidades negativas e imaginarias; además, extendió los conceptos de segmento y dirección, al igual que sus operaciones; esto le permitió introducir la noción de distancia como segmento absoluto.

Por su parte, Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753-1823), en su libro *De La Corrélation des Figures de Géométrie* (1801), retoma las concesiones de D'Alembert y de Bernard Fontenelle (1657-1757). Establece dos tipos de relación para todas las partes de una figura geométrica, las cuales son:

i. **Relación de Magnitud**: tiene que ver con los valores absolutos de las cantidades "*la medida*".

ii. **Relación de Posición**: describe una situación, es decir, si un punto está a la derecha o izquierda de un plano, arriba o abajo, etc.

Las concesiones sobre las cantidades opuestas de D'Alembert y Lazare de Carnot están consignadas en la *Mémoire sur les Quantités Imaginaires* (1806) de Adrien-Quentin Bueé (1748-1826), donde hace una reflexión sobre la naturaleza de las cantidades negativas, estableciendo dos tipos de signos, así:

i. **Operación Aritmética**: "+" para la adicción y " -" para la sustracción.
ii. **Operación Geométrica**: indica direcciones opuestas.

En su ensayo *Une Maniére de Représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géometriques* (1806), Argand parte del análisis de la naturaleza de las cantidades negativas, interpretándolas como una extensión de las positivas, pero en un sentido opuesto. Adicionalmente, Argand manifestó que aquellas magnitudes que no resistían tal interpretación las llamó imaginarias. Precisamente en los trabajos de Grassmann se da una fuerte discusión sobre el estatuto de los números negativo e imaginarios y la noción de segmento dirigido.

Uno de los más importantes matemáticos, en la evolución de la noción de vector, fue C. V. Mourey (1817-1878). En su libro *La Vraie Théorie des Quantités Négatives et des Quantités Prétendues Imaginaires* (1828), rechaza el álgebra para operaciones negativas y propone remplazarla por una nueva rama de la geometría mediante un cálculo de segmentos orientados, de la siguiente manera:

- Dos caminos son seguidos, si el término de uno origina el del otro, algebraicamente sería:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

- La suma de dos caminos inversos es cero, algebraicamente se expresaría, así:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

- La igualdad de dos caminos como independientes de un origen común.

1. 1.3 El concepto de una geometría de situación de Leibniz

Entre la variada gama de contribuciones matemáticas hechas por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), podemos resaltar su noción de geometría de situación, en la cual vislumbra la salida conceptual que le permite constituir un método para el estudio del análisis del espacio.

Leibniz no estaba conforme con los métodos de representación de la matemática porque se mostraban incapaces de describir situaciones arbitrarias de manera sencilla, así como el álgebra describía las magnitudes. Incluso el álgebra, tal como estaba constituida, no daba cuenta de todas las propiedades y características de una figura ni de sus construcciones geométricas (por ejemplo, era incapaz de describir una posición, un movimiento o una rotación, un ángulo, etc.). Es por esta razón, que Leibniz sugiere otro tipo de álgebra para representar las entidades geométricas. Un álgebra en la cual los símbolos fueran operados directamente, y a partir de esas operaciones se pudieran deducir ciertas conclusiones. Sin embargo, Leibniz no tuvo éxito en tal empresa, pues nunca pudo resolver los problemas de operatividad con las nuevas entidades.

Desde la perspectiva de Leibniz, la matemática debía tener un carácter rigurosamente deductivo, y expresarse en una notación precisa: *la characteristica universalis*. Así habría de surgir la denominada *álgebra universalis*, con dos campos primordiales: *la logística* y *la característica combinatoria*, es decir, una matemática simbólica de la cantidad y de la cualidad. Desde esta visión de álgebra, Leibniz buscaba constituir un cuerpo teórico análogo a lo que posteriormente se convertiría en nuestro análisis vectorial. En síntesis, Leibniz sembraba así el germen de lo que sería esta nueva rama de las matemáticas denominada álgebra. Por consiguiente, con la ayuda de esta nueva álgebra buscaba modelar figuras y movimientos apoyándose en la idea de congruencia de conjuntos de puntos. En otras palabras, el objetivo principal de Leibniz era construir un sistema el cual permitiera el uso de coordenadas geométricas, a la hora de representar figuras, es decir, una geometría de posición. Sin embargo, él falló a la hora de desarrollar estos métodos prácticos.

1.2 El proceso de la representación de los vectores

El desarrollo evolutivo de la noción de vector fue fuertemente influenciado por el proceso de incorporar el concepto de segmento dirigido y la representación geométrica de los números complejos. En este sentido, no es posible comprender a cabalidad la historia de la representación de los vectores si antes no realiza un estudio del proceso de ampliación del universo de los sistemas numéricos. Como se ha dicho antes, este aspecto tenía relación con las concepciones que se tenía sobre el *álgebra*. Por ejemplo, matemáticamente, las cantidades negativas no se consideraban numéricas, sino como elementos conceptuales que aparecieron en la solución de ecuaciones algebraicas.

Históricamente es necesario que tengamos en cuenta las concepciones que se tenían del álgebra a principios del siglo XIX. Para algunos, como George Peacock (1791-1858), D. F. Gregory, Augustus De Morgan (1806-1871) entre otros, se tenían dos tipos de álgebra:

i. ***Álgebra Aritmética***: la cual trabajaba con símbolos para representar los enteros positivos y sus operaciones cumplían la propiedad de cerradura.
ii. ***Álgebra Simbólica***: adoptaba las reglas del álgebra aritmética, pero sin ninguna restricción.

De lo anterior, los matemáticos de la época esperaban que cualquier otro tipo de álgebra debiera de cumplir las reglas básicas que dictaba el álgebra simbólica.

Por otro lado, la aceptación de representar las cantidades numéricas como magnitudes, permitió caracterizar las cantidades negativas en un segmento orientado opuesto al positivo.

Es de recordar que desde Euclides se fundó la tradición aristotélica, manteniendo una disolución entre los números y las magnitudes. No obstante, Euclides intentó un acercamiento cuando trata de establecer una relación entre las magnitudes conmensurables y los números, pero esto es solo de referencia. Fue Descartes, quien en su libro *La Geometría,* realizó una correspondencia entre los números y las magnitudes con la introducción de su *segmento unidad,* permitiéndole así operar las magnitudes igual como lo hace con los números.

Descartes, en la solución de ecuaciones algebraicas como $x^2 \pm ax + bb = 0$ con la condición de que $a/2 < b$, encuentra raíces imaginarias, las cuales no tenían una representación geométrica, sólo eran utilizadas operativamente. Posteriormente, vislumbra la existencia de otros tipos de números como son los negativos cuando resuelve el problema de la trisección del ángulo, como lo vimos anteriormente. Estas cantidades fueron próximamente representadas en la misma recta numérica de los positivos, pero en un sentido opuesto. Esto propició la necesidad de resaltar que los números complejos aparte ampliar el sistema numérico, son elementos fundamentales en las ciencias físicas a la hora de la formulación de sus teorías, como por ejemplo en la mecánica cuántica.

1.2.1 La representación de los números complejos y las magnitudes vectoriales

A principios del siglo XIX, los matemáticos utilizaban con libertad los números reales y complejos, pero sin una definición rigurosa. Simplemente, se consideraban como cuerpos teóricos que cumplían las leyes básicas que dictaban el álgebra simbólica. No se conocían las propiedades particulares de cada campo, pues se carecía de un estudio de la estructura y la lógica de los diversos tipos de números. Fue sólo hasta finales del siglo XIX, con Richard Dedekind (1831-1916) y Georg Cantor (1845-1918), que se logró caracterizar rigurosamente el conjunto de los números reales. Durante muchos años predominó el álgebra simbólica: una estructura en la cual las operaciones entre símbolos cumplían la clausuratividad y la conmutatividad, como propiedades básicas.

En 1843, Hamilton acabó con este esquema fundamentando la definición de los números complejos y sus operaciones; para ello adoptó la representación geométrica como puntos o segmentos de rectas dirigidos en el plano.

La revelación de los números complejos hizo viable transitar del álgebra básica de los números reales a un "*álgebra doble*" de los números complejos. Muchos matemáticos pensaban que estos dos tipos de álgebra eran las únicas posibles, y que, por lo tanto no se podía llegar a un álgebra triple o cuádruple.

A comienzos del siglo XIX, matemáticos de la talla de Caspar Wessel (1745-1818), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Robert Argand (1768-1822), Abbé Buée (1748-1826), C. V. Mourey (1817-1878) y John Warren (1811-1874), entre otros, implementaron la estructura algebraica de los números complejos[13] a los vectores, es decir la representación de los números complejos como parejas ordenadas les permitió trabajar con los vectores como puntos en el plano cartesiano. De esta forma se volvió normal servirse de la estructura algebraica de los números complejos para representar las fuerzas en dos dimensiones cuando se aplicaba a un objeto. En este momento, la representación del número complejo como pareja ordenada, empezaba a mostrar su potencia. Es por esta razón, que el sistema vectorial bidimensional está basado sobre la representación geométrica de los números complejos, pero no es tan útil como el sistema vectorial tridimensional que se refiere a un sistema matemático aplicado al espacio tridimensional.

1.2.2 La propuesta de representación de complejos de Wallis y Wessel

El primer intento (fallido) de una representación geométrica de un número complejo fue hecho por John Wallis (1616-1703) en el siglo XVII. En su *Álgebra* de 1685, mostró como representar geométricamente las raíces complejas de una ecuación cuadrática con coeficiente real, a pesar de que eran tan absurdas como las raíces negativas. Para Wallis, era claro que si se podía representar los números negativos en una línea recta, también podría representar los números complejos en un plano. Desde este enfoque, fue el primero en sugerir que los números imaginarios podrían representarse en una recta perpendicular al eje de los números reales. Esto le permitió representar geométricamente un número complejo de la siguiente manera:

Trazamos una línea recta horizontal en la cual la parte real de la raíz era simbolizada, a partir de un cierto origen: hacia la derecha si el número era positivo o hacia la izquierda si el número era negativo. Después de ser ubicado el número sobre la recta, se dibujaba una

[13] En una publicación titulada *Ars Magna* de 1545 encontramos la primera evidencia escrita de los números complejos por parte de Girolamo Cardano (1501-1576) e igualmente aquí introduce los métodos seguidos para la resolución de la ecuación cúbica.

línea perpendicular cuya prolongación simbolizaba el número multiplicado por $\sqrt{-1}$ [14], que nos daba la parte imaginaria de la raíz, como muestra la figura 12:

Figura 12: Muestra la forma como John Wallis representaba el número complejo $a + \mathrm{i}\, b$

Su sucesor noruego Caspar Wessel (1745-1818) en un ensayo *Sobre La Representación Analítica de la Dirección*, en 1799, elaboró un procedimiento de interpretación de los números complejos. En la introducción de este ensayo manifiesta su objetivo, como lo podemos notar en esta cita:

> El presente artículo trata la cuestión de cómo podemos representar una dirección de forma analítica; esto es, cómo expresaremos rectas (segmentos rectos) de tal manera que en una ecuación que arroje como resultado una recta desconocida y otras conocidas, la longitud y la dirección de la recta desconocida puedan ser expresadas.

De acuerdo a la anterior cita, podemos notar que su objetivo no era justificar el número complejo, sino determinar la forma de representar su dirección analíticamente; sin embargo, su trabajo paso desapercibido. Posteriormente, publicó los números complejos como entidades que pueden ser adicionadas, sustraídas, multiplicadas, y divididas.

---

[14] Nuestro sistema notacional se debe más en gran medida a Leonhard Euler (1707–1783), que a cualquier otro matemático. Él introduce el símbolo $\boldsymbol{i}$ para denotar la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$, en una memoria titulada *De Formulis Differentialibus Angularibus* de 1777. Adicionalmente, propuso el uso de la letra griega $\sum$ en el cálculo, como símbolo para la suma de un número infinito de rectángulos, como aproximación al área limitada por una curva.

Wessel, a la hora de dibujar el vector en términos de números complejos, utilizo un sistema de ejes coordenados perpendiculares, considerando +1[15]: unidad rectilínea positiva y $+\boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{-1}$: unidad perpendicular con origen común +1. Entonces, un vector puede ser expresado por el número complejo $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon b}$, representando un segmento de línea $\overline{\boldsymbol{OA}}$ desde el origen O en su plano de unidades +1 y $+\boldsymbol{\varepsilon}$, como lo muestra la figura 13.

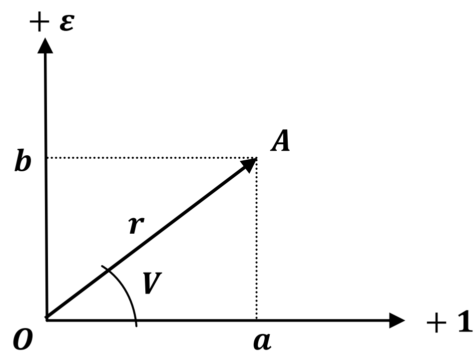


Figura 13: Muestra como Caspar Wessel en su plano de unidades +1 y $+\boldsymbol{\varepsilon}$, representaba el número complejo $a + i\,b$, por medio del segmento orientado $\overline{OA}$

Desde esta perspectiva, cualquier línea en un plano puede ser representada analíticamente de la siguiente forma:

$$a + \varepsilon b = r\ (cos\, V + \varepsilon\, sen\, V),$$

donde r, es la longitud del segmento $\overline{\boldsymbol{OA}}$.

Esto le permitió expresar la adición de dos segmentos de una forma algebraica, así:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Esta expresión, geométricamente representa la diagonal del paralelogramo generado por las dos líneas tomadas como vectores. Cuando Wessel introduce algebraicamente el concepto producto de líneas prefigura la definición instaurada por Hamilton de producto de números complejos:

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + ba).$$

---

15 Wessel estableció la regla del producto de ángulos: +1 con ángulo 0°, -1 con ángulo a 180° y $+\ \varepsilon = 90^\circ$. Luego definió ciertos productos entre ellos: $(+1)(+1) = +1$, $(+\varepsilon)(+1) = +\varepsilon$, $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(-\varepsilon)(-\varepsilon) = +1$, $(+1)(-1) = -1$, $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$ y $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1$.

Posteriormente, Wessel inicia la construcción de tres líneas perpendiculares a partir del centro de una esfera, las cuales eran colineales a los radios designados por r, ηr, εr, donde r es el radio de la esfera. En este sentido, manifestaba que cualquier punto en el espacio podría ser representado por el vector,

$$x + \eta y + \varepsilon z.$$

Luego Wessel definió $\eta\eta = \varepsilon\varepsilon = -1$, al igual que Hamilton por analogía a los números complejos ordinarios. En cuanto a la multiplicación de vectores la interpretó como una rotación y extensión de un vector sobre otro, así:

$$\mathbf{1}\,.\sqrt{-\ \mathbf{1}} \;=\; (\mathbf{1}\,,\mathbf{0}).(\mathbf{0}\,,\mathbf{1}) = (\mathbf{0}\,,\mathbf{1})$$

$$\left(\sqrt{-\ \mathbf{1}}\right).\left(\sqrt{-\ \mathbf{1}}\right) \;=\; (\mathbf{0}\,,\mathbf{1}).(\mathbf{0}\,,\mathbf{1}) = (-\,\mathbf{1}\,,\mathbf{0}) = -1$$

El objetivo de Wessel era utilizar rotaciones, de tal suerte que $\sqrt{-\ \mathbf{1}}$ se comporta de la siguiente forma:

$\sqrt{-\ \mathbf{1}}$: representa una rotación de 90º en contra de las manecillas del reloj.

-$\sqrt{-\ \mathbf{1}}$: representa una rotación de – 90º, es decir, en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Otra manera de visualizarlo sería:

$$(x + \eta y + \varepsilon z),,(cos\,u + \varepsilon \cdot sen\,u)$$
$$= \eta y + x\,cos\,u - z\,sen\,u + \varepsilon x\,sen\,u + \varepsilon z\,cos\,u,$$

donde ,, es el símbolo de multiplicación y u es el ángulo de rotación en grados.

La ecuación anterior representa la rotación del vector $x + \eta y + \varepsilon z$, un ángulo u alrededor del eje η o y, muy similar a la interpretación de los cuaterniones de Hamiltón.

Ahora,

$$(x + \eta y + \varepsilon z)\,,,(cos\,v + \eta\,sen\,v)$$
$$= \varepsilon z + x\,cos\,v - y\,sen\,v + \eta x\,sen\,v + \eta y\,cos\,v$$

representa la rotación del mismo vector, pero con un ángulo v alrededor del eje ε o z.

Wessel no discutió la rotación alrededor del eje x, por ser de difícil representación, tales como:

$$\eta\varepsilon \text{ y } \varepsilon\eta.$$

En este orden de ideas, buscaba desarrollar un método de análisis aplicable al espacio tridimensional, pero no pudo lograrlo.

Aunque debemos reconocer que de acuerdo a lo anterior, Wessel tuvo la noción de espacio vectorial.

1.2.3 La representación de los complejos a finales del siglo XVII y principios del XIX

A principios del siglo XVIII, Jean Le Rond D´Alembert (1717-1783) y Leonhard Euler (1707-1783) demostraron que cada expresión, que contiene magnitudes imaginarias, se puede escribir de la forma:

$$\alpha - \beta i,$$

donde α y β son números reales.

En el siglo XIX Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Augustín Louis Cauchy (81789-1857), introdujeron y fundamentaron las operaciones con los números de la forma: $\alpha \pm \beta i$, implantando el término "número complejo".

En el año de 1799, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), resalta la importancia matemática de los números complejos al tomarlos como base en la primera demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra*, la cual vuelve y la retoma en la cuarta demostración en 1848. Su objetivo, radicaba en demostrar la existencia de estos números como una solución de un polinomio $P\,(x + iy) = U\,(x, y) + iV\,(x, y)$, donde sus raíces complejas $a + ib$ corresponden a puntos (a, b) del plano.

Por otra parte, en 1821 Cauchy encontró el "módulo" de un número complejo y Gauss su "*norma*" en 1828 e igualmente definieron el concepto "conjugado" de un número complejo. No obstante, Agustín Louis Cauchy (1789-1857) en su *Cours d´Analyse* (1821), va muchos allá cuando estudia el *Teorema Fundamental del Álgebra* sobre un polinomio $f(x)$, cuyos coeficientes son complejos. De esta manera, rompe con la antigua concepción, según la cual los coeficientes eran reales, sin importar que tuvieran raíces complejas. El teorema se expresa mediante una descomposición de factores lineales, del polinomio

$$f\,(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

de la forma $\left(x - \left(\alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\right)$[16]

Cauchy muestra, que el polinomio $f(x)$ satisface la siguiente condición:

$$f(x) = 0, \text{ cuando } x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Al realizar esta prueba no sólo tiene en cuenta las nociones básicas de los números complejos, sino que examina meticulosamente su campo.

Para Cauchy los números complejos son expresiones simbólicas que no tienen ningún significado en sí mismos, pero que históricamente tienen vínculo con los números reales. Por esta razón, trata de unificar el análisis real con el análisis complejo. Para ello intenta implementar las propiedades de los números reales a los números imaginarios y así clarificar la naturaleza ontológica de tales números. No obstante, debe estudiar las propiedades de los números imaginarios y sus operaciones.

En su ensayo *Teoría de los Residuos Bicuadráticos* del 23 de Abril de 1831, Gauss plantea una correspondencia biunívoca entre puntos del plano con los números complejos[17]. Gauss introduce la representación $a + ib$, que identifica con la pareja ordenada (a, b) del plano cartesiano. Aunque ya Gauss había introducido este aspecto en *Demonstratio Nova* de 1799, fue en esta ocasión que logró popularizarla, pues le permitió describir la adición y multiplicación geométrica de los números complejos. A partir de aquí, Gauss incorporó el término de número complejo y usó el símbolo i para representar $\sqrt{-\mathbf{1}}$[18], haciendo la siguiente observación:

> Este tema (de las magnitudes imaginarias) ha sido tratado hasta ahora desde un punto de vista erróneo, rodeado de una misteriosa oscuridad, y esto es debido a la utilización de una notación adecuada. Si, por ejemplo, $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ hubieran sido denominadas directa, inversa y unidad lateral respectivamente, en lugar de positiva, negativa e imaginaria (incluso imposible) tal oscuridad hubiera estado fuera de lugar.

Esto propició una de las principales diferencias entre el análisis complejo en Cauchy y en Riemann.

---

[16] El primer matemático que presento este teorema de esta forma fue Jean Robert Argand (1806), pero no profundizo mucho.

[17] Aunque Argand fue el primero en establecer el homeomorfismo entre el plano real y el plano complejo.

[18] Euler fue el que instauró el símbolo $\boldsymbol{i}$ para representar $\sqrt{-\mathbf{1}}$.

Por muchos años un problema de primer orden era resolver la ecuación de la forma $x^n + 1 = 0$ (ecuación binomial),[19] pero usando la geometría de los números complejos, la solución se reduce a la división de la circunferencia de un círculo en n partes iguales. Este hecho fue pensado por Costes y Augustus De Morgan (1806-1871), al relacionar los números complejos con puntos en el plano, la solución de la ecuación tendría la forma:

$$\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right),$$

que corresponde a los vértices de polígonos regulares, para $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots . n - 1$.

1.2.4 La representación de los complejos de Jean Robert Argand

Los matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) y Abbé Buée (1748-1826) publicaron *Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* 1806, sobre los números complejos. Concretamente, Buée en su *Mémoire, Sur les Quantités Imaginaires* (1805), hizo un tratamiento aproximado sobre la representación geométrica de los números complejos; su publicación causó sorpresa entre algunos matemáticos quienes manifestaron que el ensayo poseía una mezcla de ingenuidad con mucha oscuridad.

Sobre el estudio de las cantidades imaginarias Bueé afirma que:

> $\sqrt{-\mathbf{1}}$ es el símbolo de la perpendicularidad, la propiedad características es que todos los puntos de la perpendicularidad son iguales a igual distancia, de una parte y de otro. Este símbolo experimenta todo eso y es el único que lo experimenta.

Un año después, Argand en su *Essai Sur Une Maniére de Représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géométriques* (1806), expuso una moderna representación geométrica de la adición y la multiplicación de los números complejos,

---

[19] Modernamente, el teorema de Abraham DeMoivre proporciona un método para calcular las raíces n-ésimas de cualquier número complejo z, las cuales pueden ser representadas en un círculo de radio $r^{1/n}$, en el plano complejo. La primera expresión de esta fórmula aparece en su artículo titulado *Philosophical Transactions*, 1707.

mostrando que a partir de esta representación se podía deducir algunos teoremas en geometría elemental, trigonometría y álgebra. En este sentido, Argand utilizaba esa forma operativa de los números complejos, así:

Sea el segmento de línea dirigido $\overline{OA}$ de un origen O, representado $r\,(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$ [20], donde r es la longitud. Entonces, el número complejo $a + bi$, era la combinación geométrica de la línea directa $\overline{OA}$ de a y bi, como muestra la figura 14.

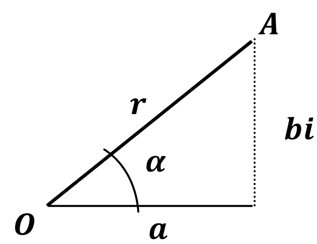


Figura 14: Muestra como Argand representaba el número complejo $a + i\,b$, por medio de un segmento de línea dirigido $\overline{OA}$ de longitud r.

Desde esta perspectiva, Wessel y Argand mostraron que los números complejos podían ser geométricamente sumados y multiplicados. Pero esta representación geométrica de los números complejos, tratada por los anteriores autores, presentaba problemas para los físicos a la hora de representar fuerzas en más de dos dimensiones. Con el objetivo de dar solución a lo anterior, se recurrió a tripletas de complejos, pero claramente esto conllevaba a incompatibilidades teóricas. Como vemos, la construcción histórica de los números complejos tiene un desarrollo teórico que propicia la construcción de métodos análogos del plano al espacio tridimensional.

Unos años más tarde, los matemáticos Mourey y Warren en 1828, realizaron publicaciones independientes sobre los números complejos. Por su parte C. V. Mourey (1817-1878), en su tratado *La Vrai Theorie des Quantités Négatives et des Quantités Pretendues Imaginaires* (1828), indicó que existía un álgebra que sobrepasaba, no sólo al

[20] Euler lo visualizó geométricamente como un punto en el plano de coordenadas por $x + iy$.

álgebra ordinaria, sino también al álgebra en dos dimensiones creada por él. Manifestando, que esta álgebra se extendía a tres dimensiones, pero nunca publicó nada.

John Warren (1811-1874), en *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities* de 1828, mostró un gran entendimiento y cuidado a la hora de hacer la representación geométrica de los números complejos, pero no discutió la extensión de su sistema al espacio. Warren, a diferencia de Buée y de Argand, era consciente de la importancia de las leyes conmutativa, asociativa y distributiva a pesar de que no usó esos términos.

Fue hacia mediados de 1833, cuando Hamilton en un artículo *Conjugate Functions and on Algebra as the Sciencie of Pure Time*, experimentaba un álgebra formal de parejas ordenadas de números reales, cuyas reglas de combinación son precisamente las que se utilizan hoy en día para el estudio del sistema de los números complejos. La importante regla que utilizó para definir la multiplicación de parejas ordenadas es la siguiente:

$$(a,b).(\alpha,\beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha).$$

Hamilton interpretó este producto como una cierta rotación. Desde este momento se explicitaba el concepto de número complejo como pareja ordenada de números reales y esto permitió la representación de las fuerzas en el plano.

Es importante resaltar dos matemáticos que ocupan un lugar predominante en la evolución histórica del análisis vectorial como disciplina matemática: William Hamilton y Hermann Grassmann.

1.3 La línea física en el desarrollo del análisis vectorial

Como se manifestó anteriormente, el análisis vectorial surgió de la necesidad de dotar a los físicos de una herramienta básica para la interpretación de algunos fenómenos naturales. Por ejemplo, en la matematización del movimiento, las cantidades tradicionales se mostraron incapaces de describir la posición. Para suplir este impase, fue necesario realizar un cambio de perspectiva sin precedentes: visualizar el espacio físico como un espacio de objetos matemáticos ocupado por vectores. Esto era posible pues aunque se aceptaba que los objetos matemáticos gozaban de una existencia autónoma en un campo teórico, también se aceptaba que ellos eran un reflejo del mundo fenomenológico. Parecía pues, natural que las matemáticas se constituyeran en el lenguaje apropiado para expresar las características o propiedades de muchos fenómenos físicos.

Desde Euclides hasta los tiempos de Galileo Galilei (1564-1642), la matemática y la física se habían desarrollado por separado. Por un lado, el aristotelismo sostenía que la física debería basarse directamente en la experiencia, y su objetivo era explicar el por qué de los fenómenos suceden y descubrir las causas que los ocasionan. La naturaleza de las matemáticas era diferente; se tomaba como una ciencia auxiliar.

1.3.1 Galileo y el movimiento compuesto

Para Aristóteles los objetos de la física lo constituyen los seres sensibles, mientras que los objetos de las matemáticas, aunque provienen de él, no pertenecen al mundo fenomenológico. Por lo tanto, para Aristóteles, no es conveniente utilizar un razonamiento puramente geométrico a la hora de explicar un fenómeno físico[21]. Aquí podemos evidenciar un obstáculo en la física aristotélica, en el momento de explicar el comportamiento de un fenómeno en sus diferentes etapas, porque no vislumbra la posibilidad de describirlo e interpretarlo desde una concepción puramente matemática, la cual le ayudaría a sintetizar y generalizar el comportamiento de un fenómeno. Debido a esto, Aristóteles niega la posibilidad de una física-matemática. Sin embargo, los matemáticos del siglo XVII percibieron la necesidad de hacer un cambio de perspectiva -de consideraciones cualitativas, establecidas por el aristotelismo, a consideraciones cuantitativas- con el objetivo de describir y predecir ciertos comportamientos de algunos fenómenos físicos desde un punto de vista matemático. Fue Galileo[22], quien evidenció, de manera concreta, la posibilidad y la necesidad de interpretar los fenómenos físicos en un lenguaje matemático:

---

[21] Aristóteles decía que el físico experimenta con cosas de la naturaleza, mientras que el geómetra razona sobre abstracciones.

[22] Históricamente, Galileo es conocido como el padre de la física. Analizó ciertos fenómenos, inaugurando el método científico experimental. Se interesó en el movimiento de los astros y de los cuerpos. Desde esta perspectiva, usando el plano inclinado, descubrió la ley de la inercia de la dinámica y con el telescopio observó que Júpiter tenía satélites girando a su alrededor.

> La filosofía está escrita en ese grandioso libro que está continuamente abierto ante nuestros ojos (lo llamó universo). Pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen en él los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y figuras geométricas.[23] Sin estos medios es humanamente imposible comprender una palabra; sin ellos, deambulamos vanamente por un oscuro laberinto (Galilei, 1978, pág. 29).

La esencia del pensamiento de Galileo se basaba principalmente en la idea de que los fenómenos cotidianos se podían explicar a través de las matemáticas. Sin embargo, sus esfuerzos eran limitados por la continua lucha contra la autoridad, la tradición aristotélica, científica y filosófica que la iglesia mantenía y sustentaba en las universidades.

La construcción de la experiencia de Galileo es mucho más compleja que la de Aristóteles porque evidencia la necesidad de ir más allá de las consideraciones cualitativas en la búsqueda de un método que describiera el fenómeno en sus diferentes etapas. Galileo, elimina de un fenómeno sus cualidades sensibles, reduciéndolo a términos estrictamente matemáticos. En este sentido, distingue en un fenómeno físico dos tipos de cualidades:

i. ***Cualidades Primarias***: aquellas que son permanentes y no desaparecen cuando se elimina el cuerpo físico. Corresponden a cualidades de forma y cantidad que están ligadas a lo físico, pero cobran independencia. En otras palabras, son elementos trascendentes ligados a lo aritmético y lo geométrico como: lo numérico, lo espacial y lo figural (Galilei, 1978).

ii. ***Cualidades Secundarias***: aquellas cuya existencia se halla ligada al objeto sensible. Además, son accidentales porque carecen de sentido sin el objeto. A esta categoría pertenecen los colores, los sabores y los olores, etc. Estas cualidades no forman parte de las propiedades esenciales de un fenómeno (Galilei, 1978).

A partir de lo anterior, podemos decir que Galileo buscaba reducir las cualidades a términos cuantitativos, percibiendo una cierta analogía entre el espacio físico y el tipo de espacio manejado en los *Elementos* de Euclides. Es decir, interpretar los fenómenos de la naturaleza según las leyes de las matemáticas. Su rompimiento con el aristotelismo es

---

[23] Para Fourier el lenguaje matemático se encuentra en el análisis matemático, el cual se expresa en ecuaciones diferenciales. El análisis matemático hace parte del análisis especial, que es un procedimiento que parte del estudio empírico o experimental de las propiedades elementales de una clase de fenómenos físicos y conduce a la formalización de ecuaciones diferenciales que los gobiernan.

categórico[24] en el sentido de concentrar la atención sólo en las relaciones geométricas y aritméticas de los cuerpos, desechando su carácter accidental y explicativo.

El procedimiento de Galileo es clásico: dado un fenómeno observable, a través del método de resolución se identifican los caracteres en los cuales está escrito en la naturaleza. Luego, las suposiciones se deducen a través de la composición de otras consecuencias, llegando a conclusiones más generales. Posteriormente, se vuelve a aplicar el método de resolución para comprobar que las indagaciones de tales efectos experimentales se dan de hecho. Este método nos coloca en presencia de la esencia matemática del fenómeno. Para ello es primordial asegurar un punto de partida concreto que guíe la indagación matemática; de lo contrario las matemáticas sólo serían un ejercicio formal. Es por estas razones que Galileo no compartía la tradición aristotélica de separar la ciencia y la filosofía.

En la matematización de algunos fenómenos, Galileo evidencio que la mayoría de los fenómenos no se encuentran restringidos a una sola dimensión. Por ejemplo, para determinar la velocidad de una bola cuando abandona el borde de una mesa, antes de que choque con el piso, era necesario tener en cuenta que la bola se mueve describiendo un movimiento compuesto. Por un lado, una velocidad V_x, que produce un desplazamiento horizontal, y por otro lado, una velocidad V_y, que produce un desplazamiento vertical a causa de la gravedad, como se muestra en la figura 15:

[24] *La ley de caída de los cuerpos* acaba con la física aristotélica, porque este movimiento experimenta: (i) las velocidades crecen proporcionalmente al tiempo, (ii) todos los cuerpos, cualquiera sea su dimensión y su naturaleza caen con la misma velocidad, es decir, la aceleración de la caída es una constante universal, denominada *gravedad*.

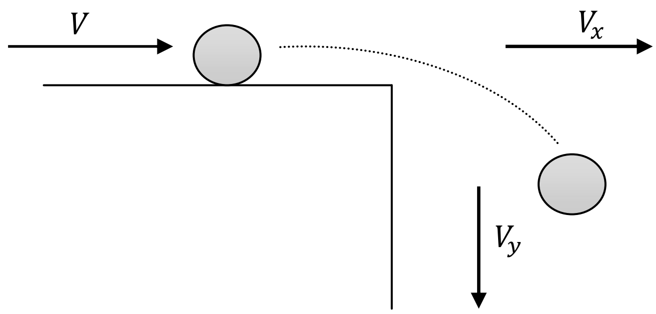


Figura 15: Muestra la descomposición de un movimiento V en dos tipos: un *movimiento* horizontal V_x, es el que trata de conservar la bola y otro vertical acelerado V_y, es producido *por* la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre los cuerpos.

Estas velocidades las podemos representar por dos líneas coordenadas perpendiculares x e y, que nos permite dar la posición del objeto durante el tiempo de caída. En otras palabras la figura 1, describe el tipo de movimiento compuesto que observó Galileo cuando dejó deslizar un móvil sobre una superficie finita y que cae al llegar al extremo. Por un lado un movimiento horizontal uniforme y por otro un movimiento vertical uniformemente acelerado. A este tipo de movimiento, que describe una trayectoria semiparábolica, Galileo lo llamo *proyección*[25].

Otro ejemplo experimental, lo evidenciamos cuando atamos una pelota a un extremo de dos cuerdas y empezamos a halar las cuerdas; la pelota experimenta un desplazamiento hacia adelante. Para hallar su nueva posición es necesario saber el desplazamiento producido por cada cuerda. Por lo tanto, el desplazamiento real de la pelota ejercido por las dos fuerzas, se puede visualizar en el paralelogramo de fuerzas de la figura 16:

[25] Este tipo de movimiento constituye uno de los problemas mayores de la teoría antigua del movimiento.

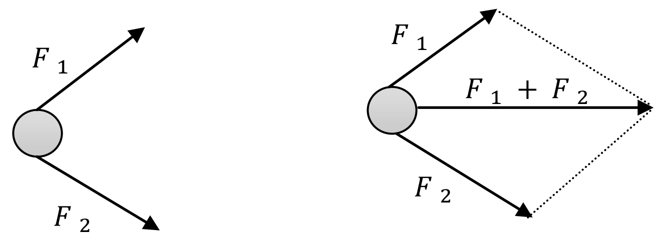


Figura 16: Muestra que cuando aplicamos una fuerza F_1 y una fuerza F_2 al mismo tiempo para halar una pelota, obtenemos una fuerza resultante $F_1 + F_2$, que es la fuerza que experimenta la pelota. Esto nos da inicio al uso del paralelogramo de fuerzas.

La longitud de los segmentos F_1 y F_2, en unidades apropiadas es justamente la distancia en línea recta entre el origen y el nuevo punto; su dirección es la dirección del punto con relación al origen. Además, en esta figura 2, se muestra que la idea de adicionar líneas es un claro ejemplo de la importancia de la utilización de los vectores. Debido a que son cantidades que se suman o se restan como desplazamientos. Este tipo de situaciones fueron claves para la definición de la adición de vectores.

1.3.2 Newton y la matematización del movimiento

Jean Le Rond D´Alembert (1717-1783), en su artículo preliminar de *La Enciclopedia*, afirma que Newton fue el primero en mostrar el arte de introducir la geometría en la física y de crear -uniendo experiencias y cálculo- una ciencia nueva, exacta, profunda y brillante.

Isaac Newton (1642-1727), es el heredero de una tradición científica que inicia en el Renacimiento, cuando se empieza a desmantelar las concepciones del universo derivadas del aristotelismo. Newton[26], al igual que Galileo, evidenció la necesidad de encontrar un método general que describiera formalmente un fenómeno físico en sus diferentes fases. De esta forma, logró ampliar la perspectiva de Galileo, creando el marco propicio para el desarrollo de tales métodos.

Es pertinente aclarar que Newton no pretendía que el universo tuviera una esencia geométrica, ni numérica ni que fuera completamente descifrable con métodos matemáticos,

[26] Las leyes de Newton sobre la mecánica representan la primera gran síntesis en la historia de la física.

simplemente aceptaba su importancia. Para Newton, “el mundo es lo que es: tanto mejor que podamos hallar en él leyes matemáticas exactas” *(Newton, Princios Matemáticos de la Filosofía Natural*, 1993). Fundamentalmente, Newton buscaba descomponer el movimiento en fragmentos matemáticamente abordables, reduciéndolo a una descripción cuantitativa. En síntesis, entender los procesos físicos a partir de los modelos matemáticos, dejando de lado las exigencias ontológicas.

Para Newton, el arte de la medida es lo que nos permite abordar muchas de las dificultades de la filosofía. Justamente, su famoso libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de 1687, puede interpretarse como un tratado de la medida. De esta manera, apoyado en la invención de su cálculo, donde manifiesta que la medida rigurosa de un sistema nos permite identificar los caracteres en los cuales está escrita la naturaleza, como ya lo había expuesto Galileo.

Newton en el prefacio de la primera edición de la *Principia*, sintetizó su método científico diciendo:

> He cultivado las matemáticas en cuanto se relacionaban con la filosofía (estudio de la naturaleza), puesto que el objetivo de ella debe ser identificar los caracteres matemáticos de la naturaleza; pues toda la dificultad de la filosofía consiste en pasar de los fenómenos del movimiento a la investigación desde un punto de vista formal, de las fuerzas (caracteres) de la naturaleza. Después de haber identificado los caracteres en el cual está escrita la naturaleza, demostrar por deducción, los otros fenómenos a partir de esas fuerzas. (Newton, 1993, pág. 42)

Unos de los aportes importantes de Newton en la matematización del movimiento, es cuando define *Axiomas o Leyes del Movimiento*, precisamente en la ley II,

> El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza (Newton, 1993, pág. 41.)

Lo que muestra aquí, que cuando le aplicamos una fuerza a un móvil su movimiento es proporcional y en la misma dirección a la fuerza aplicada. En síntesis, lo que podemos resaltar, es la manera como Newton trata de matematizar el movimiento, mediante la utilización de líneas rectas en una cierta dirección. Es claro que Newton no tuvo conciencia de la noción de vector; sin embargo, vemos que manejaba una idea aproximada, cuando utiliza el concepto de fuerza.

Posteriormente, Newton describe en la *Principia* la esencia del paralelogramo de fuerzas[27].

> Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas simultáneamente, la fuerza resultante sería descrita por la diagonal de un paralelogramo; al mismo tiempo sus lados, describirían las fuerzas separadamente (Newton, 1993, pág. 42.)

Esta idea fue de vital importancia a la hora de mostrar como las entidades vectoriales podrían usarse para aplicaciones físicas. Estamos en una época en que ya se hacía distinción entre magnitud y dirección como componentes de las fuerzas; también se manejaba la idea de que las fuerzas se podían componer (sumar) de una manera especial.

1.3.3 Fourier y la matematización del calor

Un cambio de perspectiva respecto a la matematización de la física se da en la obra del matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830); concretamente, en sus trabajos sobre la conducción de calor. Para Fourier, el lenguaje del análisis matemático[28] permite enunciar con exactitud los fenómenos naturales e instaurar relaciones de analogía entre ellos; sin embargo, ningún fenómeno físico se puede describir sin tener en cuenta las fuentes que lo producen.

A comienzos del siglo XVIII, algunos matemáticos estaban interesados con problemas físicos relacionados con movimientos oscilatorios, por ejemplo "*El problema de la cuerda vibrante*", donde se buscaba describir matemáticamente sus vibraciones verticales cuando se encontraba sujeta en sus extremos. Pero Fourier se interesó principalmente en la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos[29], buscando establecer los principios

---

[27] Simón Eugenio Stevin (1548-1620) formuló explícitamente el principio del paralelogramo de fuerzas.

[28] El análisis matemático, para Fourier, es el método por excelencia que se utiliza para expresar las relaciones cuantitativas existentes entre las cualidades características de un fenómeno.

[29] Fourier considera la transmisión del calor como un fenómeno continuo, al mostrar que el flujo de calor en el interior de un sólido es constante, el cual varía con respecto al tiempo.

matemáticos que los rigen e igualmente determinar los efectos de la propagación de estos (determinar el cambio de temperatura en un punto y un instante determinado), mediante un análisis de las ecuaciones diferenciales parciales asociadas al fenómeno. En esencial, consideró el siguiente problema: dada una varilla delgada de longitud l, cuya superficie lateral estaba aislada y con extremos de temperatura de 0°C, se preguntaba ¿Cuál será la temperatura de la varilla en cualquier punto x en un tiempo determinado t? Para solucionar este problema, partió de la premisa de que la distribución de la temperatura inicial de la varilla estaba representada por la función $f(x)$. Ahora el ejercicio consistía en hallar una ecuación $T\ (x,t)$ que representara la temperatura de varilla en un punto x, en cualquier instante t, donde $x\epsilon[0,l]$ y $t \geq 0$. En otras palabras, el problema era encontrar la función $T\ (x,t)$ a partir de la ecuación $f(x)$. Para ello la función $T\ (x,t)$ debe cumplir las siguientes condiciones e igualmente solucionar una ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\ T(x,t)$$

$$T\ (x,0)\ =\ \ f(x)$$

$$T(0,t) = T(l,t) = 0$$

La búsqueda de soluciones a la ecuación diferencial anterior, se volvió un problema eminentemente matemático, porque es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

Es de suma importancia que al tratar de resolver esta ecuación de onda, Fourier inauguró el método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales, el cual exigía que la función $f(x)$ de la condición de contorno, definida en el inérvalo $[-\ l,l]$ pudiera expandirse en una serie trigonométrica, así:

$$f(x)\ =\ \frac{1}{2}\ a_0\ +\ \sum_{i\ =\ 1}^{\infty}\left(a_{\ i}\ \cos\left(\frac{i\ \pi x}{l}\right)\ +\ b_{\ i}\ \sin\left(\frac{i\ \pi x}{l}\right)\ \right)$$

En síntesis Fourier se da cuenta que la función de temperatura $T\ (x,t)$ es una cierta función que depende de la posición x y del tiempo t, es decir implícitamente es una función vectorial que representara la temperatura. Entonces a partir de aquí podemos notar que para dar solución a esta ecuación Fourier necesitaba trabajar con unos nuevos entes conceptuales como son los vectores, aunque no se percato de ello; modernamente, esta solución representa una combinación lineal. En general, encontró Fourier que la solución de esta ecuación de onda, admitía un conjunto infinito de soluciones las cuales formaban un espacio vectorial real, como podemos notar aquí prefigura la noción de vector.

De acuerdo a lo anterior, podemos decir que Fourier en su obra *Théorie Analytique de la Chaleur* de 1822, instaura una nueva propuesta metodológica en la matematización de algunos fenómenos físicos.

Para Fourier, la naturaleza le suministra a las matemáticas objetos concretos para la elaboración y el perfeccionamiento de sus teorías, como lo hace notar en la siguiente cita:

> El estudio de la naturaleza, es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos. Ella tiene la ventaja de excluir las preguntas vagas y los cálculos sin salida. La relación con la naturaleza, evita que la mente humana divague, porque la naturaleza actúa como directriz del pensamiento. Es por ello, que el análisis matemático tiene las relaciones necesarias con los fenómenos sensibles; de ninguna manera su objeto es creado por la inteligencia del hombre; es un elemento preexistente del orden universal y no tiene nada de contingente y de fortuito. El está impreso en toda la naturaleza (Fourier, 1822, pág. 17).[30]

El procedimiento de Fourier es considerado como el método ideal para desarrollar investigaciones en física-matemática, como lo hace notar Henri Poincaré (1854-1912) en la siguiente cita:

> La teoría del calor de Fourier es uno de los primeros ejemplos de la aplicación del análisis a la física; partiendo de hipótesis simples que no son otra cosa que hechos experimentales generalizados, Fourier deduce una serie de consecuencias que en su conjunto constituyen una teoría completa y coherente. Los resultados obtenidos son ciertamente interesantes por ellos mismos, pero lo que es más interesante aún es el método que él empleó para llegar a ellos y que siempre servirá de modelo a todos aquellos que quisieran cultivar una rama cualquiera de la física matemática (Poincaré, 1895, pág. 1) citado por (Israel, 1996, pág. 174).

El método de Fourier se compone de las siguientes fases:

i. ***Observación Empírica***: permite describir las propiedades esenciales del fenómeno físico.

ii. ***Análisis Matemático***: establece las relaciones cuantitativas existentes entre las cualidades específicas (como propiedades de los cuerpos, capacidad calorífica,

[30] Al igual que para Henri Poincaré (1854-1912), la matemática provee a la física de un lenguaje preciso sin él no se puede expresar sus fenómenos; pero éste a su vez dirige el pensamiento matemático evitando la imaginación desbordante.

conducción interna y externa, entre otros.), esto nos suministra las ecuaciones del fenómeno físico.

iii. ***Análisis Especial***: desarrolla la teoría de la solución de las ecuaciones establecidas por el análisis matemático y se estudian las aplicaciones numéricas de estas soluciones.

iv. ***Verificación Experimental***: cuando se constatan que las relaciones establecidas por el análisis matemático y el análisis especial realmente funcionan.

A partir de la matematización de los fenómenos físicos, algunos conceptos y nociones, de las matemáticas y de la física se fueron acercando; esto influyó de manera decisiva en la creación y el desarrollo de los *Métodos Vectoriales*.

CAPÍTULO 2

LOS PROGRAMAS MATEMÁTICOS DE HAMILTON Y GRASSMANN

Este capítulo lo centraremos en las dos grandes tradiciones que jugaron un papel importante en la historia del análisis vectorial[31]: la tradición Grassmanniana y la tradición Hamiltoniana. Siendo esta última la más estudiada porque permitió la creación de nuevas álgebras a la vanguardia de Hamilton con sus cuaterniones.

En cuanto a la vida de estos dos grandes pensadores podemos decir, que William R. Hamilton nacio el 4 de agosto de 1805, en Dublín Irlanda. Su brillantez se manifestó de muchas maneras, a los 13 años de edad conocía superficialmente 13 lenguas; a los 16 años estudió la *Mecánica Celeste de Laplace* y encontró un error en la demostración de la *Ley del Paralelogramo de fuerzas*. Las investigaciones en ciencia comenzaron a los 17 años, con una *Teoría Sobre Sistemas de Rayos*, su principal objetivo era matematizar la óptica en términos de sus *funciones características*.

En 1835, le fue otorgado el titulo de Lord, recibiendo una medalla de la Real Sociedad. Posteriormente, en 1843, Hamilton incorpora sus cuaterniones en un trabajo sobre los números complejos y en un ensayo publicado en 1837, sobre *Teoría de Funciones Conjugadas o Parejas Algebraicas* (en el que definió el producto escalar y vectorial).

Hamilton se preguntaba si existía un álgebra con sus propias reglas y un lenguaje autónomo y estricto; se trataba de una disciplina que ameritara el apelativo de *Ciencia del Álgebra*, la cual debería ser independiente de todo referente geométrico. En este sentido, pensó que la geometría de representación era una ayuda a la hora de representar los números complejos como parejas ordenadas de números reales. Mostrando, que las parejas (a, b) eran semejantes a los números complejos de la forma $a + bi$. Desde esta visión, definió sus operaciones, las cuales fueron todas dadas en términos de las reglas de los

[31] Vale la pena resaltar otros hombres que desarrollaron sistemas más o menos vectoriales como son: Giusto Bellavitis (1803-1880), August Ferdinand Möbius (1790-1868), Reverendo Matthew O´Brien (1814-1855), Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Adhémar Jean Claude Barré (1797-1886).

números reales. Con el tiempo esta idea le permitió desarrollar completamente la teoría de los cuaterniones en cuanto a su estructura algebraica.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) nació en 1809 en Stettin, ciudad polaca, capital de Voivodato, localizada junto al Odra, cerca del Báltico; en 1827, ingresó a la Universidad de Berlín, donde estudio filosofía y teología. En 1839, Grassmann presentó al comité examinador científico de Berlín un estudio sobre las mareas titulado *Theorie der Ebbe und Flut*, el cual contenía la presentación de un sistema de análisis espacial basado en vectores. Este trabajo se puede considerar como el primer tratado sobre el análisis vectorial, donde se exponía la adición y sustracción de vectores, el producto vectorial, la diferencial en vectores y los elementos de las funciones vectoriales lineales de una forma moderna.

Grassmann escribió, en 1844, un largo y complicado libro, titulado *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, desarrollando la idea de un álgebra, cuyos símbolos representaban entidades geométrica tal como puntos, líneas y planos, los cuales eran manipulados usando ciertas reglas.

2.1 William Hamilton y el surgimiento del análisis vectorial

Con Hamilton se abre paso a un nuevo campo de las matemáticas, completamente diferente al tradicional, con su teoría de los cuaterniones. Sin embargo, encontró muchos detractores, por las siguientes razones:

i. Los cuaterniones presentaban un rompimiento categórico con el principio de permanencia de forma.
ii. Era muy tedioso operar con ellos.
iii. Los físicos no sabían qué hacer con la parte escalar del cuaternión (hipernúmero de dimensión cuatro).

De acuerdo con los obstáculos anteriores, no le impidió a Hamilton continuar con el desarrollo de su teoría. Cabe resaltar que esta situación no es algo inherente del desarrollo del análisis vectorial, sino que durante muchos años los matemáticos se enfrentaban a este tipo de obstáculos en la formulación de sus teorías, cuando van en contra a una tradición.

Tenemos muchos ejemplos históricos de teorías que, dada su originalidad, debieron sufrir percances similares, entre ellos tenemos: las geometrías no euclidianas, el álgebra de Boole, la teoría de Maxwell, entre otros.

Las primeras publicaciones sobre los cuaterniones de Hamilton se remontan a la década de 1840-1850, en el *Magazín Filosófico*. En estos artículos, Hamilton esboza su sistema teórico, estableciendo la relación entre cuaterniones y vectores. Como se puede advertir en la siguiente cita:

> A causa de la facilidad con la cual la llamada expresión imaginaria, o raíz cuadrada de una cantidad negativa, es construida por una línea recta que tiene dirección en el espacio, y que tiene a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ como sus tres componentes rectangulares, o proyecciones sobre los tres ejes rectangulares, hemos sido inducidos a llamar a la expresión trinomial en sí misma, línea la cual representa un *vector*. Un cuaternión está formado de una parte real y un vector. (Crowe, 1985, pág. 31).

Crowe llama la atención en que las palabras *vector* y *escalar*, tienen su origen en uno de los documentos de esta década. Para mostrar esto, Crowe cita a Hamilton:

> La parte algebraicamente real puede recibir todos los valores contenidos sobre una escala de progresión de números de lo negativo a lo positivo infinitamente; nosotros llamaremos entonces la parte escalar, o simplemente el escalar del cuaternión, y designaremos este símbolo prefijando, a el símbolo del cuaternión, la característica *Scal.*, o simplemente *S.*, cuando no haya confusión para usar esta última abreviatura. De otro lado, la parte algebraicamente imaginaria, la cual es geométricamente construida por una línea recta o radio vector. En general, un cuaternión tiene una determinada longitud y dirección en el espacio, puede ser llamada la parte vector, o simplemente vector del cuaternión; y puede ser denotada prefijando la característica *Vect*, o *V*. (Crowe, 1985, págs. 31-32).

Uno de los aspectos más significativos para Hamilton era la interpretación geométrica de las operaciones con los cuaterniones. En este sentido, usando la representación del plano de Argand, Hamilton sabía que $\sqrt{-1}$, actuaba como un operador rotacional de 90°, y en general, el producto por un número complejo producía una rotación de un ángulo θ; La idea de Hamilton fue extender estas ideas al espacio.

2.2 Hermann Gunther Grassmann y el surgimiento del análisis vectorial

En 1844, año en el cual Hamilton publica su primer artículo sobre cuaterniones, Grassmann saca a la luz pública sus desarrollos sobre análisis vectorial en un libro titulado: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (El cálculo de la extensión).[32] Al respecto, Crowe dice:

> "La creación de Grassmann sobrepasa a la de Hamilton en profundidad y perfección" (Crowe, 1985, pág. 47)

Grassmann desarrolla sus ideas sobre el análisis vectorial durante el período de 1832 a 1864. Es de singular importancia que en principio, el proyecto investigativo en el cual Grassmann estaba interesado era describir matemáticamente el fenómeno de las turbulencias y mareas. Precisamente, investigando estas cuestiones Grassmann se da cuenta que para desarrollar estos aspectos debe definir las bases conceptuales de una nueva rama de las matemáticas, cuyos objetos no se encontraban claramente determinados, como lo es el análisis vectorial. Sin embargo, sus aportes más finos, teóricamente hablando, pertenecen al campo del álgebra abstracta. Sus contribuciones a las matemáticas empiezan a concretarse en su *Theorie der Ebbe und Flut* de 1840[33], el cual, según Crowe, contiene el nacimiento de un sistema de análisis basado en vectores. Pero su obra más importante, es sin duda, *Die Ausdehnungslehre: Vollständing und in strenger Form bearbeitet*; en ella, Grassmann no sólo desarrolla cuestiones técnicas de las matemáticas, sino que expone también concepciones filosóficas.

2.2.1 Theorie der ebbe und flut de Grassmann

En *Theorie der Ebbe und Flut*, Grassmann, en primera instancia, planteaba problemas físicos relacionados con la ley de la inercia, las velocidades y las fuerzas a partir del cálculo diferencial e integral de vectores. Posteriormente, se vio en la necesidad de aplicar sus

[32] En realidad el libro aparece como: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert.*

[33] Este ensayo fue publicado en 1911, como vol. III, pt. I, de: Hermann Grassmann *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 vols. in 6 pts. (Leipzing, 1894-1911).

métodos vectoriales a problemas más sofisticados como el cálculo del centro de gravedad, entre otros. Desde esta perspectiva, tuvo la necesidad de definir el producto entre vectores, estableciendo dos tipos:

- ***Producto geométrico***: por un lado, el producto de dos vectores, se define como la superficie del paralelogramo determinado por estos vectores. Mientras que, el producto de tres vectores, representa el sólido (paralelepípedo) formado por ellos mismos. En general, el producto geométrico de m segmentos es un paralelepípedo m dimensional.
- ***Producto lineal***: se define como el producto algebraico de uno de los vectores por la proyección perpendicular del segundo.

Grassmann denoto $\dot{x}$: el producto geométrico y x al producto lineal. Aunque luego utilizó el símbolo $\overset{\frown}{\cdot}$ para el producto lineal.

Para Grassmann, el *producto geométrico* resultaba del producto de las longitudes de los vectores, multiplicadas por el seno del ángulo entre ellos. Mientras que, el producto lineal era el producto de las longitudes, multiplicadas por el coseno del ángulo entre ellos, así:

$$m \ \dot{x} \ n = mn \sin\theta$$

$$m \ \overset{\frown}{\cdot} \ n = mn \ \cos\theta,$$

donde θ corresponde al ángulo entre los vectores.

Vale la pena tener en cuenta algunas consideraciones sobre estas definiciones:

1. La representación de Grassmann tiene dificultades, pues no diferencia el vector de su longitud. En los dos casos anteriores, m y n, en la parte izquierda representan vectores, mientras que en la derecha son longitudes.
2. El producto geométrico de Grassmann es similar al moderno producto vectorial, pero con la diferencia de que el resultado no es otro vector, sino que es algo de diferente naturaleza; se puede interpretar como un área dirigida, generada por este producto.
3. De la definición de producto lineal, dado que $\cos(ab) = \cos(ba)$, se tiene que $a \overset{\frown}{\cdot} b = b \overset{\frown}{\cdot} a$.

Adicionalmente, Grassmann definió el siguiente producto, que modernamente es el mismo producto punto entre vectores, así:

$$(a \dotplus b \dotplus c) \ \overset{\frown}{\cdot} (a_1 \dotplus b_1 \dotplus c_1) \doteq aa_1 + bb_1 + cc_1,$$

donde a, b, c y a_1,b_1, c_1 representan un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares; a es paralelo a a_1, b a b_1 y c a c_1.

De la ecuación anterior, podemos ver que este producto es idéntico al moderno producto escalar.

Como podemos percibir, los resultados de Grassmann, más que constituir el primer sistema de análisis vectorial, constituye un el trabajo más profundo en la nueva álgebra de ese tiempo.

2.2.2 El sistema vectorial de Grassmann

El sistema vectorial de Grassmann aparece claramente dilucidado en 1844 en su obra cumbre *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. En este libro, Grassmann explica la manera como fue formalizando las operaciones básicas entre vectores:

> El primer impulso provino de las consideraciones de lo negativo en la geometría; me fui acostumbrando a ver las distancias AB y BA como magnitudes opuestas. En este sentido, llegué la conclusión que si A, B, C, son puntos de una misma línea recta, entonces en todos los casos $AB + BC = AC$, esto va a ser es cierto cuando AB y BC tienen la misma dirección o direcciones opuestas (cuando C está entre A y B). Las magnitudes AB y BC no las considero solamente con sus longitudes, sino también con sus direcciones, pues pueden tener direcciones opuestas. Desde esta perspectiva, hice una distinción entre la suma de longitudes y la suma de distancias, las cuales tienen fijada una dirección. De esto resultó la necesidad de establecer el concepto de suma, no sólo cuando las distancias estaban dirigidas en la misma dirección, sino también en direcciones opuestas. En esencia esto podría realizarse en una forma más simple, puesto que la ley de $AB + BC = AC$, es tan bien valida cuando A, B, C no se apoyan en una misma línea recta. (Crowe, 1985, págs. 56-57)

Muchas de las ideas desarrolladas por Hermann Günther Grassmann habían sido establecidas por su padre Justus Günter Grassmann en sus libros: *Raumlehre* (*Geometría*), *Trigonometrie*, de restringida circulación. En estos libros, Justus aborda el concepto producto geométrico; para él, no sólo los rectángulos, sino también los paralelogramos, pueden ser vistos como productos de dos lados adyacentes, los cuales no sólo deben ser tratados como longitudes sino como magnitudes dirigidas; al respecto, en su *Geometría* escribe:

> El concepto de producto es tomado en el más puro y general sentido, él es visto como el resultado de una síntesis en la cual, un elemento (producido de una anterior síntesis) es colocado en lugar del original elemento y tratado de la misma manera. (Crowe, 1985, pág. 59)

Más adelante escribe:

> En **aritmética**, la unidad es el elemento, contar es la síntesis, y el resultado es un número. Si este número, como el resultado de la primera síntesis, es tomado en lugar de la unidad, y tratado del mismo modo (es decir, contando), entonces el producto aritmético aparece, y puede ser visto como un número de un orden superior[34] que un número del cual la unidad ya es un número.
> En **geometría**, el punto es elemento, la síntesis es el movimiento del punto en una misma dirección, y el resultado de la trayectoria del punto, es una línea. Si esta línea, producida por la primera síntesis, es colocada en lugar del punto y tratada en la misma forma (es decir, movida en alguna dirección), entonces una superficie es producida de la dirección de la línea. Este es un verdadero producto geométrico de dos factores lineales y aparece en primer lugar como un rectángulo, en cuanto la primera dirección no participe con la segunda. Si la superficie es tomada en lugar del punto, entonces es producido un sólido geométrico como producto de tres factores. Esto es lo más lejos que uno puede ir en geometría pues el espacio es de solamente tres dimensiones; tales limitaciones no aparecen en la aritmética. (Crowe, 1985, pág. 59)

De lo anterior, podemos evidenciar como Grassmann cimenta las bases de su teoría, mediante la utilización de un elemento generador, a partir de este construye un conjunto de elementos de orden superior. Mientras que modernamente partimos de la definición de un conjunto, llamado espacio vectorial, formados por unos elementos denominados vectores. En otras palabras, Grassmann va de lo particular a lo general a la hora de construir su teoría.

2.2.3 Las bases filosóficas del sistema de Grassmann

Aunque las motivaciones intelectuales que guiaron a Grassmann provenían de la geometría, su mayor ingenio se evidencia en los tratamientos algebraicos que efectuaba. Su escritura causaba desconcierto entre los matemáticos debido a la manera en que hacía uso de unas formas simbólicas novedosas. Además, las bases teóricas desde las cuales fundamentaba

[34] Muy similar como se generan unidades de orden mayor a la unidad, es decir, los múltiplos.

sus desarrollos tenían un alto contenido filosófico. Como se evidencia en la introducción de su *Ausdehnungslehre* cuando declara:

> La primera división en todas las ciencias está dentro de lo real y lo forma. Por un lado, la ciencia real se representa en el pensamiento de la existencia, como el existir independientemente del pensamiento donde su verdad consiste en su correspondencia con la existencia. Por otro lado, la ciencia formal tiene como su objeto que ha sido producido por el solo pensamiento y su verdad radica en la correspondencia entre los procesos del pensamiento de ellos mismos. (Crowe, 1985)

Desde esta perspectiva, Grassmann decía que había descubierto un sistema meramente formal e independiente de la geometría. Grassmann se refiere a una clase de álgebra universal en la cual, aunque los elementos no poseían un sustrato material, se los podía interpretar geométricamente con un contenido significante. El trabajo de Grassmann es excesivamente abstracto y tiene una alta originalidad de ideas localizadas en un marco filosófico. Mientras que las ideas de Hamilton eran un poco más claras, quizás por esta razón trascendieron un poco más.

2.2.4 La teoría de las formas aplicada a los vectores

Grassmann desarrolla su llamada *Teoría de formas*, en el capítulo 4 de *Ausdehnungslehre*, la cual actúa de manera semejante a un sistema formal moderno, partiendo de un universo de formas, es decir, símbolos que representan objetos y establece ciertas relaciones entre ellos. Concretamente, Grassmann sigue los siguientes delineamientos:

Si a y b simbolizan dos formas, entonces el símbolo de conexión $\cap$ permite definir la nueva forma, así: $a \cap b$, y se cumplen las siguientes igualdades:

$$a \cap b = b \cap a$$

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$$

En este sentido, para Grassmann las formas similares (del mismo orden: dos puntos, dos vectores), cuando están relacionadas por una u otra conexión, dan como resultado una forma del mismo orden. Modernamente, lo que quiere decir Grassmann aquí, es que cuando sumamos dos vectores da como resultado otro vector. Mientras que en la multiplicación de formas del mismo o diferente orden, en general producen formas de orden superior. Esta idea muestra la manera como Grassmann cimienta las bases de su sistema partiendo de lo particular a lo general, en términos modernos construye, de manera rudimentaria, lo que hoy llamamos un espacio vectorial.

Más adelante, Grassmann introduce las operaciones de adición y sustracción con los vectores y prueba que siguen las leyes de su *Teoría de formas*. A partir de este momento se presenta un cambio de perspectiva, porque pasa de universo de formas que son objetos (puntos, segmentos, etc.) a un universo ocupado por los vectores, los cuales les trasfiere las conexiones definidas anteriormente, como lo muestra la siguiente cita:

> Todo vector de un sistema de orden $\boldsymbol{m}^{avo}$ puede ser expresado como la suma de $\boldsymbol{m}$ vectores, los cuales pertenecen a las $\boldsymbol{m}$ maneras independientes dadas del cambio del sistema. Esta expresión es única. (Crowe, 1985, pág. 69).

Una de las cuestiones claves y que marca un acercamiento moderno con el análisis vectorial tiene que ver con la introducción del concepto de *combinación lineal*, obviamente sin ese apelativo. A partir de aquí, Grassmann no sólo reveló diversas propiedades algebraicas para su sistema, sino que expuso algunas aplicaciones. Por ejemplo, desarrolló vectorialmente una representación del centro de gravedad de un cuerpo, así como las leyes de fuerzas y de velocidad para el centro de gravedad y explicó la manera en que sus desarrollos podían fundamentar la geometría.

2.2.5 Multiplicación exterior de Grassmann

El segundo capítulo del libro *Ausdehnungleshre* de Grassmann, titulado *Multiplicación Exterior de Vectores*, introduce dos tipos de productos: *producto exterior* y *producto interior*[35] de una manera equivalente como lo había hecho en su *Theorie der Ebbe und Flut*. Al *producto exterior* lo designa como *producto geométrico*, mientras que al *producto interno* lo denomino *producto lineal*.

Respecto al *producto exterior*, Grassmann declara:

[35] Hamilton dice: "el producto interior de Grassmann es similar a la parte escalar de mi cuaternión y su producto exterior a la parte vectorial. Si la noción de combinarlos se le ha ocurrido a él, entonces ha sido conducido a mis Cuaterniones; pero parece que él falló al no percibir esto".

> Deberíamos iniciar con la geometría en un cierto orden para asegurar una analogía con la ciencia abstracta. En este sentido, obtener una idea más clara que nos guie a lo largo del desconocido y arduo camino de procedimientos abstractos. Fuimos desde el vector a la forma espacial de un alto orden cuando permitimos el vector resultante. Es decir, cada punto del vector, describe otro vector, el cual es heterogéneo al primero, así que todos los puntos dan lugar a un mismo vector. Por un lado, el área de una superficie producida en este sentido tiene la forma de un paralelogramo. Mientras que, dos ciertas áreas de superficie las cuales pertenecen al mismo paralelogramo son designadas como iguales si la dirección del vector movido es apoyado en ambos casos sobre el mismo lado (por ejemplo, sobre el lado izquierdo) del vector producido por el movimiento. Cuando en los dos casos el vector correspondiente se apoya sobre el lado opuesto, entonces las áreas de superficie son diferentes. Así, obtiene una ley general: si en un plano un vector se mueve sucesivamente a lo largo de cualquier serie de vectores, entonces el área de tal superficie producida de este modo (con tal que los signos de los elementos de las superficies individuales sean colocados de la misma manera) es igual al área la cual se anhela ser producida si el vector se ha movido a lo largo de la suma de esos vectores (Crowe, 1985, pág. 71).

Para ilustrar la declaración de arriba, Grassmann consideró tres líneas paralelas coplanares cd, ef y ab, las cuales eran cortadas por tres parejas de líneas paralelas: $ec \parallel fd$, $ea \parallel fb$, $ca \parallel db$

Supongamos ab un vector que se mueve paralelamente a lo largo de ac, hasta coincidir con cd, formando un paralelogramo $abdc$. Ahora, si ab se mueve de la misma manera a lo largo de ae, hasta coincidir con ef, forma un paralelogramo $aefb$ y luego ab se mueve a lo largo de ec hasta llegar a cd, se forma el paralelogramo $efdc$. Por geometría elemental tenemos que:

$$\text{área} \quad abcd = \text{área} \quad aefb + \text{área} \quad efdc\,,$$

En pocas palabras, Grassmann mostró que el movimiento de ab a lo largo de ac hasta cd, da como resultado la misma área que cuando mueve ab a lo largo de ae y ec hasta llegar a cd, como se observa en la siguiente figura 17. Operación que según su teoría de formas, se comporta como un producto.

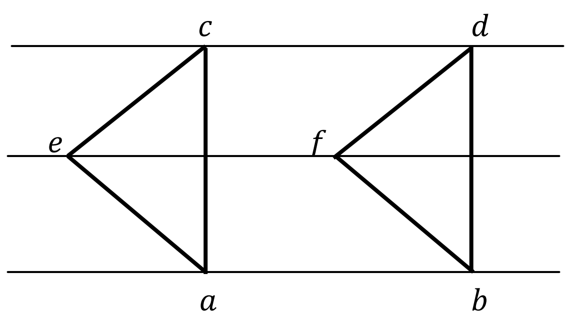


Figura 17: Muestra que cuando un vector ab se mueve a lo largo de ae hasta ef y luego a lo largo de ec hasta cd, forma un paralelogramo de igual área al paralelogramo formado por ab, cuando se mueve a lo largo de ac o bd hasta cd

2.3 Difusión de los sistemas de Hamilton y Grassmann e incidencia en otras investigaciones

Como hemos explicado antes, la consolidación de la noción de vector es una tarea que involucró el concurso de muchos investigadores, pero principalmente a Hamiltón y Grassmann. Debido a la gran originalidad de sus trabajos, incentivaron a los matemáticos a que se nutrieran de sus investigaciones a la hora de intentar construir un sistema similar al moderno sistema vectorial. Es por esta razón, que Hamilton y Grassmann tuvieron un papel predominante en el desarrollo del análisis vectorial, porque fueron los precursores del nacimiento de esta nueva rama de las matemáticas, la cual sería fundamental en la matematización de algunos fenómenos de física.

A continuación se presentará algunas de las investigaciones y publicaciones más destacadas de los matemáticos, en cuanto a la construcción de su sistema vectorial; pero no se detallará a fondo sus aportes, simplemente se ubican cronológicamente.

2.3.1 Fundamentos del análisis vectorial de Saint-Venant

El matemático francés Saint-Venant (1797-1886), en su documento *Mémoire sur les Sommes et les Différences Géométriques, et sur leur Usage pour Simplifier la Mécanique* de 1845, bosquejó varias ideas fundamentales sobre el análisis vectorial, incluyendo una versión del producto cruz. Sin embargo, cabe destacar que su producto fue visto no como un vector sino como un área orientada.

Posteriormente, Saint procedió a definir lo que llamó *diferencia geométrica o vector sustracción, diferencial geométrica, coeficientes diferenciales geométricos*. En su definición se encuentra implícito, desde un punto de vista geométrico, el concepto moderno de la adición de vectores, como lo podemos dilucidar en la siguiente cita:

> ***Suma geométrica**: Cuando cualquier número de líneas $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ... dadas con una cierta magnitud, dirección y sentido son adicionadas resulta una línea igual y paralela al último lado del*

polígono formado por todas las líneas; colocadas de tal manera que el extremo final de una línea coincida con el origen de la otra. Si $\overline{l}$ es el último lado del polígono, entonces su origen coincide con el origen de la primera línea y su extremo final con el de la última línea, algebraicamente sería:

$$\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \cdots$$

La adición de vectores hecha por Saint, la podemos ver en la figura18:

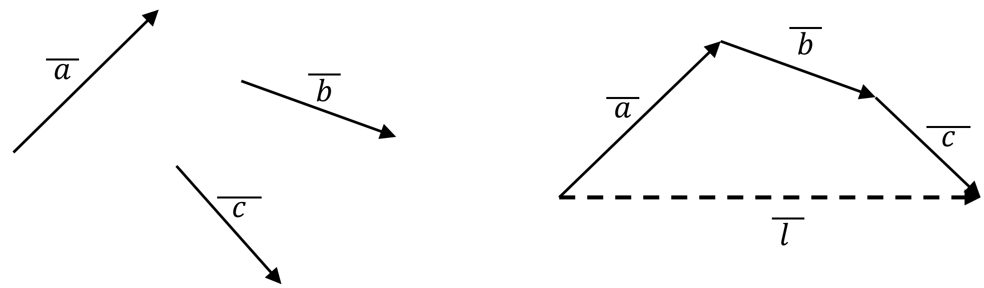


Figura 18: Muestra como de una manera geométrica Saint suma cualquier número de líneas $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$,…con una cierta dirección, magnitud y sentido. De esta suma geométrica de líneas dadas, resulta la línea $\overline{l}$.

Adicionalmente, definió la *suma de áreas planas* y *el producto geométrico*. En cuanto al producto geométrico manifestó:

> La multiplicación de una línea $\overline{b}$ por una línea $\overline{a}$, su resultado representa el área del paralelogramo formado a partir de dichas líneas ubicadas de tal forma que sus orígenes coincidan. Lo denotó de la siguiente manera: $\overline{a}\,\overline{b}$.

Saint mostró que este producto cumplía las siguientes relaciones:

$$\overline{a}\;\overline{a} = 0 \quad \text{y} \quad \overline{b}\;\overline{a} = -\,\overline{a}\;\overline{b}$$

Definió el producto geométrico de un área multiplicado por una línea, da como resultado el volumen del paralelepípedo, denotándolo, así:

$$\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c} = \acute{a}\text{rea } \overline{b}\overline{c} \text{ multiplicada por la línea } \overline{a}$$

En otras palabras, si las líneas son colocadas de tal manera que coincidan sus colas, forman el volumen del paralelepípedo, como muestra la figura 19.

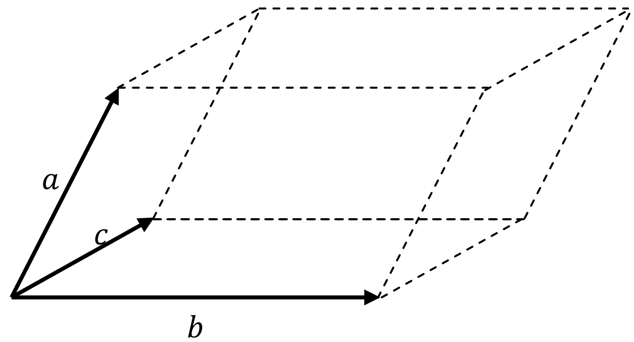


Figura 19: Muestra como un área multiplicada por una línea, geométricamente forman un paralelepípedo.

En este sentido, el volumen es considerado negativo cuando los lados están sobre el lado negativo de la base.

2.3.2 La translación de una magnitud dirigida por Matthew O´brien

Otro matemático importante en la historia del análisis vectorial es el Reverendo Matthew O´Brien (1814-1855). Sin embargo, es bastante difícil hacerle un seguimiento sistemático a sus desarrollos porque hay una gran diferencia entre sus primeras y últimas publicaciones. Su estudio lo centró en la construcción de una notación para la translación de una magnitud dirigida, considerando dos tipos de representación, como lo muestra la figura 20:

(i) *Translación Lateral*: es el movimiento de una magnitud v a lo largo de u formando un ángulo de 90°.

(ii) *Translación Longitudinal*: es el movimiento de una magnitud v a lo largo de u formando un ángulo de 0°.

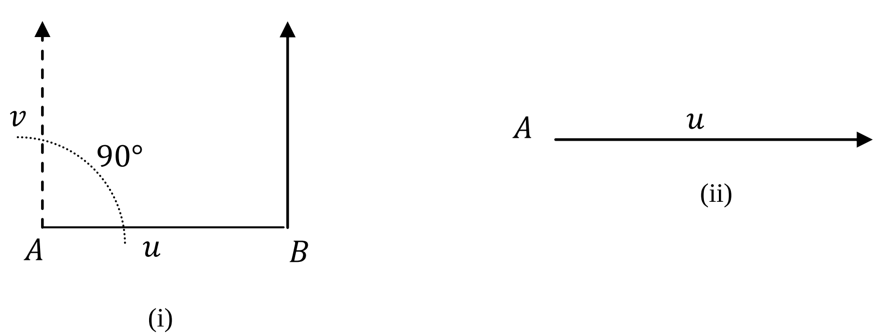


Figura 20: Muestra como el Reverendo Matthew O´Brien clasifico las translaciones en dos tipos: (i) *Lateral* y (ii) *Longitudinal*

Además, definió la adición de magnitudes dirigidas haciendo la distinción entre dos tipos, como muestra la figura 21:

(i) *Adición simultánea*: cuando dos magnitudes dirigidas tienen un origen común.

(ii) *Adición sucesiva*: cuando una magnitud dirigida tiene su origen en el punto final de la otra magnitud dirigida.

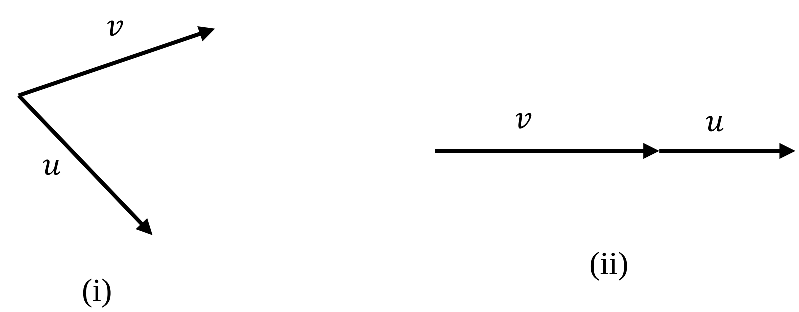


Figura 21: Muestra como el Reverendo Matthew O´Brien definió dos tipos de adición entre magnitudes dirigidas: (i) *Simultánea* y (ii) *Sucesiva*.

Con la finalidad de generalizar sus ideas, O´brien introduce tres unidades dirigidas α, β, γ que parten de un mismo origen a lo largo de los tres ejes X, Y, Z , pero no se relacionan con el moderno i, j, k. Sin embargo, las compara con las de Hamilton, llegando a la conclusión que no son unidades de dirección con la propiedad de $\sqrt{-1}$. Sin embargo, algunas consideraciones de O´Brien son muy similares a las de Grassmann, cuando expresa que cualquier magnitud dirigida v puede ser representada, así:

$$v = x\alpha + y\beta + z\gamma.$$

Es importante resaltar que O´Brien podría ser visto como el precursor de Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y Oliver Heaviside (1850-1925), los cuales independientemente instauraron lo que es en principio el moderno sistema de análisis vectorial. Motivados por el *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), de James Clerk Maxwell (1831-1879), inventaron el moderno análisis vectorial desde los elementos de los cuaterniones.

CAPÍTULO 3

LA TRANSICIÓN DE LOS CUATERNIONES A LOS VECTORES

Durante muchos años se aceptó la concepción de un álgebra simbólica sustentada por George Peacock (1791-1858), una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos. Es decir, una ciencia de símbolos sin interpretaciones y que cumplía ciertas operaciones básicas. Es por esta razón, que se pensaba que la construcción de cualquier otro tipo de número, debía de cumplir el principio de permanencia de forma, el cual manifiesta: "todas las formas algebraicas que son equivalentes cuando los símbolos son generales en forma pero específicos en valores (enteros positivos), serán equivalentes de la misma manera cuando los símbolos son generales tanto en valor como en forma" (Klein, 1992, pág. 1019). En otras palabras, que cualquier clase de nuevos números debían de cumplir las propiedades fundamentales que dictaban el álgebra simbólica. Fue bajo este principio que Hamilton fundamento la lógica de los números complejos sobre la base de los números reales, como parejas ordenadas (a, b) de números reales. A partir de este momento los matemáticos se percataron que los números complejos podían interpretarse como entidades dirigidas en el plano, porque ellos proporcionan un álgebra que permite representar los vectores y sus operaciones. Pero esto no era suficiente a la hora de representar todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo, que no estaban en un mismo plano. Por consiguiente, Hamilton vio la necesidad de crear una terna de números ordenados de la forma: $a + bi + cj$, los cuales estuvieran relacionados con las coordenadas cartesianas e igualmente definir su estructura algebraica; no obstante, sabiendo que deberían de cumplir el principio de permanencia de forma. Pero al definir sus operaciones le causaba desconcierto la multiplicación de n-úplas, en particular para el caso $n > 2$. Para superar este impase, Hamilton procedió a crear los cuaterniones que son hipercomplejos formados cuádruplas de números. Manifestando que estos nuevos números deberían ser análogos a los complejos ordinarios, y tener una significante interpretación en términos del espacio tridimensional. En este sentido, podemos vislumbrar que los números complejos le permitieron a Hamilton pensar en un número tridimensional para representar los vectores en el espacio, entonces, el cuaternión nace de la necesidad de interpretar matemáticamente el mundo físico. En últimas, la teoría de cuaternión constituye el paso intermedio entre los complejos representados en el plano y el análisis vectorial moderno.

3.1 Los cuaterniones de Hamilton

Cuando Hamilton, en 1843,[36] incorpora sus hipernúmeros, llamados los Cuaterniones, debe tener en cuenta dos consideraciones. Por un lado, los nuevos números poseen cuatro componentes y por otro lado, se ve en la obligación de abandonar el principio de permanencia de forma, porque los nuevos números no cumplían la ley conmutativa de la multiplicación. Antes de Hamilton, se suponía que la ley conmutativa era una regla implícita a todos los sistemas algebraicos; sin embargo, esto generó una nueva perspectiva del álgebra moderna. Este último hecho, propicia que el álgebra se amplié a universos cuyas operaciones no cumplen las propiedades de las cuatros operaciones de la aritmética básica. Como consecuencia de esta ampliación, se obtendrán distintas álgebras, cada una con sus propias reglas, símbolos y ecuaciones. Por ejemplo, el inglés Arthur Cayley (1821-1895) en unos trabajos sobre la *Teoría de Transformaciones* de 1858, hace otro rompimiento con el principio de permanencia, cuando muestra la multiplicación de matrices no es conmutativo, de la siguiente forma:

Sea T_1y T_2 transformaciones definidas, así

$$T_1 = \begin{cases} u = ax_1 + b\,y_1 \\ v = cx_1 + dy_1 \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{cases} w = ex_2 + fy_2 \\ z = gx_2 + hy_2 \end{cases}$$

De la composición tenemos que:

$$T_2T_1 = \begin{cases} w = (ea + fc)x_1 + (eb + fd)y_1 \\ z = (ga + hc)x_1 + (gb + hd)y_1 \end{cases}$$

Ahora si invertimos las transformaciones, así:

[36] En realidad el proceso va desde 1833 en sus trabajos de algebrización de la mecánica de Lagrange, hasta la publicación de sus *Lectures in Quaternions* de 1853.

$$T_2 = \begin{cases} u = ex_1 + f\,y_1 \\ v = gx_1 + h\,y_1 \end{cases}$$

y

$$T_1 = \begin{cases} w = ax_2 + by_2 \\ z = cx_2 + dy_2 \end{cases}$$

Por composición se tiene que:

$$T_1T_2 = \begin{cases} w = (ae + bg)x_1 + (af + bh)y_1 \\ z = (ce + dg)x_1 + (cf + dh)y_1 \end{cases}$$

Como podemos ver $T_2T_1 \neq T_1T_2$. En el lenguaje de teoría de matrices tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Se evidencia claramente que el producto de dos matrices no es conmutativo. En este orden de ideas, asistimos a un momento histórico en el cual emergen diversas álgebras abstractas, tales como: *los Cuaterniones*, *la teoría de extensiones*, *la teoría de matrices* y *el álgebra de Boole*, entre otras.

Los cuaterniones definidos por Hamilton tienen la forma $q = w + ix + jy + kz$, donde w, x, y, z son números reales y i, j, k vectores unitarios dirigidos a lo largo de los tres ejes. El cuaternión es un operador, que rotaría un vector dado alrededor de un eje dado en el espacio, y luego estiraría o contraería el vector. Para cumplir con este objetivo, eran necesarios dos parámetros (ángulos) con el fin de fijar el eje de rotación, un tercer parámetro que determina el ángulo de rotación y el cuarto el estiramiento o contracción del vector dado. Por esta razón, se emplea la palabra ***cuater*** porque define un grupo de rotación $E^{\mathbf{3}}$en el espacio; ellos constituyen un universo de dimensión cuatro, cuya base está conformada por el conjunto: $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, donde:

1: Un complejo ordinario.

$\boldsymbol{i}$: Primer complejo puro rota $1/4$ de vuelta.

$\boldsymbol{j}$: Segundo complejo puro rota $1/4$ de vuelta

$\boldsymbol{k}$. Tercer complejo puro rota $1/4$ de vuelta.

Hamilton sumaba y restaba los cuaterniones sin ninguna dificultad, el problema se presentaba cuando intentaba definir el producto porque no conservaban las propiedades comunes de los números complejos. En principio Hamilton no sabía cómo simplificar los términos ij, en ocasiones pensó en establecer $ij = 0$, como lo manifestó:

> Por momentos me he visto tentado en considerar $ij = 0$. Pero me resulta extraño e incomodo, y me percaté de que la misma supresión del término mismo no deseado, podría obtenerse asumiendo algo que parecía menos violento, es decir, que $ji = -ij$. De este modo consideré que $ij = k$, $ji = -k$, reservándome la consideración de si k era nulo o no.

Entonces Hamilton inicia su teoría definiendo producto de cuaterniones, como se muestra en la siguiente tabla:

$\cdot$	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	-1

A partir de este producto, le permitió reconocer los seis números no reales:

$$+i,\ +j,\ +k,\ -i,\ -j,\ -k.$$

Los cuales definirían las leyes que rigen las operaciones entre cuaterniones, a su vez le ayudaría a simplificar los cálculos. En este sentido, estos seis números no reales le daba salida al problema de definir el producto; la cuestión era que no satisfacía la ley conmutativa; sin embargo, como dijimos antes, esto no representó un obstáculo, sino que condujo a la definición de dos tipos de producto:

i. ***El producto punto***: no cumple la ley Modulativa (vectores ortogonales) y la división.

ii. ***El producto cruz***: no cumple la ley asociativa y conmutativa.

De lo anterior, podemos concluir que la aplicación de los vectores a problemas físicos ha conducido a la definición de dos formas distintas de multiplicar un vector por otro.

3.2 Características de los cuaterniones

Una de las cuestiones más importantes del método de Hamilton es la posibilidad de descomponer el cuaternión en dos tipos de cantidades: Una escalar y otra vectorial: [37]

$$Q = ScalQ + VectQ = SQ + V\,Q.$$

A partir de este momento Hamilton introduce los términos de escalar y vector, pero principalmente la parte escalar del cuaternión presenta una cierta dificultad cuando trata de darle una interpretación geométrica y es por esta razón que recibe críticas de los matemáticos de la época.

Posteriormente, con el objetivo de justificar la importancia del uso de su simbología, realiza el producto de dos cuaterniones α y α', suponiendo la parte real igual a cero, así:

Sean α, α' cuaterniones,

$$\alpha = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \alpha' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$$

Realizando la multiplicación tenemos que:

$$\alpha \cdot \alpha' = S \cdot \alpha \cdot \alpha' + V \cdot \alpha \cdot \alpha'$$

Descomponiéndolo en dos términos se tiene:

$$S \cdot \alpha \cdot \alpha' = -\left(x\,x' + y\,y' + z\,z'\right).$$

$$V \cdot \alpha \cdot \alpha' = \left(y\,z' - z\,y'\right)\boldsymbol{i} + \left(z\,x' - x\,z'\right)\boldsymbol{j} + \left(x\,y' - y\,x'\right)\boldsymbol{k}$$

Es interesante anotar que $V \cdot \alpha \cdot \alpha'$ es equivalente al moderno vector producto (cruz) y $S \cdot \alpha \cdot \alpha'$ al producto escalar.

Posteriormente, Hamilton introduce un operador diferencial ∇: el cual llamo “nabla” posiblemente porque se parecía a un instrumento musical hebreo. En su afán de implementar sus cálculos procedió aplicar su operador a una función escalar $f(x, y, z)$, así: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{k}$, dando como resultado un vector que representa la magnitud

[37] Del original [Tai57]

y dirección de la máxima rapidez de incremento de $f(x,y,z)$. Ahora cuando su operador ∇ es aplicado sobre una función vectorial de $\boldsymbol{F} = \left(F_1(x), F_2(y), F_3(z)\right)$, resulta un cuaternión, como lo muestra la siguiente expresión:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{k}\right)(F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}) =$$

$$= -\left(\frac{\sum F_1}{\partial x} + \frac{\sum F_2}{\partial y} + \frac{\sum F_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\sum F_3}{\partial y} - \frac{\sum F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\sum F_1}{\partial z} - \frac{\sum F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\sum F_2}{\partial x} - \frac{\sum F_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Donde la primera parte sin el signo negativo es el escalar del cuaternión, que representa la divergencia de $\boldsymbol{F}$, es decir, convierte un campo vectorial en un campo escalar. Mientras que la parte vectorial representa el rotacional $\boldsymbol{F}$, transformando el campo vectorial en otro campo vectorial.

Es importante aclarar que Hamilton reconoce en el cuaternión estas dos entidades distintas, es decir, de diferente naturaleza. Es por esta razón, James Clerk Maxwell (1831–1879) en su *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873 puso mucho énfasis en el cuaternión pero separadamente, es decir, escalar y vector, manifestando:

> Un vector[38] requiere de tres cantidades (componentes) para su especificación que se interpretan como longitudes a lo largo de los tres ejes coordenados.

Esto lo deduce a partir de la parte vectorial del cuaternión.

Es importante resaltar que Maxwell a la parte escalar del cuaternión la llamo convergencia, porque la encontraba en reiteradas ocasiones en sus investigaciones sobre mecánica de fluidos, donde $\boldsymbol{F}$ representa la velocidad de un flujo a través de una pequeña área alrededor de un punto. Mientras a la parte vectorial del cuaternión la llamo rotacional de $\boldsymbol{F}$, porque representaba dos veces la velocidad de rotación del fluido en un punto. Como podemos ver aquí la parte real y vectorial del cuaternión adquiere una significancia importante si se trabajan separadamente. En este orden de ideas, Maxwell mostró que los vectores eran el aparato teórico-práctico que realmente necesitaban los físicos a la hora de

[38] También Hamilton a la parte imaginaria del cuaternión le llamó *vector* por el latín “veher” que significa “dirigir”.

querer matematizar algunos fenómenos de la naturaleza. A partir de aquí Maxwell genera el ambiente propicio para que muchos matemáticos aporten ideas importantes en la creación de una nueva rama de las matemáticas denominada *análisis vectorial*, una disciplina muy útil para la ciencia física. Entre los matemáticos que ayudaron a consolidar el análisis vectorial como ciencia tenemos: Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y Oliver Heaviside (1850-1925) quienes aportaron una variada gama de notación vectorial.

3.3 Cantidades extensivas de Grassmann

En una sección del libro *Die Lineale Ausdehnungleshre*, Grassmann incorporó la noción de "cantidades extensivas",

> Cualquier expresión que se derive numéricamente de un sistema de unidades es una cantidad extensiva y llamo a los números que pertenecen a las unidades la derivación numérica de esta cantidad.

Las cantidades extensivas no eran más que hipernúmeros con n componentes, es decir, un vector de coordenadas. A partir de este resultado define todas las operaciones similares a una presentación moderna del tratamiento de vectores, como se muestra a continuación:

Sea γ, δ hipernúmeros de la forma:

$$\gamma = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 \quad \text{y} \quad \delta = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 \,,$$

donde γ_i y δ_i representan números reales y los a_1, a_2 y a_3 son unidades primarias representadas por segmentos de líneas dirigidos desde el origen de un sistema de ejes ortogonales orientados a derechas. Los $\delta_i a_i$ son múltiplos de las unidades primarias, mientras que δ están representados por un segmento de línea dirigido en el espacio cuyas proyecciones sobre los ejes ortogonales son las longitudes δ_i. Esta presentación de las cantidades extensivas en segmentos de línea dirigidos o vectores-línea, Grassmann las llamó *Strecke*.

En términos modernos Grassmann, ha demostrado, de acuerdo al significado de sus unidades primarias, que son los elementos de base, se puede definir algunas nomenclaturas para tener en cuenta en los dos tipos de productos, así:

- Producto interno: $a_i|a_i = 1$ y $a_i|a_j = 0$ para todo $i \neq j$.
- Producto externo: $[a_i\ a_j] = -[a_j\ a_i]$ y $[a_i\ a_i] = [a_j\ a_j] = 0$.

A estos corchetes Grassmann les llamó unidades de segundo orden, las cuales no las reduce a unidades de primer orden, pero trabaja con ellas como si fueran unidades de primer orden. Mientras que Hamilton si lo hace cuando define las leyes que rigen las operaciones entre cuaterniones, esto con el objetivo de simplificar los cálculos.

Grassmann continúo escribiendo e introdujo una serie de nuevas nomenclaturas, así:

- $[\,\alpha\,\beta\,] = \beta - \alpha$: el vector que inicia en α y termina en β.
- $[\,\rho\,\rho\,] = 0$: cuando se parte de un punto determinado y se regresa él, no se forma un segmento de línea dirigido.
- $[\,\rho\,\alpha\,] = -[\,\alpha\,\rho\,]$: la misma línea pero en dirección contraria.

Con base en lo anterior, procede a definir el producto interno entre γ y δ, de la siguiente manera:

$$\gamma|\delta = \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = \delta|\gamma$$

donde el ángulo θ formado entre γ y δ, es:

$$\gamma|\delta = ab\left(\frac{\gamma_1\delta_1}{ab} + \frac{\gamma_2\delta_2}{ab} + \frac{\gamma_3\delta_3}{ab}\right) = ab\ \cos\theta$$

y la magnitud del hipernúmero γ, está dada por la expresión:

$$\sqrt{\gamma|\gamma} = \sqrt{{\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 + {\gamma_3}^2}$$

De lo anterior, podemos decir que el producto interno de Grassmann de dos hipernúmeros primarios es semejante a la parte escalar del producto de cuaterniones de Hamilton.

Ahora para el producto externo, Grassmann escribe:

$$R = [\,\gamma\,\delta\,] = (\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)[a_2\ a_3] + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)[a_3\ a_1] + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)[a_1\ a_2]$$

El cual representa un hipernúmero de segundo orden, donde su magnitud es:

$$|R| = \sqrt{R|R} = \{(\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)^2 + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)^2 + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)^2\}^{1/2}$$

$$|R| = ab\left\{1 - \left(\frac{\gamma_1\delta_1}{ab} + \frac{\gamma_2\delta_2}{ab} + \frac{\gamma_3\delta_3}{ab}\right)^2\right\}^{1/2} = ab\sin\theta$$

Como podemos ver, este último resultado representa geométricamente el área de un paralelogramo determinado por los vectores-líneas γ y δ. Desde un punto de vista, de producto de unidades primarias, este representa la parte vectorial del producto de cuaterniones de Hamilton.

Posteriormente, a partir de la relación entre el producto interior de un hipernúmero β con el producto exterior de dos hipernúmeros γ y δ, Grassmann dedujo el producto P para el caso tridimensional, como se muestra a continuación:

$$P = [\gamma\,\delta]\beta = (\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2)\beta_1 + (\gamma_3\delta_1 - \gamma_1\delta_3)\beta_2 + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\beta_3$$

Pero si lo observamos bajo la estructura de determinantes se expresaría:

$$P = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \delta_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Desde una interpretación geométrica, este determinante representa el volumen del paralelepípedo formado por los vectores-líneas γ, δ y β.

Al final de la sección aplicada Grassmann hizo un tratamiento moderno de ciertos temas como sistemas de coordenadas, transformación de coordenadas y la ecuación del plano en términos de puntos.

En términos modernos, podemos decir, que Grassmann fue el primero en introducir la idea de espacio vectorial cuando define las cantidades extensivas que son hipernúmeros con n componentes, aunque no fue tenido en cuenta por sus concepciones filosóficas.

3.4 Elementos del análisis vectorial de Gibbs

El principal interés de Gibbs fue en las matemáticas como ciencia aplicada, por esta razón, en el año de 1881 escribió un folleto *Elements of Vector Análisis*, el cual contiene una variada mezcla de notaciones de Hamilton y Grassmann. Este folleto posee muchas ideas similares al moderno análisis vectorial, donde desarrolló un cálculo simbólico separando las partes vectorial y escalar del cuaternión. Además este folleto está compuesto por cuatro capítulos, así:

El primer capítulo titulado *Álgebra of Vectors*, estudió a profundidad los conceptos de producto escalar y vectorial, los cuales los consideraba fundamentales en física y geometría. En este sentido, introdujo:

$\alpha \, . \, \beta$: Producto skew (escalar).

$\alpha \times \beta$: Producto directo (cruz)

Adicionalmente probó las siguientes propiedades:

$$\alpha \, . \, \beta \;=\; \beta \, . \, \alpha$$

$$\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$$

$$\alpha . \beta = xx' + yy' + zz'$$

$$\alpha \times \beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$$

$$\alpha \times [\beta \times \gamma] = (\alpha \, . \, \gamma)\beta - (\alpha \, . \, \beta)\gamma$$

$$[\alpha \times \beta] \times [\gamma \times \delta \beta] = (\alpha . \gamma \times \delta \gamma)\beta - (\beta . \gamma \times \delta)\alpha$$

El segundo capítulo titulado *Differential and Integral Calculus of Vectors*, introduce el operador ∇ y hace un tratamiento extenso de las matemáticas en la teoría potencial.

Posteriormente, Gibbs en los capítulos III y IV se centró en la función vectorial lineal, exponiendo que la suma de dos vectores cualesquiera es igual a la suma de las funciones vectoriales individuales.

El folleto de Gibbs, *Elements of Vector Análisis*, alcanza popularidad gracias a su estudiante Edwin Bidwell Wilson (1879-1964) quien escribió un libro basado en las clases de Gibbs, dividiéndolo entre partes, las cuales son:

- La primera parte, trato la adición y los productos escalar y vectorial entre vectores.
- La segunda, trabajo el cálculo diferencial e integral en relación a funciones escalares y vectoriales.
- La tercera parte, está relacionada con la teoría de funciones vectoriales lineales. Incluyendo diferentes formas de producto de tres y más vectores e igualmente la expansión en términos de determinantes.

Gibbs fue un seguidor apasionado de los trabajos de Grassmann e hizo importantes contribuciones al desarrollo del análisis de vectorial, porqué se centró principalmente en la formulación de la notación.

3.5 Aportes de Oliver Heaviside al análisis vectorial

Oliver Heaviside (1850-1925), es considerado como el sucesor de Maxwell en el tratamiento matemático de la teoría de electromagnética. Mediante la utilización del sistema del cuaternión desarrollo un método vectorial que le permitió representar las numerosas cantidades físicas (vectoriales) de una manera más asequible a la comunidad física.

En un documento titulado *Electrical* de 1855, Oliver presento su sistema de análisis vectorial, el cual es idéntico al de Gibbs y al sistema moderno.

En su libro *The Relations between Magnetic Force and Electric Current* (1882-1883), Heaviside presentó la noción de integral de línea alrededor de una curva cerrada, que en notación moderna se representa, así:

$$B \sim C \text{ si } \oint_{\alpha} B = \oint_{\alpha} C$$ [39]

donde α es una curva cerrada.

En 1883, Heaviside publicó un documento titulado *Sume Electrostatic and Magnetic Relations*, donde utilizó el término *divergencia*, que simbolizó como ∇,[40] aplicándolo a funciones vectoriales. Precisamente, en la sección *The Operator ∇ and Its Aplications,* hizo una presentación del uso de este operador, de la siguiente manera:

Supongamos i, j, k tres vectores rectangulares de unidad de longitud, paralelos a X, Y, Z. Entonces Xi expresaría un vector de longitud x, paralelo a X y así sucesivamente. De lo anterior, podemos escribir:

---

[39] "Cuando un vector (cantidad dirigida) B, se relaciona con otro vector C, entonces la integral de línea de B alrededor de cualquier curva cerrada, es igual a la integral de C a través de la curva, el vector C es llamado Curl del vector B" (Crowe, 1985, pág. 163).

[40] Aunque Gibbs introduce este operador ∇ en la *Differential and Integral Calculus of Vectors*.

$$R = Xi + Yj + Zk$$

es una función escalar de posición, donde " + "significa combinación de velocidades. Tenemos que:

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$$

Ahora si lo multiplicamos por R tenemos:

$$\nabla \mathrm{R} = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)(Xi + Yj + Zk)(1)$$

La expresión anterior, nos indica la dirección en la cual R crece o decrece más rápidamente.

Adicionalmente, Heaviside incorporó los siguientes convenios,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k, \quad jk = i, \quad kj = j$$

y obtenemos,

$$\nabla R = \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)(2)$$

Esto es,

$$\nabla R = \mathrm{Conv}\, R + \mathrm{Curl}\, R \;\; (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) son tres formas distintas de la misma operación y en efecto varían de acuerdo a la naturaleza en cuestión. Adicionalmente, Heaviside dio la expresión para un vector en términos de i, j, k. Al igual que Gibbs un vector es la parte vectorial del cuaternión y se puede considerar independiente de este, así.

$$v = ai + bj + ck$$

donde a, b y c son componentes reales, i, j, y k son vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente. Posteriormente, Heaviside definió el operador

$$\nabla = i + j + k$$

Además introdujo la adición, sustracción y usó sólo la parte vectorial del cuaternión para representar cantidades físicas, es decir $\alpha = ai + bj + ck$. De acuerdo a esta nueva notación introdujo dos nuevos tipos de multiplicación de $A = ai + bj + ck$ y $B = a^{\prime}i + b^{\prime}j + c^{\prime}k$, la cual definió simbólicamente, así:

- AB: Producto escalar.

- $V\,AB$: Producto vectorial.

Del producto escalar podemos concluir:

- Posee una característica nueva porque el producto de dos números reales o cuaterniones siempre es un número de la misma naturaleza, mientras que el producto de vectores no necesariamente lo es.
- Este producto puede ser cero (vectores ortogonales) sin que ninguno de sus elementos sea cero.
- No podemos determinar un vector o un escalar r talque $r = {}^{a}/_{b}$, siendo a y b vectores. Por un lado si r es un vector, entonces, rb no seria igual al vector a, ahora si r fuera un escalar, entonces, rb no seria tampoco igual al vector a. Esto lo que muestra que el cociente entre vectores no está definido.

Del producto vectorial podemos concluir:

- De dos vectores es un vector perpendicular a ellos.
- De dos vectores paralelos es cero aunque ningún factor lo sea.
- No es conmutativo.
- No es asociativo.
- No tiene inverso.

Lo trascendental que se muestra aquí, es la libertad que goza las matemáticas a la hora de construir álgebras que no necesitan satisfacer necesariamente las propiedades fundamentales que dictaba el principio de permanencia de forma.

Uno de los aportes importantes de Heaviside tiene que ver con la socialización de los tratados de las ideas de Maxwell, las cuales eran bastantes complicados y tediosos.

3.6 Aportes de William Kingdon Clifford al análisis vectorial

Parece que uno de los precursores en tratar de hacer un acercamiento del análisis del cuaternión al análisis vectorial fue William Clifford (1845-1879) en su libro *Elements of Dynamics*. En Inglaterra trabajo fuertemente las geometrías no-euclidianas por influencia de Riemann y Lovatchevsk y creó un tipo de álgebra asociativa (álgebras de Clifford), la cual generalizo al cuerpo de los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton. Su principal contribución al análisis vectorial fue en cuanto al producto vectorial, así:

- En su obra *Elements of Dynamics*,1878 introduce el producto vectorial mediante la utilización de la teoría formal de determinantes, como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = \left(R_y P_z - R_z P_y, R_z P_x - R_x P_z, R_x P_y - R_y P_x\right)$$

$$\boldsymbol{Q} = \left(Q_x, Q_y, Q_z\right) = \left(R_y P_z - R_z P_y, R_z P_x - R_x P_z, R_x P_y - R_y P_x\right)$$

$$Q_x = R_y P_z - R_z P_y$$

$$Q_y = R_z P_x - R_x P_z$$

$$Q_z = R_x P_y - R_y P_x$$

- Presento la noción de producto geométrico, que una combinación de producto escalar y vectorial, similar al producto de cuaterniones para n-dimensiones, así:

$$\boldsymbol{rq} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}$$

  No obstante, con la ayuda de su producto geométrico[41] interpreta el área de un paralelogramo generada por el movimiento de un vector ab sobre un vector ac y define el producto vectorial como un vector de longitud $(ab \cdot ac) \sin bac$ y la dirección depende del sentido del recorrido. Mientras que el volumen construido por la traslación de ab (el cual es un área) a lo largo de ac es el producto escalar, como la magnitud $(ab \cdot ac) \cos bac$.

La utilización de símbolos para representar vectores y las operaciones con ellos ofrecen un método abreviado, eficaz y muy atractivo para expresar las leyes en física y en geometría. Ahora bien cuando el álgebra de vectores es extendida a vectores variables, como $\boldsymbol{r}\,(t) = x\,(t)\boldsymbol{i} + y\,(t)\boldsymbol{j} + z\,(t)\boldsymbol{k}$, donde $x\,(t)$, $y\,(t)$ y $z\,(t)$ son funciones reales de t, entonces $\boldsymbol{r}\,(t)$ es una función vectorial. La cual nos permite describir una curva, si los diferentes vectores que se obtienen para valores determinados de t son trazados a partir de

[41] Esta idea de producto geométrico de Clifford es el mismo al producto de Grassmann (Crowe, 1985, pág. 71)

un cierto punto fijo, entonces, los extremos de estos vectores que son puntos en el espacio que describen la trayectoria de la curva. Es bajo esta misma premisa, que la función vectorial de una variable real t sea muy similar a la función ordinaria en el plano. En síntesis esto nos permite expresar muchos teoremas del análisis en una forma vectorial.

3.7 La importancia de la creación de los cuaterniones

En principio, Hamilton pensó que su sistema constituía la base de todo el edificio matemático. Sin embargo, al final lo inundó la desazón al percibir que su sistema era uno más de los muchos posibles. Hoy sabemos que esto, antes de constituir una limitación, es un indicativo del potencial intrínseco de sus investigaciones.

El libro *Lecturas Sobre Los Cuaterniones* de Hamilton, es importante por tres razones:

i. Le permitió mostrar la legitimidad de los números complejos.
ii. A través de los números hipercomplejos se describe un método de análisis para el espacio tridimensional.
iii. Lo más importante es que encontró un método analítico que podía ser extendido para asumir la legitimidad de los números hipercomplejos.

De cualquier forma, el aporte de Hamilton a las matemáticas es indiscutible; Nadie pone en duda que fue el pionero de una concepción de álgebra más ampliada de la que se tenía hasta principios del siglo XIX, y que percibió los principios modernos del análisis vectorial.

3.8 Los problemas de recepción y difusión de los tratados de análisis vectorial

Al igual que muchas disciplinas novedosas, la recepción de los cuaterniones tuvo muchas dificultades. La verdad es que los números complejos, los cuaterniones, el sistema de Grassmann, y el sistema del análisis vectorial de Gibbs-Heaviside fueron lentamente aceptados; este hecho le causaba mucho desconcierto a Hamilton y a Tait. Sin embargo, sabemos que muchos matemáticos aportaron en la consolidación y difusión. El siguiente cuadro puede servir de síntesis:

Trabajos

- Argand, Mourey, Warren Gauss y otros → *Geometría de representación de los números complejos.*
- Gauss, De Morgan, Peacock, Clifford y otros → *Concepción General de álgebra*
- Bellavitis, Mobius, Grassmann, Wessel, Servios, Gauss, Argand, Francais, Mourey, Jhon Graves, De Morgan, Hamilton, Tait y otros → *Aportes sobre la Representación* Geométrica de puntos en el *Espacio.*

Uno de los principales difusores del análisis vectorial en Norteamérica fue el matemático Benjamín Pierce, quien fue profesor de astronomía y matemáticas en Harvard durante el período de 1833 a 1880.

En Francia el libro de Hamilton era poco aceptado. Unos años más tarde, Frenchmann Alexandre Allégren (1862), publicó el primer libro sobre los cuaterniones, el cual tuvo poca difusión.

En Italia, Giusto Bellavitis en 1858 y 1862 publicaron documentos explicando el sistema de los cuaterniones, y finalmente extendido a Rusia por Tait (1862).

Tait publicó cursos sobre otras aplicaciones de cuaterniones, matemáticas, físicas e incluyendo algunas en Electro-Dinámica.

Como vemos el sistema de análisis vectorial no sólo progresó en relación al desarrollo de la física sino también en relación al desarrollo de las matemáticas; fundamentalmente con el desarrollo del álgebra desde 1840 a 1890.

Las primeras publicaciones extensivas del análisis vectorial aparecieron en Inglaterra, Alemania e Italia, y fueron incluidas en un libro sobre *electricidad* presentada desde un punto de vista Maxwelliano.

El matemático alemán August Otto Föppls (1854-1924) publicó *Einfuhrung in die Maswell´sche Theorie der Elektricität* (1894), libro trascendental no sólo en la historia del análisis vectorial al presentar una determinada manifestación del moderno análisis vectorial; sino también en la historia de la electricidad. Es la primera exhibición en alemán mostrada en afinidad con las ideas de Maxwell. En la exposición de sus argumentos vectoriales sigue el parentesco señalado por Heaviside en sus documentos. En los primeros capítulos expone el análisis vectorial, el empleo del simbolismo de Maxwell y primordialmente el de Heaviside.

Otra publicación de Föppls *Vorlesungen Über Technische Mechanik* (1897-1900), consta de cuatro volúmenes, en el cual hace uso extensivamente del análisis vectorial.

Edwin Bidwell Wilson (1879-1964), publicó *Vector Análisis* (1901), constituyo el primer libro de una amplia manifestación del sistema de análisis vectorial, en el cual implanta cálculos vectoriales y ciertos desarrollos con relación a la función lineal. Fue un texto para el uso de los estudiantes de matemáticas y física, creado en base a las lecturas de Gibbs (Pág., 289).

Alfred Heinrich Bucherer (1863-1927), publicó en Alemania *Elemente der Vektoranalysis mit Beispielen aus der Theoretischen Physik* (1903), cubrió los mejores temas en análisis vectorial (adición, multiplicación, la diferenciación de vectores, teoría de potencial y teoremas de transformación) con la exclusión de función vectorial lineal.

El físico alemán Richard Martin Gans (1880-1954) publicó *Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die Mathematische Physik* (1905), donde abordo algunos temas como adición, multiplicación, diferenciación vectorial, teoremas de transformación, coordenadas curvilíneas y cálculo integral de vectores. Posiblemente llega al análisis vectorial a través de sus escritos sobre electricidad.

Posteriormente, el físico alemán Siegfried Valentiner´s (1876-1958), publicó *Vektoranalysis* (1907), dedicado a la discusión de aplicaciones de análisis vectorial en la electricidad y la mecánica; incluyendo un procedimiento de la función vectorial lineal, expuesto desde el punto de vista de Gibbs, influenciado por la tradición Heasviside-Föppl.

Cesare Burali-Fortí (1861-1931) y Roberto Marcolongo (1862-1943), publicaron *Elementi di calculo vettoriale con numerose aplicación alla geometría, alla mecanica e alla Física-Matematica* (1909), lo fragmentaron en dos partes:

i. *Produtto Vettoriale e Interno*, su producto escalar fue en correspondencia con la tradición Grassmanniana. Mientras que, su producto cruz con la tradición Hamilton-Heaviside-Gibbs. Además trató con notaciones en un plano y cálculo diferencial de vectores.
ii. La otra parte con aplicaciones a la geometría, la mecánica, la hidrodinámica, la teoría elástica (Pág. 237).

El físico Joseph George Coffin (1877-), publicó *An Introduction to Vector Methods and Their Various Aplications to Physics and Mathematics* (1909), incluyó los principales temas en análisis vectorial hasta la función vectorial lineal. Continuó la tradición Gibbs-Wilson en simbología y métodos.

Dr. Vladimir Sergeyevitch. Ignatowsky (1875-1942) publicó *Die Vektoranalysis und Ihre Anwendung in der theoretischen Physik* (1909-1910), presentó el álgebra y cálculos de vectores, incluyendo coordenadas curvilíneas y una sección concerniente a tensores. Su interés fue primordialmente en electricidad, justamente publicó *Solution of Some Problems of Electrostatics and Electrodynamics with the Help of Vector Análisis* (1902), su tradición fue implantada por Alfred Heinrich Bucherer (1863-1927), Gans y sigfried Valentiner (1876-1958).

Es de anotar que, la tradición que adoptó en forma moderna del análisis vectorial fue la instaurada por Gibbs y gobernada por los libros de Edwin Bidwell Wilson (1879-1964) y Coffin. Además Gibbs fue el que mejor notación desarrolló para el análisis vectorial.

Mientras que la tradición de Heaviside fue la que más influencia tuvo en el desarrollo de las ideas de Maxwell. Pero a su vez éste último estuvo posiblemente motivado por Tait para el estudio de los cuaterniones.

CAPÍTULO 4

TRATADO DE PETER TAIT

El objetivo de este capítulo es presentar un análisis epistemológico de los dos primeros capítulos del libro *Elementary Treatise on Quaternions*, del matemático escocés Peter Güthrie Tait. Este tratado constituye uno de los casos más relevantes de trasposición matemática.

Tait nació en Dalkeith, Midlothian, cerca de Edimburgo, Escocia, en el año 1831. En 1841 ingresó a la Academia de Edimburgo, donde fue compañero de James Clerk Maxwell. En su primer libro, escrito en coautoría con W. J. Steele, *Dynamics of a Particle*, Tait ya empieza a demostrar su preocupación por la matematización de la física. En 1853 obtiene una primera copia del libro de Hamilton *Lectures on Quaternions*. Tal como refiere en una de sus cartas a Hamilton, esta lectura sólo le sirvió para tomar algunas notas generales. Su verdadero interés por los cuaterniones, lo continúo incrementando durante el resto de su vida, data de 1857.

En principio, Tait se preguntó por las motivaciones que guiaron a Hamilton hacia sus resultados. En esta perspectiva mantuvo una cálida relación epistolar con el propio Hamilton. Sin embargo, su interés investigativo era establecer las aplicaciones de los cuaterniones a la física. Para dar cuenta de ello, Tait debió estudiar a profundidad todos los aspectos conceptuales de los cuaterniones, llegando a la conclusión de que eran una herramienta de gran ayuda para los geómetras y los físicos.

Aunque la mayoría de conceptualizaciones originales no corresponden a Tait, es considerado como uno de los precursores del análisis vectorial. Su importancia histórica es indudable, pues lideró, desde 1865, la recepción y divulgación del sistema, por dos razones: En primer lugar, visualizó un análisis vectorial moderno de gran utilidad para los físicos.

En segundo lugar, entendió que, a pesar de la originalidad, los desarrollos de Hamilton eran de difícil comprensión. En síntesis, su principal idea fue exponer de una manera sistemática los pensamientos de Hamilton, organizar los conceptos y establecer relaciones de causalidad.

El libro de Peter Güthrie Tait *Elementary Treatise on Quaternions* (1867), contiene los principios fundamentales del análisis vectorial que aún mantienen su vigencia. Los contenidos de los textos típicos de análisis vectorial y álgebra lineal actuales, guardan la secuencia y el método establecido por Tait.

En este trabajo de tesis nos centraremos en los dos primeros capítulos. Que dan razón de los elementos necesarios para alcanzar los objetivos propuestos, y se relacionan con la instauración del vector como objeto matemático. En el primer capítulo, Tait recoge los elementos y antecedentes que permiten incorporar la definición de vector de manera moderna. Mientras que, en el segundo capítulo Tait utiliza la teoría de los cuaterniones de Hamilton para dar cuenta de algunas propiedades y generalizaciones vectoriales.

Capítulo 1: ***Los vectores y su composición***. En este capítulo, Tait incorpora la noción de vector. Definiendo las operaciones de suma y resta entre vectores, y la multiplicación de un vector por un escalar. Posteriormente, introduce la diferenciación de un vector en términos de una variable escalar. Crowe afirma que este capítulo perfectamente podría servir como un primer capítulo de cualquier texto moderno de análisis vectorial (Crowe, 1985, pág. 122). Dicho capítulo, presenta varios ejemplos de aplicaciones geométricas y físicas.

Capítulo 2: ***Productos y cocientes de Vectores***. En este capítulo, Tait se centra en el estudio de los cuaterniones. Muestra que el producto de dos vectores es un cuaternión; la parte negativa es el producto escalar y la positiva el producto vectorial. Acorde con el moderno análisis vectorial, muestra que el producto punto cumple la propiedad conmutativa, mientras que el producto cruz no.

4.1 Revisión del capítulo I del tratado de Tait: de los vectores y su composición

En este capítulo, Tait desarrolla algunas nociones básicas que le permiten introducir la noción de vector. Lo interesante de esta presentación, es que no va directamente a los aspectos técnicos, sino que establece los desarrollos teóricos necesarios para llegar a sus conceptualizaciones. Principalmente toma como referencia el problema histórico sobre la representación geométrica de las cantidades algebraicas. En este sentido, Tait empieza llamando la atención en el desarrollo del universo numérico a partir de la solución de ecuaciones. La cuestión es que después de aceptar las cantidades negativas e imaginarias[42], se plantea la necesidad de representarlas geométricamente.

Para Tait, el problema de la representación encuentra una salida apropiada a través de la geometría analítica de Descartes. Siguiendo las ideas de Wessel y Argand, Tait representa las cantidades negativas mediante la utilización del concepto de segmento dirigido; para el caso de las cantidades imaginarias utiliza el plano cartesiano.

4.1.1 Las cantidades imaginarias como rotaciones

Con Tait, se generaliza la convención de representar las cantidades reales en el eje horizontal X y las cantidades imaginarias en el eje vertical Y; concretamente, Tait plantea, como aún lo hacemos, la representación de las cantidades:

$$+1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$$

Todas ellas se pueden generar operando $\sqrt{-1}$, de acuerdo con la siguiente tabla.

$\cdot$	$+1$	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$
$\sqrt{-1}$	$\sqrt{-1}$	-1	$-\sqrt{-1}$	$+1$

En síntesis, podemos decir que Tait visualiza $\sqrt{-1}$, como un operador rotacional sobre rectas, así:

Si rotamos el segmento $\overline{OP}$, en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del punto O, un ángulo de 90°, se llega de P a Q. Ahora, si realizamos la misma operación repetidamente, se llega a S, luego a T y finalmente retornamos nuevamente a P, como lo muestra la figura 22. De esta forma, en principio, se generarían las cuatro rotaciones

[42] Tait las llama raíces imposibles. Más adelante las designará como cantidades imaginarias. En algunas ocasiones utiliza el signo $\overline{w}$ para representar $\sqrt{-1}$. El apelativo de "*números complejos*" se debe a Gauss, quien lo usó en el ensayo *Theorie Residuorum Biquadraticorum* de 1831. En ese mismo ensayo, Gauss utiliza la notación de i para $\sqrt{-1}$.

básicas de 90°. En general la cantidad $a + b\sqrt{-1}$, se puede representar como un punto en el plano: $M = (a, b)$. A su vez el segmento $\overline{OM}$ se ha originado de rotar un segmento alrededor de O, un ángulo de α. Se tiene que la longitud del segmento $\overline{OM} = \| r \| = \| (a, b) \| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y su dirección con el eje X, estaría determinada por el ángulo α igual $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

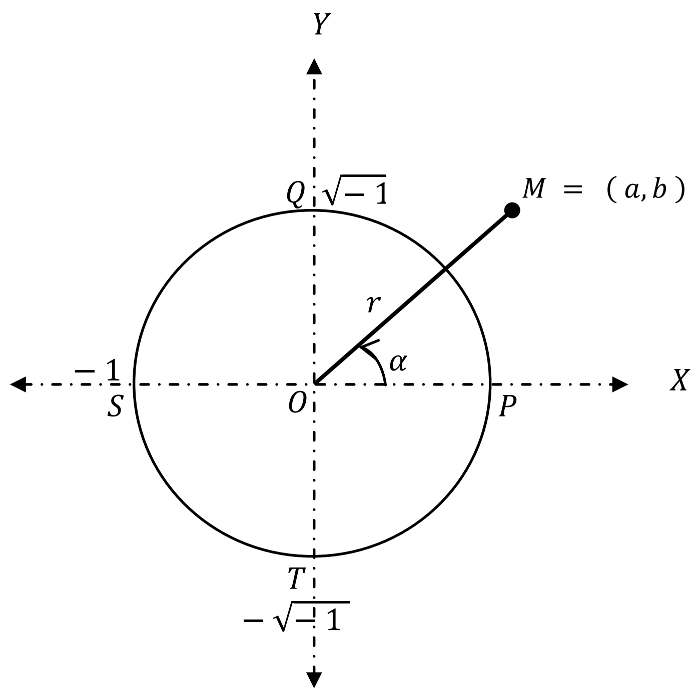


Figura 22: Muestra como Tait generó todas las cantidades imaginarias, mediante la rotación del segmento $\overline{OP}$ en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor de un punto fijo, un ángulo de 90°.

Tait muestra que si, en general operamos con $\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha$, sobre una recta cualquiera dentro del plano, se produce una rotación que depende del ángulo α, así:

$$\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha\right)\left(\alpha + \sqrt{-1}\,b\right) = a\cos\alpha - b\,\sin\alpha + \sqrt{-1}\,(a + b\,\cos\alpha),$$

Lo cual significa que:

(i) La recta conserva su longitud, puesto que:

$$\sqrt{[(a\,\cos\alpha - b\,\sin\,\alpha)^2 + (a\,\sin\alpha + b\,\cos\alpha)^2]} = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

(ii) Su dirección con respecto al eje de las X estaría dada por:

$$\tan^{-1}\left(\frac{a\ \sin\alpha\ +\ \ b\ \cos\alpha}{a\ \cos\alpha\ -b\ \sin\ \alpha}\right)\ =\ \tan^{-1}\left(\frac{\tan\alpha\ +\ \dfrac{b}{a}}{1-\ \dfrac{b}{a}\ \tan\alpha}\right)\ =\ \alpha\ +\ \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

En este orden de ideas, Tait generaliza el problema de las rotaciones en el plano utilizando los resultados establecidos, desde hace su siglo, por el matemático francés Abraham de Moivre (1667 – 1754), según el cual,

$$\left(\cos\ \alpha\ +\ \sqrt{-1}\ \sin\ \alpha\right)^{m}\ =\ \cos\left(m\,\alpha\right)+\ \sin\ \left(m\,\alpha\right)$$

Podemos decir lo siguiente:

i. El primer miembro de la igualdad representa las operaciones de un producto de m rotaciones sucesivas, de un ángulo α.

ii. El segundo miembro de la igualdad experimenta una rotación única de un ángulo $m\,\alpha$ de una sola característica.

En el apartado 11, de este primer capítulo, Tait aborda el problema de la representación en el espacio. Para ello alude a los trabajos del matemático francés François Joseph Servois (1768-1847), quien habría desarrollado un tratamiento de los cuaterniones[43] antes que Hamilton. Para Servois, la generalización de la expresión $a+b\sqrt{-1}$ del plano, en el espacio tomaría la forma:

$$p\ \cos\ \alpha\ +\ \ q\ \cos\ \alpha\ +r\ \cos\ \alpha,$$

la cual correspondería a la representación de un vector unitario, cuya dirección estaría dada por los ángulos α, β y γ con respecto a los tres ejes. De acuerdo a p, q y r Tait expresa:

> Él [Servois] asegura fácilmente que p, q, r no pueden ser cantidades reales, se pregunta: "¿Serían ellas imaginarias, reducibles a la forma $A\ +B\sqrt{-1}$? Esta es una cuestión que él no responde. Veremos (en el capítulo siguiente) que no son otra cosa que los i, j, k del cálculo de Cuaterniones (Tait, 1873, pág. 6)

En el apartado 12, Tait hace referencia a las múltiples contribuciones respecto al problema de la representación espacial, tal como el mismo Hamilton reconoce. Al respecto Tait dice:

[43] Publicación hecha en 1813, en los Annales de Gergonne.

> En el prefacio de su obra titulada *Lectures on quaternions*, Hamilton nos ha dado una exposición lúcida y completa, y al mismo tiempo muy imparcial, de títulos que sus predecesores han hecho valer en el género de estudios que venimos de obviar. (Tait, 1873, pág. 6)

Para Tait, a nadie más que a Hamilton se le puede señalar como el descubridor de $\sqrt{-1}$, como operador básico para representar direcciones en el campo de la geometría.

4.1.2 La definición formal del vector como objeto matemático

Del apartado 15 al apartado 28, Tait establece las nociones y definiciones básicas que históricamente corresponden a la legalización del concepto de vector como objeto matemático. Para ello, Tait sabe que no es suficiente la definición en sí misma, sino también la incorporación de una operatividad relativa a estos nuevos objetos.

Teniendo en cuenta que la ubicación de un punto en el espacio queda determinada por tres componentes (datos numéricos, dice Tait), la recta $\overline{AB}$, que une dos puntos A y B quedará determinada también por tres valores[44]. Desde esta perspectiva, Tait, entonces enuncia su resultado fundamental:

> **Definición**: "Todas las rectas iguales y paralelas son susceptibles de ser representadas por un mismo símbolo, y este símbolo dependerá de tres elementos numéricos. Es bajo esta relación que una recta se denomina vector". (Tait, 1873, págs. 8-9)

Es importante poner de manifiesto las siguientes observaciones:

1. Tait no establece, como lo hacemos actualmente, diferencia entre recta y segmento.
2. Dado el vector $\overline{AB}$, Tait denomina al punto A origen, y extremo al punto B. En seguida afirma que se puede visualizar un vector como un vehículo que transporta un punto de A hasta B.
3. Aunque Tait no lo establece explícitamente, de forma implícita maneja el hecho que si $A = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = (y_1, y_2, y_3)$, entonces
$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ x_3 - y_3).$$

[44] Lo interesante aquí es que Tait nos muestra que una recta en el espacio no dependerá de los ejes coordenados sino de tres elementos numéricos.

- El segundo punto es muy importante pues le permite tener una interpretación física de los vectores. Como hemos dicho antes, este es uno de los aspectos que más movilizaba a Tait en sus investigaciones.
- El punto tres aparece de manera más clara en el apartado 18, cuando define *igualdad entre vectores.*

> **Definición**: "Si representamos $\overline{AB}$ por α (el cual dependerá de tres valores), y si $\overline{CD}$ es igual en longitud a $\overline{AB}$ y paralelo a $\overline{AB}$, entonces $\overline{AB} = \overline{CD} = \alpha$." (Tait, 1873, pág. 9)

Esta es una definición de vector como clase de equivalencia, la cual puede visualizarse en cualquiera de los textos modernos de álgebra lineal y análisis vectorial.

4.1.3 La adición de vectores

Basado en las definiciones anteriores Tait procede a introducir la operación de suma vectorial, así:

> **Definición**: Sean A,B,C tres puntos cualesquiera, donde $\overline{AB} = \alpha$, $\overline{BC} = \beta$, $\overline{AC} = \gamma$, establezcamos la siguiente relación:
> $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Leftrightarrow \alpha + \beta = \gamma$ (Tait, 1873, pág. 9)

Con base a esta definición algebraica, Tait interpreta físicamente la regla de adición de vectores por medio de composición de velocidades simultáneas, tanto para el valor como para la dirección de la velocidad resultante, como muestra la figura 24.

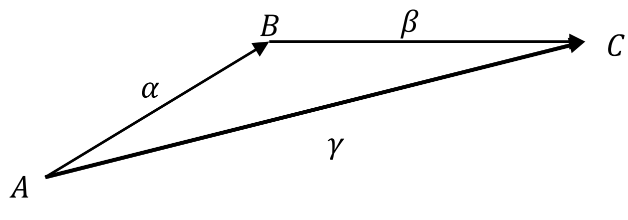


Figura 24: Muestra la suma triangular entre los vectores $\overline{AB} = \alpha$, $\overline{BC} = \beta$, $\overline{AC} = \gamma$, queda como resultado: $\alpha + \beta = \gamma$

De esta forma, podemos decir cuando la posición de C coincide con la posición A, se tiene entonces que:

$$A = C \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

A continuación Tait, le da significación al signo "$-$", estableciendo que cuando es aplicado a un vector, le cambia su dirección, por lo tanto:

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

Siguiendo con la interpretación física, y atendiendo a las reglas comunes de la composición de velocidades y fuerzas, Tait establece el hecho que si ABC es un triángulo cualquiera, se tendrá que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

En el caso de un polígono cualquiera resulta:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \cdots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0.$$

En general, la regla geométrica para la suma vectores consiste en hacer coincidir el extremo final del primer vector con el origen del siguiente vector y así sucesivamente. El vector resultante de esa suma tendrá por extremo inicial, el origen del primer vector y por extremo final el del último vector de esa sucesión.

De acuerdo a lo anterior, Tait presenta el siguiente ejemplo:

Sean $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ vectores como muestra la figura 25. Ahora procedamos hallar la suma $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN}$ con origen en el punto dado O. Iniciamos colocando el punto A en O, construimos el vector $\overline{OL_1} = \overline{AL}$, paralelos entre sí. Luego colocamos B en L^1, construimos el vector $\overline{M^1 N^1} = \overline{CN}$, también paralelos entre sí. El resultado de esta suma es el vector $\overline{ON^1}$.

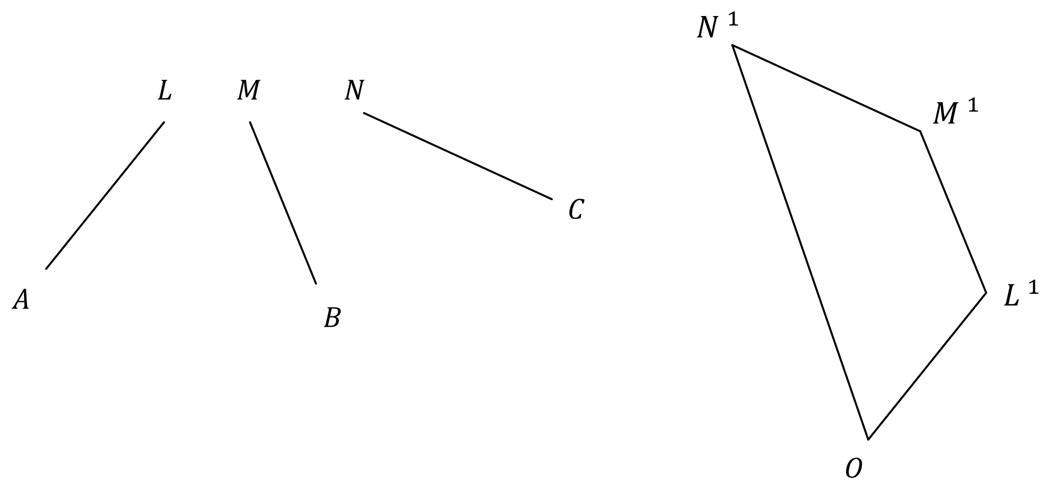


Figura 25: Muestra que dado tres vectores $\overline{AL}$, $\overline{BM}$, $\overline{CN}$ como realizar la suma $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN}$ teniendo como origen O, el vector resultante de esta suma es: $\overline{ON^1}$.

4.1.4 Múltiplo escalar de un vector

En seguida Tait define la operación entre el universo numérico de los escalares y los vectores.

> **Definición**: Si componemos un número cualquiera de vectores paralelos entre sí, el resultado será un múltiplo de uno de ellos por un número abstracto (Tait, 1873, pág. 9).

Supongamos los puntos A,B,C situados sobre una misma recta, como muestra la figura 26. Tait, escribe, tal como lo hacemos hoy, $\overline{BC} = x\overline{AB}$, donde x es un factor numérico, aclarando que x será positivo cuando B está entre A y C, y negativo en los otros casos.

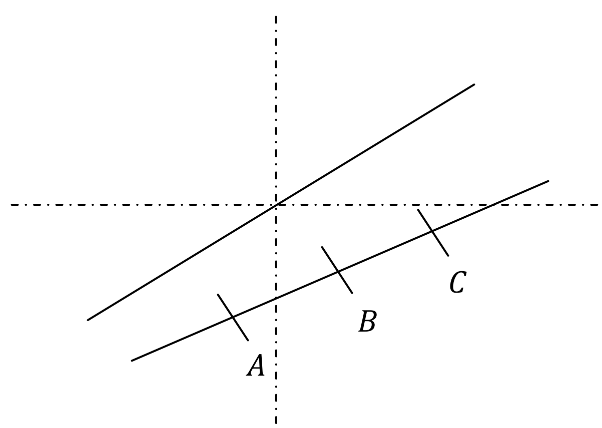


Figura 26: Muestra geométricamente como Tait realiza el múltiplo escalar de un vector, así: $\overline{BC} = x\overline{AB}$

4.1.5 Componentes de un vector

Este es uno de los tratamientos propiamente moderno que establece Tait con sus vectores, y constituye la forma del vector como una tripla ordenada. Concretamente, Tait establece:

> Un vector cualquiera puede ser descompuesto en tres componentes paralelas a tres vectores dados, no paralelos entre ellos dos a dos ni paralelos a un mismo plano. Esta descomposición no puede hacerse más que de una sola manera. (Tait, 1873, pág. 13)

Para explicar la descomposición vectorial, Tait recurre a la siguiente figura 27:

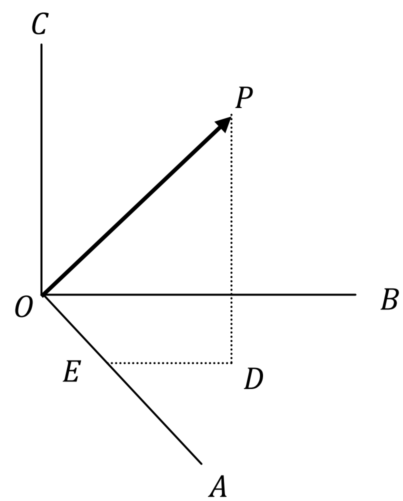


Figura 27: Muestra geométricamente como Tait realiza la descomposición rectangular de vectores

Supongamos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ son tres vectores fijos y $\overline{OP}$ un vector cualquiera. Tomando $\overline{PD}$ paralelo a $\overline{CO}$ y $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{BO}$ se tiene,

$$\overline{OP} = \overline{OE} + \overline{ED} + \overline{DP}$$ [45]

Por el apartado anterior, se tendrá que:

$$\overline{OP} = x\,\overline{OA} + y\,\overline{OB} + z\,\overline{OC} \Leftrightarrow \rho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

donde α, β, γ corresponden a un sistema vectorial que cumple las hipótesis, y x, y, z son los coeficientes numéricos que dependen de los vectores correspondientes.

[45] Modernamente, si un vector $\overrightarrow{V}$ se representa por medio del segmento orientado que va del punto (x_1, y_1) al (x_2, y_2), entonces la expresión en componentes de $\overrightarrow{V}$ es: $\overrightarrow{V} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$; siendo $a = x_2 - x_1$, la componente horizontal y $b = y_2 - y_1$, la componente vertical.

De lo anterior, Tait llama la atención en el hecho que en el caso de tres vectores unitarios, Hamilton utiliza los símbolos i, j, k para designar el vector:

$$\rho = xi + yj + zk$$

donde i, j, k corresponden a vectores unitarios en direcciones perpendiculares y x, y, z se pueden visualizar como las aristas consecutivas de un paralelepípedo rectangular, siendo ρ el vector-diagonal correspondiente en el paralelepípedo, como muestra la figura 28:

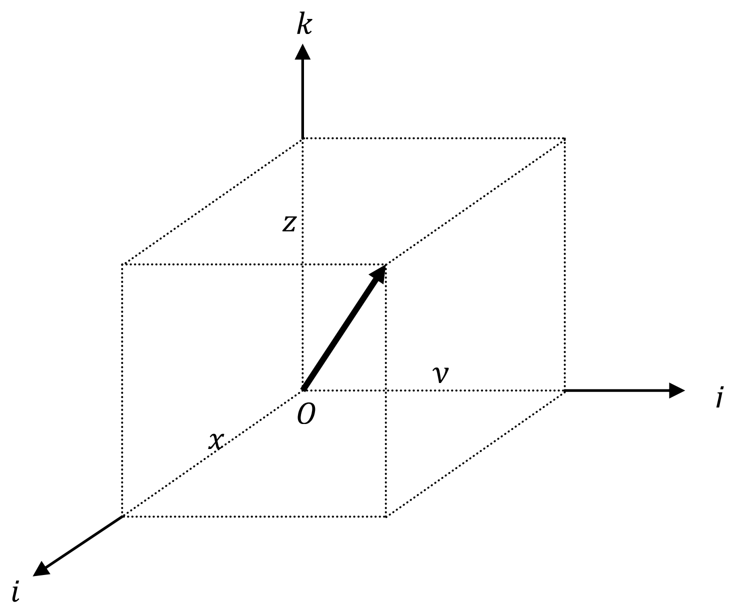


Figura 28: Muestra geométricamente que las aristas de un paralelepípedo rectangular están formadas por vectores unitarios, siendo $\rho = xi + yj + zk$, el vector–diagonal.

4.1.6 Interpretaciones físicas

En este capítulo, un aspecto enmarca la relación del cálculo vectorial con la física, es el que tiene relación con el movimiento. Para Tait el cálculo vectorial constituye la herramienta fundamental para describir el movimiento. Como hemos visto antes, el vector es considerado por él como un vehículo de desplazamiento. Para abordar este aspecto, Tait debe primero que definir geométricamente algunas curvas y utilizar el cálculo diferencial al estilo de Newton como él mismo lo certifica.

Las curvas en el espacio

En el apartado 31, Tait define la noción de curva en el espacio. Para ello utiliza combinaciones de vectores y funciones escalares, las cuales, modernamente corresponden a las funciones paramétricas de una curva[46]. En la actualidad no se tiene ningún problema definir una curva como una función vectorial en la variable t. Gracias a que tanto la velocidad como la aceleración son magnitudes vectoriales, permiten introducir la noción de función vectorial:

$$\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right)$$

Tait escribe la ecuación de una curva de la siguiente forma:

$$\rho = \sum p\,\alpha,$$

donde cada α es un vector y cada p es una función escalar que depende de t[47]. En este sentido plantea que, en general, para hacer referencia a una curva usará la representación:

$$\rho = \varphi(t)$$

La matematización del movimiento.

En el apartado 32, Tait aborda algunas cuestiones del cálculo diferencial, basándose en la noción de curva definida antes. Los desarrollos de Tait siguen los delineamientos del cálculo de fluxiones de Newtón, como él mismo Tait lo hace notar:

---

[46] Un movimiento curvilíneo en el plano no puede describirse de manera completa por medio de una única ecuación de dos variables, porque por un lado necesitamos de dos variables para denotar la posición del objeto y por otro, una tercera variable para denotar el instante de tiempo en el que el objeto se encuentra en una posición determinada. En este sentido, para representar un movimiento curvilíneo en el plano utiliza tres variables (Tait les llamo elementos numéricos): las coordenadas de posición x e y, y la tercera variable llamada parámetro. En otras palabras, una curva plana ρ es el conjunto de puntos $\left(f(t), g(t)\right)$ que satisfacen las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, siendo f y g funciones continuas del parámetro t en un intervalo I.

[47] En el texto de Tait no aparece los subíndices, pero se supone que debería ser $\sum_{i=1}^{n} p_i(t).\alpha_i$, donde $p_i(t)$ es una función de t, y cada α_i es un vector.

Los fundamentos del Cálculo diferencial y aquellos de la Dinámica, constituyen las bases de las leyes del movimiento: nosotros llegamos gradualmente a la conclusión que el sistema seguido por Newton en los dos casos, es, después de todo, el mejor (Tait, 1873, pág. 36)

Sea el punto O, el origen de coordenadas en el espacio, y P un punto de una curva, como lo muestra la figura 35, entonces:

$$\overline{OP} = \rho = \varphi(t).$$

Para otro punto Q de la curva, se tendrá:

$\overline{OQ} = \rho_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t + \partial t)$, donde ∂t: representa un número cualquiera. A partir de aquí Tait interpreta a $\overline{PQ}$ como el vector desplazamiento (cuerda-vector) del movimiento, el cual estará dado por la ecuación:

$$\overline{PQ} = \partial\rho = \rho_1 - \rho = \varphi(t + \partial t) - \varphi(t).$$

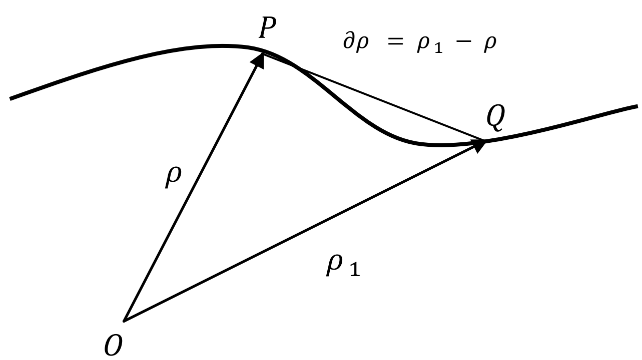


Figura 35: Muestra el proceso mediante el cual Tait construye el vector desplazamiento.

Como lo hemos advertido antes, “los vectores que intervienen en la función $\varphi(t)$ son constantes y los factores que los multiplican son solo variables en función de t” (Tait, 1873, pág. 36). Esto le permite, a Tait desarrollar $\partial\rho$ como una serie de Taylor:

$$\partial\rho = \frac{\partial\varphi(t)}{dt}\,\partial t + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\,(\partial\rho)^2 + \cdots$$

Luego aplicando el límite, es cuando Tait obtiene:

$$lim\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\partial t = 0} = \frac{\partial\rho}{dt} = \varphi'(t)$$

Modernamente lo que se muestra aquí es la derivada $\varphi^{\prime}(t)$ de la función vectorial[48] $\varphi(t)$ (que asocia a cada punto t el vector de posición del punto móvil), se define exactamente de igual forma como la derivada de una función real, así:

$$\varphi^{\prime}(t) = \lim_{\partial t \to 0} \frac{\varphi(t + \partial t) - \varphi(t)}{\partial t} = \lim_{\partial t \to 0} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$$

si el límite existe, entonces $\varphi^{\prime}(t)$ será tangente a la curva recorrida por φ.

Descripción de la velocidad instantánea

Después del tratamiento anterior, Tait busca describir la velocidad (instantánea) en cada punto sobre la curva; para ello supone una variación de tiempos t que experimenta cada punto cuando cambia de una posición a otra, como muestra la figura 36:

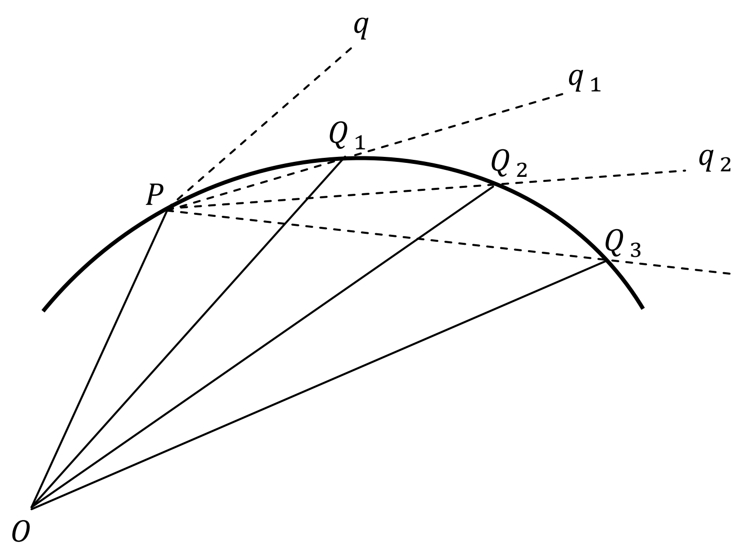


Figura 36: Representa la manera como Tait describe la velocidad instantánea en cada punto sobre una curva.

[48] Modernamente, sea $\overrightarrow{S}$ una función vectorial definida por $\overrightarrow{S} = f(t)\,\overrightarrow{\imath} + g(t)\,\overrightarrow{\jmath}$, entonces $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{S} = \left[\lim_{t \to t_0} f(t)\right]\overrightarrow{\imath} + \left[\lim_{t \to t_0} g(t)\right]\overrightarrow{\jmath}$ siempre que exista tanto $\lim_{t \to t_0} f(t)$ como el $\lim_{t \to t_0} g(t)$.

En un tiempo t el punto P sobre la curva está representado por el vector posición

$$\overline{OP} = \rho = \varphi(t),$$

luego en un tiempo $t + \partial t$, la nueva posición es Q dada por

$$\overline{OQ_1} = \rho_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t + \partial t),$$

donde ∂t: representa un intervalo finito o infinitamente pequeño.

De aquí tenemos que el vector desplazamiento a partir del punto P durante este intervalo de tiempo es:

$$\overline{PQ_1} = \overline{OQ_1} - \overline{OP} .$$

Supongamos otro punto Q_2 sobre la curva ocupado por el móvil en un tiempo $t + \frac{1}{2}\partial t$ está representado por el vector posición $\overline{OQ_2} = \varphi\left(t + \frac{1}{2}\partial t\right)$ y su desplazamiento está dado por:

$$\overline{PQ_2} = \overline{OQ_2} - \overline{OP} = \varphi\left(t + \frac{1}{2}\partial t\right) - \varphi(t)$$

si fuera rectilíneo; pero desde un punto de vista de un movimiento uniforme su desplazamiento sería:

$$\overline{Pq_2} = 2\,\overline{PQ_2} = 2\,(\overline{OQ_2} - \overline{OP}) = 2\left[\varphi\left(t + \frac{1}{2}\partial t\right) - \varphi(t)\right]$$

y así sucesivamente.

En general, el vector desplazamiento será:

$$d\rho = \overline{Pq} = \lim\left\{x\left[\varphi\left(t + \frac{1}{2}\partial t\right) - \varphi(t)\right]\right\}_{x = \infty} = \varphi'(t)\,dt$$

entonces, $\frac{d\rho}{dt} = \varphi'(t)$ representa la velocidad instantánea del móvil.

4.2 Revisión del capítulo II del tratado de Tait

Aquí Tait intenta dar cuenta los fundamentos de la construcción y el cálculo de los cuaterniones.

El cálculo de los cuaterniones reposa sobre la distinción que se establece entre dos tipos de magnitudes reales. Por un lado, las cantidades numéricas ordinarias y por otro lado, las magnitudes que agrupan dos factores: una longitud y una dirección, denominadas posteriormente *vectores*.

El objetivo principal de Tait era el estudio de las propiedades de los cocientes de vectores, su geometría y las reglas que rigen su cálculo. Inicio definiendo ciertos conceptos como en el capítulo anterior, entre ellos tenemos:

4.2.1 Razones vectoriales

La teoría de las razones constituye el vehículo teórico que usa Tait para definir el cociente entre vectores. Esto es algo que nos suena extraño en la actualidad, pero a la luz del tratamiento con cuaterniones en Tait parece algo natural. El proceso seguido por Tait consiste en determinar las operaciones que le permiten llevar uno de los vectores sobre el otro, así:

Sean $\overline{OA} = \delta$ y $\overline{OB} = \lambda$ vectores y se desea calcular la razón entre ellos. Los pasos seguidos por Tait son los siguientes:

(i) Aumentar o disminuir la longitud del vector $\overline{OA}$ hasta que coincida con la de $\overline{OB}$, es decir, encontrar x tal que $\lambda = x\,\delta$, donde x es un elemento numérico.

(ii) Girar el vector $\overline{OA}$ alrededor del punto O hasta que coincida con la dirección del vector $\overline{OB}$, depende de tres elementos numéricos que son: α, β y γ. En este caso, α y β determinan el plano en el cual se efectúa la rotación de $\overline{OA}$ y γ es el valor de la rotación, como lo muestra la figura 37.

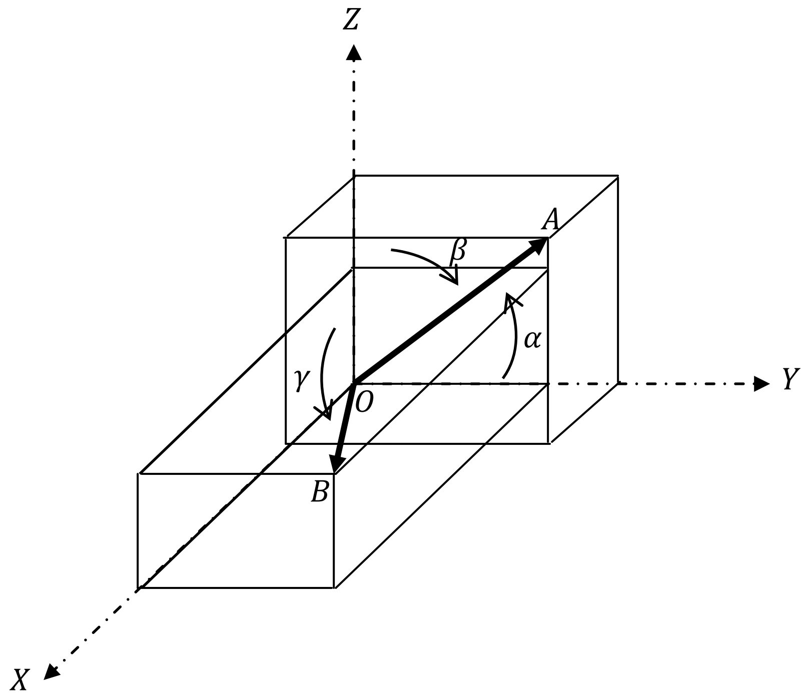


Figura 37: Muestra representación geométrica de la razón entre los vectores $\overline{OA} = \delta$ y $\overline{OB} = \lambda$.

De aquí se puede deducir que la razón de dos vectores en general depende de cuatro elementos numéricos distintos (tres rotacionales y uno de longitud), que vistos sintéticamente corresponden al cuaternión. Desde esta perspectiva, Tait llamó q el cuaternión que transforma un vector dado en otro vector, de aquí tenemos:

$$\beta = q\,\alpha \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{\beta}{\alpha} = \beta\,\alpha^{-1}$$

Por convención,

$$\frac{\beta}{\alpha}\,\alpha = \beta\,\alpha^{-1}\,\alpha = \beta \quad \text{y} \quad (\beta\,\alpha^{-1}) \times \alpha = \beta \times (\alpha^{-1}\,\alpha) = \beta$$

De esta forma, el cuaternión q es un operador que transforma un vector dado en otro vector, y de acuerdo a las dos operaciones, intrínsecamente establece una descomposición en dos factores operativos, los cuales son:

(i) ***Una extensión***: cuando se varia la longitud del vector dado para que coincida con el otro vector, la cual llamó *Tensor*, denotándolo por T.

(ii) ***Una rotación***: cosiste en mover un vector dado hasta que ocupe la misma posición del otro vector; el cual llamó *Vertidor* (del francés *Verseur*) expresándolo por U.

4.2.2 Primera forma de representación de un cuaternión

Basándose en las primeras nociones Tait representó un cuaternión de la siguiente manera:

$$q = T_q U_q = U_q T_q$$

donde T_q: no depende de la longitud de α y β. Mientras que U_q depende de sus direcciones.

Teniendo en cuenta su definición de vector como una clase de equivalencia (aunque Tait no emplea tan moderna expresión), Tait demuestra que el cuaternión resultante de la división de $\frac{\beta}{\alpha}$ no depende de las longitudes absolutas y de las direcciones absolutas de los vectores α y β. Si los cambiamos por otra pareja de vectores el valor del cuaternión no cambia; así, como muestra la figura 38:

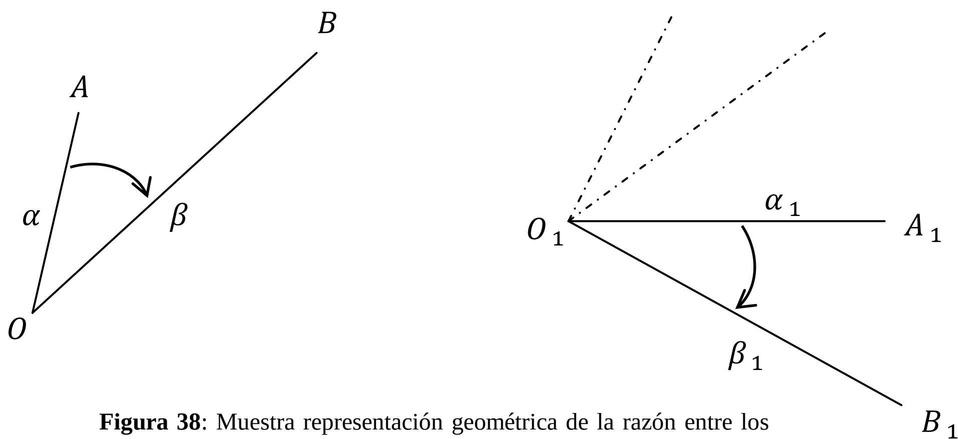


Figura 38: Muestra representación geométrica de la razón entre los vectores $\overline{OA} = \delta$ y $\overline{OB} = \lambda$.

De aquí se deduce lo siguiente:

(i) Las longitudes de los vectores cumplen que: $\frac{\overline{O_1 B_1}}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$

(ii) $A_1 O_1 B_1$ y AOB se encuentran en planos paralelos.

(iii) $\measuredangle A_1 O_1 B_1 = \measuredangle AOB$, siempre y cuando sean medidos en el mismo sentido.

4.2.3 Estructura algebraica de los cuaterniones

Como se ha repetido insistentemente, una de las cuestiones interesantes en el tratamiento de los cuaterniones tiene que ver con su estructura algebraica. Sabemos que, justamente, el hecho de que su operatividad no seguía las leyes tradicionales dio lugar a una extensión en la concepción de álgebra que se manejaba. Tait, consciente de ello, no escatima esfuerzos por describir las propiedades estructurales de los cuaterniones entre ellas: el inverso, el conjugado, el vertidor (arco), el eje del vertidor de un cuaternión, entre otras. A continuación se describen algunas de estos aspectos presentes en la ley que causo controversia.

La ley anticonmutativa para la multiplicación de cuaterniones

Tait para mostrar que la multiplicación de cuaterniones no es conmutativa, utilizó la siguiente figura 42:

Supongamos q el *vertidor* de $\widehat{AB} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, dado que $\widehat{BC}$ y $\widehat{AB}$ pertenecen al mismo arco de circunferencia, se puede suponer que $\widehat{BC} = \widehat{AB}$; de la figura se tiene que: $\widehat{BC} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$. Ahora supongamos otro vertidor r, representado por $\widehat{DB} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$; de manera análoga al caso anterior, se parte de las igualdades $\widehat{DB} = \widehat{BE}$, entonces $\widehat{BE} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}$.

La línea $\overline{OB}$ resulta de la intersección de los planos de los vertidores, así:

$$r.\overline{OD} = \overline{OB} \quad \text{y} \quad q.\overline{OB} = \overline{OC},$$

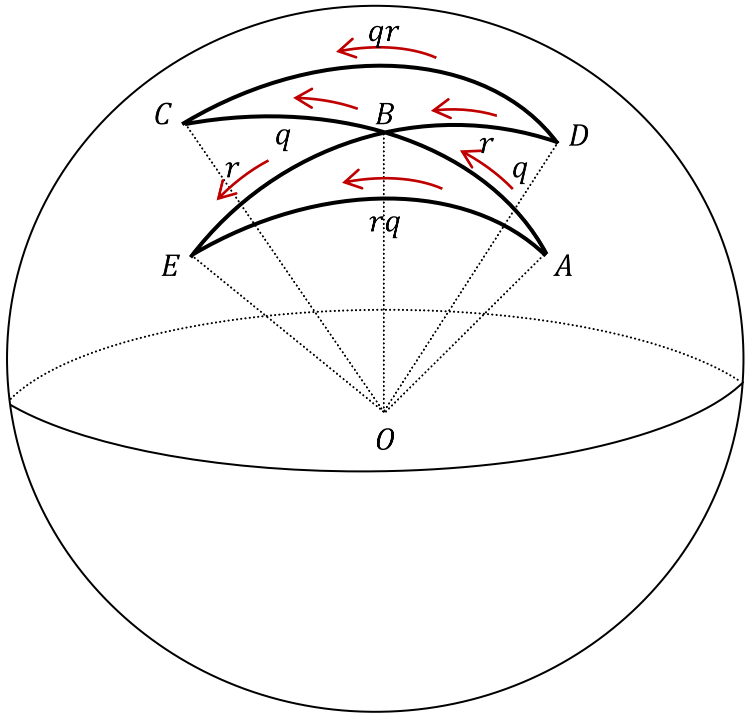


Figura 42: Representa geométricamente como probó Tait que el producto de dos Cuaterniones qr y rq no es conmutativo, porque no se encontraban en el mismo arco de circunferencia.

Ahora multiplicando por el vertidor q ambos lados, tenemos: $q.(r\overline{OD}) = q.\overline{OB} = \overline{OC}$, por lo tanto $qr\overline{OD} = \overline{OC}$, de aquí que: $\widehat{qr} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$, lo cual significa que: $qr = \widehat{DC}$.

Análogamente se muestra que $rq = \widehat{AE}$:

Sea $q.\overline{OA} = \overline{OB}$ y $r.\overline{OB} = \overline{OE}$, multiplicando por el vertidor r la primera expresión, tenemos que: $r.(q\overline{OA}) = r.\overline{OB} = \overline{OE}$, entonces $rq.\overline{OA} = \overline{OE}$ y por lo tanto $rq = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}$.

En conclusión, los vertidores qr y rq representan arcos de la misma longitud, pero no siempre corresponden al mismo plano, por lo tanto son diferentes.

4.2.4 Los i, j, k en el sistema de Tait

Desde el apartado 64, Tait inicia una representación moderna de sus resultados, adoptando un sistema de ejes perpendiculares. Para ello utiliza los elementos que denomina *vertidores–cuadrantes*, los cuales son cuaterniones cuya magnitud es la unidad y rotan 90°.

Tait llama la atención de un tratamiento similar incorporado por Hamilton en 1843, el cual, según él, es muy intuitivo. La idea de Tait es formalizar estos procesos, para ello parte de tres vectores unitarios I, J, K perpendiculares entre sí; teniendo como referencia la siguiente figura 43, se pueden definir las rotaciones de I, J, K respectivamente, así:

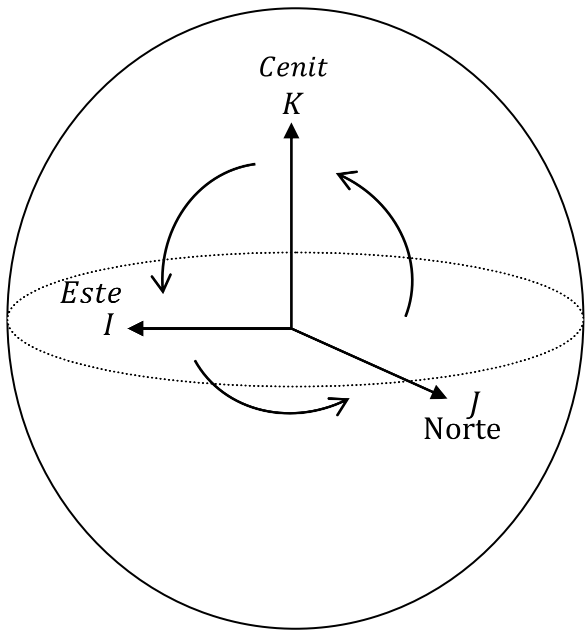


Figura 43: Representa como Tait define las rotaciones de I, J, K, así: La rotación de J sobre K es: $\frac{K}{J} = i$, la rotación de K sobre I es: $\frac{I}{K} = j$ y la rotación de I sobre J es: $\frac{J}{I} = k$

La rotación de J sobre K es: $\frac{K}{J} = i \quad \Longrightarrow \quad K = iJ.$

La rotación de K sobre I es: $\frac{I}{K} = j \quad \Longrightarrow \quad I = jK.$

La rotación de I sobre J es: $\frac{J}{I} = k \quad \Longrightarrow \quad J = kI.$

De lo anterior, Tenemos que $\frac{-J}{K} = \frac{K}{J}$ es un vector dirigido hacia el Sur y otro hacia el Cenit (como muestra la figura), entonces $\frac{-J}{K} = i$, implica $-J = iK$.

Análogamente para $\frac{-K}{I} = \frac{I}{K}$, entonces $\frac{-K}{I} = j$, implica que $-K = jI$.

Para $\frac{-I}{J} = \frac{J}{I}$, entonces $\frac{-I}{J} = k$, implica $-I = kJ$.

Combinando las relaciones anteriores Tait obtiene:

De (1) y (4) tenemos que: $-J = iK = i\,(iJ) = i^2 J \Rightarrow i^2 = -1$ (7)

De (2) y (5) obtenemos: $-K = jI = j\,(jK) = j^{\,2} K \Rightarrow j^2 = -1$ (8)

De (3) y (6) nos da que: $-I = kJ = k\,(kI) = k^2 I \Rightarrow k^2 = -1$ (9)

Para obtener las otras combinaciones Tait utiliza el semi – círculo ABA' con centro en O, como lo muestra la figura 42:

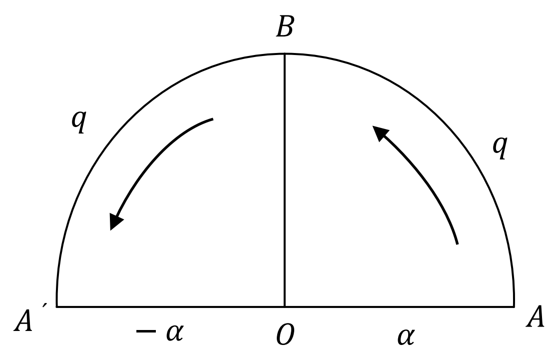


Figura 42: A partir del semi–círculo ABA' con centro en O, Tait definió todas las rotaciones del espacio tridimensional.

Supongamos $\overline{OB}$ perpendicular a AA', sean los *vertidores - cuadrantes*:

$q = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$, $q = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}$, entonces $q^{\,2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-\alpha}{\alpha} = -1$

A partir de estos aspectos y estableciendo combinaciones se obtiene:

$$\begin{cases} ij = k \\ jk = i \\ ki = j \end{cases}$$

$$\frac{K}{-I} = \frac{I}{K} = j \quad \Longrightarrow \quad k = j\,(-I) = -jI,$$

En resumen, Tait llegó a las siguientes ecuaciones:

$i\,K = i\,(-jI) = -ijI$ y $i\,K = -J = -k$, entonces $ij = k$.

$j\,I = j\left(-kJ\right) = -j\,k\,J$ y $j\,I = -K = -iJ$, entonces $jk = i$.

$k\,J = k\left(-i\,K\right) = -kiK$ y $k\,J = -I = -jK$, entonces $ki = j$.

Tait utilizó otras construcciones para obtener los mismos resultados. Su idea era ir ganando en simplicidad y operatividad, sin embargo, el método genérico se encuentra sintetizado en lo expuesto antes.

4.2.5 Segunda forma de representación de un cuaternión

Hasta el momento se ha hecho un tratamiento del cuaternión como un producto de un tensor por un vector, Tait entiende que, usando los resultados anteriores, el cuaternión se puede expresar como una suma. Para ello, Tait descompone el cuaternión, en dos partes, de la siguiente manera:

Sea $q = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ el cociente de dos vectores y $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{OA}$ (en caso de ser necesario extendemos $\overline{OA}$ hasta que coincida con C), como muestra la figura 43:

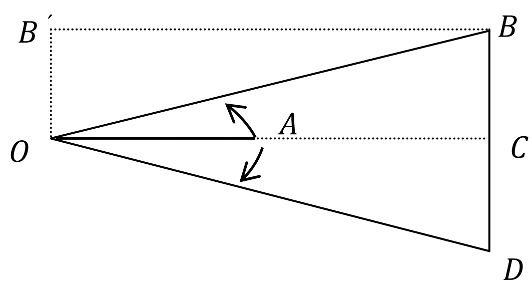


Figura 43: Está representación geométrica le permitió a Tait ver el cuaternión como una suma de un escalar y un vector, así: $q = S_q + V_q$

Se tiene que $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB}$, además $\overline{OC} = x.\overline{OA}$, donde x es una cantidad numérica cuyo signo depende del coseno del ángulo $\prec AOB$.

Como se vio anteriormente, del producto de dos vectores perpendiculares entre sí se obtiene un tercer vector perpendicular a los otros dos, por lo tanto:

$$\overline{CB} = \gamma.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial del cuaternión tenemos que:

$$q = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{x.\overline{OA} + \gamma.\overline{OA}}{\overline{OA}} = x + \gamma, \text{ lo que es igual, } q = x + \gamma$$

De acuerdo a lo anterior, muestra que Tait llega a la misma descomposición de un cuaternión que Hamilton, en un escalar y un vector, del cual conserva las mismas denominaciones:

(i) *Escalar*, lo designa por S.

(ii) *Vector*, lo designa por V .

Ahora, en general, se puede escribir el cuaternión de la siguiente forma:

$$q = S_q + V_q$$[49]

con base a esta expresión se obtiene:

$$\overline{OB} = S_q.\overline{OA} + V_q.\overline{OA}\,, \quad \overline{OC} = S_q.\overline{OA}\,, \quad \overline{CB} = V_q.\overline{OA}\,.$$

De acuerdo a la misma figura $\overline{BC} = \overline{CD}$, y su cuaternión conjugado sería:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = K_q = SK_q + VK_q$$

a su vez:

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = SK_q.\overline{OA} + VK_q.\overline{OA}$$

$$\overline{OC} = SK_q.\overline{OA}$$

$$\overline{CD} = VK_q.\overline{OA}$$

Dado que $SK_q = S_q$ y $\overline{CD} = -\overline{CB}$, entonces $VK_q = -V_q$, lo cual significa que el vector conjugado de un cuaternión es igual al opuesto del cuaternión.

[49] Heaviside dice que los vectores son poseedores de la idea del cuaternión; esta reseña vislumbra la preexistencia de los vectores antes que los cuaterniones, aunque no eran tan inteligibles, existían. Estas ideas poco a poco fueron nublando la fama de Hamilton.

4.2.6 Tercera representación de un cuaternión en forma general

Anteriormente se observó que cualquier vector se puede expresar en la forma: $ix + jy + kz$, donde x, y, z son cantidades numéricas, i, j, k es un sistema de vectores unitarios no coplanares.

Si representamos un escalar por w, tenemos que un cuaternión toma la forma:

$$q = w + ix + jy + kz$$

Está expresión nos muestra explícitamente que un cuaternión depende de cuatro elementos numéricos, de allí su nombre de *cuaternión*.

Producto de vectores utilizando componentes

Tait termina este capítulo presentando sus nociones de producto entre dos vectores α, β atendiendo a sus componentes, de la siguiente manera:

$$\alpha\beta = (ix + jy + kz)\left(ix' + jy' + kz'\right) =$$

$$= -\left(xx' + yy' + zz'\right) = i\left(yz' - zy'\right) + j\left(zx' - xz'\right) + k\left(xy' - yx'\right)$$

Modernamente está expresión dilucida internamente dos tipos de multiplicaciones, por un lado el producto punto entre dos vectores y por otro el producto cruz, así:

$$\alpha\beta = -\alpha.\beta + \alpha \times \beta.$$

Además

$$\beta\alpha = -\left(xx' + yy' + zz'\right) - i\left(yz' - zy'\right) - j\left(zx' - xz'\right) - k\left(xy' - yx'\right)$$

la única diferencia entre estos dos productos era el signo de la parte vectorial.

De este producto se concluye que:

$S\alpha\beta = S\beta\alpha$ (1)

$V\,\alpha\beta = -V\,\beta\alpha$ (2)

$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta$ (3)

$\alpha\beta - \beta\alpha = 2V\,\alpha\beta$ (4)

Aplicando el conjugado tenemos que $\alpha\beta = K\beta\alpha$. Si suponemos $\alpha = \beta$, tenemos $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, entonces $\alpha\beta = \beta\alpha = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

Examinemos la parte escalar de un producto de Cuaterniones: si q, r son Cuaterniones se obtiene:

$$Sqr \quad = \quad S\,(Sq\ +\ V\,q)(Sr\ +\ V\,r) \quad = \quad S\,(SqSr\ +\ V\,qSr\ +\ V\,rSq\ +\ V\,qV\,r)$$

$$Sqr \quad = \quad SqSr \quad + \quad SV\,qV\,r \text{ (5).}$$

Análogamente se tiene que:

$$Srq \quad = \quad SrSq \quad + \quad SV\,rV\,q$$

De donde se concluye por la ecuación (1) que:

$$SV\,rV\,q\ =\ SV\,qV\,r, \quad Srq\ =\ Sqr$$

En general se tiene

$$Srsq\ =\ Sqrs\ =\ Ssqr$$

Resultado que da lugar al siguiente teorema:

> **Teorema 1**: El producto formado por varios factores de Cuaterniones da como resultado un escalar que no depende del orden cíclico en el cual los factores son acomodados.

Si aplicamos este teorema a los vectores tenemos:

$$S\alpha\beta\gamma\ =\ S\gamma\alpha\beta\ =\ S\beta\gamma\alpha$$

y como además,

$$S\alpha\beta\gamma\ =\ S\alpha\,(S\beta\gamma\ +\ V\,\beta\gamma)\ =\ S\alpha V\,\beta\gamma$$

por la ecuación (2) tenemos

$$S\alpha\beta\gamma\ =\ S\alpha\,(-V\,\gamma\beta)\ =\ -S\alpha\,(S\gamma\beta\ +\ V\,\gamma\beta)\ =\ -\,S\alpha\gamma\beta.$$

Concluimos que la parte escalar del producto de tres vectores cambia de signo cuando el orden cíclico de los factores es alterado.

De todo lo anterior podemos deducir que el cálculo de los cuaterniones reposa sobre la distinción que se establece entre dos tipos de magnitudes. Por un lado, tienen las denominadas cantidades numéricas ordinarias, y por otro lado, las magnitudes que gozan de dos atributos como la longitud y la dirección.

Como en el primer capítulo, en los últimos apartados de este capítulo, Tait plantea algunos ejercicios. Esto reafirma la idea de que Tait pensaba seriamente en un texto para ser seguido en un curso estándar de lo que modernamente se denomina cálculo vectorial, cuyo epicentro lo constituye la noción de vector.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1 Obstáculo epistemológico en la construcción histórica de la noción de vector

La historia nos enseña que es imposible establecer la evolución de una determinada noción en una línea de desarrollo progresiva, bien delimitada y auto referenciada. Todo concepto trae amarrados otros conceptos, algunos de los cuales obran como elementos de causalidad y otros como obstáculos. El reconocimiento de estos aspectos brinda pautas a nivel investigativo y a nivel didáctico.

En el caso de la noción de vector se han establecido tres directrices fundamentales: *Número*, *Magnitud* y *Dirección*. En esta investigación hemos mostrado que a pesar, que durante un largo periodo estos tres aspectos se mantuvieron disjuntos, ellos se integraron históricamente para dar lugar a la noción de vector.

Lo anterior nos reafirma la hipótesis, que manejamos al inicio de esta indagación, de que muchos de los problemas, implícitos en los proceso de aprendizaje y enseñanza de los espacios y campos vectoriales, tiene relación directa con el hecho de que en la escolaridad, estos tres aspectos también aparecen de manera disgregada.

Explícitamente, un problema reiterativo tiene relación con el paso de lo geométrico a lo analítico. Tal como lo hemos referenciado en este trabajo, durante más de dos mil años, el desarrollo de la noción de vector estuvo ligada a la representación geométrica en correlación con segmentos dirigidos, paralelogramos de fuerza, representación de magnitudes y extensión de sistemas numéricos.

La construcción histórica de la noción de vector se fue dando en la medida que se iban identificando elementos de causalidad entre los componentes de la triada: Número, Magnitud y Dirección. Un aspecto significativo del análisis histórico epistemológico realizado fue la identificación de algunos *obstáculos epistemológicos* que podrían ser utilizados como referencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los cursos de álgebra lineal o análisis vectorial.

Los *obstáculos epistemológicos* son conocimientos que han sido útiles en un determinado momento para la resolución de algunos problemas, pero que se convierten en un escollo al cambiar de contexto. El término de obstáculo epistemológico fue introducido por Gaston Bachelard (1884-1962), en las ciencias experimentales y en particular en la física. Estos obstáculos se presentan como limitaciones del individuo a la hora de construir el pensamiento científico, debido a que tienen su origen en los conceptos mismos; esto influye fuertemente en el aprendizaje del conocimiento de manera concreta. Por lo tanto, debemos buscar cual es el principio inminente que fundamenta esta situación, como lo plantea Gaston Bachelard:

> Cuando se investiga las condiciones históricas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2004, pág. 15).

Según Bachelar, para superar este obstáculo debemos destruir el conocimiento mal adquirido porque frena el surgimiento de nuevos conocimientos, pues, según su concepción, el conocimiento científico progresa debido a las continuas rupturas epistemológicas. Estas rupturas no son inmediatas porque los conocimientos mal adquiridos ofrecen una cierta resistencia e impiden el avance científico, esto es lo que Bachelard denomina "*obstáculos epistemológicos*".

Por su parte Guy Brousseau (1933) incorpora la noción de obstáculo epistemológico a la Didáctica de la Matemática. En su *Teoría de Situaciones didácticas*[50] de 1970, argumenta que es el estudiante que debe adaptarse a las contradicciones y dificultades que se

[50] Según Brousseau: *Es un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que corresponde eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución* (Brousseau, 1982, pág. 42)

encuentran los procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática. Según Brousseau, los obstáculos epistemológicos nos muestran que el aprendizaje de las matemáticas se adquiere a través de saltos y no de forma continua, como se creía en épocas pasadas.

De acuerdo Brousseau, los obstáculos epistemológicos son errores reproducibles y persistentes. En ocasiones los errores cometidos por el estudiante provienen de un conocimiento antiguo que en algún momento ha sido exitoso, pero que luego se presenta como inadecuado frente a otro contexto. Como lo plantea Brousseau (1997), los obstáculos pueden ser de diverso origen como: ontogénico, didáctico y epistemológico.

A partir de lo anterior, podemos ver en la construcción de la noción de vector se evidencian algunos obstáculos epistemológicos. Por un lado, históricamente los conceptos de magnitud, número y dirección se encontraban separados y su unificación establece conflictos. De por sí, como lo hemos detallado, cada uno de estos conceptos presentan problemas particulares, que se van reforzando y terminan por conformar un problema mayor. Por ejemplo, la relación dirección y magnitud exhibe inconvenientes, pues la dirección viene dada por la medida de ángulos y la definición misma de ángulos presenta problemas, pues, a su vez, es una magnitud; pero su medida es diferente a las de longitudes. Por otro lado, para poder instaurar la noción de vector fue necesario la ampliación de los sistemas numéricos y la evolución de la concepción de álgebra del siglo XIX, la cual se dio con la renuncia al principio de permanencia de forma, es decir abandonando la ley conmutativa para la multiplicación.

5.2 Noción de vector desde diferentes contextos

Durante años la enseñanza del álgebra lineal y el análisis vectorial ha sido, en muchos casos, de difícil comprensión para algunos estudiantes. Estos cursos poseen una variada gama de concepciones y aplicaciones, las cuales son muy significativas; pero en la mayoría de las veces los estudiantes no las perciben. Por un lado, esto se debe, en gran medida, a las dificultades que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Por otro lado, en los cursos de álgebra lineal y análisis vectorial se trabajan con unos entes conceptuales cuya operatividad escapa a todo tratamiento numérico como son los *vectores*. Esto causa una gran confusión en ellos, porque inicialmente a lo largo de su proceso de aprendizaje manejaba una cierta operatividad en un campo numérico y ahora comienzan a trabajar con otros elementos que presentan una operatividad diferente a la tradicional. Es por esta razón, que las operaciones con vectores carecen de sentido para la mayoría de los estudiantes (por ejemplo, el producto de vectores). Estos son capaces de realizar algunas operaciones, pero no son capaces de establecer las interpretaciones físicas o geométricas, inherentes a los cálculos. En otras palabras, ven simplemente estas operaciones como un algoritmo sin fundamento alguno, porque ellas difieren totalmente de las operaciones numéricas manejadas habitualmente. Vale la pena resaltar que detrás de una gama de vocablos y notaciones, la operación con vectores se aleja considerablemente de los esquemas proporcionados por las operaciones usuales. Es decir, que esto implica operar con objetos de naturaleza distinta a los números reales. Inicialmente, para garantizar la existencia de estos entes, fue necesario establecer un nuevo campo teórico con una estructura de representación que los definiera. Esto es fundamental porque la notación vectorial y el álgebra vectorial son muy importantes para la formulación y resolución de problemas físicos en tres dimensiones.

Estos nuevos entes son utilizados de muchas maneras distintas en diferentes tipos de aplicaciones. En algunas, como la física, un vector es número y una dirección. Por ejemplo: una fuerza, un desplazamiento, una velocidad, una aceleración, etc., son entidades físicas que poseen una magnitud y una dirección, pueden ser representadas por un segmento de recta dirigido.

Matemáticamente, los vectores pueden ser descritos en dos sentidos: uno geométrico y otro analítico. Geométricamente hablando, un vector es un agente que transporta un punto de un lugar a otro en una misma dirección. En otras palabras, es un segmento de línea dirigido, el cual está unido por dos puntos distintos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$, donde $\boldsymbol{P}$ es llamado punto inicial y $\boldsymbol{Q}$ punto terminal. Entonces, el segmento denotado por $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$, se refiere al vector que va desde $\boldsymbol{P}$ hasta $\boldsymbol{Q}$.

Esta definición de vector[51], es similar a la expuesta por Murray Protter y Charles Morrey en su libro *Cálculo con Geometría Analítica* (1964), en el cual escriben:

> Vector, es el conjunto de todos los segmentos orientados que tienen una magnitud y una dirección dada (Charles, 1980, pág. 414).

Sin embargo, desde este contexto geométrico, en ocasiones, resulta un poco tedioso calcular esas cantidades vectoriales, como la velocidad, la aceleración, etc., sobre todo si el problema se traslada al espacio tridimensional, volviéndose difícil de bosquejar, es decir a la hora de dibujar por medio de segmentos dirigidos. No obstante, para resolver una situación donde intervienen varias fuerzas, se necesita hallar la fuerza resultante y esto lo hacemos cuando introducimos un sistema de coordenadas cartesianas, entonces, representamos los vectores por medio de componentes. Por lo tanto, un vector se convierte en una tripleta ordenada de números reales. A partir de este momento, desde un punto de vista algebraico, si introducimos en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$, donde $\boldsymbol{P}$ será tomado como origen, estamos llegando a la descripción analítica del vector, es decir, una descripción que puede ser dada enteramente en términos de números, así:

Un vector coordenado $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ en $\mathbb{R}^2$, es un vector posición determinado por una pareja ordenada de números reales, de tal forma que su punto inicial se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas y su punto final lo determina la pareja dada (a_1, a_2). Simbólicamente, $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = (a_1, a_2)$, donde a_1 y a_2 son las componentes del vector. Ahora un vector coordenado $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ en $\mathbb{R}^3$, es un vector posición determinado por una terna ordenada de números reales, cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas y su extremo es la terna (a_1, a_2, a_3). Entonces, estos tres números reales a_1, a_2 y a_3 son las componentes rectangulares de $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$. En general, un vector $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ en $\mathbb{R}^n$, es una n-úplas de números reales.

[51] Geométricamente el conjunto de todos los segmentos de rectas dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama *vector*. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se llama una representación del vector. Mientras que desde un punto de vista algebraico, un vector en el plano es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se llaman *elementos* o *componentes* del vector.

Por su parte Hernann Grassmann en su *Teoría de extensión*, se evidencia la concepción de combinación lineal muy similar a la moderna, cuando manifiesta:

> Una magnitud v se deriva de las magnitudes $a, b, c,$ ..., por los números $\alpha\ \beta,\ \gamma,\ldots$, así:
> $$\boldsymbol{v} = \alpha a + \ \beta b + \gamma c + \cdots,$$
> donde: $\alpha\ \beta,\ \gamma,\ldots$, son números reales, racionales o irracionales, diferentes de cero o no. Además $\boldsymbol{v}$ está numéricamente derivado de a, b, c, …(Crowe, 1985, pág. 58).

En términos modernos, podríamos decir: sea W una combinación lineal de a, b, c, …, si existen los escalares α_1, α_2 tales que

$$W = a\alpha_1 + b\alpha_2 + \cdots$$

Procedió Grassmann generalizando, así:

> Dos o más magnitudes extensas $v, a, b, c,$ ... están sujetas en una relación numérica o que el conjunto de magnitudes extensas $v, a, b, c,$ ... está sujeto a una relación numérica, si puede derivarse cualquiera de ellos numéricamente de los otros, es decir si no puede escribir por ejemplo*:* $v = \alpha a + \ \beta b + \gamma c + \cdots$ (Crowe, 1985, pág. 58).

Esta es la definición en términos modernos representa un conjunto linealmente independiente y reescribiendo v tenemos:

$$v = \alpha\mathrm{a} + \ \beta\mathrm{b} + \gamma\mathrm{c} + \cdots$$

luego pasando v al lado izquierdo se tiene:

$$-1v + \alpha\mathrm{a} + \ \beta\mathrm{b} + \gamma\mathrm{c} + \cdots = 0,$$

De esta expresión, decimos que existe una combinación lineal donde no todos los coeficientes son cero. Esto lo hacemos porque podemos garantizar que existe un coeficiente de la magnitud v diferente de cero.

Pero históricamente, quien realmente establece las nociones y definiciones básicas para la legalización de la noción de vector e incorpora su operatividad, es Tait, en su libro *Elementary Treatise on Quaternions* de 1876, cuando expone:

> Todas las rectas iguales y paralelas son susceptibles de ser representadas por un mismo símbolo, y este símbolo dependerá de tres elementos numéricos. Es bajo esta relación que una recta se denomina vector. (Crowe, 1985, pág. 24).

En la medida que el estudiante pueda representar un concepto en diferentes formas puede llegar a conocerlo mejor. No obstante, sabemos que una matriz columna o reglón es un vector, como también algunas funciones reales de variable real, o una función compleja o imaginaria, una rotación o una traslación, etc. En este orden de ideas, se ve la necesidad de establecer las razones necesarias para la definición formal del vector o ¿Qué criterios o pautas se deben de tener en cuenta para establecer la estructura algebraica que satisfacen los vectores? Entendiendo lo anterior, nos permitirá ampliar la concepción que tenemos de vector y la razón de su operatividad. En este sentido, para comprender este concepto es indispensable conocer la estructura algebraica del nuevo campo teórico denominado *espacio vectorial*[52]; esto es un conjunto, cuyos elementos se denominan vectores, en el cual se define una aritmética. Lo interesante en esta connotación es que los vectores, al igual que otros conceptos matemáticos, surgen como objetos de una cierta estructura matemática previamente definida. Donde sus propiedades adquieren validez en la estructura que los definió. Todo lo anterior es indispensable tenerlo en cuenta a la hora de hacer el seguimiento evolutivo de la noción histórica del vector.

---

[52] Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo $\mathbb{R}$ (los elementos de $\mathbb{R}$ se llamarán *escalares*) es un conjunto $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots\}$ (cuyos elementos se llaman *vectores*) dotados de dos operaciones, como son:

Una ley de composición interna en $\boldsymbol{V}$, que le permite ser un grupo conmutativo.

$$+\colon\ V \times V \ \rightarrow \ V$$

1.1 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

1.2 $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.

1.3 $\exists\, 0 \in \boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$.

1.4 $\exists -a \in \boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Una ley de composición externa sobre el cuerpo$\mathbb{R}$. Siendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\cdot\colon\ \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

2.1 $\alpha.(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha.\boldsymbol{a} + \alpha.\boldsymbol{b}$.

2.2 $(\alpha + \beta).a = \alpha.\boldsymbol{a} + \beta\ .\boldsymbol{a}$

2.3 $(\alpha\ \beta).\boldsymbol{a} = \alpha\ .(\beta\, \boldsymbol{a})$.

2.4 $1.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

No obstante, el estudio de los vectores puede ser concebido fuera de una perspectiva geométrica, al definir el vector como una colección de elementos con un cierto orden. Así, por ejemplo, un vector bidimensional se define como una pareja ordenada de números reales (a_1, a_2), un vector tridimensional como una tripleta ordenada de números reales (a_1, a_2, a_3), en general un vector n-dimensional como una n-dupla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, donde los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, son las componentes del vector. El conjunto de todos los vectores n-dimensionales es llamado *espacio n-dimensional* o *n-espacio*.

Las descripciones geométricas son de gran apoyo a la hora de vislumbrar las operaciones del vector en el espacio tridimensional, pero no son útiles cuando $n > 3$. En este sentido, el estudio de los vectores en un espacio de alta-dimensión se ve limitado a un punto de vista puramente analítico.

5.3 Problemática histórica presente en la formación de los conceptos matemáticos

El desarrollo de todo concepto o teoría matemática se establece a partir de la necesidad de dar respuesta a una problemática determinada. Por un lado, hay problemas que surgen de la dinámica interna de la matemática, cuando su desarrollo conceptual plantea dificultades que es perentorio resolver, este es el caso del desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX. Por ejemplo, en su curso de análisis de 1821, Cauchy demuestra el teorema según el cual la *suma de funciones continuas es continua*. Este teorema presentaba problemas en su demostración, pues como lo hicieron notar algunos matemáticos como Abel y Seidel, entre otros, circulaban en el ambiente algunos contraejemplos. Es mucho lo que se ha especulado sobre este resultado que le abrió las puertas al concepto de convergencia uniforme; concepto que fue introducido en 1848 por J. Stokes y P. L. Seidel. Lo interesante de esta controversia, es que en lugar de frenar el desarrollo del análisis matemático, lo amplió, pues el espectro de funciones a tener en cuenta creció y posibilitó el camino para desarrollos de un valor teórico invaluable.

Es importante resaltar que lo anterior surge de la necesidad de resolver un problema eminentemente matemático, sin ninguna relación con problemas físicos. Pero existen otros problemas que provienen de la física, los cuales tienen que ver con la matematización de algunos fenómenos de la naturaleza. En este sentido, muchos de los desarrollos de las matemáticas están fuertemente relacionados con los problemas provenientes de la física. Es éste el caso de la explicación de los fenómenos ópticos, la descripción del movimiento, la descripción del fenómeno del calor, entre otros. Para suplir estas necesidades, los matemáticos construyen modelos cuantitativos que permitan describir estas situaciones.

Desde la antigüedad, Leibniz no estaba conforme con los métodos de representación de la matemática porque se mostraban incapaces a la hora de describir un movimiento o una rotación, un ángulo, etc. En este sentido, buscaba un álgebra en la cual los símbolos fueran operados directamente, y a partir de esas operaciones se pudieran deducir ciertas conclusiones. Sin embargo, Leibniz, al igual que otros matemáticos, notó que existía una especie de dicotomía entre lo geométrico y lo analítico en el momento de abordar un problema. Precisamente, se presentaba cuando dada una curva cualquiera se trataba de representar por medio de una ecuación, a partir de este momento se perdía el control geométrico, porque cuando un problema geométrico es abordado desde un punto de vista puramente algebraico esto enmascara y trastorna la realidad geométrica. Una manera de evidenciar esta situación es en el siguiente caso: la expresión algebraica $3x^2 - x$, la podemos interpretar desde dos contextos diferentes. Como primera medida si abordamos la expresión desde un punto de vista analítico esta representa la ecuación de una cónica, pero para los antiguos desde un contexto geométrico no tendría el mismo significado, pues el primer término podía ser interpretado como tres veces el área de una figura plana y el segundo como la longitud de un segmento. Este ejemplo, nos permite perfilar un obstáculo epistemológico en la geometría, el cual se agudiza a medida que se extiende en el espacio tridimensional. La causa primordial de esta situación es que la expresión está afrontada desde dos concepciones diferentes.

Aunque mucho de los conceptos matemáticos proceden de abstracciones y generalizaciones del mundo sensible, alcanzan una independencia relativa y, desde su hábitat abstracto, son utilizados para dar cuenta del mundo físico. Por ejemplo, Galileo supone que para entender la naturaleza es necesario modelarla matemáticamente. Es por esta razón que para Galileo la matemática constituye el lenguaje en el cual está escrita la naturaleza y para descifrarla debemos interpretar sus caracteres. A partir de este momento se abre paso un periodo, en el cual los matemáticos se dan a la tarea de modelar matemáticamente la naturaleza. Se trata de caracterizar cada uno de los fenómenos naturales dentro de una teoría matemática que diera lugar a una mejor descripción y operatividad de ciertas entidades físicas; tal es el caso del vector, el cual sintetiza aquellos fenómenos que dependen de la longitud y la dirección. En este sentido decimos que uno de los afluentes en la constitución histórica de la noción de vector, proviene de un problema planteado desde la física. En esencia, el vector surge de dos aspectos muy importantes relacionados de alguna manera, uno algebraico y otro físico. Del algebraico podemos decir que es producto de la evolución del álgebra en sí misma, permitiendo así la ampliación de los sistemas numéricos. En cuanto al aspecto físico se da por la necesidad de matematizar algunos fenómenos de la naturaleza porque las nociones típicas que se estaban trabajando no daban cuenta de ello.

Inicialmente el asunto fundamental tenía que ver con la dirección del problema físico del movimiento; fenómeno que no es posible matematizar con el sólo concepto de cantidad. Pero antes de resolver en su totalidad este problema, se debía crear el ambiente propicio para la instauración de este nuevo ente matemático.

Tradicionalmente el concepto de vector, intrínsecamente, guarda una relación con la idea geométrica de segmento de línea dirigido; es decir, un vector es una cantidad que tiene dirección y magnitud. En este sentido, a la hora de definir un vector desde un punto de vista geométrico se procede así: un segmento recta que parte desde un punto A y llega hasta un punto B, y se denota por $\overrightarrow{AB}$. El punto A se llama punto inicial, y el punto B se denomina punto final. Posteriormente, se dice que dos segmentos orientados son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección, y se escribe $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$. El segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ se llama *vector*, pero ¿qué ocurre con el vector cero?, el cual tiene magnitud cero y no posee dirección. Entonces esta definición, por un lado sería una excepción a la caracterización intuitiva del vector y, por otro lado, mostraría que, en cuanto a definición, le falta precisión. Para superar este impase se procedió a denotar el segmento línea dirigido $\overrightarrow{AB}$ como el vector $\boldsymbol{C}$, el cual tiene como punto inicial algún punto de referencia fijo. Ahora si consideramos este punto como el origen del sistema coordenado cartesiano rectangular, entonces un vector puede definirse analíticamente en términos de parejas ordenadas de números reales. Como podemos ver, la definición de vector inicialmente parte desde un contexto geométrico pero presenta de alguna forma una cierta carencia. Para superar este contra tiempo se ve la necesidad de abordar tal definición desde un punto de vista analítico. De lo anterior, podemos deducir que cuando un problema es estudiado solamente desde un contexto y no tenemos la capacidad de transponerlo a otro contexto en ocasiones nos encontramos con un obstáculo ontogénico. Manifiesta Brosseau que este tipo de obstáculo "*es el que tiene que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo*" y esto nos limita tener una mejor aprehensión de un concepto. Porque según Brosseau si el aprendizaje de un conocimiento lo entendemos como adaptación al medio, éste evoluciona de las continuas rupturas cognitivas, acomodaciones y cambio de concepciones.

5.4 Obstáculo epistemológico presente en la noción de vector, desde una concepción geométrica

Debido a que una de las líneas de desarrollo de la noción de vector, proviene de la geometría, concretamente de la abstracción de la noción de segmento dirigido, muchos docentes se conforman con estudiar la representación geométrica, sin atreverse a detallar la representación analítica de los vectores. Esto hace que el estudiante, especialmente, los de niveles medios, permanezcan amarrados a lo geométrico, sin acoger otros objetos que estructuralmente se comportan como vectores. Hemos constatado que éste es un aspecto que se puede reconocer en el desarrollo del la noción de vector. La ruptura con lo geométrico se empieza a materializar con la definición de los vectores en el especio n-dimensional. Al respecto, Hermann Günther Grassmann, en su *Geometría* escribe:

> En **aritmética**, la unidad es el elemento, contar es la síntesis, y el resultado es un número. Si este número, como el resultado de la primera síntesis, es tomado en lugar de la unidad, y tratado del mismo modo (es decir, contando), entonces el producto aritmético aparece, y puede ser visto como un número de un orden superior que un número del cual la unidad ya es un número (Crowe, 1985, pág. 59).

Mientras que desde un punto de vista geométrico ocurre lo contrario, cuando escribe

> En **geometría**, el punto es elemento, la síntesis es el movimiento del punto en alguna dirección, y el resultado, la trayectoria del punto, es una línea. Si esta línea, producida por la primera síntesis, es colocada en lugar del punto y tratada en la misma forma (es decir, movida en alguna dirección), entonces una superficie es producida de la dirección de la línea. Este es un verdadero producto geométrico de dos factores lineales y aparece en primer lugar como un rectángulo, en cuanto la primera dirección no participe con la segunda. Si la superficie es tomada en lugar del punto, entonces es producido un sólido geométrico como producto de tres factores. Esto es lo más lejos que uno puede ir en geometría pues el espacio es de solamente tres dimensiones; tales limitaciones no aparecen en la aritmética. (Crowe, 1985, pág. 59).

De lo anterior podemos evidenciar que la geometría fue un obstáculo para Grassmann porque no le permitió en visualizar lo que produciría el elemento generador más allá de tres dimensiones, caso contrario a la aritmética, en la cual no tiene problema la operatividad con un número de elementos arbitrario.

Este tipo de obstáculo se viene presentando desde la antigüedad hasta nuestros días. Por ejemplo, en el contexto algebraico los estudiantes realizan operaciones entre vectores sin mayor dificultad, pero son incapaces de establecer una interpretación de estos cálculos porque no es claramente percibida por ellos. Esto se debe que en ocasiones no logran desprenderse de su referente geométrico y piensan que lo que no se puede representar fácilmente no existe, convirtiendo esto en un obstáculo para el aprendizaje de un concepto. La causa primordial de esta situación es la falta de un aprendizaje significativo. Porque según Sierpinska (1990) el aprendizaje significativo debe ser concebido como una secuencia de actos de compresión, donde inicialmente el estudiante se enfrenta a un problema, el cual es analizado y no puede ser superado hasta que no lo comprenda a cabalidad, convirtiéndose esto en un situación de enseñanza. En otras palabras, para que un estudiante comprenda ha de ser enfrentado al error que es originado por los obstáculos que se presentan en el desarrollo del conocimiento y debe entender porque se da ese error. Este proceso finalmente va a facilitar la compresión de obstáculos epistemológicos presentes en un determinado concepto y le ayudara a la superación de otros obstáculos.

5.5 El principio de permanencia como obstáculo

En la construcción de la noción de vector, fue menester la ampliación de los sistemas numéricos y la fundamentación de su campo teórico. En esta dirección jugó un papel determinante la adopción de los números complejos como parejas ordenadas de números reales.

Hamilton se dio cuenta que los números complejos podían ser interpretados como entidades dirigidas en el plano y comenzó a extender esta idea al espacio. A partir de los trabajos de Hamilton se empieza a vislumbrar que el sistema de representación del espacio podría servir de utilidad para la representación geométrica de los números complejos. A su vez, éstos condujeron al descubrimiento de los cuaterniones.

Los cuaterniones de Hamilton nacen de la necesidad de interpretar matemáticamente el mundo fenomenológico; para cumplir con este objetivo se tuvo que cambiar la concepción de álgebra. A partir de este momento, aparecieron dos obstáculos, afrontados por Hamilton. Por un lado, no existía un algebra de números tridimensionales, los cuales fueran aplicables al mundo fenomenológico. Por otro lado, Hamilton sumaba y restaba cuaterniones sin ninguna dificultad; el problema se presentó a la hora de multiplicarlos, donde se evidenció un obstáculo, que se conoce como "el principio de permanencia", el cual tiene que ver con la propiedad conmutativa del producto. Históricamente esto retardó el nacimiento del producto vectorial, porque los matemáticos de la época se encontraban aferrados a la idea de que la conmutativa era una propiedad inherente a la operatividad. Para solucionar este impase, después de muchos años de estudio, Hamilton instaura unos nuevos objetos que se simbolizan por las letras i, j, k; estos objetos satisfacían la siguiente condición: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; a su vez introdujo su fórmula fundamental $jk = i$, $ki = j$, $ij = k$ que contenía la solución al problema y que representa rotaciones cuadrantales.

Podemos concluir con esto que Hamilton dio al traste con la idea absolutista de una forma única de hacer matemáticas; mostró la libertad del creador matemático a la hora de construir teorías y la fuente inagotable de perspectivas que nos quedan por delante. Desde Hamilton, las leyes fundamentales de las operaciones aritméticas típicas perdieron su carácter absoluto frente a otras formas operativas.

5.6 Obstáculo epistemológico en la ontología de los números negativos

En la historia de la matemática fue difícil aceptar las cantidades negativas como números. Esto jugó un papel decisivo para el desarrollo de nuevas ideas. La categoría de número dependía de unos entes que se podían operar, tal es el caso de la operación $+$ y $\times$. En este sentido, generalmente se presentaban problemas con estas cantidades negativas cuando se multiplicaban. Por ejemplo, al multiplicar $(-4) \times (-5)$ no se sabía cuál sería su resultado ni se conocía su interpretación geométrica. La solución a este problema fue superada con la definición de la ley de los signos para las cantidades negativas y su representación geométrica, permitiendo de esta manera dotar de estatus numérico a las cantidades negativas. Sin embargo, durante muchos años existía una confusión que todavía predomina en algunos estudiantes, cuando se intentaba sumar $(-6) + (-8)$, ya que la ley de los signos no da respuesta a esta situación. Por un lado, una salida crucial a este impase se presenta cuando desde un modelo de ganancias y pérdidas se piensan los números negativos como deudas y esto explicaría satisfactoriamente su estructura aditiva (debo 5 y debo 8, entonces de 13). Por otro lado, cuando en el proceso de buscar una representación eficiente de los números negativos se adopta representarlos en la recta real, opuestos a los positivos.

Otro aspecto general, a tener en cuenta, es que la evolución de los conceptos matemáticos no sólo depende de la síntesis interna de las matemáticas o de su epistemología, sino también de concepciones filosóficas que rigen en determinada época. No obstante, sabemos que la adopción de los conceptos matemáticos es imposible sin tomar como referencia los aspectos epistemológicos. Es por esta razón que la gran cantidad de ideas vectoriales de Grassmann fueron descartadas por la comunidad matemática debido a su falta de claridad conceptual. Una de las explicaciones de ello es que la construcción de su sistema matemático se hallaba cimentado sobre concepciones filosóficas y no matemáticas. Más aún, Grassmann intentó establecer un sistema formal completo, cien años antes que Hilbert lo popularizara y mostrara su importancia.

Al igual que en Grassmann, las ideas fundamentales de los cuaterniones de Hamilton reposan sobre concepciones filosóficas, las cuales son un poco más claras y por ello fueron más tenidas en cuenta.

El cálculo de los cuaterniones se encuentra edificado sobre la distinción entre dos tipos de magnitudes, una matemática y otra física. Las magnitudes matemáticas son solo esas cantidades numéricas, mientras que las físicas son en ocasiones numéricas (tiempo), pero en la mayoría de los casos son aquellas que tienen una longitud y una dirección, dando origen a la noción vector.

Con base en lo anterior, el cuaternión se puede descomponer en dos factores operativos, uno de estiramiento y otro de rotación. El primero tiene que ver con la operación que se presenta cuando se hace la extensión de un vector sobre otro; el segundo efecto resulta del proceso de hacer girar un vector cualquiera alrededor de otro fijo. Estas dos operaciones le permitieron a Hamilton expresar el cuaternión de dos maneras:

$$q = T_q U_q,$$
$$q = S_q + V_q.$$

En la multiplicación de dos vectores, Hamilton establece conjuntamente el concepto de los dos productos, así:

Sean α, α' vectores, entonces $\alpha\,\alpha' = S\alpha\,\alpha' + V\alpha\,\alpha'$,

donde $S\alpha\,\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ representa el producto punto moderno, el cual Maxwell le llamó *convergencia* y

$V\alpha\,\alpha' = i\,(yz' - zy') + j\,(zx' - xz') + k\,(xy' - yx')$, representa el producto cruz moderno.

De lo anterior, podemos concluir, que la parte vectorial del cuaternión no surge por azar, sino que aparece como consecuencia lógica de una operación algebraica definida entre números cuadridimensionales.

Adicionalmente a Hamilton le debemos la introducción del operador gradiente (nabla) $\nabla = i(\frac{d}{dx}) + j(\frac{d}{dy}) + k\,(\frac{d}{dz})$ el cual es una herramienta fundamental para el análisis vectorial moderno.

5.7 Importancia de Tait en la historia del análisis vectorial

Uno de los seguidores de las ideas de Hamilton fue el matemático escocés Tait. Su principal interés era utilizar el método de los cuaterniones para aplicaciones físicas.

El papel de Tait es muy importante en la evolución del análisis vectorial, porque iba incorporando ciertos aspectos, que en algún momento histórico se volvieron fundamentales para el desarrollo de la física. Gracias a él, James Clerk Maxwell se interesó en el estudio de los cuaterniones. A partir de Tait, el sistema de los cuaterniones se convirtió en una herramienta útil para representar varias clases de fenómenos físicos y experimentales.

El libro de Tait contiene los principios fundamentales de donde emergieron las herramientas básicas para la construcción de nuestro análisis vectorial. En esencia, este libro contiene los conceptos primitivos del álgebra lineal moderna.

Desde un punto de vista histórico, en cuanto a la forma de pensar las matemáticas, el tratado de Tait es una joya, porque realiza construcciones de geometría superior cuando prueba algunas de las leyes que cumplen los cuaterniones. Igualmente introduce el *producto vectorial* y *producto punto* en su forma moderna mediante la utilización de las funciones seno y coseno, respectivamente.

En la matematización de un fenómeno físico se pretende encontrar el lenguaje que permita la descripción de éste en una forma sintética y clara. No obstante, en muchas ocasiones, a la hora de modelar algunos fenómenos de la naturaleza, se cometen muchos errores y se ve la necesidad de elaborar una estrategia didáctica que de alguna manera minimice los errores. Está estrategia didáctica propiciaría el camino ideal para la correcta enseñanza de la física. En otras palabras, existe una gran falta de metodología físico-matemática que minimice la mayor cantidad de errores existentes hasta hoy a la hora de describir un fenómeno físico.

5.8 La presentación axiomática: el obstáculo del formalismo

Uno de los aspectos que no se desarrolla en esta tesis tiene relación con el periodo de formalización de la noción de espacio vectorial. Este es un aspecto que amerita un estudio particular. Sin embargo es conveniente proporcionar algunos datos generales.

La presentación moderna de espacio vectorial empieza a ventilarse a partir de los trabajos del matemático italiano Giusseppe Peano (1858-1932). En su libro *Cálculo Geométrico*, de 1888, expone la teoría contenida en *Ausdehnungslehre* de Hermann. Grassmann, de una manera axiomática. Peano logra sintetizar las propiedades inherentes a la noción de vector y define la axiomática de los espacios vectoriales sobre los números reales, más o menos de una forma moderna. Adicionalmente, define la aplicación lineal entre espacios vectoriales e introduce las operaciones básicas, las cuales no fueron aceptadas inicialmente. Dado que este primer libro desarrollaba una teoría demasiado abstrusa, Peano escribió segundo un libro titulado *Elementos de cálculo geométrico* (1891).

Debemos a André Weyl la definición axiomática y abstracta de Espacio vectorial. En su libro *Space Time Matter*, dedicado a explicar la teoría general de la relatividad de Einstein introduce un primer capítulo en el cual desarrolla las nociones modernas del análisis vectorial.

Como bien llama la atención Marcela Parraguez, en su tesis doctoral *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*, del 2009, la incorporación axiomática de los espacios vectoriales producen lo que J. L. Dorier ha denominado el obstáculo del formalismo, el cual se manifiesta cuando los estudiantes manipulan vectores, ecuaciones, coordenadas, etc., sin poder establecer interpretaciones de tipo geométrico o analítico ya sea en los cursos de álgebra lineal o análisis vectorial.

Otra línea de desarrollo importante tiene relación con la instauración del álgebra lineal como disciplina matemática. Este aspecto ha sido estudiado por Leonel Monroy en su tesis de maestría *El álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas*, del 2011.

El primer libro escolar en el cual se incorpora, de manera formal, los espacios vectoriales corresponde al libro *A Survey of Modern Algebra* de Birkhoff y MacLane publicado en 1941. A partir de aquí, podemos decir que existe una teoría unificada de espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, que da lugar a la constitución del álgebra lineal como una rama autónoma de las matemáticas.

Como lo precisa Dorier (1995), la extrema riqueza conceptual de la noción de espacio vectorial, lo señala como un concepto unificador y generalizador de las matemáticas que va más allá de una mera herramienta operativa. Al respecto podemos retomar a Dorier:

> Por lo tanto, puede sugerirse que el éxito de la axiomatización [del concepto de espacio vectorial] no provino de la posibilidad de llegar a resolver problemas matemáticos no resueltos, sino de su poder de generalización y unificación y, consecuentemente, de la simplificación en la búsqueda de métodos para resolver problemas en matemáticas. Como una consecuencia, este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción, el concepto de espacio vectorial es una abstracción de objetos ya abstractos, como los vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series o funciones.

Con el fin de mostrar el proceso evolutivo de esta investigación, presentaremos a continuación un cuadro esquemático donde se expone la instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático:

LA INSTAURACIÓN HISTÓRICA DE LA NOCIÓN DE VECTOR COMO CONCEPTO MATEMÁTICO

El concepto de vector surge de la integración histórica de las nociones de magnitud, número y dirección. Esta síntesis se estableció a partir dos líneas de desarrollo: la física y la matemática.

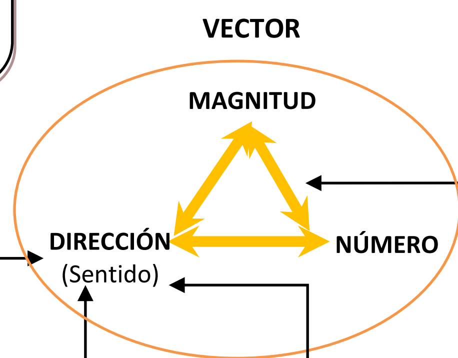
<u>Línea Física:</u>
Se manifiesta por la necesidad de dotar a los físicos de una herramienta básica para la modelación de algunos fenómenos naturales. Por ejemplo, la matematización del movimiento, porque las cantidades tradicionales se mostraron incapaces de describir la posición.

<u>Galileo</u>
Evidencia que algunos fenómenos no se encuentran restringidos a una sola dimensión y podían explicarse a través de las matemáticas. Por ejemplo, el movimiento parabólico (es un movimiento compuesto).

<u>Newton</u>
Asume implícitamente la noción de vector en la ley del paralelogramo de fuerzas, la cual es de vital importancia a la hora de mostrar como las entidades vectoriales podrían usarse para aplicaciones físicas

<u>Fourier</u>
Empieza a emerger el análisis como rama de las matemáticas, con sus objetos propios. En su obra *Théorie Analytique de la Chaleur* , prefigura la noción de vector e instaura una nueva propuesta metodológica en la matematización de algunos fenómenos físicos.

<u>Maxwell, Gibbs y Heaviside</u>
Evidenciaron la parte vectorial del cuaternión (vector) como la herramienta útil a la hora de intentar matematizar los fenómenos de la naturaleza.



<u>Línea Matemática:</u>
Se plantea la evolución del álgebra como disciplina abstracta que acoja objetos no necesariamente con características numéricas, es decir los vectores.

<u>Euclides</u>
Establece un acercamiento entre número y magnitud, en el libro V de los *Elementos*, generando el ambiente propio para la representación de las cantidades numéricas.

<u>Wallis, Wessel, Argand entre otros</u>
Incorporan la representación geométrica de los números complejos como parejas ordenas y muestra que pueden utilizarse para representar fuerzas en el plano.

<u>Grassmann</u>
Empieza un acercamiento moderno con el análisis vectorial con la introducción del concepto de *combinación lineal*, sin ese apelativo. Además definió las cantidades extensivas (hipernúmeros de n componentes) es decir, un vector de coordenadas.

<u>Peano</u>
Incorpora los axiomas de espacio vectorial como lo conocemos en la actualidad

<u>Tait</u>
Establece los desarrollos teóricos necesarios para llegar a la definición formal de la noción de vector. Además instaura los principios fundamentales de donde emergieron las herramientas básicas para la construcción de nuestro análisis vectorial

<u>Hamilton</u>
Formaliza los números complejos como pareja ordenada y trata de generalizarlo al espacio con la creación de sus cuaternión. Muestra la viabilidad del nacimiento de una nueva álgebra rompiendo el principio de permanencia de forma

BIBLIOGRAFÍA

Apóstol, T. (1965). *Calculus, Introduction, With Vector and.* New York: Blaisdell Publishing Company.

Argüelles Rodríguez, J. (1989). *Hístoria de las Matemáticas.* Madrid: Akal, S. A.

Aristóteles. (1999). *Metafísica.* Barcelona.: Planeta - De Agostini S. A.

Bachelard, G. (2004). *La Formación del Espíritu Científico.* Mexico: Siglo XXI editores, S. A. de cv.

Barrantes, H. (2006). *Los Obstáculos Epistemológicos*. Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática.

Becker, O. (1966). *Magnitudes y Límites del Pensamiento Matemático.* Madrid: Rialp, S. A.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* (J. Hernandez, Trad.) Madrid, (España): Editorial Alianza.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de Historía de las Matemáticas.* Madrid: Alianza, S. A.

Boyer, C. B. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid, (España): Editorial Alianza.

Boyer, C. B. (1987). *Historía de las Matemáticas.* Madrid: Alianza, S. A.

Bruno, D. (2008). *Epistemologìa, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza*. *ASOVEMAT(Asociación Venezolana de Educación Matemática)* , 87-106.

Cauchy, A. L. (1994). *Analyse Algébrique, 1`ere partie du Cours d´analyse de I´Ecole royale Polytechnique,.* México: Facultad de Ciencias, UNAM.

Cayley, A. (January de 1858). *A memoir on the Theory of Matrices*.

Charles, M. H. (1980). *Cálculo con Geometría Analítica.* Lima, Perú: Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Corry, L. (2009). *Tel Aviv University.* Obtenido de Estructuras Algebraicas y Textos .

Crowe, J. M. (1985). *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Ideas of a Vectorial System.* New York: Dover pub.

Deivi Luzardo y Alirio J. Peña. (2006). *Historia del Algebra Lineal hasta los albores del siglo* XX. *Divulgaciones matematicas, Vol.14* , 153-170.

Deivi Luzardo y Alirio J. Peña. (s.f.). *Servicio europeo de información matemáticas.* Obtenido de http://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* (G. Quintás, Trad.) Barcelona , España.

Descartes, R. (1947). *La Geometría.* Buenos Aires Argentina: Espasa Calpe.

Doncel, M. G. (1997). *Maxwell et la Traduction Intuitive du Calcul Vectoriel*. En F. Dominique, *Le Nombre Une Hidre An Visages* (págs. 103 - 117). Paris: De la Maison des Sciences de L´Homme.

Dorier, J. L. (1995). *A general out line of the genesis of vector Sapce theory*. Historia Mathematica , *22* (3), 227-261.

Dorier, J. L. (2000). *On the Teaching of linear algebra.* Netherlands: Editorial Kluwer Academic Publishers.

Euclides. (1999). *Elementos.* Madrid: Planeta- De Agostini, S. A.

Euclides. (1991). *Los elementos.* Madrid: Editorial Gredos.

Euler, L. (1988). *Introduction to analysis of the infinite.* New York,USA: Editorial Springer-Verlag.

Flament, D. (1997). *Le Nombre Une Hydre Án Visages, Entré nombres complexes et vecteurs.* París: De La Maison des Sciences de L´homme.

Fourier, J. B. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur.* París: Jacques Gabay.

Galilei, G. (1978). *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre Dos Nuevas Ciencias.* Madrid: Nacional.

Gray, J. (1997). *Around and around quaternions, rotations, and de Rodriguez*. En F. Dominique, *Le Nombre Une Hidre An Visages* (págs. 89 - 101). Madrid: De la Maison des Sciences de L´Homme.

Grossman, S. I. (1996). *Álgebra lineal.* Mc Graw Hill.

Israel, G. (1996). *La Mathématisation du Réel.* París: Ëditions du Seuil.

Jean Piaget, R. G. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Editorial siglo XXI.

Klein, M. (1992). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días, II.* Madrid: Alianza, S. A.

Lavau, J. (1997). *"Verteurs" ? 151 ans de déloyaux services*. En F. Dominique, *Le Nombre Une Hidre An Visages* (págs. 159 - 299). París: De la Maison des Sciencies de L´Homme.

Monroy, L. (2011). *El álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas.* Tesis de maestría, ´Colombia: Universidad del Valle, 2011.

Newton, I. (1983). *El Sistema del Mundo.* Madrid: Alianza, S. A.

Newton, I. (1993). *Princios Matemáticos de la Filosofía Natural.* Barcelona- España: Altaza, S. A.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto Espacio Vectorial.* Tesis doctoral, México: Instituto Politécnico Nacional, 2009.

Perga, A. o. (1998). *Conics.* Santa fé, Nuevo Mexico: Editorial Green Lion Press.

Poincaré, H. (1895). *Théorie Analytique de la Propagation de la Chaleur.* París.

Recalde, L. C. (2001). *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* Santiago de Cali: En Prensa.

Ribnikov, K. (1991). *Historía de las Matemáticas.* Moscú: Mir.

Rosenfeld, B. A. (1988). *A History of Non - Euclidian Geometry Evolution of the Concept of a Geometric Space.* New York: Springer - Verlang.

Schubring, G. (1997). *L´interaction entre les débats sur le statut des nombres négatifs et imaginaires et l´emergence de la notion de segment orienté*. En F. Dominique, *Le Nombre Une Hidre An Visages* (págs. 1 - 14). París: De la Maison des Sciences de L´Homme.

Sneider, A. D. (1992). *Introdución al Análisis Vectorial.* Mexico: McGraw Hill.

Tait, G. P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions.* País: Oxford.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos tomo I Y II.* Madrid,(España): Editorial Aguilar.