MODELIZACIÓN DE SITUACIONES DE MOVIMIENTO EN UN SISTEMA ALGEBRAICO COMPUTACIONAL: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y EL ENFOQUE INSTRUMENTAL

MARITZA PEDREROS PUENTE

DIRECTORES DE TRABAJO DE GRADO:
DIEGO GARZÓN CASTRO
JORGE ARCE CHAVES

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2012

MODELIZACIÓN DE SITUACIONES DE MOVIMIENTO EN UN SISTEMA ALGEBRAICO COMPUTACIONAL: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y EL ENFOQUE INSTRUMENTAL

MARITZA PEDREROS PUENTE

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DIRECTORES DE TRABAJO DE GRADO:
DIEGO GARZÓN CASTRO
JORGE ARCE CHAVES

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2012

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a Dios, por bendecirme para llegar hasta donde he llegado. El presente trabajo de investigación es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

Mis más sinceros agradecimientos a mis directores, profesores Diego Garzón Castro y Jorge Arce Chaves, por haber confiado en mi persona, por la paciencia, las recomendaciones y observaciones durante todo el trabajo de investigación.

Gracias también a mis queridos compañeros y profesores, especialmente a María Fernanda y Octavio que siempre estuvieron atentos a mis llamados, que me apoyaron y me brindaron todos sus conocimientos, por los gratos momentos compartidos dentro y fuera del salón de clase.

Igualmente a los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica. Énfasis en Educación Matemática y de la Licenciatura en Educación Matemática y Física que participaron en el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta.

A mi madre y a mi sobrino que me acompañaron en esta aventura que significó la maestría y que, de forma incondicional, entendieron mis ausencias y mis malos momentos. A mi padre, que a pesar de la distancia siempre estuvo atento para saber cómo iba mi proceso. A ti Alex, que desde un principio hasta el día hoy sigues dándome ánimo para terminar con éxito mis estudios.

Gracias a todos.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN ANALÍTICO **10**

INTRODUCCIÓN **11**

CAPÍTULO 1. **15**

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN **15**

CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA **16**

Objetivos **30**
General 30
Específicos 31

CAPÍTULO 2. **32**

ANÁLISIS PRELIMINARES **32**

REFERENTES TEÓRICOS **33**

2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) **34**
2.1.1. Praxeologías Matemáticas. 37
2.1.2. Los Objetos Ostensivos y No Ostensivos 40
2.1.3. Praxeologías Didácticas 41

2.2. Enfoque Instrumental **44**
2.2.1. Génesis Instrumental 45
2.2.2 Instrumentalización 47
2.2.3 Instrumentación 51
2.2.4. Técnicas Instrumentadas 53
2.2.5. Orquestación Instrumental 57
2.2.6. Recursos Pedagógicos 61

2.3. Análisis Epistemológico de la Noción de Función. **64**
2.3.1. El aporte Galileano. 66
2.3.2 El aporte Cartesiano 71
Sobre la noción de velocidad 75
Sobre el tiempo y/o es espacio in extensio 77
Sobre la ausencia del concepto de función 78
2.3.3. Evolución del concepto de función 80
2.3.4. Sistemas de representación matemática 87
2.3.5. Sistemas de representación matemática vs experiencias reales 97

CAPÍTULO 3. **102**

DISEÑO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS A PRIORI **102**

REFERENTES METODOLÓGICOS **103**

3.1. Referente Empírico **103**

3.2. Micro-ingeniería Didáctica **106**

3.3. Ingeniería Didáctica Exploratoria **109**

3.4. Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas 110

3.5. Análisis A Priori de la Sesión Preparada por la Investigadora 118
3.5.1. Sistema de Aprovechamiento Didáctico 118
3.5.2. Hardware Didáctico 119
3.5.3. Software Didáctico 121

3.6. Análisis de la Preparación de los Estudiantes 127

3.7. Análisis de Familiarización con el CBR 128
3.7.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín 128
3.7.1.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica lineal y afín 129
3.7.1.2. Praxeología Matemática 130
3.7.1.3. Instrumentación 132
3.7.1.4. Instrumentalización 135
3.7.2. Situación 2: Movimiento parabólico "Caída libre" 136
3.7.2.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica cuadrática 137
3.7.2.2. Praxeología Matemática 139
3.7.2.3. Instrumentación 140
3.7.2.4. Instrumentalización 144

3.8. Análisis de la Actividad Potencial de los Estudiantes 145
3.8.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín 145
3.8.2. Situación 2: Movimiento parabólico "Caída libre" 152

CAPÍTULO 4. 154

ANÁLISIS A POSTERIORI 154

ANÁLISIS DEL DESARROLLO EFECTIVO DE LAS SITUACIONES 155

4.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín 155
4.1.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica lineal y afín 155
Momento del Primer Encuentro 155
Momento Exploratorio 161
4.1.2. Praxeología Matemática 162
4.1.3. Instrumentación 165
4.1.4. Instrumentalización 167
Momento de Trabajo de la Técnica 168
Momento Tecnológico –Teórico 174
4.1.6. Praxeología Matemática 178
4.1.7. Instrumentación 183
4.1.8. Instrumentalización 184
Momentos de Institucionalización 185
4.1.10. Análisis de la actividad observable de los estudiantes 187

4.2. Situación 2: Movimiento Parabólico "Caída Libre" 189
4.2.1 Momentos didácticos para el estudio de la gráfica cuadrática 189
Momento del primer encuentro 189
Momento Exploratorio 192
Momento de Institucionalización 202
Momento de Trabajo de la Técnica 203
4.2.2. Instrumentación 203
4.2.3. Instrumentalización 206
4.3. Análisis de las elecciones de sesiones propuestas por la investigadora 207

CAPÍTULO 5. ___ *214*

CONCLUSIONES ___ *214*

BIBLIOGRAFÍA ___ *222*

ANEXOS ___ *226*

ANEXO A. PRIMERA GUÍA DE APLICACIÓN ___ 226

ANEXO B. SEGUNDA GUÍA DE APLICACIÓN ___ 228

ANEXO C. RESTRICCIONES ___ 230

ANEXO D. PROPUESTA DE SITUACIÓN ___ 234

TABLA DE FIGURAS

	Página
Figura 1. Modelo de la estructura de una obra o praxeologías matemáticas (Gascón, 2007).	**39**
Figura 2. Tipos de *obras* o *praxeologías* matemáticas.	**41**
Figura 3. Praxeologías matemáticas vs praxeologías didácticas.	**44**
Figura 4. Origen psicológico de la aproximación instrumental.	**47**
Figura 5. Proceso de Génesis Instrumental.	**54**
Figura 6. El estudiante sherpa, parte de una orquestación instrumental (Trouche, 2005b).	**59**
Figura 7. Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída Galileo (1981, citado por Romero & Rodríguez, 2002).	**69**
Figura 8. Diferentes representaciones de la función cuadrática.	**93**
Figura 9. Conexiones en el nivel de las acciones (Kaput, 1994).	**99**
Figura 10. El “Modelo Completo” de Representaciones (Kaput, 1994).	**100**
Figura 11. Diseño virtual del Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática.	**106**
Figura 12. Adaptación del modelo propuesto por Emprin (2006) para la formación inicial y continua de profesores.	**112**
Figura 13. Gráficas normales de una pelota botando.	**136**
Figura 14. Amplitud del haz.	**148**
Figura 15. Toma de datos de la pelota botando.	**190**
Figura 16. Hipótesis del gráfico esperado.	**191**

TABLA DE GRÁFICOS

	Página
Gráfico 1. Primera gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte I	**156**
Gráfico 2 Captura de datos con trayectoria diagonal	**161**
Gráfico 3 Captura de datos frente al CBR	**162**
Gráfico 4 Segunda gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte I	**168**
Gráfico 5 Primer intento de captura de datos con el CBR	**169**
Gráfico 6 Segundo intento de captura de datos con el CBR	**169**
Gráfico 7 Tercer intento de captura de datos con el CBR	**171**
Gráfico 8 Captura de datos con el CBR realizado por Pablo	**171**
Gráfico 9 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Pablo	**172**
Gráfico 10 Captura de datos con el CBR realizado por Pedro	**173**
Gráfico 11 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Pedro	**173**
Gráfico 12 Tercer intento de captura de datos con el CBR realizado por Pedro	**174**
Gráfico 13 Gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte II	**175**
Gráfico 14 Primer intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri	**176**
Gráfico 15 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri	**177**
Gráfico 16 Primer intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri	**177**
Gráfico 17 Gráfico generado de manera experimental	**192**
Gráfico 18 Gráfico esperado generado de manera experimental	**192**
Gráfico 19 Primer bote completo	**195**

TABLA DE GRÁFICOS

	Página
Gráfico 20 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ con la función GRAPH	**196**
Gráfico 21 Definición del rango en Window	**197**
Gráfico 22 Visualización del gráfico en GRAPH	**198**
Gráfico 23 Modificación del rango en Window	**198**
Gráfico 24 Visualización del gráfico en GRAPH	**199**
Gráfico 25 Modificación del rango en Window	**199**
Gráfico 26 Visualización del gráfico en GRAPH	**200**
Gráfico 27 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=2	**200**
Gráfico 28 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=0	**201**
Gráfico 29 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=-1	**201**
Gráfico 30 Visualización del gráfico al modificar el rango	**202**

LISTA DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Conversión entre los diferentes sistemas de representación de las funciones.	**94**
Tabla 2. Rejilla de análisis de las situaciones	**126**
Tabla 3. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte I	**164**
Tabla 4. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte II	**179**
Tabla 5. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de las primeras preguntas de la situación 2	**193**

RESUMEN ANALÍTICO

Título:	Modelización de situaciones de movimiento en un Sistema de Algebraico Computacional: una aproximación desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Instrumental
Investigadora:	Maritza Pedreros Puente
Director trabajo de grado:	Diego Garzón Castro y Jorge Arce Chaves
Evaluadores:	Jhony Alexander Villa Ochoa Ángel Hernán Zúñiga Solarte
Palabras claves:	Teoría Antropológica de lo Didáctico, Enfoque Instrumental, Sistema Algebraico Computacional, recurso pedagógico, modelización matemática, situación de movimiento.
Objetivos:	**General** Fundamentar desde la articulación de la TAD y el enfoque instrumental la integración de un CAS en el proceso de formación inicial de profesores para el estudio de las funciones de variable real. **Específicos** 1) Adaptar una secuencia de situaciones didácticas fundamentada en la articulación de praxeologías puntuales, para el estudio de las funciones de variable real al integrar un Sistema Algebraico Computacional (CAS). 2) Caracterizar los aspectos involucrados en la gestión de una secuencia didáctica que evidencie el papel de los CAS en la interpretación de los datos y las técnicas matemáticas utilizadas por los profesores en formación inicial. 3) Identificar algunos aspectos relativos al proceso de integración de un CAS en la enseñanza del álgebra y su incidencia en la actividad matemática de los profesores en formación inicial.
Metodología:	La metodología adoptada toma como referentes elementos de la Micro-Ingeniería Didáctica, Artigue et al. (1995), de la Ingeniería Didáctica Exploratoria, Haspekian (2005) y de la Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas, Emprin (2006), para la fundamentación y gestión de la modelización de situaciones de movimiento en un Sistema de Álgebra Computacional.

Resumen: El trabajo de investigación combina fundamentalmente dos referentes teóricos. De una parte, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) a partir de la cual se fundamenta la enseñanza del álgebra escolar como instrumento de modelización y por otro lado el *Enfoque Instrumental* desde el que se fundamenta la integración de un Sistema Algebraico Computacional (CAS) en tanto *instrumento* central para la creación, representación y manipulación de funciones. Se desarrolla tomando como referentes elementos de la Micro-*Ingeniería Didáctica, Ingeniería Didáctica Exploratoria y la Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas*, en el contexto de un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle, pretende aportar desde lo teórico y lo metodológico una visión fundamentada de la concepción del álgebra en la educación secundaria y la posibilidad de integración de un CAS.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación se inscribe en la *Línea* de *Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática* del Programa de Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo se desarrolla tomando como referentes metodológicos elementos de la Micro-Ingeniería Didáctica, Artigue et al. (1995), Ingeniería Didáctica Exploratoria, Haspekian (2005) y la Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas, Emprin (2006) en el contexto de un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle, pretende aportar desde lo teórico y lo metodológico una visión fundamentada del álgebra en la educación secundaria y la posibilidad de integración de un Sistema Algebraico Computacional.

Esta propuesta combina fundamentalmente dos referentes teóricos. De una parte, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) a partir de la cual se fundamenta la modelización de situaciones de movimiento y por otro lado el *Enfoque Instrumental* permite fundamentar la integración de Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS)[1] en tanto instrumento central para la creación, representación y manipulación de funciones.

Es precisamente desde el marco general de la TAD, que pueden considerarse las matemáticas como un producto de la actividad humana, que depende directamente de los contextos sociales y culturales donde se desarrolla dicha actividad matemática, el saber que de ella emerge puede describirse en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas*. Igualmente se considera que a partir de los aportes del *enfoque*

---

[1] Su sigla en español es SAC, pero en este documento se utilizará la sigla CAS por su expresión en inglés Computer Algebra System; éste un programa de ordenador o calculadora que facilita el cálculo simbólico. La diferencia principal entre un CAS y una calculadora científica es la capacidad para manipular expresiones algebraicas.

instrumental, la *actividad matemática* está mediada por *artefactos informáticos* y es posible dar cuenta de los procesos de *génesis y orquestación instrumental* (Trouche, 2005b).

Se buscó caracterizar la *actividad matemática* de los estudiantes cuando se involucraron en el estudio de situaciones de movimiento con un Sistema de Algebra Computacional (CAS). Para tal propósito se desarrollaron los análisis preliminares, *a priori*, *de preparación*, *de familiarización y de la actividad potencial de los estudiantes*. Análisis que configuran un modelo para el proceso de formación inicial de profesores a partir del diseño, adaptación e implementación de una secuencia de situaciones didácticas, para abordar el estudio de la *variación* en un contexto físico (de movimiento) al utilizar un *sensor de movimiento* y un *Sistema Algebraico Computacional* (CAS). Esta condición les brindó a los estudiantes elementos teóricos y prácticos a favor de la concepción del álgebra escolar como instrumento de modelización de las matemáticas en la Educación Secundaria.

Esta *secuencia de situaciones* permitió determinar el papel que juegan los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) en la interpretación de datos y las técnicas matemáticas utilizadas, así como las *génesis instrumentales colectivas* que se pueden construir, *la orquestación instrumental* a tener en cuenta para su implementación y su aporte a la modelización de situaciones de movimiento.

Para la construcción y estudio de esta secuencia didáctica los capítulos de este trabajo se dividieron de la siguiente manera:

En el *Capítulo 1* se contextualizó y planteó el problema de investigación, referido fundamentalmente a la problemática relativa al estudio *del álgebra* como una aritmética generalizada, de esta manera los tipos de problemas tienden a multiplicarse, las técnicas a especializarse y los elementos teóricos a independizarse; las letras son identificadas como incógnitas y los parámetros están ausentes, como lo señala (Gascón, 1999). Así mismo se plantea la idea de que la integración de los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) puede contribuir a la concepción del á*lgebra* escolar como instrumento de modelización.

En el *Capítulo 2* se presentaron los *análisis preliminares* que soportan y da sentido al diseño de la secuencia didáctica. Estos referentes involucran el estudio de algunos elementos teóricos y metodológicos desde la didáctica de las matemáticas, relativos al álgebra escolar y el proceso de modelación. De igual manera, se tienen en cuenta algunos aportes del *enfoque instrumental*, cuya reflexión en relación con los *artefactos informáticos* utilizados se fundamenta en las nociones de *génesis instrumental* y *orquestación instrumental*.

Como elementos teóricos para el análisis de las prácticas institucionales se toman en cuenta algunos constructos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, como las *praxeologías matemáticas* constituidas por *los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría y las praxeologías didácticas que dan cuenta de los momentos de estudio*, que se pueden considerar complementarios de los constructos del *enfoque instrumental* para el análisis del *artefacto* (CAS), su disponibilidad en el aula y *organización matemática y didáctica*. En este capítulo se fundamentan y desarrollan los *análisis preliminares* a partir del reconocimiento del rol central de la fundamentación didáctica, cognitiva y epistemológica para la adaptación y gestión de la *secuencia didáctica*.

En el Capítulo 3 se presentó el *diseño metodológico y los análisis a priori*, éstos se desarrollaron a partir de algunos referentes empíricos y elementos de la Micro-Ingeniería Didáctica Artigue et al. (1995), la Ingeniería Didáctica Exploratoria Haspekian (2005) y la Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas Emprin (2006); así como de los análisis *a priori, de preparación, de familiarización y de la actividad potencial de los estudiantes* de cada una de las situaciones propuestas en el marco de las actividades de la asignatura: “Diseño de ambientes de aprendizaje informático y nuevas concepciones de recursos pedagógicos” como electiva profesional impartida a los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica, énfasis en

Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, durante el primer semestre académico de 2010.

En el *Capítulo 4* se realizó el *análisis a posteriori*, centrados principalmente *en el análisis del desarrollo efectivo de las situaciones* para ello se consideraron como categorías centrales la identificación las praxeologías matemáticas puntuales desarrolladas y sus momentos de estudio desde la TAD, así como los procesos de instrumentación e instrumentalización desde el enfoque instrumental y que fueron concretadas en la rejilla de análisis presentadas en la Tabla 2. Se describió la manera como los estudiantes accedieron a la secuencia, la desarrollaron y se estableció la relación entre lo previsto y su desarrollo efectivo.

En el *Capítulo 5* se presentan las conclusiones generales desde los referentes teóricos y prácticos desarrollados durante la investigación referidos al estudio de las situaciones de movimiento al integrar un Sistema Algebraico Computacional en el marco de un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas y que responden principalmente a la pregunta de investigación, hipótesis y objetivos.

Finalmente se presenta la *Bibliografía* y a manera de *Anexos*, las dos guías de aplicación de la secuencia de situaciones, así como las restricciones encontradas en la guía para estudiantes del CBR y que fueron clasificadas en internas y de comando y por último el diseño de una situación elaborada por José en el Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática.

CAPÍTULO 1.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el panorama de la investigación en Educación Matemática es posible evidenciar un creciente interés sobre el futuro de la enseñanza de las matemáticas, particularmente a partir del reconocimiento de los dramáticos y complejos cambios que se producen por la integración de las Tecnologías Informáticas y Computacionales (*TIC*), como lo muestra parte del informe del CREM[2] Kahane (2002, citado por Lagrange, 2005).

En efecto, se considera que una vez que las TIC ingresen en todos los ámbitos de la sociedad, las matemáticas podrán ser encontradas en diferentes escenarios de la vida moderna; sin embargo, esto no se traducirá necesariamente en un reconocimiento de esta situación por parte de las personas del común. Es aquí donde se reconoce que la enseñanza jugará un rol central al facilitar y propiciar que las personas sean conscientes de este proceso.

De la misma manera, la integración de las TIC cambian a las matemáticas en sí mismas, al incluir la *experimentación*, esto es, la capacidad de explorar las estructuras matemáticas, de examinar conjeturas y sugerir generalizaciones (Bailey & Borwein 2001, citador por Moreno, 2002). Otras ciencias y prácticas proporcionan problemas, métodos y conceptos de gran utilidad en múltiples aplicaciones matemáticas. También se señala que las *simulaciones computacionales* basadas en modelos matemáticos están presentes en diversas actividades científicas, que se benefician de su interacción interna y externa. De este modo, el *conocimiento matemático* está lejos de ser simplemente una cuestión para matemáticos, pues su desarrollo contemporáneo puede describirse como una adaptación, selección e integración de procesos propios, útiles para profesionales en física, ingeniería, biología y economía, entre otras profesiones. Igualmente, se reconoce que en la actualidad con el uso del software, los *experimentos en matemáticas* involucran capacidades de cálculo numérico, gráfico, simbólico y de programación.

[2] Es una Comisión de Reflexión sobre la Enseñanza de las Matemáticas creada desde 1999 en Francia.

Las *matemáticas profesionales*[3] favorecen nuevos acercamientos y reorganizaciones con base en la producción y la exactitud matemática, así mientras algunos matemáticos se especializan en la producción y publicación experimental de los resultados y/o conjeturas al usar un software, otros usan estas conjeturas para trabajar en sus demostraciones.

Las calculadoras simbólicas, por ejemplo, materializan en el ámbito escolar una transposición de las herramientas informáticas y computacionales usadas en las matemáticas profesionales. De esta manera, no solo ofician como ayudas pedagógicas para la enseñanza sino que se transforman en medios potentes para aproximaciones novedosas a los objetos de conocimiento matemático. Esta nueva condición demanda la adaptación de los objetivos, contenidos y métodos utilizados para la enseñanza de las matemáticas.

Para comprender la emergencia de un nuevo paradigma educativo que irrumpe con las TIC y su impacto en el dominio de la Educación Matemática se requiere el desarrollo y/o adaptación de modelos teóricos y del trabajo investigativo en el aula, de manera que se obtenga evidencia empírica para llevar a cabo eficientemente el proceso de integración de tales recursos en las clases de matemáticas. De esta manera la transposición de las herramientas informáticas y computacionales se presenta inicialmente porque los propósitos formativos de los matemáticos profesionales difieren de los objetivos de enseñanza en el ámbito escolar. Esta percepción puede ser ampliada a través de la noción de *transposición didáctica* introducida por Chevallard (1985) quien enfatiza que lo que pasa dentro de un *sistema didáctico* no puede ser entendido sin considerar lo que pasa fuera de él. Se plantea de esta manera una relación entre las matemáticas que se enseñan y las profesionales, en donde el uso de las matemáticas puede verse como un *juego de conocimientos y prácticas* en la transposición entre dos instituciones, una que apunta a la producción de conocimiento y otra a su estudio.

[3] Se entenderá por *matemáticas profesionales*, aquellas pertenecientes a los investigadores matemáticos propiamente dichos.

En la investigación reciente en didáctica de las matemáticas, el estudio de las calculadoras simbólicas u otros artefactos informáticos "importados" al mundo de la enseñanza de las matemáticas, ha propiciado la aparición de enfoques teóricos novedosos, como el *enfoque instrumental* (Trouche, 2005a) que da cuenta de los procesos de *génesis instrumental*[4], es decir, de la construcción de instrumentos que entran en consonancia con la *ergonomía cognitiva* (Vérillon & Rabardel, 1995) teoría en la que se reconoce que todo aprendizaje de una noción matemática se encuentra mediada por los instrumentos que se tienen a disposición y que dicha mediación influye en la transposición del saber matemático, el rol del profesor, la actividad matemática de los estudiantes, la construcción del conocimiento y la organización de la clase. Enfoques que pueden se complementados con algunos elementos de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (Chevallard, 1992) que dan cuenta de la manera en que se puede estructurar la actividad matemática de los estudiantes y reconocer los momentos de estudio así como su legitimidad institucional.

Estos marcos teóricos han permitido igualmente, ampliar el conocimiento didáctico involucrado en el trabajo con las calculadoras simbólicas y en general con cualquier Sistema Algebraico Computacional (CAS). Estos dispositivos y escenarios mejoran la posibilidad de manipulación de expresiones algebraicas, gráficos y tablas. Se considera que la integración de estos artefactos gradualmente podría cambiar ciertas prácticas de enseñanza que se revelan como "inadecuadas" y que privilegian generalmente aspectos procedimentales dando lugar al desarrollo limitado de habilidades que suelen introducirse en el aula de forma desarticulada.

Hay que tener en cuenta que una visión extremadamente ingenua del potencial intrínseco de las TIC puede generar algunas asociaciones y concepciones peligrosas y dar lugar a posiciones triviales, que relegan al plano discursivo la complejidad asociada al proceso de la *génesis instrumental*. De acuerdo con Artigue (2000, citada por Monaghan, 2005) una de tales asociaciones consiste en descalificar las prácticas de enseñanza

[4] *Génesis Instrumental* es el proceso mediante el cual un *artefacto*, el cual puede ser material o simbólico, se convierte en un *instrumento* a partir de la actividad de un sujeto. (Vérillon & Rabardel, 1995; Trouche, 2005). Esta noción se amplía en el capítulo 2.

orientadas hacia la adquisición de habilidades procedimentales, pues en un comienzo se creía que las TIC al asumir la parte técnica, facilitarían el razonamiento conceptual y daría nuevos medios para su realización.

La idea según la cual se tiende a separar las técnicas[5] de la comprensión conceptual, porque éstas serán asumidas por las TIC y concentrarse sólo en la comprensión conceptual, ha demostrado ser inadecuada e ingenua. Para sustentar lo anterior Lagrange (1999, citado por Monaghan, 2005) afirma para empezar que el trabajo técnico no desaparece al hacer matemáticas con TIC y en particular con un CAS, es transformado, pero sigue siendo importante. Por otro lado, dentro de una teoría, cada tema tiene un conjunto de tareas y técnicas que la acompañan, así es importante que los estudiantes experimenten progresivamente las diferentes formas de realizar las tareas, las discutan y establezcan sus límites, de tal manera que a futuro les permita una comprensión teórica del tema. Además, aunque la repetición sin comprensión de una técnica, para una tarea específica, es una experiencia matemática empobrecida, ésta no es una razón para no usarlas. Para terminar se debe tener en cuenta que los estudiantes necesitan tiempo para desarrollar esquemas ricos para la utilización de técnicas, éstas no se aprenden inmediatamente.

Hay que destacar que la integración de los CAS inicialmente supuso la emergencia de nuevos campos de estudio que habían sido previamente inaccesibles y brindaba la oportunidad para explorar situaciones matemáticas. Se consideraba que de esta manera se facilitaría a los estudiantes la realización de investigaciones y descubrimientos. Sin embargo, algunas investigaciones muestran una serie de dificultades que se presentan mientras se usa un CAS para aprender matemáticas, tales como la sintaxis de los comandos, la diferencia entre las representaciones y técnicas encontradas en ambientes CAS y aquellas que se dan en ambientes de lápiz/papel, las cuales pueden llevar a dificultades conceptuales. (Lagrange, Artigue, Laborde, & Trouche, 2003; Drijvers & Gravemeijer, 2005). Así pues, se empieza a reconocer que la integración de CAS en la

[5] Se entenderá por técnica una “manera de hacer” o realizar un tipo de tareas, no necesariamente algorítmica o procedimental.

enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas parece un asunto más complicado de lo que podría esperarse.

En efecto, en la actualidad se reconoce que existe una relación inseparable entre las técnicas, los artefactos computacionales y la comprensión conceptual y que estos dominios se complementan simultáneamente (Drijvers & Gravemeijer, 2005). Es esta visión de complementariedad la que se considera como el centro del *enfoque instrumental* y la que se considera esencial para el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico. De acuerdo a este enfoque, un proceso de *génesis instrumental* involucra el desarrollo de *esquemas de utilización*, en los cuales los aspectos técnicos y conceptuales actúan recíprocamente y se co-desarrollan.

De igual importancia es el reconocimiento que el solo hecho de utilizar tecnologías computacionales no implica que haya un razonamiento conceptual. Se ha presentado evidencia que el uso ocasional de un CAS agrega dificultades técnicas a los problemas matemáticos, lo cual impide el progreso de los estudiantes en la actividad matemática (Hirlimann, 1996, citado por Monaghan, 2005).

Por su parte, la construcción del conocimiento matemático en el aula de clase debe permitir a los estudiantes usar en situaciones de la “vida real” lo aprendido en el aula de clases y, desarrollar habilidades para aplicar sus conocimientos en contextos distintos al escolar. De acuerdo a algunos investigadores los escenarios de la “vida real” son de alguna manera el pretexto inicial que motiva la introducción de una familia entera de funciones (lineal, cuadrática, exponencial, etc.) y el estudio de sus propiedades (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). Este estudio puede hacerse a través de la elaboración e interpretación de ciertos modelos matemáticos (gráficas, ecuaciones, desigualdades, etc.).

Se hace evidente que la integración de los CAS puede contribuir a la comprensión de las funciones por parte de los estudiantes y al desarrollo de sus habilidades en la resolución de problemas y la manipulación de expresiones algebraicas. También se afirma que una aproximación *funcional* puede enfocarse en el desarrollo de una noción diferente al concepto de función, por ejemplo, una que se focalice en la relación entre cantidades que varían y no a la noción conjuntista, donde se enfatiza en la correspondencia entre pares de elementos (Nemirovsky, citado por Bednarz, Kieran, & Lee, 1996).

En la búsqueda de este propósito, las *matemáticas experimentales* juegan un papel fundamental, al involucrar la exploración a partir de datos “reales”, con los cuales se pueden establecer relaciones entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento. Adicionalmente, con el uso de TIC es posible formular y probar conjeturas, explorar ideas, hacer predicciones y tomar decisiones relativas a datos “reales”. Por ejemplo, puede enfocarse en el estudio de las relaciones entre las descripciones físicas y matemáticas del movimiento para el estudio de algunas funciones con variable real.

Las investigaciones recientes en didáctica de las matemáticas evidencian un renovado interés por el estudio de la *modelación matemática* y el análisis de datos, desde diferentes perspectivas teóricas. Se busca de esta manera ofrecer a los estudiantes oportunidades “realistas” de conectar la matemáticas a problemas sociales y medio-ambientales significativos a la vez que se integran herramientas informáticas y computacionales.

El término *modelación matemática* tiene muchas interpretaciones que han surgido de diferentes perspectivas de investigación. Por ejemplo, se la define como un tema unificado para todas las aplicaciones de las matemáticas (Burghes, 1980, citado por Ferrucci & Carter, 2003). Según Mason y Davis (1991) la esencia de la *modelación matemática* involucra el movimiento entre la situación física que está siendo modelada y la representación matemática específica de ese modelo. Por su parte, Swetz (1991, citado por Ferrucci & Carter, 2003) ve la *modelación* como un proceso que incluye la elaboración de conjeturas y la modificación y adaptación de teorías matemáticas a problemas del mundo real. Esto es, identificar un problema, suponer una solución, recoger datos y probarlos contra la hipótesis y finalmente deben delinearse unas conclusiones en concordancia con las reglas matemáticas. Ogborn (1994, citado por Ferrucci & Carter, 2003) considera la *modelación matemática* como un tipo de mundo artificial, con la característica que todos los componentes o variables del fenómeno son conocidas y tenidas en cuenta antes de resolver el problema.

De manera, similar Bassanezi (1994, citado por Ferrucci & Carter, 2003) considera la *modelación matemática* como un proceso que involucra la comprensión, simplificación, resolución, y posible revisión o modificación de una situación real bajo estudio. Desde esta perspectiva un *modelo* se desarrolla a través del estudio de la relación entre variables que son consideradas esenciales al fenómeno bajo análisis. De acuerdo con Bassanezi (1994) trabajar con la *modelación matemática* no es simplemente un intento de ampliar el conocimiento sino de desarrollar una forma particular de pensar y actuar, para producir conocimiento, colocando juntos a las abstracciones y las formalizaciones, interconectado a los fenómenos y los procesos empíricos, considerados como *situaciones problemáticas*.

Existe una noción “universalmente” aceptada que diferentes sistemas de representación usados en la resolución o desarrollo de *modelos matemáticos* (por ejemplo, gráficas, tablas numéricas, fórmulas, entre otras) permiten un análisis profundo de diferentes aspectos de un fenómeno. De otra parte, una aproximación estrictamente algebraica coloca más énfasis en las manipulaciones matemáticas necesaria para resolver el problema (Ferrucci & Carter, 2003). Se considera que en cualquier caso, la transformación de los datos en una lista de valores numéricos o en un despliegue gráfico, resalta la necesidad crucial de ser capaz de trabajar con una variedad de representaciones y de establecer un vínculo entre las diferentes representaciones.

Igualmente, se considera que el mismo análisis aplica para aquellos *modelos matemáticos*, usados por algunos matemáticos, en los cuales se reconoce un uso extensivo de las representaciones algebraicas, a diferencia de otros que utilizan representaciones gráficas y tablas. Lo que frecuentemente es implícito en las *actividades de modelación* es el vínculo entre una representación matemática y la situación que se está presentando. De esta manera, se considera que para que los estudiantes tengan éxito al trabajar con *técnicas de modelación*, deben desarrollar cierta habilidad para construir estos vínculos entre las matemáticas y los tipos de problemas presentados (Ferrucci & Carter, 2003).

En cuanto se refiere a las implicaciones de estos posicionamientos, se señala que en las últimas dos décadas, las organizaciones de matemáticos y educadores matemáticos han subrayado la importancia de aumentar el énfasis en la enseñanza de las técnicas de *modelación matemática*. Sin embargo, en el ICMI Study 14 (International Commission on Mathematical Instruction, 2004) se señala que pese a este tipo de recomendaciones ha habido poco progreso en la integración del proceso de *modelación matemática* en los distintos niveles de escolaridad. Esto puede deberse en parte a la incertidumbre de los profesores de cómo entender la *modelación matemática*, cómo ubicar y evaluar apropiadamente los problemas de modelación, o cómo integrar estas técnicas en los currículos de matemáticas existentes.

Un escenario efectivo para promover nuevas prácticas relativas a la *modelación matemática*, es el que se configura a partir de la integración de los ambientes informáticos y computacionales en las clases de matemáticas. En efecto, se considera que las exploraciones basadas en la tecnología dan lugar a un mayor compromiso de los estudiantes en relación con los conceptos matemáticos que ellos están aprendiendo. Las herramientas informáticas y computacionales pueden ayudar a introducir ideas matemáticas a los estudiantes aún antes de que ellos sean introducidos en las matemáticas formales. Como resultado de esta integración puede señalarse que las TIC's son un recurso para que los estudiantes lleguen a hacer conexiones matemáticas al mismo tiempo que va permitiéndoles comunicar sus ideas matemáticas y soluciones, tanto en un modo visual, como en uno verbal.

De igual trascendencia son los beneficios en la motivación y disposición de los estudiantes provistos por una nueva visión del proceso de *modelación matemática*. En este punto, debe señalarse que se considera que las matemáticas proporcionan una de las vías más potentes para el trabajo con problemas de modelación a través de un rango amplio de asuntos y temáticas. Este amplio rango de aplicaciones brinda a la *modelación* *matemática* el potencial para mejorar la motivación y disposición de los estudiantes en relación con las matemáticas que aprenden en las clases de matemáticas.

Igualmente se señala que cuando los profesores ponen en práctica la modelación, necesitan construir un nuevo paradigma y replantear sus prácticas. Igualmente, necesitan determinar cómo la integración de la tecnología mejorará su enseñanza de las matemáticas, mientras que consideran las implicaciones de la tecnología en el rediseño de su práctica profesional y de los currículos de matemáticas. Los profesores que enseñen la modelación son confrontados de esta manera con el desafío de crear problemas más interesantes y aún “más realistas”, esto es, más cercanos a los estudiantes y que difieran de los problemas tradicionalmente enfocados sólo en los cálculos (Ferrucci & Carter, 2003).

Otras investigaciones también han subrayado el impacto positivo de la tecnología en los desempeños cognitivos de los estudiantes, lo que proporciona una evidencia empírica que confirma las recomendaciones de movimientos de reforma en educación matemática y de investigadores en relación con la *modelación matemática*. Se considera que existe una evidencia creciente que sustenta la idea de que los profesores deben tener conocimiento de los aspectos didácticos relacionados a la enseñanza de contenidos con tecnología. Más aún, se considera que los profesores deben desarrollar confianza sobre su comprensión de contenidos para llevar a cabo la presentación de nuevos tópicos en el currículo tales como la *modelación matemática.*

Sin desconocer que existen diferentes perspectivas para abordar la *modelación matemática*, en este trabajo se adopta la propuesta por Gascón (2003a, citado por Bosch et al, 2006) según *El Programa Epistemológico de Investigación de Didáctica de las Matemáticas* en la que se postula que gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática. La TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías. Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más.

Así pues, al ubicarse en el plano institucional de las *matemáticas que se enseñan*, es posible reconocer un fenómeno didáctico relativamente "universal" relativo a la marcada naturaleza pre-algebraica de las matemáticas escolares, es decir, considerar el álgebra sólo como aritmética generalizada y no como *instrumento de modelización*, esto es, como una nueva manera de hacer matemáticas, que se caracteriza por estudiar fenómenos didáctico-matemáticos partiendo de un modelo explícito de los conocimientos matemáticos involucrados, sin presuponer que éstos están "dados" ni, mucho menos, que son transparentes e "incuestionables", lo que revela claramente como paradigma el perteneciente a la *didáctica fundamental de Brousseau* (1986, citado por Gascón, 1999).

La naturaleza pre-algebraica de las matemáticas se evidencia en la manera como están estructurados en algunas instituciones escolares los currículos. Así por ejemplo, en España el currículo del área de matemáticas está estructurado en tres grandes secciones de contenidos, a saber: conceptuales, *procedimentales* y *actitudinales* que a su vez se hallan estructurados en un conjunto de áreas y de sectores que incluyen entre otros a los números y medidas, álgebra, geometría, funciones y su representación gráfica, tratamiento de la información estadística y del azar (CECJA, 2002, citado por García, 2007).

En lo que concierne al sistema educativo colombiano, aunque la organización curricular es diferente, se puede afirmar que comparte algunos de los propósitos señalados, en particular el de promover la articulación de los diferentes tipos de pensamientos, lo cual evita que el *corpus* de conocimiento se fragmente en tipos de problemas algebraicos. De esta manera, en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) se argumenta que la actividad matemática de los estudiantes debe considerar tres grandes aspectos para organizar el currículo en un "todo" armonioso: Procesos generales, conocimientos básicos y el contexto.

Los *Procesos generales* presentes en la actividad matemática que ocurre en la enseñanza y en el aprendizaje son: *el razonamiento; la resolución y planteamiento de* *problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*, ésta no pretende ser una clasificación exhaustiva, es decir, pueden darse otros procesos además de los mencionados, ni tampoco pretende ser disyunta, es decir, que existen traslapes y relaciones e interacciones múltiples entre ellos.

Los *Conocimientos básicos* tienen que ver con los distintos procesos generales mencionados anteriormente y que desarrollan el pensamiento matemático con sus sistemas propios. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Los sistemas son aquellos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

El *Contexto* tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y da sentido a las matemáticas que se aprenden. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

En cuanto concierne al *diseño de las situaciones* se señala que debe ser tal que además de comprometer la afectividad del estudiante, desencadene los procesos de aprendizaje esperados. La *situación propuesta* se convierte en un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias (MEN, 1998). En particular, se plantea que al proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, es fundamental superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos, y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

En los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* está implícitamente la idea de que el desarrollo del pensamiento matemático depende de la actividad matemática que se genere en las diferentes instituciones, dicha actividad depende del tipo de situaciones que se propongan, el rol del profesor y del estudiante, la variedad y eficacia de los recursos didácticos, entre otros.

Aunque se menciona que se debe lograr la articulación de los diferentes tipos de pensamientos y que los contenidos no implican un tratamiento diferenciado, para lograr esta articulación e integración de los diferentes conocimientos básicos se propone el planteamiento de situaciones "fecundas" en el sentido de que puedan desarrollarse para el estudio de situaciones cada vez más amplias y complejas, lo que a su vez provoca nuevas necesidades tecnológicas que darán lugar a la construcción y justificación de nuevas técnicas capaces de resolver nuevos tipos de tareas respecto a una organización matemática inicial (García, Bosch, Gascón, & Ruiz, 2007).

Una vez se tiene identificada la situación es importante el proceso de planificación que permita la construcción y simulación de diferentes tipos de variación, lograr controlar y anticipar su comportamiento, para lo cual se debe construir un *modelo algebraico* que dé cuenta del comportamiento de la situación a estudiar, este modelo debe ser puesto a prueba para determinar su alcance y validez.

Este tipo de consideraciones pueden relacionarse con propósito de reducir el grado de *atomización* de la actividad matemática escolar. Es decir, se busca realizar un trabajo técnico tranquilo, prolongado y sistemático con objetivos a mediano y largo plazo, que le permitan al estudiante encontrar verdaderamente las estructuras de las situaciones propuestas, las condiciones de existencia de la solución y no simplemente encontrar el valor de una incógnita o ver los diferentes contenidos matemáticos de manera aislada (Gascón, 1999).

Así la modelización algebraica constituye un tipo de actividad matemática que permite tratar los casos generales y hace posible estudiar la estructura de los problemas en lugar de limitarse a la simple obtención de la incógnita.

La modelización algebraica se caracteriza por el uso sistemático de parámetros entendidos, en primera instancia, como objetos matemáticos (números, funciones, conjuntos, figuras, proposiciones, matrices, etc.) conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos.

Mediante la modelización algebraica, Gascón (1999) afirma que se estudian situaciones matemáticas y extramatemáticas muy diversas, en las que se cristalizan problemas aparentemente muy diferentes, donde se incluyen "problemas aritméticos", resolubles verbalmente mediante una cadena de operaciones aritméticas, de "construcción geométrica", de "conteos simples", de "lógica", de "máximos y mínimos", etcétera.

Así mismo, se señala que la restricción impuesta por el tiempo en el sistema educativo, hace que el proceso de *modelización algebraica* no sea alcanzado en la educación secundaria, pues se debe estructurar el conocimiento a enseñar en una serie de temas diferenciados por la necesidad de un "aprendizaje rápido". Esto significa que las "técnicas matemáticas" deben aprenderse al mismo tiempo que se enseñan. Por lo cual el tipo de tareas que corresponden al álgebra como una generalización de la aritmética es más compatible con esta restricción que el tomar el álgebra como un *instrumento de modelización*.

De acuerdo a todo lo mencionado hasta el momento los CAS influencian la actividad matemática que se genera en el aula de clase, por lo cual es importante tomar conciencia de la "distancia" que se presenta entre los ambientes de lápiz y papel y los ambientes informáticos de aprendizaje, para precisar tanto los elementos problemáticos como los productivos, y de esta manera identificar posibles efectos didácticos (Haspekian & Artigue, 2007). A esta distancia se la denomina *distancia instrumental* y se propone para su estudio tomar en consideración fenómenos como la transposición informática, así como también aspectos relativos a la legitimidad institucional de las diferentes prácticas que se pueden generar al integrar CAS en las aulas de clase.

Esta serie de consideraciones, nos permiten plantear el siguiente interrogante de investigación: ¿Qué caracteriza la *actividad matemática* que se genera al integrar un CAS desde una concepción del álgebra escolar como *instrumento de modelización* en un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas?

La hipótesis central que orienta la investigación se basa en la siguiente consideración: Es posible a partir de la integración de un Sistema Algebraico Computacional lograr el estudio de las funciones con variable real, al identificar la estructura de situaciones de movimiento a partir de sus variables y parámetros y no sólo de incógnitas. Como elementos que contextualizan esta hipótesis pueden señalarse entre otros:

Como ya se mencionó en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico se postula que "gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997) Esta interpretación de la actividad matemática adquiere todo su significado cuando se considera la *modelización intramatemática* como un aspecto esencial e inseparable de la actividad matemática.

Es posible de esta manera, reformular teóricamente los *procesos de modelización* como procesos de *reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas* de complejidad creciente (puntuales, locales y regionales), que necesariamente deben partir de las razones de ser de aquellas organizaciones matemáticas que se desean reconstruir e integrar.

Desde esta perspectiva las nociones de modelo y sistema se amplían, para ser consideradas como praxeologías. Los procesos de modelización dejarán de describirse en términos del par sistema-modelo y a partir del ciclo de modelización, para ser caracterizados en términos de praxeologías y vínculos entre praxeologías. No tiene sentido considerar los procesos de modelización independientemente del resto de las actividades matemáticas, no como objetos en sí mismos, para ser enseñado, ni como medios para la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006).

A partir de elementos del *enfoque instrumental* y de la TAD podría dinamizarse la construcción del conocimiento matemático, a través del diseño de un escenario experimental que involucra la integración de un artefacto computacional.

Este artefacto computacional, es en esta investigación, un *detector sónico de movimiento*, cuya utilización permite la captura de datos los cuales pueden ser visualizados y manipulados a partir de tablas y gráficos cartesianos. Se considera que estos rasgos particulares podrían generar mejores capacidades de comunicación, dando eventualmente paso a una nueva cultura de trabajo matemático en el aula que vaya más allá del paradigma, aún no superado totalmente, del enfoque conjuntista de las matemáticas, en el que la función es definida a partir de la relación que se establece entre los elementos de dos conjuntos, uno de partida y uno de llegada, así la función es la asignación a través de la cual a cada elemento del conjunto de partida le corresponde uno y sólo un elemento en el conjunto de llegada. Para llevar a cabo nuestra investigación se han planteado los siguientes objetivos:

Objetivos

General

Fundamentar desde la articulación de la TAD y el enfoque instrumental la integración de un CAS en el proceso de formación inicial de profesores para el estudio de las funciones con variable real.

Específicos

Adaptar una secuencia de situaciones didácticas fundamentada en la articulación de praxeologías puntuales, para el estudio de las funciones de variable real al integrar un CAS.

Caracterizar los aspectos involucrados en la gestión de una secuencia didáctica que evidencie el papel de los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) en la interpretación de los datos y las técnicas matemáticas utilizadas por los profesores en formación inicial.

Identificar algunos aspectos relativos al proceso de integración de un CAS en la enseñanza del álgebra y su incidencia en la actividad matemática de los profesores en formación inicial.

CAPÍTULO 2.

ANÁLISIS PRELIMINARES

REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se toman en consideración algunos referentes teóricos y estrategias metodológicas que nos permitan interpretar y organizar el estudio de las condiciones, restricciones y posibilidades que están involucradas en el diseño de una secuencia didáctica relativa a la modelización de situaciones de movimiento en un Sistema de Álgebra Computacional.

Se privilegia un enfoque multidimensional desde la didáctica de las matemáticas, lo epistemológico y cognitivo, al integrar los aportes de la TAD y el *enfoque instrumental* que orientan los análisis preliminares desarrollados para el diseño e implementación de la *secuencia didáctica* a la vez que permiten la emergencia de *recursos pedagógicos* puestos a disposición de los profesores en formación inicial.

Se propone fundamentar el estudio de algunos fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en particular, los que permitan una aproximación al análisis de las prácticas institucionales y de los recursos pedagógicos puestos a disposición de los de los profesores en formación inicial.

Se parte del hecho que una teoría deber ser siempre más simple que el conjunto de hechos que trata de explicar, donde lo significativo se basa en la extracción y pérdida selectiva de detalles, en otras palabras, la representación que se hace de ellos implica la generalización y abstracción, de esta forma no todo puede ser explicado por una teoría dada y no todo puede tener significado en un contexto dado. Por tanto en este trabajo se adopta la posición presentada por Artigue (2009) quien afirma que es posible pensar en conexiones entre marcos teóricos identificando su coherencia y límites respectivos.

Para el caso específico de la TAD y el enfoque instrumental, cuyos marcos teóricos son adoptados en la presente investigación, Artigue (2009) brinda diversas razones para explicar la conexión entre ellas, la primera es que la TAD es sensible al rol de las herramientas para la actividad matemática, al considerar la dialéctica entre los objetos ostensivos[6] y los objetos no ostensivos[7], pero es poco sensible a la relación que se da entre las herramientas ordinarias (lápiz y papel) de enseñanza de las matemáticas y su relación con las calculadoras, la TAD no brinda, de manera explícita, herramientas conceptuales para abordar las preguntas de instrumentación, en ambientes de aprendizaje con TIC.

Por otro lado al considerar sólo el enfoque instrumental se deja de lado las preguntas de legitimidad institucional tan importantes para el funcionamiento de los sistemas didácticos, y en particular el hecho de que la legitimidad científica y social no es suficiente para asegurar la legitimidad didáctica, por tanto la perspectiva institucional aportada por la TAD es fundamental. Así una combinación de estos dos enfoques brinda los elementos necesarios para el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A continuación se presentan algunos aspectos relativos a la TAD y el *enfoque instrumental*.

2.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La aproximación antropológica comparte algunos presupuestos de la *aproximación "socio-cultural"* en el campo de la Educación Matemática (Sierpinska & Lerman, 1996, citado por Artigue, 2002). En este sentido, se consideran las matemáticas como producto de la *actividad humana*, éstas dependen de los contextos sociales y culturales donde se desarrollan, es decir, desde una *aproximación antropológica y socio cultural*, los *objetos matemáticos* no son objetos absolutos, sino que tienen origen en las *prácticas institucionales*. Se considera que para entender el significado en la institución del "conocimiento/entendimiento de un objeto matemático" se deben identificar y analizar las prácticas que se dan en cuanto a visión y resultados de ese conocimiento.

[6] Un *objeto ostensivo* es un objeto material o dotado de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etcétera.
[7] Un *objeto no ostensivo* es un objeto que existe institucionalmente pero que no se puede percibir, ni mostrar por sí mismo tales como las ideas, los conceptos, las creencias, etcétera.

De acuerdo con Gascón (1998) esta aproximación puede verse como una ampliación de la *Didáctica Fundamental* de Brousseau, quien formuló un modelo propio de la *actividad matemática*, dado que los modelos epistemológicos usuales no habían sido construidos para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica.

Históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la *Teoría de Situaciones Didácticas* (en adelante, TSD), cuyo texto fundador fue publicado a principios de los años 70 (Brousseau, 1972, citado en Gascón, 1998). El principio metodológico fundamental de la teoría de las situaciones es definir un "conocimiento matemático" mediante una "situación", esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 1994, citado en Gascón, 1998).

Así mismo se llama *situación fundamental* (correspondiente a un conocimiento matemático concreto C) a un conjunto minimal de *situaciones a-didácticas* (específicas de C) que permiten engendrar, por manipulación de los valores que toman sus *variables didácticas*, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación de C en relación a como ha sido reconstruido C en la institución didáctica en cuestión.

Se tiene así que, en la *Teoría de Situaciones Didácticas*, la *actividad matemática escolar* se modeliza a partir de la noción de "*situación fundamental*" y es también con ayuda de dicha noción como, en cada caso, se define "*aprender un conocimiento matemático C*" en una institución didáctica determinada (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

Al considerar la *Didáctica Fundamental* descrita anteriormente se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la matemática escolar ni la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. Ésta es una de las primeras aportaciones de la *Teoría de* *la Transposición Didáctica* (Chevallard, 1985). El desarrollo de esta teoría ha mostrado que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente (Chevallard, 1990; citado por Gascón, 1998).

De esta manera, los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas pueden abordarse científicamente si se tienen en cuenta simultáneamente los fenómenos de *transposición didáctica* que, a su vez, no pueden separarse de los fenómenos relativos a la producción de las *obras u organizaciones matemáticas*. La *actividad matemática escolar* se integra así inseparablemente en la problemática mucho más amplia de las *actividades matemáticas institucionales*, las cuales pasan a constituir el nuevo y más extenso objeto primario de la investigación didáctica.

Surge así una definición más general de *didáctica de las matemáticas* como "ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuesta) de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas" p.11 (Brousseau, 1994; citado por Gascón, 1998), que amplía el ámbito de estudio de la didáctica mucho más allá de las instituciones escolares para abarcar todas aquellas instituciones en las que tiene lugar algún tipo de manipulación de los conocimientos matemáticos.

En este marco de la Didáctica Fundamental, y como una consecuencia natural del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica, ha surgido el Enfoque Antropológico en Didáctica de las Matemáticas (Chevallard, 1992). Este enfoque propugna que la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana junto a las demás, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. De esta manera, el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, entre otros).

Así, mientras que los enfoques clásicos de la didáctica de las matemáticas se desarrollaron principalmente a la sombra de modelos psicológicos del aprendizaje (conceptualistas, psicolingüísticos o cognitivistas), el enfoque antropológico según

Gascón (1998) precisará un modelo de las matemáticas institucionales que incluya la matemática escolar como un caso particular y de un modelo de las actividades matemáticas institucionales para la enseñanza y el aprendizaje escolar de las matemáticas. Este paso, de la institución escolar a cualquier institución en la que se manipulen conocimientos matemáticos, con la inclusión de los fenómenos de transposición didáctica, constituye la última de las ampliaciones de la problemática didáctica. Esta generalización del objeto de investigación es, por tanto, otra de las aportaciones del enfoque antropológico en relación a las primeras formulaciones de la Didáctica Fundamental.

A continuación se presenta una caracterización de algunos de los constructos teóricos de esta aproximación.

2.1.1. Praxeologías Matemáticas.

Como desarrollo del enfoque antropológico se modeliza la *matemática institucional* y en particular la matemática escolar se organiza en *obras, organizaciones o praxeologías matemáticas*. No se dice lo que "es" una *obra matemática*, pero se propone un modelo de su estructura a partir de los elementos que la constituyen. Se postula que una obra matemática, como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de *cuestiones* y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta *institución*, determinadas *tareas problemáticas* (Chevallard, 1996; citado por Gascón, 1998).

La Teoría Antropológica de lo Didáctico describe la *actividad matemática* y el saber que de ella emerge en términos de obras, organizaciones o praxeologías matemáticas. El término "*praxeología*", formado a partir de "praxis", actividad y de "logos", discurso, muestra que toda actividad en sentido estricto, todo "saber-hacer", presupone la existencia de un "saber" o discurso justificativo-explicativo de la actividad. Así, los tipos de problemas y de técnicas están relacionadas con el "saber-hacer" matemático y los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber matemático" propiamente dicho.

Las *obras matemáticas* son pues, conjuntos estructurados de objetos matemáticos que surgen como respuesta a ciertas cuestiones que pueden ser planteadas en el seno de una institución. Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la *práctica matemática* que consta de *tareas* (materializadas en *tipos de problemas o situaciones)* y *técnicas* útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el *discurso razonado sobre dicha práctica* que está constituido por dos niveles, el de las *tecnologías* y el de las *teorías*. Estos son, en definitiva, los elementos constitutivos de toda obra matemática.

Tipos de Tareas o Situaciones

Una *organización matemática* es una entidad compuesta por tipos de situaciones o tareas problemáticas; aunque inicialmente sólo se disponga de algunos problemas propios del campo. A medida que la actividad matemática avanza, y siempre que las situaciones no se traten como anécdotas aisladas (o "adivinanzas"), es la propia actividad la que genera uno o más tipos de situaciones o tareas.

Técnicas

Si se afirma que es posible generar uno o más tipos de *situaciones* o *tareas,* no es porque tengan un enunciado igual o parecido, sino porque existe un conjunto de *técnicas matemática*s (no algorítmicas, como en la mayoría de los casos) capaz de abordarlos y de generar muchas más tareas o situaciones del mismo tipo. Se entenderá por *técnica* una "manera de hacer" o realizar un tipo de tareas, lo que comúnmente se identifica como el saber-hacer. Ninguna *técnica* puede "vivir" con normalidad en una institución si no existe en su entorno un discurso interpretativo y justificativo, así como de su aplicabilidad y validez.

Tecnologías

Se entiende por tecnología, según Chevallard (1999) un discurso racional –el logos- sobre la técnica cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica para asegurarse de que permite realizar el tipo de tareas o situaciones propuestas, es decir realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad utilizado depende del espacio institucional. Además de justificar y hacer inteligible la técnica, la tecnología tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, para superar así sus limitaciones y posibilitar la *producción de nuevas técnicas.*

Teoría

La tecnología asociada a una técnica es, en general, un discurso matemático que, como tal, requiere a su vez una interpretación y justificación institucional. Llamamos *teoría asociada* a una *técnica* a la *tecnología de su tecnología*, esto es, a un “discurso” matemático suficientemente amplio como para justificar e interpretar la tecnología de dicha técnica (junto a la de muchas otras). Mientras que la tecnología asociada a una técnica tiende a ocupar una posición cercana a ésta y aparece con cierta frecuencia en las prácticas matemáticas en las que se utiliza dicha técnica, la teoría, suele mantenerse a mayor distancia de la práctica matemática, y acostumbra a estar “ausente” de la misma. Así, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se pueden pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, explicación y producción, el de la Teoría.

Figura 1. Modelo de la estructura de una obra o praxeologías matemáticas (Gascón, 2007).

2.1.2. Los Objetos Ostensivos y No Ostensivos

Aunque las nociones de tipos de tareas o situaciones, técnicas, tecnologías y teoría son una demarcación de los saberes en juego en la actividad matemática desde la TAD, ellas no permiten precisar la naturaleza de los objetos que el matemático o lo que el estudiante ha logrado manipular en la actividad. Por ello (Chevallard, 1992) introduce la noción de *objetos ostensivos, no ostensivos y de registros*.

Un *objeto ostensivo* es "un objeto material o un objeto dotado de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc.", en la TAD los objetos ostensivos son organizados en registros que se caracterizan por el modo de producción de un objeto ostensivo. En efecto lo oral, lo escrito, lo gráfico, lo gestual y "cualquier materialidad" son registros (Chevallard, 1992). Por el contrario los *objetos no ostensivos* son objetos que existen institucionalmente pero que no se pueden percibir, ni mostrar por sí mismos tales como las ideas, los conceptos, las creencias, etc. lo que sí se puede es invocar o evocar mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos apropiados.

Por otra parte, Chevallard (1992) resalta que "en toda actividad humana hay una coexistencia de objetos ostensivos y no ostensivos" y que esta coexistencia se encuentra en todos los niveles de la actividad matemática. Los *objetos no ostensivos* emergen de la manipulación de los *objetos ostensivos*, pero la manipulación de los *objetos ostensivos* está controlada y guiada por los *objetos no ostensivos*. Así los conceptos surgen de la manipulación de los *objetos ostensivos* dentro de determinadas *praxeologías*. Cabe anotar, que no todas las *praxeologías* son del mismo tipo: existen *praxeologías puntuales* las cuales son construidas alrededor de un único tipo de tareas o situaciones, en las que las técnicas se utilizan de manera muy rígida y el entorno tecnológico utilizado es muy pobre. *Las praxeologías locales*, se obtienen al articular entre sí – por vía de un discurso tecnológico elaborado- distintas praxeologías puntuales y las *praxeologías regionales* que integran o articulan distintas praxeologías locales. (Ver Figura 2)

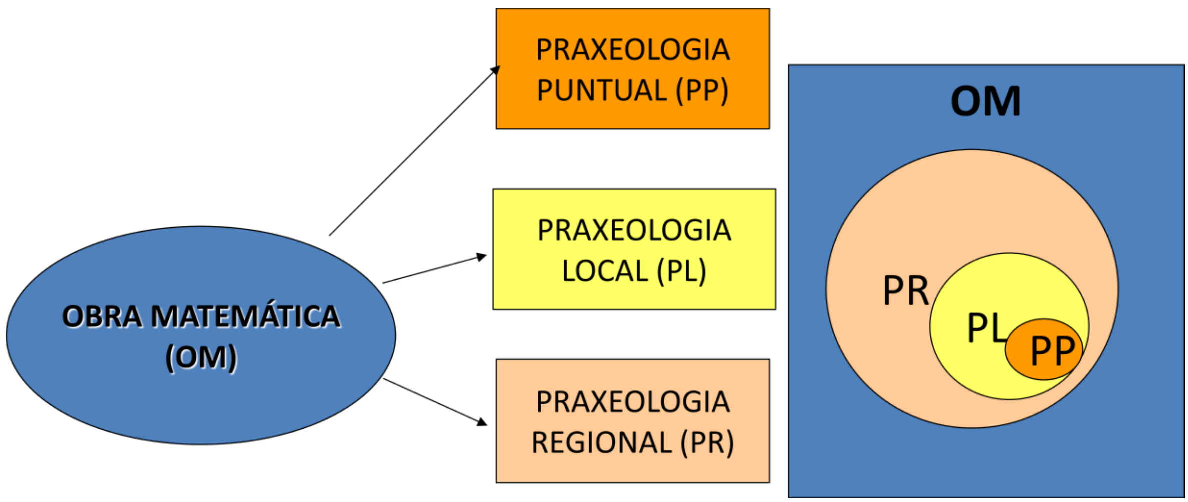


Figura 2. Tipos de *obras* o *praxeologías* matemáticas

2.1.3. Praxeologías Didácticas

La TAD completa el modelo epistemológico del saber matemático descrito anteriormente con un modelo de la *actividad didáctica o actividad de estudio (de las matemáticas)*. Con el fin de responder ¿qué se necesita para elaborar una praxeología matemática? Esto es ¿cuáles son las condiciones que posibilitan el desarrollo de las actividades matemáticas institucionalizadas?

También se señala que tanto el investigador como el estudiante de matemáticas, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas*, esto es, *técnicas de estudio*, cuya eficacia depende de su integración en un proceso, a saber, el *proceso de estudio* de una *organización matemática* en el seno de una institución (Bolea, Bosch & Gascón, 2001).

Se trata de la *Teoría de los momentos didácticos* que puede considerarse como un modelo funcional del proceso de estudio de las organizaciones matemáticas. Paralelamente a la noción de *praxeología matemática*, surge así la noción de *praxeología didáctica*, con sus dos caras: "*praxis*" (formada por tareas y técnicas didácticas) y discurso razonado o "*logos*" sobre dicha práctica (formado por tecnologías y teorías didácticas).

Resulta, en definitiva, que para elaborar una *praxeología matemática* debemos utilizar una *praxeología didáctica*. Lo matemático y lo didáctico aparecen como dos dimensiones interdependientes, pues lo didáctico, esto es, lo relativo al estudio de las matemáticas, supone la existencia de las *organizaciones matemáticas*, pero contribuye a su producción. Las *organizaciones matemáticas* por su parte son, a la vez, el objeto y el producto de la actividad de estudio.

A pesar de la interdependencia entre la *praxeología matemática y la praxeología didáctica*, se plantea que el análisis de la *actividad matemática* debe iniciar por el análisis de las *organizaciones matemáticas* que emergen de la *actividad matemática institucional*.

Específicamente para el *proceso de algebrización de las matemáticas escolares* que es considerado un fenómeno matemático-didáctico, se evidencian transformaciones en la naturaleza de las *organizaciones matemáticas escolares*. Esto es, transformaciones en sus componentes y las relaciones que se dan entre ellos y un cambio profundo del *proceso de estudio* de dichas organizaciones, es decir, en las posibles formas de gestionar e interrelacionar los momentos didácticos de dicho *proceso de estudio*.

Para llevar a cabo el *análisis didáctico*, la TAD propone, un modelo que describe la dinámica del estudio de las *organizaciones matemáticas* en términos de *momentos didácticos*. Se trata de un modelo funcional que estructura el proceso de estudio según seis dimensiones: los momentos del estudio (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997), estos son:

1. ***El momento del primer encuentro***: es cuando los estudiantes se encuentran por primera vez con un nuevo tipo de problema.

2. ***El momento exploratorio***: se da cuando se explora el tipo de problemas al intentar construir una técnica adecuada para abordarlos.

3. ***El momento del trabajo de la técnica***: en este momento ya no se habla de problemas, sino de ejercicios, puesto que lo estudiantes se ejercitan en la

resolución de ejercicios del mismo tipo. Ya disponen de una técnica, se refiere entonces al dominio, puesta a punto y creación de nuevas técnicas matemáticas.

4. ***El momento tecnológico-teórico***: hace referencia, como indica su nombre, a dos niveles de justificación de la práctica matemática, esto es, la tecnología de la técnica, que se mantiene más cerca de la técnica, y la teoría, la cual está un poco más alejada.

5. ***El momento de institucionalización***: cuando el profesor indica a sus estudiantes que, en esta institución que es su clase, hay que realizar el problema de tal o cual forma. Por fuerza, en algún momento, el profesor deberá precisar cuál será la "*buena técnica*". Es importante tener en cuenta que la institucionalización no concierne únicamente a la técnica. Concierne a la organización matemática en su conjunto y en toda su complejidad. Por lo cual también se institucionalizan elementos tecnológicos y teóricos, los subtipos de problemas, etcétera.

6. ***El momento de evaluación***: se trata del momento en el que se pone a prueba el dominio de la obra matemática en su conjunto, por ello debe poder responder a preguntas como, conozco sus razones de ser o sé para qué sirve y sé utilizarla.

Es así como la *aproximación antropológica* (Ver Figura 3) brinda un marco teórico eficaz para cuestionar los cambios y los posibles efectos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al utilizar un CAS.

Figura 3. Praxeologías matemáticas vs praxeologías didácticas

2.2. Enfoque Instrumental

Este enfoque parte de una aproximación socio constructivista en la que se logra establecer la dialéctica entre el *trabajo técnico* y el *trabajo conceptual*, Artigue (2002) diferencia el trabajo técnico del conceptual, al relacionar el primero con lo empírico, es decir con la parte *procedimental* referido a algoritmos, problemas rutinarios y cálculos en la actividad matemática. Ahora bien, el trabajo técnico no es condición suficiente para una verdadera conceptualización, ni siquiera en los ambientes informáticos y computacionales.

Así pues, el *trabajo técnico* está relacionado con un *currículo técnico* centrado en el desarrollo de habilidades algorítmicas. Desde la aproximación antropológica, los objetos matemáticos emergen de prácticas institucionales, en donde generalmente el discurso teórico se ve debilitado por la *rutinización* de algunas técnicas y por una *naturalización* o *internalización* del conocimiento que tiende a ser transparente, perdiéndose la naturaleza del conocimiento matemático como constructo social y convirtiéndose en actos simples (Artigue, 2002)

Los investigadores también diferencian entre el *valor pragmático* y el *valor epistémico* de las *técnicas*. El *valor pragmático* alude a la eficacia, o el campo amplio de la aplicación de una técnica y el *valor epistémico* involucra el papel de las técnicas lo cual facilita la comprensión matemática (Artigue, 2002; Lagrange, 2005b; citado por Monaghan, 2005).

Cuando se presenta un equilibrio entre el *valor pragmático* y el *valor epistémico* se reduce el costo del trabajo técnico y así la necesidad de *rutinización*. Se hace necesario por tanto cambiar los valores pragmáticos y epistémicos de las técnicas y presentar necesidades conceptuales a partir de la *transposición computacional* de los conocimientos matemáticos. A continuación se presentan algunos referentes relativos al enfoque instrumental.

2.2.1. Génesis Instrumental

Los Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) son una herramienta compleja que incorporan varios medios de comunicación computacional (Cuoco, 2002; citado por Monaghan, 2005). Por su complejidad, las actividades instrumentadas son objeto de especial atención en la investigación sobre la integración de las tecnologías informáticas y computacionales en el ámbito educativo.

Vérillon y Rabardel (1995) distinguen entre una *herramienta*, como objeto material y simbólico en que está basado y al cual se llamará *artefacto* y un *instrumento* como el resultado de un proceso de construcción (*la génesis instrumental*) para el sujeto en el curso de su actividad, a partir de un artefacto dado.

Un instrumento es de hecho una entidad mixta, distinta del artefacto, que no es dada, pero que es construida por el sujeto: esta entidad está compuesta de una parte del *artefacto* (componente material) y de los *esquemas cognitivos* (componente psicológico), en la práctica para realizar un tipo de actividad. De acuerdo a lo anterior se parte del hecho que el instrumento no existe en sí mismo, se vuelve instrumento cuando el sujeto se ha apropiado de éste y lo ha integrado a su actividad (Vérillon & Rabardel, 1995).

Trouche (2003; citado por Monaghan, 2005) proporciona una exposición del origen psicológico del *enfoque instrumental*. Para ello, introduce la noción de “gestos”, estos son comportamientos notables (acciones y manifestaciones externas) y un “esquema es el sitio psicológico de la relación de la dialéctica entre los gestos y los invariantes operativos, es decir entre la actividad y el pensamiento”. Ésta es la manera de relacionar los fenómenos internos (instrumento, instrumentación e instrumentalización) de los fenómenos externos (técnicas, técnicas instrumentadas y orquestación instrumental), como se muestra en la Figura 4.

El componente psicológico se explica vía la noción piagetiana de un esquema como “la estructura u organización de acciones y cómo ellas se transfieren o son generalizadas por repetición en circunstancias similares o análogas” (Piaget & Inhelder, 1969; citado por Monaghan, 2005).

Desde esta perspectiva se defiende la idea de que un *esquema* tiene tres funciones: 1) *pragmática*, le permite al sujeto hacer algo, 2) *heurística*, le permite al sujeto anticiparse y planear acciones y 3) *epistémica*, le permite al sujeto entender algo.

Figura 4. Origen psicológico del enfoque instrumental

2.2.2 Instrumentalización

La *Instrumentalización* carga al artefacto de potencialidades y lo transforma para usos específicos, se da a través de diferentes fases:

1. Descubrimiento y selecciones de funciones pertinentes.
2. Personalización, donde el usuario escoge el artefacto que esté más a la mano o se ajuste mejor a sus necesidades.
3. Transformación del *artefacto*, modificación de la barra de tareas, creación de atajos del teclado, macros etc., en ocasiones se puede presentar que esta transformación no haya sido planeada por el diseñador.

La *profundización* de estos análisis es confirmada en los trabajos de *ergonomía cognitiva* (Vérillon y Rabardel, 1995) que muestran que las *desviaciones de uso*, ponen en evidencia frecuentemente los procesos de instrumentalización, los cuales son inherentes a la *actividad instrumentada* y que hacen visible que ellos pueden ser fecundos. Esto justifica la posición de Béguin y Rabardel (2000, citado por Guin y Trouche, 2007) que sugieren la importancia de implicar a los estudiantes y profesores en los procesos de concepción de los artefactos.

En la fase de descubrimiento y selección de las funciones pertinentes de un artefacto para desarrollar una tarea, se suelen hacer explícitas las diferentes restricciones del artefacto, a continuación se presentan las referidas a los CAS.

Restricciones de los CAS

Para analizar las restricciones y potencialidades de los *Sistemas Algebraicos Computacionales* (CAS) (Trouche, 1997, citado por Trouche, 2005a) distingue:

- Las *restricciones internas*, las cuales identifica como las restricciones de modo de existencia propuesta por Rabardel (1995, citado por Trouche, 2005a).

- Las *restricciones de comando* vinculadas a la existencia y naturaleza de comandos específicos y restricciones de organización vinculada a cuestiones de *ergonomía*, particularmente el teclado y la organización del menú.

No obstante, Defouad (2000, citado por Trouche, 2005a) señala algunas limitaciones de esta tipología:

- Las restricciones internas no cubren todas las restricciones de modo de existencia, por ejemplo, la naturaleza de la pantalla de la calculadora no es una restricción interna, pero si una restricción de modo de existencia.

- Todas las restricciones son realmente preestructuradas por la actividad del usuario y no solamente la restricción de organización.

- Esta tipología no tiene en cuenta varios niveles de información: información introducida por el usuario a la interfaz, información accesible por la interfaz, pero no abre la posibilidad de transformación por el usuario, y la información que no es accesible por la interfaz.

- No toma en cuenta las restricciones de sintaxis, aunque estos pueden ser decisivas al introducir la información en la interfaz.

A partir de estas consideraciones, se reformulan tres tipos de *restricciones*, que fundamentan la preestructuración de la *acción del usuario* relacionado a un tipo de tarea o situación:

- Las *restricciones internas,* en el sentido de las restricciones físicas y electrónicas unido a lo material, éstas tienen en cuenta la información que el usuario no puede modificar, o no es accesible, incluyen las características del procesador, por ejemplo, capacidad de memoria y la estructura de la pantalla, compuesta por un número finito de pixeles.

- La *restricción de comando*, vinculado a la existencia de varios comandos y su forma (incluso la sintaxis), considera la información accesible a través de la interfaz, la cual puede ser a veces modificada por el usuario. Por ejemplo la aplicación del rango en la ventana *Window* de la calculadora; las opciones que abre al usuario son relativamente libres, se puede cambiar *xmin* y *xmax*, pero no puede el *xmax* ser más pequeño que *xmin*. La representación gráfica de la función que se obtiene a partir de estos rangos, proporciona la retroalimentación que permite encontrar la mejor ventana de graficación.

- Las *restricciones de organización* vinculadas a la organización del teclado y la pantalla, es decir la información disponible y la estructura de los comandos. Por

> ejemplo, las opciones del diseñador, relacionadas con las funciones, la denominación de comandos, medios de acceso (menú flotante) y desplazamiento dentro del menú da un punto de vista particular sobre los objetos disponibles. Estas opciones se unen a un estudio ergonómico de las necesidades de los usuarios, y, al mismo tiempo, ellos favorecen una forma particular de uso de las herramientas.

Esta tipología relativa a las restricciones al utilizar un CAS, puede facilitar tanto la labor del maestro como la del investigador, permitiéndoles hacer un análisis *a priori* de las diferentes maneras de realizar las tareas con un *artefacto*. Distinguir estos tres niveles permite organizar este análisis en un contexto matemático dado. Particularmente es posible distinguir un nivel elemental de las restricciones de comando, y un nivel más complejo de las restricciones de organización y de esta manera, diferenciar en las actividades de los estudiantes, entre un *nivel de gesto* y un *nivel de la técnica*.

De igual forma, el análisis de las restricciones de un CAS refleja la manera particular como se presenta el conocimiento matemático: “Estas herramientas involucran algo de la ontología matemática del ambiente, y parte de la forma o estructura de ideas y acciones que se realizan en él” (Noss y Hoyles, 1996, p.105 citado por Trouche, 2005a). También se señala que un usuario no es libre para usar, según sus necesidades una herramienta dada: “Este uso es relativamente preestructurado por la herramienta” (Lengo & Balacheff, 1998; p. 105 citado por Trouche, 2005a).

Por otra parte, estas restricciones no empobrecen necesariamente la actividad, pues se considera que el artefacto “toma a cargo” parte del trabajo, para favorecer la exploración en varios registros (Yerushalmy, 1997; citado por Trouche, 2005a) y de esta manera abre nuevas maneras de conceptualización. Es de hecho difícil separar las potencialidades de un lado y las restricciones de otro, las dos están íntimamente relacionadas, cada ventaja ofrecida al usuario para comprender un tipo de gesto en lugar de otro.

2.2.3 Instrumentación

Como ya se mencionó, la evolución de esta dialéctica entre el *artefacto* y el *esquema* se llama "*génesis instrumental*", es decir, es el proceso mediante el cual un artefacto se deviene o se convierte en un instrumento. Comprender las *génesis instrumentales* supone comprender la articulación de dos procesos duales y simultáneos en la relación dinámica sujeto-artefacto, esto es, el proceso de *instrumentalización* e *instrumentación*.

La *Instrumentación* está relacionada con el sujeto y lleva al desarrollo o apropiación de *esquemas de acción instrumentadas*, que son técnicas que permiten dar respuesta a una tarea dada (artefacto-usuario).

De manera análoga los *esquemas de utilización* son definidos como una organización mental estable que incluye habilidades técnicas y conceptuales como una forma de usar el *artefacto* en una clase de actividades dadas, (Drijvers & Gravemeijer, 2005) distinguen dos tipos de esquemas de utilización:

- ***Esquemas de uso.***

Están orientados hacia la realización de tareas secundarias que corresponden a las acciones y actividades específicas vinculadas directamente con el artefacto. Por ejemplo: para la actividad de captura de datos al utilizar el CBR (*Calculator Based Ranger*) se debe conocer la forma de conexión, transferencia y ejecución del programa RANGER.

- ***Esquemas de acción instrumentada.***

Lo que caracteriza estos esquemas según (Drijvers & Gravemeijer, 2005) está en mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de la actividad, que en nuestro caso son los objetos matemáticos como las fórmulas, gráficos, etcétera. Su importancia es dada por el acto global que apunta llevar a cabo las transformaciones sobre dichos objetos de la actividad. Los *esquemas de acción instrumentada* son coherentes y significantes con los esquemas mentales, y se construyen a partir del uso elemental de esquemas por medio de las génesis instrumentales.

Esta articulación de *esquemas de utilización* puede involucrar nuevos aspectos técnicos y conceptuales, que se integran en el *esquema*. Un ejemplo de un esquema de acción instrumentada relacionado con aspectos conceptuales y técnicos se da en la ventana de *Window* de una calculadora algebraica. En ella se necesita desarrollar una habilidad técnica para buscar y poner las dimensiones indicadas en la ventana, pero también la habilidad mental para imaginar la pantalla de la calculadora como una ventana relativamente pequeña que puede moverse encima de un plano infinito, donde la posición y las dimensiones de la ventana determinan si se muestra el gráfico. Se concluye que es el estado incompleto de la parte conceptual de un esquema que causa muchas dificultades a los usuarios principiantes de la calculadora gráfica al poner las escalas apropiadas a la pantalla. Uno de los componentes de los *esquemas de uso* es cómo ingresar los números negativos, con un signo menos diferente al que se usa para la sustracción. Este esquema de uso requiere una visión para diferenciar entre una operación unaria y los signos menos binarios.

La diferencia que plantea (Drijvers & Gravemeijer, 2005) entre los *esquemas de uso* y los *esquemas de acción instrumentada* no siempre son obvios. A veces, es meramente una cuestión del nivel del usuario y el nivel de observación, que puede parecer al principio un *esquema de acción instrumentado*, pero después puede actuar como base en la génesis de un esquema de orden más alto.

La *instrumentación* es pues, la expresión de la actividad específica del usuario, lo que él piensa del artefacto, para qué y cómo debe usarse. La elaboración de un *instrumento* tiene un lugar de uso, por tanto la *instrumentación* puede llevar así al enriquecimiento de un artefacto o a su empobrecimiento.

La *génesis instrumental* es así, un proceso de construcción de un *instrumento*, a partir de un *artefacto* por un usuario. Un *artefacto* complejo como la calculadora simbólica dará origen a un conjunto de *instrumentos*, por ejemplo: un *instrumento* para resolver ecuaciones, un *instrumento* para estudiar la variación de una función. En general, se considera que la articulación de este conjunto de *instrumentos* es una tarea compleja.

Los primeros análisis del *aprendizaje instrumental* según Guin (2002, citado por Guin & Trouche, 2007) se enfocaron a la *actividad instrumentada* de los estudiantes con artefactos tales como calculadoras o programas utilizados para la enseñanza de las matemáticas. Estas investigaciones permitieron posteriormente el acceso al estudio de *los procesos de instrumentación*; lo cual muestra la gran diversidad de *instrumentos* construidos por los estudiantes en una misma clase y pone en evidencia la necesidad de un *acompañamiento institucional* de estas *génesis*.

2.2.4. Técnicas Instrumentadas

Otras estructuras introducidas por Trouche (2005a) son las técnicas entendidas como el conjunto de gestos (acciones y manifestaciones externas) que se ponen en juego en la ejecución de una tarea sobre un instrumento. Ejemplo: la escritura con lápiz y papel.

Las técnicas instrumentadas son técnicas que involucran uno o varios artefactos y gestos de esquemas de acción instrumentados. La *técnica instrumentada* es así la parte notable de un *esquema de acción instrumentada*.

Una *técnica instrumentada* puede enseñarse, pero lo que se enseña no es necesariamente lo que los estudiantes aprenden, el abismo entre las técnicas instrumentadas de los principiantes y los expertos pueden ser importantes referenciarlas, pues se pueden evidenciar trabajos muy diferentes dentro de una misma clase para la misma *técnica instrumentada enseñada*.

Así, la actividad descrita en términos de *esquemas de acción instrumentada* considera los *invariantes operacionales*, un *esquema* es observado a partir de la construcción de las diferentes formas de realizar la actividad por el usuario (gestos, anticipaciones, inferencias, entre otros).

Lo anterior muestra un interés práctico de los educadores en matemáticas por proporcionar a quienes trabajan con un Sistema Algebraico Computacional (CAS) una visión de los *esquemas* generados por los estudiantes y la utilización de técnicas de los estudiantes.

En la Figura 5, se presenta un esquema del proceso de *Génesis Instrumental*.

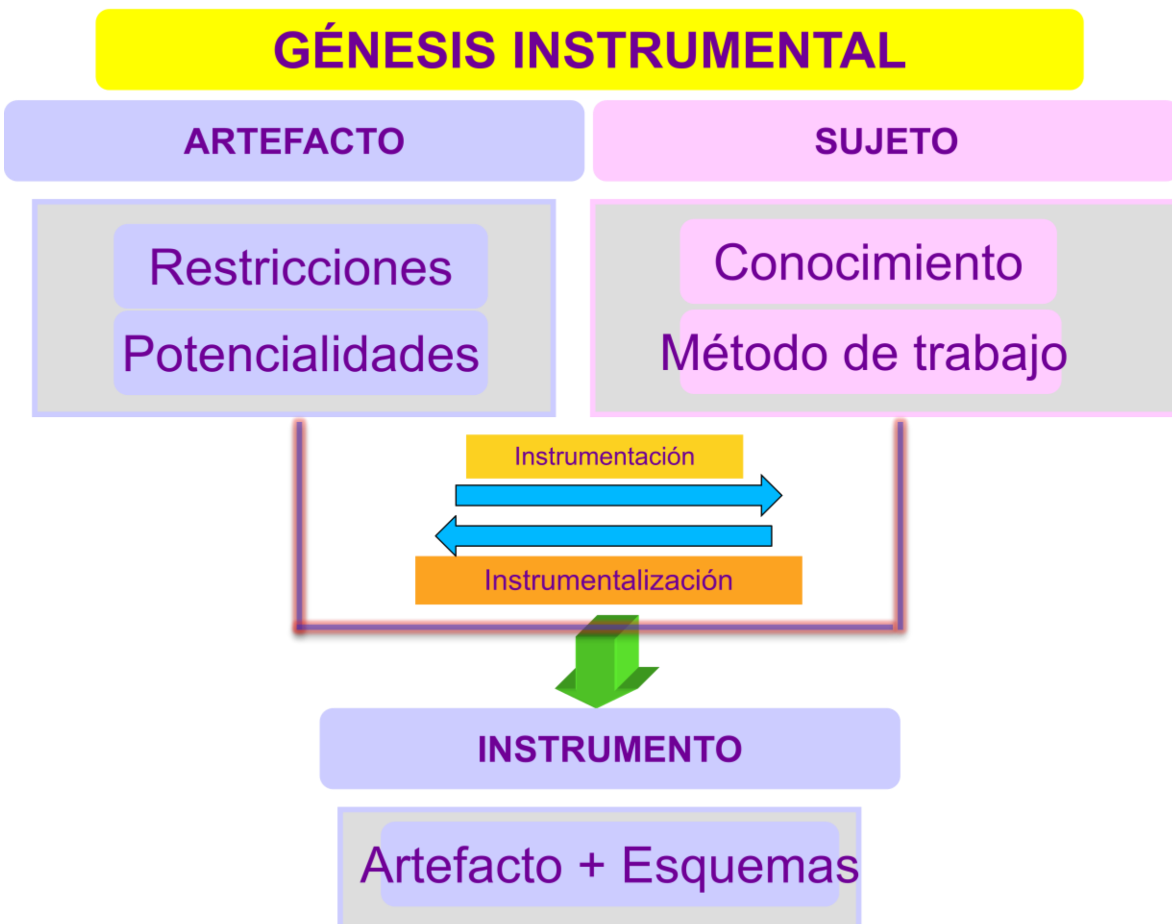


Figura 5. Proceso de Génesis Instrumental

La *génesis instrumental* tiene aspectos individuales y sociales, pero también, *institucionales* puesto que los aprendizajes se inscriben en las instituciones y comunidades, el balance entre estos dos aspectos depende de:

- Factores materiales: es bastante obvio que la "intimidad" de la pantalla de la calculadora favorece el trabajo individual debido a que este tipo de pantallas permiten trabajar en grupos pequeños.

- La disponibilidad de los artefactos: a veces, ellos sólo están disponibles en la institución educativa, pueden ser prestados durante el año escolar entero, o a veces son propiedad de los estudiantes.

- Organización (orquestación instrumental): la manera en que el profesor tiene en cuenta estos artefactos en el desarrollo de la actividad de clase.

Se puede considerar así que los *artefactos* son mediadores de la actividad humana y que la actividad mediada por instrumentos es siempre situada.

Chacon & Soto-Jhonson (1998, citados por Trouche, 2005a) sostienen que estas variables afectan la conducta de los estudiantes y sus relaciones con los artefactos, pues cuando las calculadoras o computadores sólo están de vez en cuando disponibles, los estudiantes a menudo desarrollan una actitud crítica hacia estos ambientes informáticos. De hecho, ellos a veces están bastantes confundidos, porque aprender en dos ambientes el informático y el clásico no es lo mismo, y manifiestan su frustración porque no están disponibles fuera del trabajo clase. Lo que se puede inferir es que estos análisis han ayudado a determinar que con la utilización de CAS el usuario está *predeterminado* al diseño del software y aunque es mucho lo que los estudiantes pueden hacer, se reprime el potencial del usuario para desarrollar o crear su propio simbolismo (sobre todo cuando el usuario es un estudiante).

Sin embargo, los estudiantes parecen adoptar más rápidamente las TIC que las instituciones escolares, para comprender un poco estas adaptaciones es necesario que el profesor identifique los fenómenos didácticos ligados a los procesos de *génesis instrumental* particularmente en ambientes CAS, Artigue (1997, citado por Trouche 2005a) distingue dos clases de fenómenos interrelacionados los asociados a la *transposición de conocimiento* y los de *adaptación de los estudiantes,* así:

Fenómenos didácticos unidos a la transposición de conocimiento: son aquellos que se unen a los procesos de Transposición Computacional descrito por Balacheff (1993, citado por Balacheff, 2000) como el proceso que conduce a la especificación y posterior puesta en práctica de un modelo de conocimiento. La transposición computacional se refiere al trabajo necesario para cumplir los requisitos de la representación simbólica y de la computación, tales como:

- Fenómeno de pseudo transparencia: referido a la distinción o conflicto que se genera entre lo que una persona escribe o realiza y lo que aparece en la pantalla.

- Fenómeno de doble referencia: hace referencia a la doble interpretación, de las tareas, dependiendo del ambiente de trabajo (papel y lápiz o informático).

Y los *Fenómenos didácticos unidos a la adaptación de los estudiantes*: son aquellos referidos a la adaptación de los estudiantes a estos nuevos ambientes de aprendizaje informáticos, tales como:

- Fenómeno de adaptación perceptual: muestra la percepción y descripción de los estudiantes de lo que aparece en la pantalla, lo que recuerdan en el cambio de imágenes, en lugar de utilizar las propiedades o conocimiento matemático de cada imagen.

Por su parte Trouche (1997, citado por Trouche 2005a) identifica los siguientes fenómenos al utilizar la calculadora:

- Fenómeno de transporte automático: los estudiantes entran todos los datos del problema en la calculadora y entonces busca el comando que puede dar la solución directa.

- Fenómeno de determinación localizada: vinculada a la dificultad de moverse de un registro a otro y de cambio de aplicación en la calculadora simbólica. Este consiste en repetir el mismo tipo de técnica dentro de la misma aplicación de la calculadora, haciendo algunos ajustes, aún cuando este tipo de técnicas hace que no parezca pertinente.

Los fenómenos mencionados anteriormente son importantes porque facilitan la apropiación del manejo de la calculadora por parte de los estudiantes y la estabilización de técnicas para realizar las tareas dadas.

2.2.5. Orquestación Instrumental

Para los investigadores, el profesor debe considerar los elementos del *enfoque instrumental* sin subestimarlos pues la integración de CAS en la enseñanza de las matemáticas no es fácil y no se da de manera natural. Pasar por alto la complejidad de los procesos de *génesis instrumental* no permite que el profesor desarrolle herramientas conceptuales suficientes y necesarias para comprender y promover eficazmente la *instrumentación* y los aprendizajes matemáticos. Es importante que el profesor adquiera un conocimiento de las restricciones y potencialidades del *artefacto*, así como de varios perfiles del comportamiento de los estudiantes para diseñar e implementar actividades apropiadas a las matemáticas. (Haspekian & Artigue, 2007).

Uno de los constructos teóricos importantes del *enfoque instrumental* es la denominada la *Orquestación Instrumental*, interpretada como la relación que se da entre todos los elementos que intervienen en el aula de clase en un ambiente tecnológico, que incluye entre otros a: los estudiantes con calculadoras (Voyage 200), un *viewscreen*, un tablero, tareas o situaciones específicas y un profesor. Es en este escenario que puede posibilitar el proceso de *génesis instrumental* en los estudiantes y profesores.

Chevallard (1992, citado por Guin &Trouche, 2007) distingue tres niveles de interacción didáctica esencial:

- *Hardware Didáctico*, formado por los componentes materiales del ambiente, diversos artefactos tales como calculadoras, retroproyector, programas para la enseñanza, así como modos de empleo, fichas técnicas, entre otros.

- *Software Didáctico*, constituido por las situaciones didácticas.

- *Sistema de aprovechamiento didáctico,* las *instituciones escolares* deben encargarse de hacer explícitos los procesos de enseñanza, lo cual requiere del diseño de situaciones, que asegure la integración de *instrumentos* en una clase, su viabilidad y coordinación e integración de los dos primeros niveles. Para ello es necesario definir el tiempo, el espacio y la organización de *instrumentos* en el aula que guíen a los profesores y estudiantes en su empleo.

Uno de los niveles de *orquestación instrumental* se da alrededor del denominado *estudiante sherpa* que será considerado, tanto para la clase como para el profesor, como una referencia, un guía, un auxiliar y un mediador. Este nivel se presenta como resultado de la utilización de *instrumentos individuales* en el aula, tales como las calculadoras algebraicas, las cuales poseen una pantalla pequeña lo cual dificulta la socialización de las acciones y producciones de los estudiantes. Esta *socialización* requiere de disposiciones particulares. Es por esto que a principios de los años 1990, surgió un artefacto particular –viewscreen- que permite proyectar la pequeña pantalla de la calculadora en una pantalla más grande, para que la clase entera pueda ver. Guin y Trouche (1999a, citado por Trouche, 2005b) presentan una *orquestación instrumental*, que aprovecha este arreglo con el objetivo principal de socializar –hasta cierto punto- la *génesis instrumental* de los estudiantes (Figura 6).

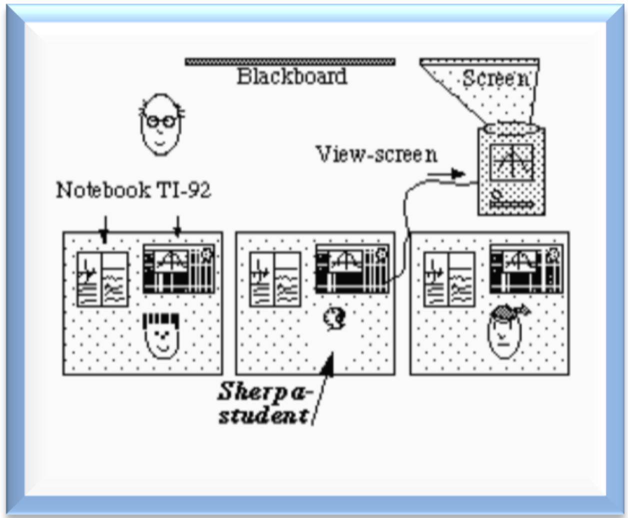


Figura 6. El estudiante sherpa, parte de una orquestación instrumental.
Tomado de Trouche (2005b)

La configuración de esta *orquestación instrumental* descansa sobre la transferencia de un papel particular a un estudiante, denominado el *estudiante sherpa*, el cual guía la calculadora que está siendo proyectada. Esta *orquestación* favorece el manejo colectivo de una parte de los procesos de *instrumentación* y de *instrumentalización*, tal como la que hace un estudiante con su calculadora – cuyos rastros de su actividad- son vistos por todos.

Esto permite comparar diferentes *técnicas instrumentadas* y da información al profesor sobre los *esquemas de acción instrumentadas* que están siendo construidos por el *estudiante – sherpa*. Trouche (2005b) señala que esta configuración tiene ventajas en razón de que:

- Es el profesor el responsable de guiar el proceso, a través de la calculadora del *estudiante – sherpa*.

- Además las calculadoras de la clase entera permiten que el profesor (quien no realiza el gesto instrumentado) pueda comprobar el proceso realizado por el *estudiante-sherpa*. Para su enseñanza, el profesor puede combinar resultados del contexto del trabajo con lápiz y papel obtenidos en el tablero y los resultados obtenidos en la calculadora del *estudiante sherpa* en el *viewscreen*.

- Se favorecen los debates en la clase y la elaboración explícita de procedimientos; la existencia de otro punto de referencia distinta a la del profesor permite nuevas relaciones entre los estudiantes y el profesor.

Igualmente Trouche (2005b) plantea varios modos de aprovechamiento didáctico alrededor del *estudiante - sherpa*, puesto que el profesor puede organizar las fases de trabajo de diferentes clases:

- Los estudiantes pueden tener las calculadoras apagadas y se usa sólo el retroproyector y potenciar el trabajo a papel y lápiz.

- Conectar una calculadora al retroproyector y el trabajo es estrictamente dirigido por el *estudiante – sherpa* con la supervisión del profesor, en esta organización la instrumentación y procesos de instrumentalización son fuertemente restringidos.
- Se puede utilizar en clase de manera simultánea el proyector y las calculadoras y el trabajo es libre durante un tiempo dado. La instrumentación y procesos de instrumentalización son relativamente restringidos por el tipo de actividades y por la orientación de la calculadora del *estudiante – sherpa* que permanece visible sobre la pantalla grande.

- Otra opción es que todas las calculadoras estén encendidas y el proyector desconectado. La instrumentación y procesos de instrumentalización son débilmente restringidos.

- Otras variables deben también ser definidas tales como: ¿El mismo estudiante jugará el papel de *estudiante – sherpa* durante la lección entera, o dependiendo de los resultados propuestos, debe proyectarse la calculadora de otro estudiante? ¿Debe el *estudiante – sherpa* sentarse en primera fila o quedarse en su lugar habitual? ¿Todos los estudiantes tienen que desempeñar este papel alternadamente o solamente deben ser algunos privilegiados?

En general esta *orquestación instrumental* implica la coordinación de los *instrumentos* de todos los estudiantes en la clase y favorece la conexión de cada individuo con *instrumentos* diferentes necesarios para desarrollar su actividad matemática.

2.2.6. Recursos Pedagógicos

Existe una relación entre la *orquestación instrumental* del enfoque instrumental y las praxeologías de la TAD, que vincula respectivamente constructos teóricos tales como los sistemas de instrumentos y el contrato didáctico, los cuales a su vez se pueden enmarcar bajo la categoría de *recursos pedagógicos*.

Se entenderán los *recursos pedagógicos* según la aproximación multidimensional de (Guin & Trouche, 2007) como un *conjunto de documentos* concebidos por un profesor o grupo de profesores, lo cual permite disponer de una situación matemática y de elementos para el aprovechamiento en las clases.

Es importante resaltar que una misma situación matemática puede de otro lado ser aprovechada en diferentes contextos (lápiz/papel o en ambientes informáticos de aprendizaje), así mismo un *recurso pedagógico* puede en sí mismo, dar cuenta de los elementos que precisan el aprovechamiento posible de una situación en los diferentes contextos de uso.

Para caracterizar los diferentes *contextos de uso*, se ha creado la categoría de *escenarios de uso*, estos serán considerados en este trabajo según lo presentado por

Laborde & Perrin (2006, citado por Guin & Trouche, 2007), quienes señalan que la noción de *escenario de aprendizaje*, no es únicamente un *tejido a priori*, sino un objeto complejo, que presenta a la vez la actividad, las organizaciones posibles y los instrumentos necesarios. Por esta condición, los *escenarios de aprendizaje* no se destinan forzosamente a un profesor y el formalismo que ellos sugieren se vincula a un trabajo global efectuado sobre los lenguajes de *modelización pedagógica*.

En este *contexto de uso*, siempre hay una distancia entre lo que es un *recurso pedagógico propuesto* para la gestión de los profesores y la acción real de estos en sus clases. Así, desde el *enfoque instrumental*, un *recurso pedagógico* es un *artefacto* a disposición de un profesor y susceptible de evolución, en la medida que el profesor se apropie del *recurso* y lo ponga en práctica. De ahí que la concepción de un *recurso* sea una tarea compleja y un único profesor no pueda ser el autor de todos los *recursos pedagógicos* necesarios en el aula de clase.

En el plano investigativo de la didáctica de las matemáticas, interesa entonces determinar las condiciones, restricciones y posibilidades para que los *recursos pedagógicos* sean utilizados eficientemente por un grupo de profesores, este no es un proceso que ocurre por sí mismo. Tal situación se explica por las condiciones individuales que demanda el ejercicio de la profesión del profesor y por la naturaleza de los recursos pedagógicos existentes. Esto lleva a actuar en dos niveles así:

- La noción de *comunidad de práctica* según Wenger (1998, citado por Guin & Trouche, 2007) como marco teórico, parte del hecho que su existencia supone en efecto, para sus miembros, la participación activa de una interpretación colectiva, la producción de objetos que *reifican* elementos de la práctica y el desarrollo de un repertorio que integre los resultados de estos procesos de reificación.

- El segundo nivel es la *reutilización de un recurso pedagógico*, lo cual debe ser un objetivo esencial. Como lo anota Crozat (2007, citado por Guin & Trouche, 2007), es necesaria la utilización de los *recursos pedagógicos* por profesores diferentes a quienes los conciben.

Se considera así la interacción entre los *recursos pedagógicos* de una *comunidad* y la interacción de esa *comunidad* y las *génesis instrumentales* en sus dimensiones individuales y sociales.

El repertorio de *recursos pedagógicos* se constituye en un *instrumento* de las prácticas profesionales, por lo cual los *recursos* evolucionan a partir de sus usos en los contextos diferentes (*instrumentalización*). Simultáneamente ellos pueden concurrir a la evolución de las prácticas profesionales (*instrumentación*).

Por su parte, desde la *aproximación antropológica*, un aspecto importante a tener en cuenta es que ciertas *técnicas* habituales han cambiado, es decir, las *técnicas* también evolucionan, según las *praxeologías*, éstas últimas indican las formas que tiene el estudiante de acercarse a nuevas situaciones, a nuevas formas de resolver los problemas y generar diferentes aproximaciones al estudio de objetos matemáticos. Es muy importante que el profesor reflexione con relación a las *técnicas* para determinar las *nuevas praxeologías* que se generan en el aula de clase con relación a la coexistencia de las *técnicas habituales y novedosas* en el análisis de los *recursos pedagógicos.*

Al considerar un cambio en el tipo de *técnicas* empleadas para resolver las situaciones, es posible pensar también en un cambio en la *actividad matemática*, específicamente en el asunto central de la presente investigación, el tipo de *álgebra escolar* y realizar una caracterización de ésta, a partir de las categorías expuestas anteriormente.

2.3. Análisis Epistemológico de la Noción de Función.

Un análisis epistemológico de una determinada noción o proceso se usa en Didáctica de las Matemáticas, para realizar el análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una hipótesis de trabajo, en el análisis histórico epistemológico son los problemas identificados que pueden guardar paralelismo con los que afrontan los estudiantes cuando intentan ser competentes en las matemáticas que se proponen en el currículo.

Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de una noción y su aprendizaje escolar, asimismo, se considera que identificar dificultades y concepciones en la historia permite proponer estrategias didácticas para el diseño y gestión de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.

De este modo, algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas reconocen la importancia del estudio de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto (Rojano, 1994).

En este apartado presentamos algunos aspectos relativos a la evolución del concepto de función a partir de los siglos XVI y XVII, donde se dio origen a la *matematización* de las teorías científicas, al establecer relaciones entre magnitudes medibles a partir de los trabajos de Galileo o Kepler.

Igualmente se busca establecer una relación entre la evolución del concepto de función y el tipo de representaciones utilizadas, con el fin de caracterizar la *modelización matemática* y *algebraica* que se puede dar en diferentes contextos, lo cual muestra cómo el ámbito social afecta el desarrollo de nuevas prácticas científicas y la relación de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.

Usualmente los *procesos de matematización* de los fenómenos físicos se confunden con la aplicación de fórmulas y algoritmos, de ahí la importancia de reconocer la evolución histórica de este proceso en un concepto como el de velocidad, por lo cual interesa establecer la relación de las matemáticas con las ciencias, específicamente con la física.

Según Romero & Rodríguez (2002) la idea más difundida de la relación entre las matemáticas y la física, es aquella en la cual las matemáticas se consideran como un lenguaje de la física, esta afirmación puede dividirse en dos enfoques, lo cual depende de la forma como se asume el lenguaje en su relación con el pensamiento. Uno, a través del cual las matemáticas son asumidas como un medio de expresión y de cálculo, que conduce a concretar la relación entre la física y las matemáticas a través de una relación de aplicación: las matemáticas intervienen en la física como un instrumento meramente técnico. Y otro, en donde se considera que las matemáticas tienen con la física una relación de constitución: sin las matemáticas no sólo es imposible especificar y expresar los conceptos y procesos del pensamiento físico, sino incluso generarlos.

Se espera entonces poder integrar el conocimiento matemático en la construcción del concepto de velocidad, a partir de situaciones en las cuales sea posible construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlas y cuantificarlas.

La velocidad instantánea es uno de los conceptos centrales en la descripción y análisis del movimiento de los cuerpos y sistemas. Este concepto se aborda tradicionalmente desde una perspectiva espacio-temporal, en el sentido de que para su definición y significación se toman como referencia los conceptos de posición y desplazamiento, asumidos como funciones del tiempo. El movimiento puede pensarse y analizarse desde un modo de ver por sistemas y un modo de ver por variables. Para avanzar con el estudio del movimiento desde esta perspectiva (Romero & Rodríguez, 2002) consideran relevante realizar un análisis de la caída de los cuerpos, según la perspectiva galileana. Esta es la perspectiva adoptada en el presente trabajo.

2.3.1. El aporte Galileano.

Galileo fue uno de los fundadores de una forma de análisis que a lo largo de la historia se ha erigido como paradigmática: la *geometrización* y, como consecuencia de ello, la cuantificación del movimiento. Se resaltan aquí algunos aspectos de la *perspectiva galileana del movimiento* que en muchos análisis históricos y textos de enseñanza resulta desapercibida: la identificación de la velocidad instantánea como variable continua que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos. En la "Jornada tercera" de su obra *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Galileo aborda el análisis del movimiento. Respecto al movimiento naturalmente acelerado, afirma:

> **Salviati**. [...] Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera [...] de modo que si el móvil continuara en su movimiento según el grado de intensidad de velocidad adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento sería dos veces más lento que el que obtendría con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo (Galileo, 1981 [1638] citado por Romero & Rodríguez, 2002).

Para Galileo, la propiedad relevante en el análisis del movimiento es la velocidad, o más concretamente el grado de velocidad, interpretada como el grado de rapidez o lentitud que puede adquirir un cuerpo. A través de esta idea, Galileo modifica el estatus ontológico del movimiento: de efecto producido por una causa -el ímpetu- y que existe y se mantiene sólo mientras dura la acción de la causa que lo produce, pasa a ser un ente relativamente independiente que se conserva por sí solo' (Koyré, 1981 citado por Romero & Rodríguez 2002). Galileo es consciente de las dificultades conceptuales que implica esta concepción y por ello pone en boca de Sagredo y Simplicio algunas de las objeciones más importantes, a saber: ¿Cómo concebir el paso continuo del reposo al movimiento?

¿Cómo pensar un movimiento que se realiza en un instante? Dada la importancia del análisis, es relevante citarIo en extenso:

> **Sagredo**. Cuando me imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, y comienza a moverse acelerándose según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante de movimiento; [...] al ser el tiempo subdividible al infinito, [...] podemos concluir, entonces, que en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos muestran que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable.
>
> **Salviati**. Esta es una de las dificultades que, al principio, me dieron mucho que pensar, no obstante, en poco tiempo conseguí deshacerme de ella. Fue, precisamente, la misma experiencia, que la que os suscita la dificultad, la que se encargó de resolvérmela [...] Dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, [...] no pienso que no estuvieseis dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza, fuese devuelta a la misma altura; si esto es posible, no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo.
>
> **Simplicio**. Pero si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos, entonces jamás llegarán a consumirse todos. De ahí que el grado ascendente en cuestión no llegará jamás al reposo, sino que se moverá infinitamente cada vez más despacio, cosa que no parece suceder.
>
> **Salviati**. Ocurriría esto, señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad (Galileo, 1981 [1638] citado por Romero & Rodríguez, 2002).

Galileo configura su idea de velocidad instantánea para dar respuesta a las objeciones planteadas. Por una parte, refuerza la idea de que entre el reposo y el movimiento no hay diferencia de cualidad, sino de cantidad, al considerar al reposo como un estado más de movimiento: el estado de lentitud infinita; esto aplica asumir el grado de velocidad como variable continua, en el sentido de que cuando un cuerpo pasa de dicho estado de reposo -asumido, como el estado de movimiento de grado cero- a otro estado de movimiento, o viceversa, tiene que pasar por todos los infinitos grados de movimiento intermedios. Por otra parte, hace aceptable la idea de que el móvil pasa por infinito número de grados de velocidad en un tiempo finito, al hacer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo: considera que a cada instante del transcurso del movimiento le corresponde un único grado de velocidad (Malagón, 1988 citado por Romero & Rodríguez, 2002).

Esta perspectiva de análisis del movimiento es precisamente la que se ha denominado estrategia de análisis por estados y transformaciones (Guidoni & Arca, 1987 citado por Romero & Rodríguez (2002). Desde esta forma de ver, la velocidad es considerada la variable que da cuenta del estado de movimiento de los cuerpos, de forma que estados de movimiento diferentes corresponden a grados de velocidad diferentes.

El movimiento es, entonces, una transformación: una sucesión en el tiempo de estados de movimiento; ahora bien, como la idea de estado implica permanencia, el movimiento desde esta perspectiva es considerado como una sucesión de reposos instantáneos.

Con la intención de demostrar las relaciones espacio-temporales experimentadas en la caída a partir del axioma propuesto (el grado de velocidad en la caída aumenta desde el reposo en forma proporcional al tiempo transcurrido), Galileo hace uso de una representación geométrica de las variables que intervienen, representación que vendría a constituirse como emblemática en cuanto a la matematización del movimiento se refiere (Figura 7). Galileo representa el tiempo transcurrido en la caída por un segmento vertical

AC y lo subdivide en partes iguales de manera que segmentos iguales corresponden a lapsos iguales. Los grados de velocidad del cuerpo en cada instante son representados por segmentos horizontales:

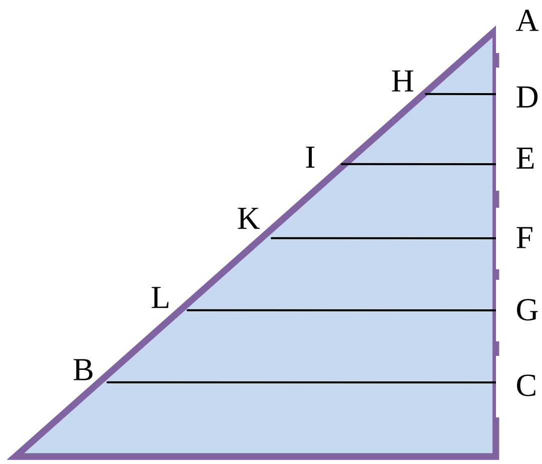


Figura 7. Representación geométrica de los grados de velocidad instantáneos de un cuerpo en caída libre (Galileo, 1981 [1638] citado por Romero & Rodríguez 2002)

> [Ahora bien, afirma Galileo] Como la aceleración se produce de manera continua de un momento a otro, y no a saltos, de una parte del tiempo a otra, y puesto que el término A se considera como el momento mínimo de velocidad, es decir, como el estado de reposo y como el primer instante del tiempo subsecuente AD, está claro que antes de adquirir el grado de velocidad DH, lo que hace en el tiempo AD, el móvil habrá pasado por una infinidad de los grados de velocidad que preceden al grado DH, hay que imaginar una infinidad de líneas cada vez menores, trazadas desde los puntos infinitos de la línea AD, paralelamente a la línea DH, cuya infinidad de líneas representará finalmente la superficie del triángulo ADH (Galileo, 1981 [1638] citado por Romero & Rodríguez 2002).

Este fragmento muestra cómo Galileo, asumiendo como axioma la relación de proporcionalidad entre el aumento del grado de velocidad y el lapso transcurrido ($\Delta v \; \alpha \; \Delta t$) y haciendo uso de una representación geométrica para su concepto velocidad instantánea, deduce las relaciones experimentadas en la caída: que la distancia recorrida desde el punto de partida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo ($x \; \alpha \; t^2$) y que los desplazamientos en tiempos iguales siguen la sucesión de los números impares 1, 3, 5, 7, 9, 11,...

Resulta importante resaltar aquí la pertinencia de la representación geométrica en los procesos de construcción conceptual del fenómeno del movimiento y, consecuentemente, en los procesos para su matematización: a través de esta representación, magnitudes no geométricas como la velocidad y el tiempo son representadas como segmentos, hecho que posibilita poder operar sobre ellas de la misma forma como se opera con segmentos, es decir, a través de proporciones y composición de proporciones.

En particular, esta representación hace evidente que, en la perspectiva galileana, la velocidad instantánea no es un concepto definido a partir de una relación espacio-temporal, como usualmente se presenta en los libros de texto y los cursos introductorios de física: acudir a referentes espacio temporales para el estudio de la velocidad como magnitud no es equivalente a una definición operativa de la velocidad en términos de los conceptos de espacio y tiempo, como usualmente es presentada. Representar la velocidad instantánea por segmentos y pensar en ella como una magnitud más, le permite a Galileo establecer una estructura -conjunto de axiomas, proposiciones y teoremas- sobre el movimiento que le posibilita hacer comparaciones entre grados de velocidad a través de las comparaciones espacio-temporales. En este sentido, desde la perspectiva galileana, el concepto velocidad instantánea tiene la misma categoría que el espacio y el tiempo, y esto es precisamente una consecuencia del razonamiento geométrico utilizado por Galileo para abordar el problema del movimiento (Malagón, 1988; Gandt, 1988, citado por Romero & Rodríguez, 2002).

Vale la pena mencionar que fueron tres los logros principales de las matemáticas durante los siglos XVII y XVIII: en primer lugar, la geometría analítica; en segundo, las matemáticas infinitesimales (cálculo diferencial, integral, series de potencias); y en tercer y último lugar, la formación de un concepto fundamental de las matemáticas, el concepto de función. Se produjo así efectivamente, el paso decisivo de una matemática de magnitudes estáticas, constantes, a una matemática de magnitudes variables. Es así como afirma (Wussing, 1998) que en los siglos XVII y XVIII, con el paso a una matemática de las variables, se da una auténtica revolución científica, revolucionaria tanto en los objetivos como en los métodos y en la solidez y alcance de los nuevos procedimientos.

Las matemáticas de las magnitudes variables viene a ser el reflejo matemático de un problema fundamental, el problema del movimiento. Se trataba de adquirir una comprensión clara de la idea de trayectoria y de inventar y consolidar un cálculo para el dominio matemático del problema del movimiento. En esto se centró la tarea de tres o cuatro generaciones de matemáticos, desde Descartes, Fermat hasta Leibniz y Newton; esto es, desde mediados del siglo XVII hasta el primer tercio del siglo XVIII.

Con la palabra movimiento se hacía referencia tanto a cuestiones centrales de las ciencias naturales –caída libre, tiro, movimiento de los planetas- como a problemas de movimientos típicos de la mecánica práctica de aquella época, en conexión por tanto con el desarrollo de los instrumentos de producción. De ambas esferas procedieron impulsos decisivos para la formación de una matemática de variables.

2.3.2 El aporte Cartesiano

Descartes, nacido del norte de Francia, se convirtió en el representante principal del sistema filosófico del Racionalismo, que constituía una forma particular del idealismo objetivo. Descartes tomó como punto de partida de su filosofía la proposición Cogito, ergo sum (Pienso, luego existo) y a partir de ella derivó la existencia del mundo, no como revelación divina, sino a partir del entendimiento humano, el cual se presentaba de este modo como capaz de aprehender el mundo. Esta filosofía antiteológica puso a Descartes en oposición a la Iglesia católica y, más tarde, también a la protestante.

La aportación matemática de Descartes surgió de su filosofía racionalista. De ella proceden sus esfuerzos por conseguir conceptos claros, definiciones precisas y expresiones fáciles de retener tanto para la filosofía como para las matemáticas, que le sirvieron a la vez como modelo de sus métodos científico-racionales. Es por ello comprensible que se aprovechara de las nuevas herramientas del álgebra, que le posibilitaban mayor claridad en el uso de los conceptos y mayor seguridad en los cálculos. Descartes se convirtió así en un luchador incansable en favor de la aplicación consecuente de la simbología matemática, aunque no dudó en dejarse aconsejar por otros matemáticos acerca de la elección de los símbolos. Se debe a Descartes el acuerdo, todavía actualmente en uso, de designar las incógnitas (variables) con las últimas letras del alfabeto. Usó con constancia los signos + y -, la notación de potencias y el signo de la raíz cuadrada $\sqrt{\ }$. Por el contrario, persistió en el uso -hoy anticuado- del signo α (ligadura de las letras iniciales *ae de aequetur*) en lugar del signo de igualdad (Wussing, 1998).

Igualmente es importante mencionar algunos de los principales aportes de los problemas de la ley de la caída de los cuerpos y la geometrización de la física en Descartes según (Álvarez & Martínez, 2000). Uno de los principales problemas es la distancia que existe entre el pensamiento cartesiano y aquello que representa uno de los mayores esfuerzos para el surgimiento de la física clásica, a saber, la consideración del tiempo como variable en las funciones del movimiento. Aquí se considera útil aproximarse a la medida real de los problemas relacionados con la "confusión del tiempo y espacio", los cuales asocian dos categorías de reflexiones. Una hace referencia a un concepto de movimiento en el cual no se establece que éste sea dado a través de relaciones funcionales entre parámetros claramente distinguidos, como el tiempo y el espacio: considerar a un movimiento un movimiento implica considerar juntos y de manera global el tiempo y el espacio. La otra remite a los esfuerzos de los mertonianos y los parisinos del siglo XIV para elaborar una teoría que permitiera cuantificar las cualidades, afectando sobre todo al tiempo y (más raramente) al espacio *in extensio*.

Existe una inversión del tiempo-espacio cuando [Galileo y Descartes] utilizan el teorema conocido como el del "grado medio", puesto que se parte de un principio falso: que la velocidad es proporcional a la duración de la caída". Ciertamente quiere decir lo contrario, es decir que los dos autores establecen la proporcionalidad de la velocidad con los espacios recorridos. Según Koyré, esto se presenta porque se hace de la trayectoria y no del tiempo el argumento de su función, para Álvarez y Martínez (20000) no existen funciones en la solución cartesiana (ni tampoco en sus matemáticas), por su parte, la ausencia del tiempo, ha sido rebatida puesto que se afirma que el movimiento cartesiano no excluye el tiempo, lo que sucede es que la relación del tiempo con el movimiento es de naturaleza distinta a la que se tiene en la física clásica; justamente no es una relación funcional (al menos en los primeros textos), es más bien una relación cualitativa, global y permanece como preclásica.

La velocidad global preclásica, de la cual se debe saber que en tanto que medida del movimiento sobre espacios iguales recorridos, es inversamente proporcional a los tiempos, conducen a una *"ley de movimiento"* con un estatus difícil, ya que, por una parte, es muy particular en tanto que se conforma con afirmar que los tiempos se multiplican por cuatro tercios si se duplican los espacios.

Otro de los problemas que aborda Descartes es ¿Qué es la caída de un cuerpo grave en el vacío? Y también, ¿Cuáles son los efectos de la resistencia del aire?

Inicialmente, la resistencia es claramente cuantificada por las hipótesis que miden la proporción de esta resistencia y pretende combinarla con la ley "en el vacío". La teoría de la gravedad es precartesiana y parece fuertemente influenciada por la teoría del ímpetu. Los cuerpos poseen su propia gravedad que les acompaña sin discontinuarse. La noción de velocidad adquiere importancia y además de considerar la velocidad global en el sentido anterior de medida del movimiento realizado, aparece como la "fuerza de velocidad impresa" o también como la "fuerza de gravedad" que cumple el papel de los grados de velocidad, bastante cercanos de lo que aparece en los diagramas galileanos.

Posteriormente se plantea que la velocidad está dada por los espacios recorridos en los tiempos dados, es decir, que las áreas de las figuras que "miden el movimiento" son proporcionales a los espacios recorridos; es decir, el tiempo ha sido expresado *in extensio*. Descartes además reafirma la validez de la proporción de los cuatro tercios en el caso del vacío y luego intenta combinar las progresiones mediante asociaciones sucesivas de tipo geométrico y geométrico, luego geométrico y aritmético y al tomar en cuenta los casos de causas concurrentes o de causas opuestas, lo cual no alcanza los objetivos establecidos (Álvarez & Martínez, 2000).

Descartes en su estudio del problema de la caída de los cuerpos hace referencia a la teoría de los vórtices del éter como la causa de la gravedad que da el marco de reflexión cartesiana sobre este problema a partir de 1630. Esta teoría vuelve las condiciones del estudio del fenómeno mucho más complicadas, puesto que pone en duda la posibilidad misma de una caída con gravedad constante en el vacío. Descartes llega a considerar válido no tomar en cuenta esta presión variable, o a la inversa, que intenta dar buena cuenta de ella. El problema del que pretende dar cuenta no es ni más ni menos difícil de resolver que el de la resistencia del aire.

Descartes no renuncia a dar una formulación matemática de este fenómeno, mucho más complicado, del movimiento real y en octubre de 1631, según Koyré, aborda el problema de determinar a qué proporción aumenta la velocidad de una piedra que desciende, no *in vicuo, sino hoc vero aer*. (Álvarez & Martínez, 2000).

Además, Koyré afirma que el fracaso de Descartes se debe a que él está en posesión de los verdaderos principios de la física y sabe también qué es el peso [condiciones necesarias que explican a los ojos de Descartes el fracaso de Galileo]. La pregunta es ¿por qué entonces se niega a dar la respuesta? Koyré afirma que es demasiado complicada, porque en una física como la de Descartes […] todo depende de todo, todo incide de manera inmediata en todo. No es posible aislar ningún problema y no es posible en consecuencia formular leyes simples de formas matemáticas (Álvarez & Martínez, 2000).

Otra de las preguntas cruciales es cuándo y cómo Galileo se dio cuenta de que la velocidad de caída de los cuerpos es proporcional al tiempo transcurrido y no a la distancia recorrida en la caída (Descartes, Beeckman y otros, citado por Álvarez & Martínez, 2000). Si la ley se interpreta como la elección correcta entre estas alternativas, entonces su descubrimiento se considera de manera natural como el resultado del examen de las alternativas y el haber hecho después una elección bien fundada. La existencia de la alternativa previa al descubrimiento de la ley es, desde luego, un supuesto previo. Sin embargo, desde el punto de vista de la filosofía natural aristotélica en donde no existe ninguna equivalencia para la dependencia funcional del movimiento respecto de algún parámetro, y en donde la velocidad de un movimiento siempre se refiere a su extensión global en el espacio y el tiempo- la alternativa de que la velocidad se mantenga en una relación específica, ya sea con el espacio o con el tiempo no puede plantearse. Sería como preguntarse si una cebra puede tener únicamente rayas blancas o negras.

La existencia de semejante alternativa plantea en sí misma que el concepto de "velocidad" o de "movimiento" funcione como lo hace en la ley de la caída libre, esto es, con el sentido que tiene en la mecánica clásica.

Para contribuir a invalidar las lecturas anacrónicas en términos de la "teoría del error", Álvarez y Martínez (2000) proponen precisar los términos de velocidad, tiempo y/o espacio in extensio del movimiento y la noción de función.

Sobre la noción de velocidad

Velocidad, velocitas, o celeritas empleadas aisladas no designan a la velocidad en un instante o "en un punto de la trayectoria". Las nociones que anticipan nuestro concepto de velocidad instantánea son explícitas, se trata en este caso de "grado de velocidad", de gradus velocitatis, etc., en la terminología heredada de la escolática del siglo XIV, puede ser la intensio motus o aun el ímpetus.

La velocidad media, como relación funcional de la distancia recorrida en el tiempo de recorrido no aparece.

La velocidad, tal y como se usa en la tradición preclásica (antes de Galileo), llamada por Souffrin (1992, citado por Álvarez y Martínez 2000) como la "velocidad holística", o "velocidad global" es la medida de un movimiento realizado, es decir, en tiempo transcurrido y/o en un espacio recorrido. En consecuencia, cuando se trata de comparar las velocidades son posibles dos lecturas (y sólo dos): en tiempos iguales las velocidades son como espacios recorridos (lo que no implica la uniformidad) o en espacios iguales las velocidades son inversamente como los tiempos.

Otra consecuencia es que cuando se trata de la “fuerza del movimiento” se trata de su magnitud, es decir, de su medida, de su velocidad: un movimiento "fuerte" es un movimiento rápido. Se encontrará así un sentido cinemático al término vis, que, según el contexto, podrá válidamente ser traducido por velocidad.

Admitir esta simple proposición, que la velocidad preclásica es la velocidad cartesiana (salvo en ciertos textos tardíos) y que ella designa la medida de un movimiento completado, implica dos consecuencias:

- Todo lo que designe la medida del movimiento es susceptible de ser considerado como sinónimo de velocidad: por ejemplo la "fuerza del movimiento", la "cantidad de movimiento" (antes de que esta expresión reciba otro sentido en el *Monde* y en los *Principes*).

- Las representaciones figuradas (en general los triángulos y los trapecios) son representaciones normales de esta velocidad, y así, cuando los espacios recorridos son in extensio, ellas dan las proporciones inversas de los tiempos de recorrido en espacios iguales.

Algunos pasajes que eran incomprensibles por el empleo de los conceptos clásicos de velocidad pasan así de la oscuridad a la luz. Así en AT: X, pp. 219-220, como lo comentan Domerow et al. (1991, p. 31 citado por Álvarez y Martínez 2000): “Lo que parece una confusión sin salida si el concepto de velocidad de la mecánica clásica se presupone, es así perfectamente razonable en el contexto lógico de los conceptos involucrados”.

Descartes adopta otra modificación conceptual, la celeridad global no desaparece, pero la noción de grado de velocidad o de grado de celeridad se reafirma, al recurrir a la proporción galileana; donde se enfatiza el punto de la celeridad inicial de los momentos de celeridad. Como consecuencia de este cambio, la proporción reivindicada ya no es la de los cuatro tercios, sino más bien la “proporción duplicada” de los tiempos.

Sobre el tiempo y/o es espacio in extensio

Toda interpretación funcional de los esquemas y de las generalizaciones posibles leídas en Descartes, plantean con urgencia el problema de la magnitud puesta *in extensio*. Aun si es verdad que la idea funcional es anacrónica y ajena a estas reflexiones, una forma cuantificada de relación se propone finalmente y la pregunta de la *extensio* no está fuera de tema, no carece de importancia. Lo que deseamos mostrar se sostiene en dos proposiciones:

- Al nivel del *mínimum* la consideración es neutral mientras se asegure que los *mínima motus* se asocian con los *mínima temporum* más que con los *mínima spatzum*. Lo que interesa es que en estos *mínima* (tanto de los tiempos como de los espacios) se acumulen las fuerzas de movimiento, o *mínima motus* o *momenta* que constituirán al movimiento mismo; es decir, que expresarán la velocidad. La cantidad de movimiento depende entonces de sus elementos, los *mínima* o momentos en los que parece desvanecerse la diferencia entre tiempo y espacio. La extensión se entiende entonces como consistiendo de momentos indivisibles que podrían interpretarse también como momentos de espacio y de tiempo.

- En un segundo momento conceptual, el movimiento realizado se interpreta y se mide según se le considere en un tiempo dado (el tiempo sería entonces *in extensio*), o según se le considere en un espacio dado (los espacios son entonces *in extensio*). Evidentemente, la "neutralidad" precedente no se contempla ahora. Esta neutralidad a nivel de los *mínima* se actualiza en la

> interpretación del movimiento completado y las dimensiones de la figura reciben un sentido físico. Está claro que la elección de actualización de Descartes es casi siempre la de los espacios *in extensio*. Pero no es fácil comprender por qué es así; esto marca una diferencia clara respecto de los autores del siglo XIV (Oresme, Heytesbury, etc.), para quienes la elección de la *extensio* es normalmente del tiempo. Vemos aquí un argumento para evitar una relación muy estrecha entre los trabajos cartesianos y esta tradición.

Descartes declara reencontrar sus propias ideas en Galileo; si hay un punto en los *Discorsi* que no está a discusión es la elección del tiempo como variable independiente (como magnitud extensiva).

Sobre la ausencia del concepto de función

No hay en Descartes un concepto de función formal como es conocida hoy y, claramente, no hay integración. Pensar en ello nos condena a no comprender el razonamiento cartesiano. Al respecto Domerow et al.(1991 p. 52-53, citado por Álvarez y Martínez 2000), afirman:

> Parece extraño que Descartes asuma que sólo una proporción -aquella de los tiempos o los espacios a las velocidades en los mismos intervalos de tiempo o espacio representados por las áreas que corresponden a intervalos iguales en la vertical-- esté representada y que no puede generalizarse a una función representada geométricamente, pero desde el punto de vista de la tradición conceptual medieval, no hay necesidad de esta generalización; los movimientos se conciben como siendo causados por fuerzas y con un desplazamiento en el espacio como consecuencia, el efecto depende del tiempo y, en cierta medida, del movimiento llamado velocidad. Esta velocidad se conceptualiza como el espacio recorrido en un cierto tiempo, en este marco conceptual no tiene sentido comparar los espacios si los tiempos no son los mismos, desde este punto de vista una comparación de las áreas i.e. de las velocidades, para intervalos arbitrarios, no tiene sentido. Y más adelante añaden: *Los procedimientos matemáticos del siglo XVII no contenían aún un concepto general de función*.

La razón por la cual Descartes no logra la matematización de algunos objetos es simple, pues se propuso darle al método matemático un valor que superaba sus posibilidades. En efecto, el método matemático triunfa en las matemáticas debido a la simplicidad de sus objetos y a su estatuto puramente ideal. Para generalizar el método matemático, Descartes debió simplificar los objetos de conocimiento científico, nivelarlos al plano de la razón; es de este modo como reduce a todos los objetos de conocimiento a la forma de "naturalezas simples" y que hace del pensamiento el primer objeto del pensamiento.

La ley de la caída no se presenta por sí misma, sino que es empleada como un instrumento que permite resolver una cuestión práctica: es utilizada para construir la teoría de un hecho experimental, a saber, la trayectoria de un chorro de agua. La caída sirve de modelo, de situación abstracta en la que se pueden prolongar los resultados para el caso de una "caída continua", la del chorro de agua.

En este caso, la velocidad global deja su lugar a una noción única de velocidad en un instante. La ley de caída libre se explica, y no se lo puede hacer más claramente, a partir del principio de proporcionalidad entre las velocidades y los tiempos transcurridos, mediante la proporción doble de los espacios con relación a los tiempos.

Las conclusiones a las que llegan Álvarez y Martínez (2000) acerca de la caída de los cuerpos y de la participación de las matemáticas en la física cartesiana se describe de la siguiente manera:

- La física es una ciencia inmediata y necesariamente concierne o se expresa mediante la geometría.
- Las matemáticas que participan en la física tiene como fundamento las verdades intuitivas de las matemáticas pura y la verdad *a priori* de las leyes de la naturaleza.

- La física matemática así fundamentada deberá producir los principales frutos de la filosofía. La presentación de los principios de esta ciencia se realizan en los *Principes* y también en el *Monde*.

- Descartes no logra más que de manera muy modesta (en regiones muy limitadas) producir una física efectivamente matematizada: la óptica (pero ésta es un excepción muy antigua), algunas cuestiones sobre mecanismos, los centros de oscilación, las cuerdas vibrantes y la caída de los cuerpos graves.

- La necesidad de simplificar la situación "real" al hacer una abstracción de un cierto número de causas perturbativas no es negada ni rechazada por Descartes, ésta se acomoda a su método.

- Lejos de apartarse de la geometrización efectiva de la física, desde que sospecha la posibilidad. Descartes intenta, y en ocasiones triunfa, llevar a cabo la cuantificación de los fenómenos.

- El obstáculo principal para logros más amplios reside en la aplicabilidad demasiado grande de las matemáticas que serían necesarias y en la descalificación de los procedimientos infinitesimales.

2.3.3. Evolución del concepto de función

Para Yousckevitch (1976, citado por García, Serrano, & Espitia, 1997), fue el método analítico el que revolucionó el desarrollo de las matemáticas, pues el uso de las expresiones analíticas en las cuales las operaciones se efectuaban siguiendo reglas estrictamente específicas aportó al estudio de la función y se amplió al cálculo infinitesimal, lo que determinó que el pensamiento funcional pasara a predominar en el trabajo matemático, pero siempre expresado algebraicamente.

El surgimiento en las Matemáticas de la Geometría Analítica aligeró la formación del análisis infinitesimal. Se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la Mecánica de Newton, y los trabajos de Lagrange y Euler. En las matemáticas del siglo XVII, este nacimiento significó la aparición de las primeras posibilidades para la creación del análisis de las variables (Ruiz, 1998)

Según García et al. (1997) es Leibniz (s. XVII) quien introdujo por primera vez el término función asociándolo a las representaciones geométricas. Bernoulli intenta generalizar la noción mediante la siguiente definición: "Se llama función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada X, y por constantes ya sea algebraicamente o trascendentemente", esta se convirtió en la primera definición de función como expresión analítica. Bernoulli también propuso las notaciones φ y f_x para distinguir la característica de una función y para escribir el argumento.

No obstante, la primera consideración de una función como expresión analítica aparecía en un artículo de Jean Bernoulli (1718, citado por Ruiz, 1998, p. 125): "Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes".

Igualmente se afirma que esta definición no explicita el modo de constituirse las funciones a partir de la variable independiente; sin embargo, en esta época se pensaba en las funciones como expresiones analíticas. Esto está en relación con la tendencia del análisis infinitesimal, que aún al conservar e, incluso reforzar sus relaciones con la geometría, la mecánica y la física, durante todo el S. XVIII, se llega a convertir en una disciplina científica cada vez más inmersa en ella misma y en sus propios principios.

La idea de que el análisis matemático es una ciencia general de las variables y de sus funciones, parece ser debida a Euler, quien así lo escribía en el prefacio de su obra *Introductio in análisis infinitorum*, publicada en 1748. El proceso por el cual el análisis matemático se va a constituir lógicamente como una disciplina autónoma, va a llevarse a cabo durante bastante tiempo, hasta culminar en el S. XIX con la *aritmetización* del mismo (Ruiz, 1998).

Euler (1748, citado por Ruiz, 1998) en su obra mencionada anteriormente al tratar de precisar la noción de función, define las constantes como: "una constante es una cantidad definida que toma siempre un solo y único valor"; y la cantidad variable como: "una cantidad indeterminada, o universal que comprende en sí misma absolutamente todos los valores determinados…Una cantidad variable comprende todos los números tanto positivos, fraccionarios, racionales, irracionales y trascedentes". Además cambió el término cantidad por el de expresión analítica.

"Una función de cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes" (Ruiz, 1998, p. 126)

Euler se apoyó en el cálculo diferencial de Leibniz y en el método de Fluxiones de Newton, integrándolos en una rama más general de las matemáticas que ha recibido desde entonces el nombre de "Análisis", es decir, el estudio de los procesos infinitos. Desde este momento, la idea de función pasó a ser la idea fundamental del análisis.

El matemático francés Lagrange (1736-1813) aportó dos grandes tratados sobre funciones: Teoría de las funciones analíticas y Lecciones sobre el Cálculo de las funciones en las que desarrolla una tentativa muy ambiciosa: dotar al cálculo de un fundamento sólido reduciéndolo al álgebra. El álgebra no es otra cosa que la teoría de funciones. En el álgebra las cantidades buscadas deben ser funciones de cantidades dadas, es decir, expresiones representadas por diferentes operaciones, las cuales es necesario realizar con esas cantidades para obtener los valores buscados. En la definición que propone Lagrange de la noción de función, la identifica como toda expresión de cálculo:

> Llamamos función de una o varias cantidades a **toda expresión de cálculo** en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que

> consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas. (Grattan-Guinness, 1984 p.133 citado por Ruiz, 1998, p. 127).

En el siglo XIX encontramos en el curso de Análisis Algebraico de Cauchy (1827) la siguiente definición: "cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable" (Youschkevith, 1976 citado por Ruiz 1998, p. 131) .

Lobachevsky, en el año 1834, afirmó: El concepto general exige llamar función de *x* a un número, el cual se da para cada *x* y paulatinamente varía junto con *x*. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida. (Ribnikov, 1987 citado por Ruiz, 1998, p. 132).

Dirichlet, propuso análogamente, en 1837, otra definición sumamente amplia y general: Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x*. (Boyer, 1986 citado por Ruiz, 1998, p. 132). Para mostrar lo arbitraria que podía ser la regla de correspondencia, propuso Dirichlet una función de "muy mal comportamiento": Sean *c* y *d* dos números reales distintos; cuando *x* sea racional sea $y=c$ y cuando *x* es irracional sea $y=d$. Esta función es tan "patológica" que es discontinua para todos los valores de *x*.

Más tarde, en Riemann (1858) da la siguiente definición: Se dirá que *y* es función de *x* si a todo valor bien determinado de *x* corresponde un valor bien determinado de *y* cualquiera que sea la forma de la relación que une a *x* y a *y*. (Desanti, 1976 citado por Ruiz, 1998, p. 132).

Como se ha mostrado, para establecer con toda generalidad y con todo rigor, las propiedades relativas a las funciones, no será necesario recurrir a la forma particular, algebraica o trascendente, por la cual se expresa generalmente una función. Con esto se generaliza también el concepto de curva; las curvas "mecánicas" (no geométricas, es decir, aquellas que no tenían una determinada expresión algebraica, pero se podían describir al recurrir al movimiento) se integran al dominio del análisis. Simultáneamente, se libera al concepto de función de la exclusividad de la intuición geométrica (Ruiz, 1998).

El desarrollo de la teoría de funciones de Weiertrass y la teoría de conjuntos de Cantor se produjo en los últimos años del S. XIX en un ambiente de aguda crítica y lucha. Sin embargo, la teoría de conjuntos ejerció una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas. Sirvió de base a la actual teoría de funciones de variable real, a la topología, al álgebra, al análisis funcional, etcétera.

Según escribe Spivak: El concepto más importante de las matemáticas es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad (Spivak, 1978 citado por Ruiz, 1998, p.133).

Las definiciones actuales del concepto de función se basan formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, pero en su construcción hay definiciones en las que permanece el carácter de correspondencia unívoca (aplicación) y se manifiesta explícita la idea de asignación entre variables; mientras que en otras, un intento de mayor precisión y rigor, se introduce a través de la noción de grafo (pares de elementos relacionados).

Según Dieudonné en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación (1989). En este sentido lo encontramos en muchos textos matemáticos (Ruiz, 1998, p. 133).

Otros autores, en un intento de formalización y precisión más completa de los términos introducidos en la definición afirman:

Se llama función a la terna f=(G, X, Y), en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

- $G \subset X \times Y$
- Para todo *x* ϵ X existe un y solo un *y* ϵ Y, tal que (*x, y*) ϵ G, G es la gráfica de la función f.

El único elemento *y* de Y tal que (*x, y*) ϵ G se llama valor de la función f en *x*, y se utiliza para designarlo *y=f(x)*. Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (*x, f(x)*) donde *x* ϵ X, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

$A \subset X$ Se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f (Godement, 1971 citado por Ruiz, 1998, p. 134).

Respecto al sentido dado a la función en esta definición, es importante considerar la opinión de Russell:

> La idea de función es tan importante, y tan a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas. […] Por muchísimas razones es conveniente identificar la función y la relación es decir, si y=f(x) es equivalente a xRy, donde R es una relación, es

conveniente hablar de R como de la función, [...] pero se debe recordar que la idea de funcionalidad es más importante que la de relación (Russell, 1967; citado por Ruiz, 1998, p. 134-135).

Para completar la visión general sobre la evolución general del concepto de función, es importante mencionar las opiniones que Haussdorff (1978, citado por Ruiz, 1998, p. 135):

El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales.

Los pares ordenados hacen posible la introducción del concepto de función[...] así, para una función univalente f(a) lo único que cuenta es que para un a dado, f(a) debe estar unívocamente determinado por algún criterio definido (dado anteriormente por un conjunto de pares P); es innecesario conocer si este criterio puede ser dado o no en términos de "expresiones analíticas" o bien de otra manera; es también innecesario conocer si en algún caso con los instrumentos que tenemos a nuestra disposición nos permiten o no encontrar siempre para un valor a de la determinación actual de f(a). Lo que se ha mencionado aquí sobre el concepto general de función, definido por Dirichlet, podría ser aplicado al concepto de conjunto de Cantor. El conjunto de los racionales está bien definido, aunque no conozcamos si $\prod^{\Pi}$ pertenece o no a dicho conjunto; la función f(a) que es igual a 1 si a es racional y 0 si es irracional, está bien definida, aunque no conozcamos el valor de f ($\prod^{\Pi}$) (Hausdorff, 1978; citado por Ruiz, 1998).

En esta descripción, clara, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni el menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, no parece la vieja y sugestiva idea de variabilidad. Es evidente por tanto que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta. Freudenthal, dirá que aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático. (Freudenthal, 1983; citado por Ruiz, 1998, p. 135).

La perspectiva histórica descrita anteriormente, muestra como el estudio del movimiento jugó un papel fundamental en la consolidación del concepto de función, específicamente parte del concepto de velocidad en Galileo, en el cual es importante reconocer el espacio y el tiempo como magnitudes que se relacionan de manera proporcional, hasta llegar a la formalización del concepto de función con Dirichlet de una manera estática.

Así, en cada momento histórico el concepto de función se ha construido a partir de diferentes sistemas de representación, por lo que se considera necesario precisar lo que se entiende por sistemas de representación matemática y la importancia de vincular "experiencias reales" a la representación formal en un contexto físico para el estudio de la variación.

2.3.4. Sistemas de representación matemática

Si bien, el concepto de representación es de gran complejidad, y admite diferentes posibilidades de interpretación, es ampliamente aceptada la acepción en la que se piensa la representación como el acto a través del cual algo está en lugar de, o al evocar a, otra cosa ausente. Kaput (1987, citado por, Castro, 1995), propone que toda representación hace referencia a dos dominios claramente diferenciados e interrelacionados: el objeto representante (la representación, símbolo o modelo) y el objeto representado (contenido o concepto). Existe cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el de los objetos representados, lo cual indica que cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:

- Los objetos representados
- Los objetos representantes
- Qué aspectos del mundo representado se representan
- Qué aspectos del mundo representante realizan la representación
- La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.

En la mayoría de los casos uno o ambos mundos, pueden ser entidades hipotéticas e incluso, abstracciones. De ahí que se hable de representaciones internas (en referencia a dichas abstracciones) y representaciones externas.

Se comparte igualmente la idea de que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas, de forma que la mente tenga posibilidad de operar con ellas y para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible dicha comunicación.

Los signos exteriores de representación tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza, lo que hace necesaria la distinción entre representaciones externas y representaciones internas. La relación existente entre estas dos modalidades de representación la expresa Duval (1999) en los siguientes términos:

Desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas y la diversificación de representaciones de un mismo objeto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y por consiguiente sus representaciones mentales. De manera recíproca, las representaciones externas como enunciados en el lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficas, figuras geométricas, etc. son el medio por el que los individuos exteriorizan sus representaciones mentales y las hacen accesibles a los demás. La representación externa juega, desde este punto de vista, una doble función. La primera actúa como estímulo de los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, y la segunda como expresión de conceptos e ideas que poseen los sujetos que las utilizan. La diferencia entre las representaciones externas e internas, es lo que desde la TAD Chevallard (1992) ha denominado los objetos ostensivos y no ostensivos.

Kaput (1987), también propone que la actividad representacional es intrínseca a la actividad matemática misma dado que los objetos conceptuales son abstractos y no se puede acceder a ellos sino a través de sus representaciones. La actividad matemática misma es impensable por fuera de los sistemas de representación utilizados. Aparece así, una unidad indisoluble que plantea que los sistemas de representación "representan" los conceptos matemáticos, pero a su vez, los conceptos matemáticos se estructura a partir de los sistemas de representación.

Para dar cuenta de lo mencionado anteriormente Kaput (1987) define un sistema de representación como un esquema de símbolos *S* junto con un campo de referencia *F* y una regla de correspondencia *c* entre ellos, tal vez no necesariamente bidireccional. Un sistema de representación *S* algunas veces se denotará por una tripla ordenada $S=(S, F, c)$, dando especial atención al sistema de símbolos matemáticos, sistemas donde el campo de referencia está asociado a una estructura matemática. Se puede afirmar que un sistema de representación matemática es una clase especial de un sistema de representación, cuyo mundo representado es una estructura matemática, y cuyo mundo representante es un esquema de símbolos, con una correspondencia especificada. En la mayoría de los casos se convierte en la estructura matemática misma representada, será un sistema de representación que puede ser tomado para ser representante aún como otro sistema de representación.

Existen marcas de las acciones sobre los sistemas de representación y estructuras primitivas que están siempre presentes en los sistemas más avanzados. Son ellas las fuentes de las matemáticas así como de su aprendizaje, estos sistemas van evolucionando permitiendo que las estructuras que se encuentran cristalizadas, se representen con símbolos concretamente manipulables, así la mente es liberada para actuar y reflexionar sobre las acciones anteriores y crear estructuras nuevas, tal vez dando vía a otro ciclo de la construcción matemática.

Kaput (1987) también define un sistema de representación como un conjunto concreto de caracteres, junto con las reglas más o menos explicitas para la identificación y combinación de ellos. Los caracteres pueden estar definidos como clases de equivalencias de “inscripciones”, se debe tener en cuenta por ejemplo que hay muchas formas de escribir el carácter “a” o de dibujar un sistema de coordenadas, pero que no tienen como propósito la formalización más allá de esta instancia. Los ejemplos incluyen el sistema de numeración Hindú-Arábigo de base 10, el esquema simbólico utilizado es la correspondencia entre los símbolos y los elementos del sistema, esto es, los números en sí mismos. Otro sistema de representación con el mismo campo de referencia usa la recta numérica y la usual correspondencia entre los números y puntos, sus concatenaciones, y los procedimientos de símbolos familiares de dos variables de expresiones algebraicas, tales como x e y junto con las reglas de combinación de ellas y su sintaxis. No todos los sistemas de símbolos son alfanuméricos, así los ejes de coordenadas, gráficos y diagramas tienen otros tipos de caracteres y reglas sintácticas.

Esta identidad hace que los sistemas de representación jueguen un papel fundamental en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente, en el hacer matemático, la representación de unas estructuras por otras es una actividad natural y ha permitido enormes desarrollos a las matemáticas. Muestra de tal actividad se puede ver en los morfismos, en los isomorfismos, en las construcciones algebraicas, en las representaciones geométricas, entre otros.

Rico y Castro (1997) afirman además, que las representaciones están fuertemente ligadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, y que, a menudo, crean problemas de comprensión debido a su uso simultáneo no controlado. De ahí la conveniencia de que los profesionales de la enseñanza conozcan y consideren las dificultades que los estudiantes pueden encontrar en el manejo conjunto de varios sistema de representación para un mismo concepto.

Por lo anterior, generalmente, los conceptos matemáticos, vienen expresados mediante uno o varios sistemas de representación específicos y un mismo objeto matemático puede ser dado mediante representaciones muy diferentes Janvier (1993, citado por Rico y Castro, 1997) las denomina representaciones sinónimas. Cada uno de estos modos de representación proporciona una caracterización distinta del concepto matemático que hemos considerado y no hay un sistema único capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto matemático encierra. Cada uno de los sistemas de representación destaca algunas propiedades importantes del concepto representado y dificulta la comprensión de otras propiedades.

Así pues, cuando un concepto se trabaja a partir sólo de un registro, da origen a distorsiones en el tratamiento didáctico de la enseñanza de las matemáticas, pues termina confundiéndose el objeto representante (ostensivo) con el objeto representado (no ostensivo), y por ende, desde esta perspectiva la experiencia matemática propuesta a los estudiantes es muy pobre. Dicho de otra manera, no puede asumirse que los sistemas de representación sean neutros en el aprendizaje de las matemáticas. Esto es, no deben entenderse los sistemas de representación solo como una externalización de lo que está en la mente, sino que debe asumir que la organización conceptual en la cognición humana es el resultado de los sistemas de representación utilizados, y que por tanto, han moldeado la comprensión matemática misma.

Los investigadores están de acuerdo en que hay que ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas para que puedan relacionar, de forma eficaz, los significados correspondientes a los objetos mentales que elabora y construye. Como consecuencia podrá controlar mejor el manejo de las representaciones externas. Pero no parece que los estudiantes puedan inventar o interpretar por sí mismos las representaciones convencionales, sino que han de ser instruidos y educados en su uso y comprensión.

Los estudios de Janvier (1993, citado por Kaput, 1987), Kaput (1987) y Duval (1999) han centrado el estudio de las representaciones de los conceptos matemáticos escolares en diversos sistemas simbólicos y gráficos, así como en las relaciones entre ellos. Para los contenidos de matemáticas en educación secundaria encontramos el conocido estudio sobre los sistemas de representación para una función real de variable real, que considera cuatro sistemas: enunciado verbal, tabla de valores, ley algebraica y gráfico de la función.

Una de las dificultades reportadas por Kaput (1987), en el manejo de gráficos, es la suposición de un procedimiento automático de su lectura y de forma casi paralela al lenguaje natural, por lo que se tiende a cortar el proceso y elaboración de la lectura de gráficos, como tendencia para concluir sin procesar suficientemente lo que se ve directamente en el gráfico y determinar si representa lo que es verdaderamente. Por tal motivo los elementos estructurales de una gráfica deben ser conscientemente identificados en muchas tareas matemáticas que involucran diferentes sistemas de representación.

Por ejemplo para la tarea, dada una gráfica de la velocidad de un carro al dar una vuelta, describir la forma de su recorrido. La respuesta de muchos estudiantes es seleccionar o realizar una gráfica que se asemeje a la dada. Este error es un ejemplo que revela una dificultad para distinguir entre una función y su razón de cambio instantánea (derivada).

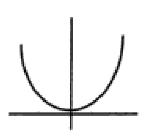
Kaput (1987) menciona que otro error común de este tipo, ocurre cuando se les pide a los estudiantes dibujar o seleccionar un gráfico de la velocidad de un ciclista viajando sobre una montaña, sea con una montaña dibujada o descrita verbalmente. La respuesta preferida es una gráfica en forma de una montaña más que una gráfica de la forma valle-montaña.

Existen otros tipos de dificultades cuando se combinan diferentes sistemas de representación, esto es, asignarle variables a un dibujo o diagrama usando variables algebraicas, un ejemplo se presenta en el primer curso de cálculo, la introducción más común a la optimización se da a partir del problema típico de maximizar el área rectangular encerrada por un perímetro dado.

El enfoque estándar para tales problemas es bosquejar una representación de una región rectangular y luego etiquetarla usando variables. El intento es representar una región "variable", la dificultad de muchos estudiantes, sin embargo es que ellos ven una región única, cuyas dimensiones son desconocidas, la fijación de la representación pictórica está en oposición directa a la variación implícita de la representación algebraica, dada la debilidad en la comprensión del estudiante de la variable. Debido a lo anterior, la imagen estática limita la asimilación del estudiante de la situación para hallar la incógnita, por lo cual la aplicación de los cálculos diferenciales no tienen sentido.

En consecuencia, las experiencias de aula deben permitir al estudiante construir significados a partir de la interacción con diversos sistemas de representación. Pero esta interacción no debe quedarse en el acto de traducir de un sistema a otro. Se debe posibilitar en términos de Duval (1999) la coordinación entre sistemas de representación. Esta coordinación debe entenderse como la posibilidad de identificar los elementos estructurales que en un sistema de representación dado está cumpliendo con la función de la representación, y ponerlos en relación con los elementos estructurales en el otro o viceversa, y cómo, en su conjunto determinan la pluralidad de sentidos y significados para el o los conceptos matemáticos representados. En el caso de la noción de función y sus diversas representaciones como ya se mencionó se consideran: descripciones verbales, tablas, gráficas y fórmulas como sistemas de representación posibles. En la Figura 8 se muestran varias representaciones correspondientes a la función cuadrática simple.

$y = x^2$, $y(x) = x^2$, $f(x) = x^2$, $f: x \longrightarrow x^2$,



x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	0	1	1	4	4	9	9

Figura 8. Diferentes representaciones de la función cuadrática

Entre las expresiones distintas que admiten las funciones se pueden establecer todas las conversiones o traducciones posibles. A continuación se presenta la Tabla 1 de doble entrada propuesta por Janvier, Girardon y Morand (1993, citado por Rico y Castro, 1997), en la que se recogen dichas conversiones expresadas mediante un verbo de acción. La lectura de dicha tabla hay que hacerla desde el encabezamiento de la fila al encabezamiento de la columna.

hasta desde	Descripciones verbales	Tablas	Gráficas	Fórmulas
Descripciones verbales	X	Medición	Destrezas de modelización o bosquejo descriptivo	**Modelización analítica**
Tablas	Lectura	X	Trazado	**Ajuste**
Gráficas	Interpretación	Lectura	X	**Ajuste a curvas**
Fórmulas	**Reconocimiento de parámetros**	**Cómputo**	**Bosquejo**	**X**

Tabla 1. Conversión entre los diferentes sistemas de representación de las funciones.

La Tabla 1 proporciona información sobre las distintas situaciones de traducción que pueden presentarse en el aprendizaje de las funciones y en el dominio de sus diferentes sistemas de representación. La carencia de trabajo sistemático en este campo conlleva una disminución de calidad en tal aprendizaje.

En los ambientes de aprendizaje informático los sistemas de representación han evolucionado de un medio representativo estático a uno dinámico, donde una representación dinámica continua puede ser expresada en una calculadora simbólica y al animarla describe un rango de valores que puede tomar b para la función $y=ax^2+bx+c$, lo cual es imposible en medios de comunicación estáticos.

Igualmente, es posible dar sentido al movimiento físico a partir de la exploración del espacio y el tiempo, al utilizar sensores de movimiento, generando una representación de la acción según la intencionalidad del usuario de este tipo de tecnología. Todo lo anterior ha llevado a realizar conversiones de manera más directas entre los diferentes sistemas de representación y al estudio de nuevas ideas matemáticas.

Al considerar los sistemas de representación en sus versiones informáticas como herramientas de mediación, tienen una característica central: *son ejecutables*. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez los objetos y relaciones matemáticas son instalados en el lenguaje del ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables y manipulables, es decir, los estudiantes pueden actuar más directamente sobre dichos objetos y relaciones de lo que se hacía antes, en el medio tradicional de papel y lápiz.

De esta forma, las representaciones que suministran los CAS son ejecutables (Lupiáñez y Moreno, 2002), puesto que son portadores de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quien las utiliza (usuario de CAS), los que además de procesar sistemas de representación numérico y gráfico, también incluyen un sistema de manipulación algebraico, es decir que, además de manipular números y graficar funciones, pueden manipular expresiones algebraicas: factorizar polinomios, derivar simbólicamente una función, hallar su antiderivada, hallar la expresión en fracciones parciales de una función racional, etc. Por ejemplo: al graficar una función lo que varía con el usuario es la interpretación que puede darse a la información que suministra la calculadora.

Dos características de la ejecutabilidad de los sistemas de representación son la conversión entre representaciones y el procesamiento, es decir, las transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas, el procesamiento así considerado es una acción sobre las representaciones interna a un registro en el sentido de Duval.

Así que al usar un CAS, una persona no sólo tiene a su disposición un espacio de representación externa (como un cuaderno) sino la posibilidad de procesar esa información de cierta manera debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la máquina externalizando un proceso cognitivo. En general los CAS suministran un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes sistemas, y lo que es más importante, permiten cambiar de unos a otros, es decir, permiten la conversión de un sistema de representación a otro.

Un ejemplo de conversión presentado por Moreno (2002) es el siguiente: cuando un científico usa un programa estadístico, introduce una serie de datos y el software los organiza en una representación gráfica. El científico puede interpretar esa gráfica y extraer conclusiones de ella. Pero no tiene que saber cuál fue el proceso que utilizó el software para generar la gráfica. Lo que importa entonces es su capacidad de decodificación frente al producto de la representación ejecutada.

En esta situación, la máquina está haciendo algo más que registrar información, está pasando de un sistema de representación a otro, de los datos numéricos que ha recogido el científico a la representación gráfica de los mismos, mediante la ejecución del primer registro de representación.

Un ejemplo de procesamiento es el siguiente, a menudo cuando se utiliza una representación gráfica de un problema, un dibujo, no suministra toda la información o ayuda que sería deseable. Trazar un dibujo estático representa un estado de relación funcional que no garantiza que el estudiante "vea" cómo cambia la variable dependiente al hacer variar la independiente (Vonder Embse y Yoder, 1998, citado por Lupiáñez y Moreno, 2002). Una mejora a esta situación podría ser el dibujar para diferentes estadios del problema, pero sin duda que la mejor forma sería realizar una representación dinámica, pues éstas pueden usarse repetidamente como una técnica para investigar con detalle qué es lo que realmente pasa.

Además se resalta la manipulación a la que se puede someter los objetos matemáticos en sus versiones electrónicas, lo cual ha ido generando un nuevo realismo matemático del que se puede sacar mucho provecho didáctico Balacheff y Kaput (1996, citado por Lupiáñez y Moreno, 2002). Las versiones electrónicas de los objetos matemáticos son como objetos virtuales, cabe anotar que desde hace tiempo hay elementos que podemos designar como virtuales en la matemática clásica, pues cuando se trabaja con los números, es decir, con la notación decimal de los números, lo hacemos como si esas notaciones fueran los números mismos.

Moreno (2002) señala que trabajar con las representaciones como si ellas fueran el objeto que se está explorando es un desarrollo clave en las matemáticas, lo que ahora es relevante no es tan sólo la presencia de un elemento virtual sino la ejecutabilidad de los sistemas de representación y con ello, la nueva dimensión que alcanza la virtualidad de los objetos bajo las nuevas formas de manipulación.

En este sentido es importante señalar, que los objetos que aparecen en la pantalla de la calculadora no son objetos concretos ni entes del mundo matemático formal, son objetos virtuales que están en la interfaz que separa el mundo conceptual de las matemáticas de los objetos concretos, son pues instrumentos de conocimiento, no conocimientos en sí mismos (Lupiáñez y Moreno, 2002)

Se puede concluir así que la importancia de los ambientes de aprendizaje informático está basada en gran medida, en esa reificación de objetos y relaciones matemáticas; las representaciones analíticas tradicionales, se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas en estos ambientes, puesto que el carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales desaparece con las representaciones ejecutables, que son manipulables y permiten actuar directamente sobre ellas.

2.3.5. Sistemas de representación matemática vs experiencias reales

El cambio de los sistemas de representación de inscripciones estáticas a dinámicas, modifica la perspectiva o el enfoque de las matemáticas a trabajar en el aula de clase, pues se parte del hecho que lo que es pertinente estudiar son unas Matemáticas del Cambio y la Variación (MCV).

Puesto que los ambientes dinámicos cambian el rol de las representaciones matemáticas los cuales pasan a ser construidos autónomamente, manipulables e interactivos y los estudiantes están ahora en una posición para constituir signos y símbolos matemáticos en objetos y sistemas de objetos identificables personalmente.

De ahí la importancia de vincular experiencias reales a la representación formal usando modelos de situaciones, lo cual permite una conexión física directa al utilizar los sensores de movimiento en un Sistema Algebraico Computacional o los diferentes sistemas de representación, en los cuales se pueden introducir automáticamente cambios en la situación afectando el modelo inicial con el fin de validar rápidamente hipótesis que se puedan generar. Estos experimentos se pueden diseñar de modo que los cambios efectuados en el modelo cambien en la situación que es modelada.

Este tipo de tecnología como lo menciona Kaput (1994) ha hecho posible ligar físicamente sistemas de acción (ver Figura 9), por ejemplo las gráficas en coordenadas y las ecuaciones algebraicas, de modo que una acción en un sistema se pueda traducir en una acción en el otro, automáticamente o mediante un comando manejado por el usuario. Es importante resaltar, sin embargo, que la conexión mostrada por la flecha punteada en la parte inferior de la figura no representa una relación referencial, sino una conexión física que podría ser uni o bidireccional. La relación referencial sigue permaneciendo en la mente del usuario.

De hecho, el propósito de la conexión física es hacer explícita y observable dicha relación en el nivel de acciones, a fin de ayudar a construir la integración de las estructuras de conocimiento y la coordinación de los cambios representados en la parte superior del diagrama. Se trata así de un nuevo hecho posible por los medios computacionales dinámicos e interactivos, pero que no ha sido empleado intensamente en la educación.

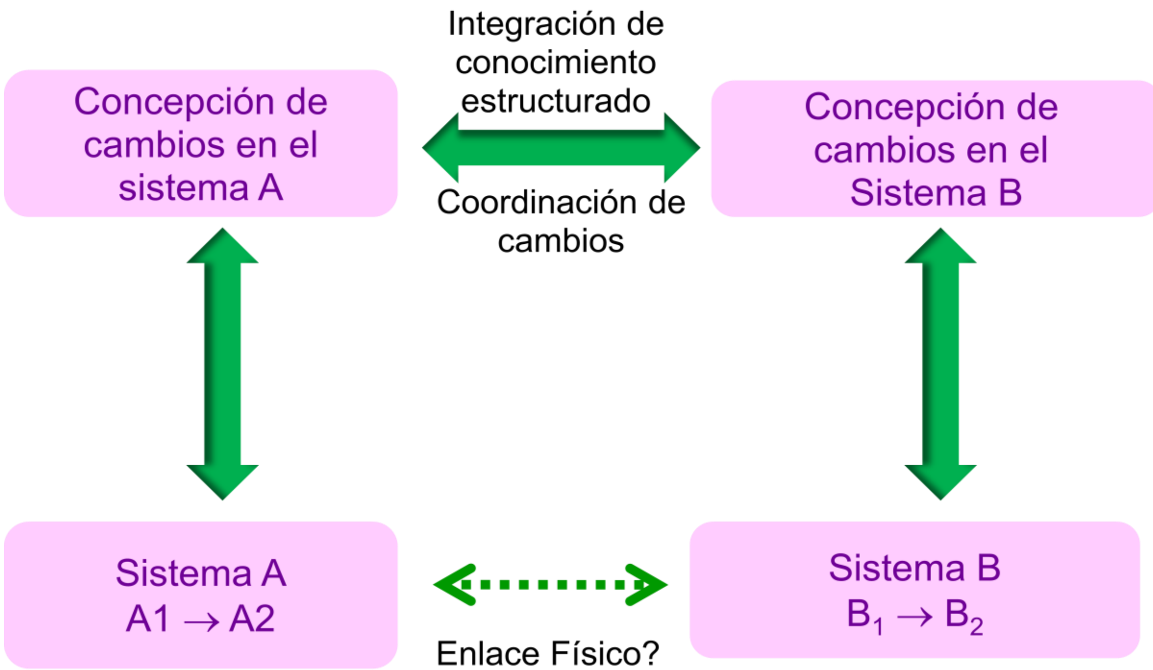


Figura 9. Conexiones en el nivel de las acciones

Al trabajar con situaciones didácticas que involucran sensores de movimiento, un caso importante de conexión representacional general involucra un sistema que funciona como modelo del otro, digamos un sistema de representación B representa la situación A. En el caso de un modelo tradicional, no existe ninguna conexión física directa, excepto por la transferencia de medidas de la situación al modelo, generalmente, mediante la introducción de valores particulares que reflejan los resultados de las medidas. Sin embargo usando sensores de movimiento conectados a una calculadora o una computadora, se pueden transmitir automáticamente cambios en la situación y desplegarlos en el modelo, permitiendo una prueba rápida de las hipótesis formuladas.

Tales situaciones pueden incluso ser diseñadas de modo que los cambios efectuados en el modelo cambien en la situación que es modelada, por ejemplo realizar un movimiento a partir del cual se puede especificar una gráfica o una ecuación en la calculadora o la computadora. Con estas conexiones automáticas, el estudiante debe estar consciente de que una gran parte del proceso modelado ha sido sustituida, la clave está en la determinación de qué medir y de cómo medirlo, qué unidades utilizar, etcétera.

A menudo, una situación particular puede tener varias "visiones" producidas por diversos sistemas de representación, con el mismo modelo matemático subyacente. Por ejemplo, el modelo subyacente puede ser una función lineal representada por una tabla de datos numéricos, así como una gráfica en un sistema de coordenadas. En este caso, el modelo B es sustituido por un grupo de representaciones quizás conectadas unas a otras, como una unidad representando a A. En tal caso, el modelo mismo puede ser considerado como una abstracción, de la misma manera que uno puede elegir entre el considerar una función lineal como una abstracción fuera de cualquier representación particular, o puede verla como la totalidad del grupo de representaciones, el "modelo completo" de la figura.

El estudiante elabora un modelo mental de la situación real, aunque es frecuente el caso en que la situación real que se modele no esté presente, sino que se disponga de una descripción textual, a partir de la cual se combinan los procesos de comprensión del texto con la experiencia previa. Conforme se desarrolla el modelo, el texto se convierte sólo en un intermediario y el modelo mental es basado en las representaciones matemáticas tales como tablas, gráficas, expresiones algebraicas, diagramas y otras descripciones, las cuales empiezan a relacionarse más directamente con las conceptualizaciones de la situación, con el objetivo de interpretar y validar el modelo establecido con la experiencia como se muestra en la Figura 10.

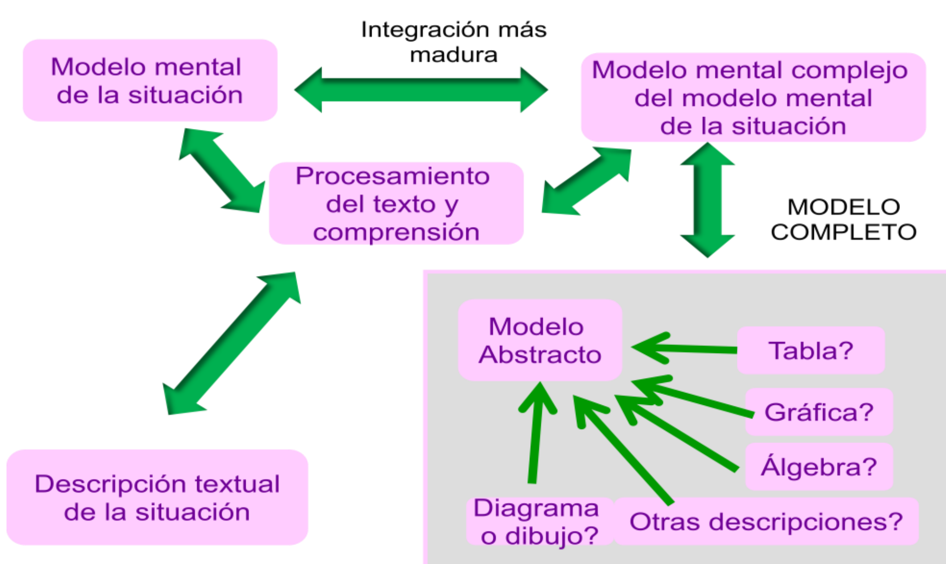


Figura 10. El "Modelo Completo" de Representaciones

De la relación que se puede establecer entre los diferentes sistemas de representación matemática y la experiencia real, es posible afirmar que se pueden construir estructuras matemáticas más estables y significativas para los estudiantes al utilizar sistemas de representación dinámicos y generar una interacción entre éstos y el movimiento que produce una persona u objeto.

Como elementos importantes a considerar para el diseño de la secuencia didáctica en este trabajo se tiene:

- Rescatar la idea de variabilidad a partir de situaciones que involucren el movimiento como elemento fundamental para el estudio de funciones con variables reales.
- Determinar las relaciones espacio temporales de la caída libre a partir de la representación gráfica cartesiana de manera experimental.
- Estudiar la noción de velocidad como relación funcional de la distancia recorrida en el tiempo de manera experimental.
- Estos elementos permiten el estudio del concepto de función de una manera dinámica donde es posible determinar cómo las magnitudes varían y no un concepto estático de función en el cual sólo se relacionan elementos entre conjuntos, perdiéndose el origen del estudio de las funciones a partir del movimiento.

CAPÍTULO 3.

DISEÑO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS A PRIORI

REFERENTES METODOLÓGICOS

En este capítulo se presentan como referentes metodológicos los elementos de la Micro-ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995), la Ingeniería Didáctica Exploratoria (Haspekian & Artigue, 2007) y la Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar las TIC en Didáctica de las Matemáticas (Emprin, 2006), esta última presenta la estructura de un modelo para la formación inicial y continua de los profesores.

Para la selección y estructuración de las situaciones propuestas se consideraron los elementos básicos de una Micro-ingeniería Didáctica, sin embargo al considerar que el trabajo de campo se realizó con profesores en formación inicial y que ellos tenían unas características diferentes a los estudiantes de secundaria, por su perfil, el interés principal fue la utilización del conocimiento matemático y la fundamentación de sus prácticas de clase, en procesos de implementación de TIC, para ello se emplearon elementos de la Ingeniería Didáctica Exploratoria y el modelo el presentado por Emprin (2006) para la formación de profesores al integrar TIC. A continuación se presenta los referentes tanto empíricos como los de cada uno de los enfoques metodológicos mencionados.

3.1. Referente Empírico

Los antecedentes empíricos de la presente investigación se remontan al trabajo realizado por la investigadora para optar al título de licenciada en Matemáticas y Física para el cual se presentó una propuesta curricular que fue incorporada en una de las instituciones del Valle del Cauca en la fase piloto del proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Colombia* en el 2002. Uno de sus propósitos fue comparar los fundamentos conceptuales que se utilizan en torno a la incorporación de algún sistema algebraico computacional y de registro gráfico con los que se presentan en el aula de clase al enseñar a través de problemas no rutinarios la construcción y utilización de la función lineal y afín. Para ello se presentó una secuencia de situaciones problema por medio de las cuales se llegó a la construcción de un modelo de la situación. En dicha situación se debía calcular el consumo de energía eléctrica, para realizarlo los estudiantes debían construir y utilizar un modelo matemático de tal manera que pudieran predecir y controlar su consumo.

La situación presentada permitió observar varias cosas. Entre ellas las distintas formas de presentar la función lineal y afín, reflexionar sobre los alcances y límites de las diversas representaciones que la acompañan, al mostrar cómo varían los valores de las variables involucradas en el modelo matemático. Además de lo anterior se pudo observar cómo la calculadora TI-92 contribuye a desarrollar nuevas estrategias para la resolución de problemas y a la obtención de una mejor visualización del modelo que se pretendía construir.

Para el presente trabajo se decidió continuar en esta misma línea de investigación, porque se consideraron básicamente dos aspectos. El primero fue la importancia del trabajo con las matemáticas experimentales, al tener la posibilidad de utilizar datos reales para describir situaciones de variación en un contexto físico (de movimiento) para caracterizar la actividad matemática que se genera y la construcción de modelos matemáticos. El segundo fue la necesidad de adaptar recursos pedagógicos, en los cuales se describieran claramente los escenarios de uso para la utilización de las calculadoras TI-92 o Voyage 200 y el CBR, puesto que son artefactos con los que cuentan las instituciones educativas que participaron en el proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media de Colombia* y que han sido poco utilizados por falta de formación y experiencia de los profesores en el uso de dichos artefactos.

Inicialmente se pensó en realizar una secuencia de situaciones para ser aplicada con estudiantes de la educación básica y media, pero debido a las dificultades de tiempo para realizar las aplicaciones en las instituciones que cuentan con estos artefactos, se decidió utilizar estas situaciones en la formación de los estudiantes de la licenciatura en Educación Básica Énfasis en Educación Matemática y la licenciatura en Educación Matemática y Física de la Universidad del Valle.

Esta investigación estuvo adscrita a la línea de formación de Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática y el diseño e implementación de las situaciones se fundamentaron en los desarrollos de la Didáctica Fundamental de Brousseau, la Teoría Antropológica de lo Didáctico y algunos elementos de la Ergonomía Cognitiva, articulados a los desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas por Trouche (2005a), que dan cuenta del papel de los instrumentos materiales o simbólicos en la construcción de conocimiento matemático, elementos que han sido descritos en el Capítulo 2.

Debido a la poca familiaridad de la investigadora con la utilización del sensor de movimiento (CBR) en las prácticas de clase, inicialmente se realizó una experiencia en el *Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM)* en el periodo febrero-junio de 2009. En este seminario se realizó el estudio y análisis de algunas perspectivas del significado de modelación de los principales elementos teóricos del enfoque instrumental y de la relación de las matemáticas con experiencias reales a partir de la integración de un sensor de movimiento, para éste último se utilizó la *Guía para estudiantes del CBR*.

De esta primera práctica no quedaron registros audiovisuales, pero brindó a la investigadora elementos importantes para realizar el análisis a *priori*. Los elementos importantes que proporcionó fueron la identificación del grado de interés de los estudiantes, la importancia para los estudiantes de conocer cómo funciona el CBR, las condiciones del entorno a tener en cuenta para su adecuado uso, las restricciones que tiene, los esquemas de uso y de acción instrumentada que surgen, los fenómenos didácticos, entre otros. Como evidencia de este proceso se tiene el diseño virtual del curso ver Figura 11.

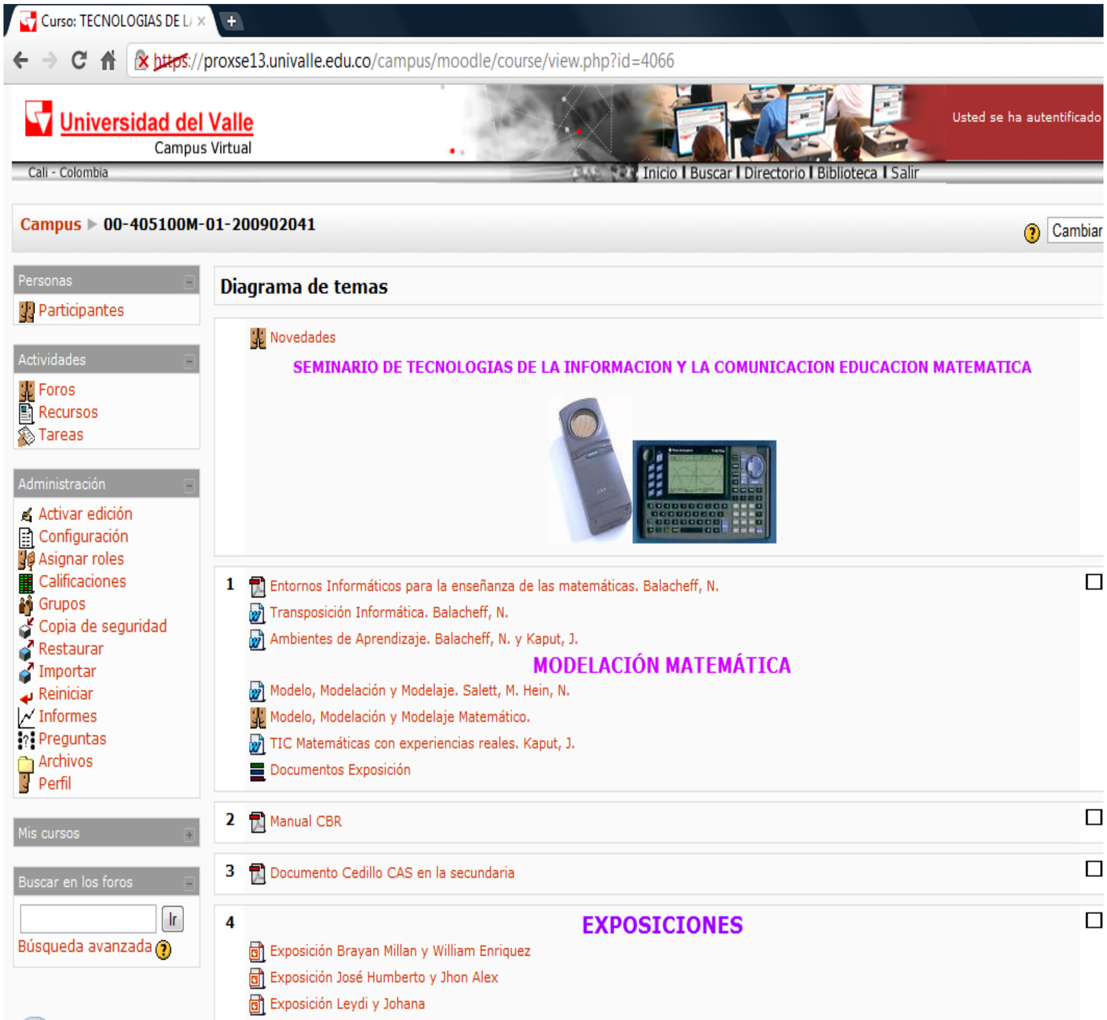


Figura 11. Diseño virtual del Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática.

3.2. Micro-ingeniería Didáctica

Como referentes para la metodología de investigación, inicialmente se consideraron los elementos básicos de una Micro-ingeniería Didáctica que se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, lo que se refiere a la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, así las Micro-ingenierías Didácticas que son más fáciles de llevar a la práctica que las Macro-ingenierías.

Si bien las Micro-ingenierías y las Macro-ingenierías permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase, no garantizan necesariamente establecer un vínculo con la complejidad esencial de los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Ellas se caracterizan en el registro de los estudios de caso, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*. Es importante señalar que desde su origen la Micro-ingeniería Didáctica ha pretendido constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones (Artigue et al. 1995).

La Micro-ingeniería Didáctica es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico. Se distinguieron temporalmente en su proceso experimental cuatro fases las cuales se describen brevemente a continuación según lo presentado por Artigue et al. (1995):

Fase 1 de análisis preliminares. Fue la fase de concepción, en ella se tomaron como marco teórico didáctico general la Teoría Antropológica de lo Didáctico, el enfoque instrumental y el enfoque epistemológico y matemático, los que se utilizaron para los análisis preliminares y fueron desarrollados en el capítulo 2. A partir del enfoque instrumental, se dio cuenta de los procesos de génesis y orquestación instrumental. El enfoque epistemológico y matemático sirvió para tomar en consideración la evolución del concepto de función y el significado de los sistemas de representación matemática para el análisis de la enseñanza con TIC y sus efectos, las dificultades y obstáculos que determinan su evolución; y por supuesto todo lo anterior con el fin de caracterizar la naturaleza del álgebra escolar, el papel de las TIC en la actividad matemática que genera en el aula de clase, así como, su impacto en la apropiación y construcción de nuevos recursos por parte de los estudiantes.

El análisis de las restricciones se efectuó al considerar tres enfoques: didáctico, epistemológico y cognitivo.

Fase 2 de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la Micro-ingeniería. En esta fase se concretó el sistema de aprovechamiento didáctico utilizado en el desarrollo de las situaciones y su rejilla de análisis, al identificar como categorías de análisis los elementos de la aproximación Antropológica de lo Didáctico y el enfoque Instrumental. Estas categorías sirvieron como base para realizar el análisis *a priori* y poder controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Tradicionalmente este análisis comprende una parte descriptiva y una predictiva, aunque el estudiante se toma en cuenta en un doble nivel, descriptivo y predictivo, el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo.

Fase 3 Experimentación. Esta consistió en el desarrollo efectivo de la secuencia didáctica, en una práctica de clase particular. En este caso cada situación tuvo una duración de tres (3) horas: dos (2) horas de experimentación y una (1) hora para la socialización y discusión de las respuestas dadas.

Fase 4 Fase a posteriori y validación. En esta fase, la investigadora tomó en consideración el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación. Los datos analizados fueron el registro audiovisual de las observaciones realizadas en la implementación de la secuencia de situaciones, para ello se transcribieron algunos episodios que muestran evidencias de cómo los estudiantes asumieron los diferentes momentos de estudio y verbalizaron los esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada, las restricciones del artefacto que lograron identificar y los fenómenos didácticos que se hicieron explícitos. Por otro lado, se analizaron las producciones escritas de los estudiantes, en ellas se identificaron las técnicas, tecnología empleadas por los estudiantes. Estos datos se complementaron con la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori*.

El proceso de validación de las hipótesis formuladas es interna en la Micro ingeniería, pues no utiliza los esquemas usuales de validación estadística asociados con las experimentaciones en clase, la validación estadística generalmente recurre a fundamentarse implícitamente en el principio de las diferencias mesurables constatadas y cómo éstas se relacionan con las variables sobre las cuales se ha influido para diferenciar clases experimentales y clases de control.

3.3. Ingeniería Didáctica Exploratoria

Si bien en la línea de Tecnología de la Información y la Comunicación en Educación Matemática de la Universidad del Valle se utilizó como referente metodológico la Micro-ingeniería Didáctica en varios informes de investigación, en este trabajo se tomó en consideración la *Ingeniería Didáctica Exploratoria*. El término Exploratorio hace alusión a la integración de TIC en las prácticas de clase[8], permitiendo observar cómo se da el desarrollo efectivo del proceso de exploración de las situaciones, qué dificultades encuentran los estudiantes, qué estrategias desarrollan, con qué dificultades se encuentran los profesores, así como comprender los procesos de génesis instrumental, particularmente al trabajar con CAS.

El trabajo que se tomó como referencia y que ha empleado esta metodología es la tesis doctoral de Haspekian (2005) bajo la dirección de Artigue al integrar en la escolaridad obligatoria de Francia un artefacto informático profesional[9] como la hoja de cálculo a la enseñanza de las Matemáticas y conjugar los aportes de la ergonomía cognitiva y la antropología didáctica, con el fin de comprender mejor las dificultades encontradas y los medios de acción. En el trabajo elaborado su reflexión se apoya en diversos estudios complementarios tales como el análisis del artefacto "*hoja de cálculo*"; análisis de los recursos puestos a disposición de los profesores; concepción y estudio de un dispositivo didáctico basados en los artefactos y recursos pedagógicos disponibles y hace visible un primer lugar de encuentro simultáneo el mundo del álgebra con la hoja de cálculo. Estos análisis despejan las preguntas relativas a los recursos pedagógicos (Guin & Trouche, 2007) y a sus modos de descripción, así como a las prácticas de formación.

[8] Las prácticas de clase hacen referencia a los conceptos y nociones matemáticas, el tipo de tareas seleccionadas por el profesor, así como la actividad observable del estudiante en una clase dada.

[9] Se entiende por artefactos informáticos profesionales los artefactos concebidos inicialmente para usos profesionales sin una intencionalidad educativa y que han sido importados al sistema de enseñanza.

De otra parte la investigación de Haspekian y Artigue (2007) mostró interés en pensar las conexiones entre las concepciones de ambientes de aprendizaje informáticos y su aprovechamiento didáctico. Igualmente mostró que una de las dificultades encontradas por los profesores es que no disponían de un repertorio de situaciones y tareas adaptadas para responder a los objetivos previstos y que además les faltaban referencias sobre las posibles reacciones de los estudiantes, por esto en el trabajo de preparación se realizó mayor énfasis sobre la gestión de las génesis individuales y la articulación con el trabajo en lápiz y papel. Esto evidenció insuficiencia en la descripción de los escenarios de uso y del acompañamiento de las génesis instrumentales. Por lo anterior es importante evaluar el tipo de consignas dadas a los estudiantes, definir los objetivos, determinar claramente los prerrequisitos, organización material, temporal y de los contenidos matemáticos, así como de los roles respectivos de los estudiantes y del profesor en la descripción de los recursos pedagógicos que se encuentran a disposición de los profesores.

Para el desarrollo de la secuencia didáctica de esta investigación, el trabajo realizado por Haspekian y Artigue (2007) es fundamental porque brinda elementos para dar cuenta de los procesos de integración de tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en este caso para el estudio de la función de manera experimental al utilizar las calculadoras graficadoras y simbólicas y un sensor de movimiento (CBR), interesa así caracterizar los escenarios de uso y el acompañamiento que se realiza a las génesis instrumentales colectivas en la enseñanza de las funciones.

3.4. Ingeniería Didáctica de Formación al Integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas

Este enfoque metodológico es una extensión del concepto de Ingeniería Didáctica definido en Didáctica de las Matemáticas, es decir, se validan las hipótesis teóricas que conciernen a las formaciones con un desarrollo efectivo o puesta en juego en una formación.

La propuesta presentada por Emprin (2006) en su tesis “Ingeniería de formación que integra las TIC para profesores de Matemáticas en formación inicial y continua” bajo la dirección de Lagrange y Blanchard, tiene como una de sus hipótesis que las prácticas de clase no son suficientes y que se debe llevar a los estudiantes a construir sus propias prácticas de clase, es decir, a proyectarse en una práctica que para ellos sea posible, a problematizar su práctica, esto es a identificar los problemas subyacentes y a elegir y proponer claves para su solución.

Igualmente Emprin (2006) propone varias opciones de organización de la formación. Una de ellas consiste en una sesión propuesta por la investigadora, quien realizó el análisis *a priori*, lo que permite acceder a sus elecciones en relación a lo que ella ha trabajado y el estudiante acepta poner en práctica la secuencia propuesta por la investigadora o ser reformador de la misma y llevarla a cabo.

Al utilizar este enfoque se da cuenta del contexto en el que se desarrolló la intervención, por tal motivo se optó por un enfoque metodológico distinto en el que se otorga importancia al proceso de formación inicial y continua.

El modelo propuesto por Emprin (2006) en términos de sus *procesos,* fue adaptado con el fin de dar cuenta del proceso que se llevó a cabo en esta investigación así:

(1) El Desarrollo de la Ingeniería Didáctica Exploratoria (2) La Actividad de los Estudiantes y (3) Las Preguntas de los Estudiantes, se ilustran en la Figura 12, los niveles verticales representan los aspectos centrales de cada uno de los *Procesos* y por colores los niveles horizontales representan sus interconexiones y fases.

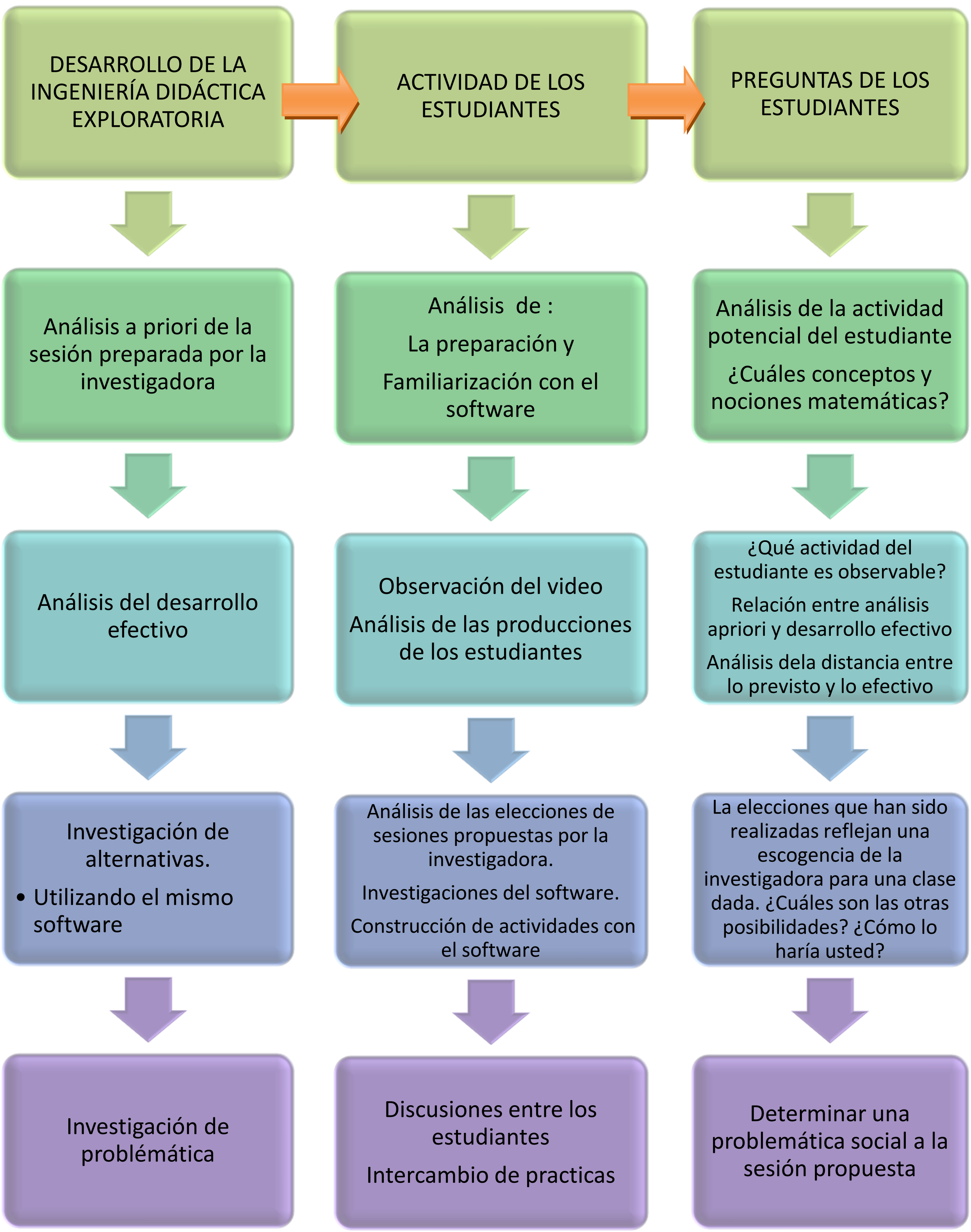


Figura 12. Adaptación del modelo propuesto por Emprin (2006) para la formación inicial y continua de profesores.

De acuerdo a la Figura 12, la manera como la investigadora concibe el *Desarrollo de la Ingeniería Didáctica* incide en la *Actividad y Preguntas de los Estudiantes,* pues de los análisis preliminares y a priori realizados depende la preparación dada a los estudiantes y a su vez ellos pueden identificar el tipo de conceptos y nociones matemáticas que se favorecen. Así, cada uno de los procesos a su vez se interrelacionan de manera horizontal y para el *desarrollo* de la *Ingeniería Didáctica Exploratoria*, interesa no sólo el análisis de las situaciones seleccionadas realizado por la investigadora, sino también la producción y propuestas de los estudiantes. Esta relación o interconexión se presenta en cada una de las fases como se muestra a continuación:

La primera fase, en el nivel horizontal, es el *análisis a priori de la sesión preparada por la investigadora*, en ella se describe como ya se mencionó, el sistema de aprovechamiento didáctico y se consolida la rejilla de análisis de las situaciones propuestas. En cuanto a la *Actividad de los Estudiantes* éstos recibieron una *preparación* de los elementos teóricos tales como el estudio de la Didáctica Fundamental de Brousseau (Margolinas, 2009) que fundamentan el diseño y la sistematización de las situaciones y algunos elementos del enfoque instrumental (Trouche, 2005a), así como una *familiarización* con el CBR para el estudio de las funciones. Con relación a las *Preguntas de los Estudiantes* en el desarrollo de la situación ellos lograron identificar los *conceptos y nociones matemáticas*, así como *cuál es la actividad potencial* de quienes dan solución a las situaciones propuestas con el CBR. La descripción de cada uno de éstos análisis fueron realizados en las sesiones 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 de este capítulo.

La segunda fase es el *análisis del desarrollo efectivo*, en esta fase se aplicaron las situaciones presentadas en los ANEXOS A y B a los estudiantes y se realizó el registro audiovisual, a partir del cual se resaltaron algunos episodios que de acuerdo al análisis a priori la investigadora consideró pertinentes. Igualmente se analizó la producción escrita del estudiante que actuó como estudiante sherpa en cada una de las partes de la guía de aplicación, esta decisión se tomó porque al tratarse de la construcción de esquemas sociales de uso, interesan los esquemas que el estudiante sherpa comparte y construye con sus compañeros durante la aplicación de la guía. Además en esta fase se logró identificar la actividad que era factible de observar en el desempeño de los estudiantes que actuaron como estudiantes sherpa. A partir de las justificaciones dadas en términos de los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada Trouche (2005a), se logró establecer la relación entre el análisis *a priori* y el desarrollo efectivo y la distancia que existe entre éstos. Lo anterior es ampliado en el capítulo 4.

La tercera fase es la realización de investigaciones alternativas, en esta investigación para dar cuenta de ellas se planteó adaptar y/o modificar las situaciones prescritas, para ello se propuso a los estudiantes presentar un trabajo final, para que plasmaran algunos de los elementos teóricos discutidos durante el curso y los utilizaran para el análisis de una de las situaciones realizadas en clase u otra presentada en la guía para estudiantes del CBR. También se planteó la posibilidad de hacer ajustes a las preguntas de las guías, o de adicionar o quitar aquellas que no consideraran pertinentes. Los estudiantes lograron realizar una reflexión de las sesiones propuestas por la investigadora y de la implementación del CBR, sólo un estudiante logró la construcción de una situación con el CBR distinta a las propuestas, al mostrar otras posibilidades y cómo lo harían. Estas reflexiones son presentadas al final del capítulo 4 y la situación propuesta por el estudiante en el ANEXO D.

En la cuarta y última fase, se propone una investigación de la problemática identificada en el desarrollo de la Ingeniería Didáctica Exploratoria, en este caso la problemática es presentada por la investigadora y está relacionada con la falta de articulación de los diferentes pensamientos matemáticos mencionados por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998), pues en la práctica los profesores tienden a multiplicar los diferentes tipos de problemas, a especializarse en las técnicas y a independizarse de los elementos teóricos como lo señala Gascón (1999). En la enseñanza del álgebra en la educación básica de Colombia, lo que predomina es el trabajo con las incógnitas y no surge la necesidad de utilizar parámetros, así mismo la manipulación de expresiones algebraicas tiene un carácter puramente "formal", esto es, independiente de cualquier sistema matemático o extramatemático, cuya modelización podría dar "sentido" a las manipulaciones algebraicas, la utilización de fórmulas tienen un papel de reglas para automatizar ciertos cálculos, sin precisar ningún tipo de “justificación” ni “demostración” algebraica, lo cual provoca una separación entre los usos de fórmulas y del lenguaje funcional.

Con respecto a la enseñanza del álgebra escolar Agudelo (2007), afirma que la mayoría de los participantes de su investigación las conceptualizan como un conjunto de temas para ser estudiados como una secuencia estricta, donde el álgebra es el bloque de temas que se estudian en los grados 8 y 9, de acuerdo con los enfoques de los textos guía. Las descripciones que los profesores hicieron del tipo de trabajo que organizan en el grado 8, los contenidos en los que se centran y el orden de temas seguido muestran una secuencia común que se puede resumir así: una vez cubiertas las unidades temáticas: ‘números raciones, irracionales y reales’, el álgebra inicia con la presentación de ‘expresiones algebraicas’ y la definición de expresión algebraica; después de haber visto ‘partes de una expresión algebraica y tipos de expresiones algebraicas’, el trabajo continúa con ‘reducción de términos semejantes y operaciones con expresiones algebraicas’. La secuencia continúa con ‘factorización’, ‘ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones’ y terminan con la unidad de ‘problemas’. Lo cual evidencia la manipulación de expresiones algebraicas desde un punto de vista formal y como reglas para automatizar ciertos cálculos.

Por lo expuesto anteriormente, a los estudiantes que participaron de esta investigación se les insistió en buscar y proponer situaciones de aprendizaje que contribuyeran a la identificación de la dependencia de las variables (distancia vs tiempo), su variación y cambio, igualmente se les mostró cómo se puede lograr en un contexto experimental, la importancia que cobra el sistema métrico utilizado, la necesidad de realizar estimaciones, la necesidad de conocer los diferentes sistemas de representación, así como las ventajas y desventajas que tiene la integración de las TIC; de esta manera quedó abierta la búsqueda de situaciones que aporten a lograr una modelización algebraica en la educación básica en Colombia, teniendo como referencia que el uso de un CAS pueden ayudar a dicha modelización.

Cada una de las fases descritas anteriormente fundamenta la metodología que se siguió en esta investigación, igualmente las fases hacen parte de cada uno de los procesos; así al realizar la lectura vertical de cada proceso se tiene:

- El ***Desarrollo de la Ingeniería Didáctica Exploratoria*** parte del análisis a *priori* de la sesión preparada por la investigadora, además de los elementos teóricos mencionados anteriormente se tuvo en cuenta la "Guía para estudiantes del CBR" y la experiencia previa de su aplicación. El *análisis del desarrollo efectivo* se realizó a partir del registro audiovisual y la producción escrita de los estudiantes. Las *investigaciones alternativas* se realizaron utilizando el mismo software, pues se propuso modificar las situaciones de la "Guía para estudiantes del CBR" o proponer otras situaciones con el CBR. Y finalmente la investigación de la problemática fue planteada con el fin de lograr una verdadera modelización algebraica en la educación básica en Colombia.

- La ***Actividad de los Estudiantes***, se centró en su *preparación*, a partir del estudio de los elementos principales de la Didáctica Fundamental de Brousseau y de algunos elementos provenientes de la Ergonomía Cognitiva articulados a los desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas elaborados por Trouche que dan cuenta del papel de los instrumentos materiales o simbólicos en la construcción de conocimiento matemático, como elementos teóricos indispensables para el diseño de situaciones de aprendizaje. De la misma manera se realizó una familiarización con el tipo de situaciones de aprendizaje que se quisieron promover, así como del rol del estudiante y del profesor (investigadora) en la aplicación de la misma, así mismo se explicitaron las concepciones respecto a los recursos pedagógicos que circulan en el contexto escolar según lo presentado por Guin y Trouche (2007).

  La familiarización con el manejo del CBR, se dio en el desarrollo efectivo de las situaciones seleccionadas para la aplicación, estas fueron filmadas con el fin de analizar la producción de los estudiantes. El *análisis de las producciones de los estudiantes* se presentará de manera detallada en el capítulo 4 de este documento.

En la *observación del video*, se puede evidenciar la puesta en escena de las situaciones seleccionadas, sin embargo, para su análisis se describen algunos episodios en los cuales se resaltan los elementos teóricos que fueron importantes para el análisis a priori de dichas situaciones.

Durante la intervención no se alcanzó a realizar un *análisis de las elecciones de sesiones propuestas del profesor (investigadora)*, sin embargo, los estudiantes presentaron un trabajo al final del curso, en él los estudiantes dejaron evidencias de la reflexión que realizaron frente al tipo de situaciones de aprendizaje propuestas por la investigadora. Debido al corto tiempo que se tuvo para la fundamentación teórica y aplicación de las situaciones no se realizaron, ni analizaron otras *investigaciones* con el CBR. Sólo dos estudiantes llegaron a proponer en el trabajo final una adaptación a una de las situaciones y generaron una nueva situación para ser realizada con el CBR.

- En cuanto a las ***Preguntas de los Estudiantes***, en la intervención con la puesta en escena de las situaciones de aprendizaje se hizo énfasis en la identificación de *los conceptos y nociones matemáticas* trabajadas y *cuál era la actividad potencial del estudiante*, qué actividad es observable del estudiante durante el desarrollo efectivo, en términos de los esquemas de uso y de acción instrumentada utilizados para su solución. *La relación entre el análisis a priori y el desarrollo efectivo y la distancia entre el análisis a priori y el desarrollo efectivo* fue realizada por la investigadora y no por los estudiantes.

Los estudiantes lograron plasmar en los trabajos finales ideas que dan cuenta de la intencionalidad de la investigadora en las elecciones realizadas para el trabajo con funciones, sin embargo no llegaron a explicitar otras posibilidades, aunque la investigadora brindó la posibilidad para que los estudiantes mencionaran cómo lo harían ellos, no lograron adaptar o modificar el recurso que tenían a su disposición, de la misma manera los estudiantes lograron identificar algunas de las limitaciones del trabajo con las TIC y específicamente del trabajo con el CBR.

A continuación se amplían los análisis mencionados en la *primera fase* del Desarrollo de la Ingeniería Didáctica Exploratoria y de la Actividad y Preguntas de los Estudiantes, según la Figura 12.

3.5. Análisis A Priori de la Sesión Preparada por la Investigadora

Como ya se ha mencionado, el tipo de situaciones que se quisieron favorecer fueron aquellas que integran un Sistema Algebraico Computacional como una alternativa para la enseñanza del álgebra, con el fin de lograr una algebrización de las funciones con variable real, a partir de la captura y análisis de datos reales al realizar movimientos frente al CBR; este tipo de experiencias involucran la variación de dos magnitudes (tiempo vs distancia).

Para ello, la investigadora preparó dos sesiones de tres horas de clase, en las que los estudiantes pusieron en práctica sus conocimientos matemáticos para el estudio de la variación en un contexto físico (de movimiento). El análisis *a priori* que realizó la investigadora permitió acceder a las elecciones tomadas, de acuerdo a las consideraciones didácticas que se construyeron en esta investigación. De esta manera, el estudiante pudo conocer la secuencia didáctica, realizarla y llegar a "adaptar" la misma, de acuerdo a sus intereses o necesidades.

3.5.1. Sistema de Aprovechamiento Didáctico

El *sistema de aprovechamiento didáctico* es un nivel esencial, pues permite utilizar de la mejor manera posible los diferentes recursos de los que se dispone en el aula de clase, para llegar a producir nuevos y asegurar la coordinación e integración entre los diferentes artefactos y las situaciones didácticas. A continuación se describen las generalidades del hardware y software didáctico que se utilizaron en el desarrollo de las situaciones.

3.5.2. Hardware Didáctico

Los conocimientos matemáticos que se movilizaron en las situaciones prescritas fueron las funciones con variables reales, que se tomaron como aspecto central el estudio de relaciones espacio – temporales, a partir de la representación gráfica cartesiana, de manera experimental.

El tipo de situaciones que se abordaron corresponden al estudio de la variación en un contexto físico (de movimiento), para ello se utilizó la calculadora Voyage 200 y un detector sónico de movimiento CBR, a través del cual se puede capturar, ver y analizar datos del movimiento, lo que motivó el interés de los estudiantes en la utilización de datos reales y el correspondiente ejercicio de hacer las conexiones entre estos y sus propios conceptos matemáticos.

El programa Ranger con el que funciona el CBR incluye los programas DISTANCE MATH y BALL BOUNCE, éstos fueron utilizados en la implementación de cada situación, DISTANCE MATH para la exploración de la función lineal y afín al utilizar los conceptos de distancia y tiempo, y BALL BOUNCE para la función cuadrática a partir de la caída libre de objetos que rebotan, para con ellos lograr determinar que la aceleración, en este caso la gravedad, es constante.

Como parte de la orquestación instrumental sugerida en la guía para estudiantes del CBR se encuentra hacer uso de un ViewScreen de la calculadora Voyage 200, además como se contaba con un solo CBR, el ViewScreen permitió a los otros estudiantes observar lo sucedido y poder brindar sus aportes en el desarrollo efectivo de la situación.

De la misma manera, se consideró necesario identificar el "*estudiante Sherpa*", éste desarrolló la situación, presentó sus conjeturas, las puso a prueba y trató de convencer a sus compañeros de la veracidad de ellas, éste estudiante recibió una retroalimentación de sus compañeros que le ayudó a mantener o cambiar de opinión frente a las conjeturas propuestas. La organización de las clases no se realizó de manera tradicional, es decir, no se parte del discurso del profesor proporcionando conceptos y procedimientos para que luego los estudiantes realicen los ejercicios al tratar de aplicar lo explicado por el profesor, sino que se presentaron las situaciones que primero fueron asumidas por los estudiantes, se discutieron en grupo para que finalmente cada estudiante contestara de manera individual las preguntas planteadas en cuanto a la captura de datos y exploraciones realizadas. Las intervenciones de la investigadora se dieron para orientar la discusión y realizar algunas aclaraciones que consideró pertinentes para el desarrollo de las situaciones.

En el desarrollo de las situaciones se privilegió la génesis instrumental social al considerar los siguiente factores: el primero es que el trabajo con el ViewScreen garantizó más el trabajo en grupo que de manera individual, la disponibilidad del CBR se dio sólo en los momentos de clase y la investigadora presentó tanto elementos teóricos como prácticos, durante el desarrollo de las situaciones.

Para dar cuenta de la actividad de los estudiantes en el curso fue necesario considerar las siguientes categorías de análisis:

- La utilización de los diferentes esquemas de uso y acción instrumentada.
- La adaptación y/o transformación realizada a la situación planteada inicialmente.
- Concepciones acerca de la importancia que tiene el estudio de situaciones de variación en un contexto físico (de movimiento) en la construcción del conocimiento matemático.
- Igualmente identificar dentro de los esquemas de uso o de acción instrumentada algunas de las restricciones de los artefactos a utilizar en el desarrollo de las situaciones propuestas tales como: las restricciones internas y restricciones de comando (Ver ANEXO C).

3.5.3. Software Didáctico

Toda Actividad de Estudio o Investigación (AEI) desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico parte de una pregunta generatriz Q, que permite hacer emerger un tipo de situaciones y una técnica de resolución de dichas situaciones, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo Chevallard (1999; citado por García, Bosch, Gascón y Ruiz 2007).

Si esta pregunta generatriz Q es lo suficientemente fecunda dará origen a nuevas situaciones cuya respuesta producirá una sucesión de organizaciones matemáticas articuladas entre sí, en un lapso relativamente largo, esto es, un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI).

Para la presentación del REI se toman en consideración algunos elementos presentados por García, Bosch, Gascón y Ruiz (2007), quienes plantean que en el comienzo de la actividad en cualquier campo de las matemáticas, la cuestión fundamental que conviene plantearse son las razones de ser que han motivado la creación y desarrollo de este campo, y que motivan también su presencia en los programas de estudio.

Como se mostró en el Análisis Epistemológico para el caso de las "funciones", una pregunta generatriz se puede dar desde un contexto físico para el estudio de la variación, esto es, el estudio de situaciones en las que dos o más magnitudes varían, las cuales dependen unas de las otras, y en torno a las cuales se puede describir y caracterizar esta variación. Provisionalmente, la podemos enunciar de la siguiente forma:

> Qi: Ante una situación S_i en la que dos o más magnitudes son susceptibles de ser cuantificadas y estar relacionadas, al variar unas con respecto de las otras, ¿qué características tiene esta variación?

En el REI que se diseñó, se propuso ubicar a las tareas, a las técnicas y a la tecnología en un entorno de tipo físico de movimiento, puesto que constituyen un fenómeno familiar aplicable en la educación secundaria que permitirá desarrollar una actividad matemática suficientemente amplia, además de aportar a la creación de ambientes que posibiliten la interacción entre los estudiantes y los Sistemas Algebraicos Computacionales. La caracterización de las génesis instrumentales (colectivas e institucionales), es decir, los dos procesos duales y simultáneos mediante los cuales un artefacto se convierte en un instrumento: instrumentación e instrumentalización no lograron hacerse del todo explícitos por el corto tiempo que duró la intervención; sin embargo, se pudo describir la relación que se dan entre los diferentes elementos (calculadora Voyage 200, CBR, viewscreen, las situaciones, entre otros), y por supuesto la relación de éstos con los estudiantes y con la investigadora.

Se debieron diferenciar las situaciones en las que se toman datos reales a partir del movimiento de una persona, esto es, corporal, y aquellas que describen el movimiento de un objeto externo (pelota, carro, etc.), fue necesario identificar qué representa en la situación real el origen de las coordenadas cartesianas, es decir, si corresponde a la posición del CBR o no, así como la utilización de los diferentes sistemas de representación y los procedimientos utilizados.

Las magnitudes que se pusieron en juego para formular la pregunta generatriz que enlazó el proceso de estudio del conjunto de praxeologías deseadas fueron:

- T: la duración del “Movimiento” (T en adelante).
- D: la posición (distancia recorrida) en cada instante.

Donde la relación entre la variable T y D es unívoca, es decir, que para cada medida de una cantidad de la primera magnitud, existe sólo una cantidad de la segunda magnitud relacionada con ella. Con los pocos elementos introducidos hasta ahora para estructurar el REI, la pregunta generatriz puede ser enunciada de la siguiente forma:

> Q: ¿Qué elecciones toma en cuenta para planificar y realizar un “movimiento” según la situación propuesta?

Esta pregunta es una cuestión crucial, en varios sentidos:

Primero por su generalidad lleva implícita la necesidad de una mayor estructuración, que ahora forma parte de la tarea en sí y es responsabilidad de los estudiantes de la clase. Segundo es capaz de generar una actividad matemática a partir de un medio matemático relativamente limitado (técnicas aritméticas elementales) y que forma parte del medio matemático de un integrante de la institución en la que el REI se ubica. Finalmente, la construcción de diferentes movimientos, que en principio surgirán como praxeologías puntuales permitirán la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas relacionadas con ellas y que serán el verdadero motor del REI. De esta forma, la comunidad de estudio tendrá la responsabilidad de:

- Elegir un primer estado: comenzar en un instante determinado, a una cierta distancia y con cierta velocidad. Este estado inicial adquiere un carácter provisional y será revisable en cada momento y susceptible de ser modificado. De esta forma, este primer estado comienza a desempeñar el rol de un parámetro de la situación.

- Decidir cómo se van a generar los próximos estados, esto es, el tipo de variación que caracterizará al sistema. No existe una única forma de realizar esta tarea y supone la toma de decisiones sobre las dos variables del sistema:

  En primer lugar, establecer la unidad de medida temporal que regirá el movimiento. En tal caso, el conjunto de valores de la variable T puede ser identificada con {0, 1, 2,…}, sin embargo es necesario aclarar que esta es una variable continua.

  En segundo lugar, decidir cómo serán los desplazamientos, según el tiempo anterior. De nuevo el espectro donde elegir es amplio, desde un movimiento rectilíneo, curvilíneo u oscilatorio. No obstante, se deben considerar las opciones según las restricciones institucionales y con la actividad matemática que se desea desarrollar.

- Simular el sistema, esto es, construir un conjunto de estados lo suficientemente amplio como para permitir que se desarrolle el trabajo experimental necesario para el estudio.

Aunque la libertad aún es grande, es de esperar que emerjan movimientos uniformes según una ley de movimiento rectilíneo uniforme, que darán lugar a diferentes movimientos, entre ellos el de caída libre.

El REI parte del análisis de los movimientos, según diferentes tipos de variación (tarea $T_{\text{variación}}$), es decir, elegir los valores de los parámetros iniciales y calcular las velocidades empleadas a partir del desplazamiento en los tiempos establecidos.

La actividad matemática que es posible desarrollar con este tipo de situaciones permite por un lado controlar las variables del sistema (en el sentido de tomar decisiones sobre sus parámetros), esto es, tomar decisiones que permitan prever y anticipar su comportamiento.

Con todos los elementos presentados anteriormente es posible generar en los estudiantes esquemas de uso que le permitan utilizar el CBR y articular los diferentes sistemas de representación que se pueden utilizar en la calculadora Voyage 200, lo cual muestra la función pragmática de los esquemas, poder anticipar y planear las acciones que se deben realizar para la captura de los datos deseados con lo cual se evidencia su función heurística y entender los diferentes tipos de variación que se pueden dar, es decir, dar cuenta de su función epistémica.

Tanto el hardware como el software didáctico descrito anteriormente brindaron elementos que permitieron el análisis de la gestión de la clase y para dar cuenta de ellos la herramienta más adecuada es el video, igualmente se contó con las guías de aplicación (Ver ANEXO A y B) y las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas planteadas en las guías.

A continuación se presenta la rejilla de análisis que se utilizó para observar los videos y analizar los diferentes registros con los que se cuenta, que refleja el interés y la visión particular con la que la investigadora enfocó los diferentes aspectos, así como la relación existente entre los análisis *a priori* y el desarrollo efectivo de las situaciones:

Aproximación Antropológica de lo Didáctico		Enfoque Instrumental	
Praxeología Matemática	Tipos de tareas	Instrumentación	Esquemas de Uso
	Técnicas		Esquemas de acción instrumentada
	Tecnología		Fenómenos didácticos
	Teoría	Instrumentalización	Restricciones del artefacto
Momentos De Estudio	Primer Encuentro		
	Momento Exploratorio		
	Momento de trabajo de técnica		
	Momento tecnológico teórico		
	Momentos de institucionalización		

Tabla 2. Rejilla de análisis de las situaciones.

3.6. Análisis de la Preparación de los Estudiantes

De acuerdo al primer acercamiento la investigadora en el *Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM)* en el período febrero-junio de 2009, seleccionó dos de las cinco situaciones que tiene la guía para estudiantes del CBR para ser aplicadas en el curso “Diseño de Ambientes de Aprendizaje Informático y Nuevas Concepciones de Recursos Pedagógicos” en el periodo febrero-junio del 2010. Este curso buscó explicitar las concepciones respecto a los recursos pedagógicos que circulan en el contexto escolar, así como fundamentar el diseño de situaciones a la luz de los desarrollos de la didáctica fundamental y desde la perspectiva teórica de lo instrumental.

Cabe resaltar que la formación que reciben los estudiantes de la Universidad del Valle que participaron del curso según su plan de estudio, está determinada así: la Licenciatura en Educación Básica, Énfasis en Educación Matemática, se compone de cinco líneas de formación: Matemáticas, Didáctica de las matemáticas, Histórica-epistemológica, Comunicación, lenguaje y razonamiento matemático y Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática (TICEM), cada una de ellas respaldada por la respectiva línea de investigación. En el caso de la Licenciatura en Educación Matemática y Física, a las líneas de formación mencionadas anteriormente se le adiciona la Física.

Es importante mencionar que el curso seleccionado para la aplicación de las situaciones es una electiva profesional, lo cual garantiza que ya han recibido cursos básicos de integración de tecnologías de la información y la comunicación a la enseñanza de las Matemáticas propuestos por la línea de TICEM.

Durante el desarrollo del curso la investigadora presentó los elementos teóricos necesarios desde la didáctica fundamental y el enfoque instrumental que sustentaban el diseño de las situaciones y las elecciones realizadas, se generó la participación de los estudiantes a través de la socialización y discusión de los enfoques teóricos con el fin de brindar elementos suficientes para analizar mejor la situación prescrita.

3.7. Análisis de Familiarización con el CBR

En esta sección se presentó un análisis puntual del diseño de cada situación, según los elementos presentados en la Tabla 2.

3.7.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín

En la guía de la primera situación referente al estudio de la gráfica lineal y afín (ver ANEXO A), la parte I indaga sobre las hipótesis que se generan al interpretar la gráfica en torno a la distancia inicial, a los movimientos y elementos que se deben considerar para reproducir exactamente la gráfica dada. La parte II busca además de realizar el análisis e interpretación de los datos en la gráfica, conectar éstos con la razón que se puede establecer entre sus magnitudes y realizar conversiones en el Sistema Métrico, de esta manera se hace explícita la relación existente entre el pensamiento variacional y métrico, así como la importancia de poder conectar los diferentes sistemas de representación (gráfico, tabular y lenguaje natural) para describir o identificar instantes importantes en el movimiento a realizar.

Como los estudiantes no habían trabajado antes con el CBR, fue necesario describir en la guía la manera de acceder a los programas (software) que se utilizarían y la captura de los datos, como parte del proceso de instrumentalización con el que se descubrió y se seleccionaron las funciones pertinentes, en este caso, se utilizó el programa DISTANCE MATH, el cual reproduce gráficas aleatorias generalmente determinadas por tres segmentos de recta. Para retomar, corroborar las hipótesis y realizar el análisis de una misma gráfica todas las veces deseadas se utilizó el comando SAME MATH.

A continuación se presentan los elementos teóricos que se tuvieron en cuenta para su análisis.

3.7.1.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica lineal y afín

Se debe recordar que para elaborar una praxeología matemática es necesario utilizar una praxeología didáctica. A continuación se describen los diferentes momentos de estudio que se esperan ver en el desarrollo efectivo de la situación:

- **Momento del Primer encuentro**

En este momento los estudiantes realizan movimientos sin pensar mucho con el objetivo de observar lo que aparece en la pantalla de la calculadora, los estudiantes que han trabajado anteriormente con este tipo de gráficas consideran el concepto de velocidad y aceleración para determinar que tan rápido deben caminar, aquellos con menor experiencia tratan de moverse siguiendo la forma de la gráfica en el plano (al mismo nivel) y otros intentan subir y bajar.

- **Momento Exploratorio**

En este momento se intenta construir una técnica adecuada para generar el movimiento más cercano a la gráfica que se desea representar. Se realiza varias veces al considerar la misma gráfica, para poder generar la gráfica, los estudiantes deben tener en cuenta las magnitudes, establecer diversas formas de medir la distancia y el tiempo e identificar el tipo de desplazamientos, para ello deben establecer la distancia inicial, cuántos metros se debe desplazar y en cuánto tiempo, si se debe acercar o alejar del sensor, etcétera.

- **Momento del trabajo de la técnica**

Una vez comprendidas las variables a tener en cuenta, los estudiantes generarán nuevas gráficas e intentarán reproducir exactamente las gráficas de la mejor manera sin realizar muchos ensayos, esto es, a pensar y considerar todas las variables a tener en cuenta para generar la gráfica deseada.

- **Momento tecnológico – teórico**

Los estudiantes deben justificar sus movimientos es decir, por qué acercarse o alejarse del sensor, para qué segmentos de recta deberá moverse más rápidamente, para cuáles más lentamente, identificar qué propiedad física representan las pendientes de los segmentos, cuántos metros debe caminar y en cuántos segundos, realizar conversiones a diferentes unidades de medidas tales como m/min; m/h; km/h y finalmente establecer qué distancia recorrió realmente.

- **Momento de Institucionalización**

En este momento la investigadora indica la manera correcta de realizar la situación, las condiciones que se deben tener en cuenta para que no se generen "ruidos" en la captura de los datos, las relaciones que se establecen entre las magnitudes de la gráfica y la mejor manera de medirlo, este proceso se puede hacer durante el transcurso de la actividad al observar las estrategias utilizadas por los diferentes estudiantes.

- **Momento de evaluación**

Se deben conocer las razones que motivaron la creación y desarrollo de este tipo de situaciones, para ello es importante que el estudiante conozca la manera cómo funciona el CBR, el tipo de tecnología con la que funciona y las condiciones del espacio en el momento de la captura de datos. Además debe establecer para qué sirve y cómo utilizar el CBR y las diferentes representaciones que se generaron a partir de la captura de los datos y cómo puede relacionarlos con el conocimiento matemático involucrado.

3.7.1.2. Praxeología Matemática

La estructura de la praxeología matemática que se estudió considera:

Tareas: se privilegiaron aquellas que permiten el estudio de la variación en un contexto físico de movimiento.

Tipo de tarea: Establecer los movimientos que se deben realizar para generar la gráfica lineal y afín de distancia en función del tiempo.

Técnicas: se favoreció lectura e interpretación de gráficos, estimación de medidas de la distancia y el tiempo, conversión de unidades de medida.

Tecnología: En la lectura e interpretación de gráficos se dieron justificaciones a partir de la práctica experimental, al identificar las magnitudes y unidades de medida de los ejes de coordenadas; el significado de la pendiente; la interpretación de la razón entre la distancia recorrida y el tiempo para obtener una pendiente positiva, negativa o constante; y la distinción entre posición, distancia y desplazamiento.

En cuanto a la traducción del registro gráfico al tabular, se debía estimar la posición en cada segundo durante el tiempo que duraba la toma de datos, esto se podía realizar al hacer la lectura directa en el gráfico o al estimar la velocidad encontrada para cada segmento y a partir de ellos determinar en qué momentos se desplaza más rápido o más despacio.

Para pasar del registro gráfico al lenguaje natural debían construir un enunciado que describiera el gráfico analizado, para ello se esperaba que construyeran su propio contexto y utilizarán palabras claves como rápido, lento, valores de velocidad en metros/segundos, disminuyó o aumentó la velocidad, etcétera.

En cuanto a la estimación de medidas de la distancia y el tiempo, se tomaron como unidad de medida para la distancia la medida del lado de una baldosa y el tiempo se estimaba según los puntos que se generaban con el movimiento. Posteriormente se modificó la situación al apagar el ViewScreen para obligar la estimación del tiempo, una de las estrategias que se pueden utilizar es contar los segundos iniciando con mil, mil uno, mil dos, mil tres, etc. mentalmente.

Para la conversión de unidades de medida de la velocidad se utilizó la proporcionalidad, equivalencia de razones y regla de tres.

Teoría: Hace referencia al estudio de la teoría de funciones con variable real.

3.7.1.3. Instrumentación

A continuación se presentan los esquemas de uso y de acción instrumentada que los estudiantes pueden identificar y apropiarse durante la situación; así como los fenómenos didácticos identificados.

Esquemas de uso

Como los estudiantes no han trabajado antes con el CBR deben transferir esquemas de uso que tienen del trabajo con otros software o construir nuevos los que se pueden evidenciar en el desarrollo de la situación son:

- Conocer la forma de conexión del CBR a la calculadora.
- Transferir el programa RANGER del CBR a la calculadora o verificar que la calculadora lo tiene.
- Ejecutar el programa RANGER.
- Verificar el espacio disponible en la memoria de la calculadora para poder transferir el programa (17.500 bytes).
- Transferir el programa RANGER de calculadora a calculadora.
- Ingresar al menú principal del programa RANGER.
- Seleccionar como unidad de medida el metro, puesto que es la unidad más utilizada en nuestro contexto con el fin de establecer de mejor manera que tanto se ajusta su movimiento a la gráfica.
- Seleccionar en el menú principal APPLICATIONS, ejecutar el programa DISTANCE MATCH, que es el que genera gráficas aleatorias.

- Reconocer las representaciones gráficas que aparecen en la interface, las cuales están formadas generalmente por tres segmentos.
- Seleccionar SAME MATH para retomar nuevamente la misma gráfica y lograr un mejor ajuste.
- Seleccionar NEW MATH para generar una nueva gráfica.
- Regresar al menú principal o salir del programa RANGER.

Esquemas de acción instrumentada

Como los esquemas de acción instrumentada son coherentes y significantes con los esquemas mentales y éstos no son visibles, se pueden evidenciar a partir de las técnicas de acción instrumentadas entendidas como los gestos o acciones externas que involucran uno o varios artefactos. De esta forma los esquemas de acción instrumentada que se pueden presentar en la situación son:

- Identificar el punto de referencia que utiliza el CBR para capturar los datos.
- Establecer a qué distancia del CBR se debe iniciar el movimiento.
- Comprender a qué distancia y en cuánto tiempo debo realizar el movimiento en cada uno de los tramos de la gráfica.
- Anticipar la gráfica que genera la calculadora al realizar un determinado movimiento y corroborar las hipótesis al efectuar el movimiento según el razonamiento realizado.
- Identificar la variación de la distancia vs el tiempo como velocidad.

Fenómenos didácticos

Los fenómenos didácticos que se pueden presentar en el desarrollo efectivo de la Situación 1 son:

Pseudo transparencia. En este caso, referido al conflicto que se puede evidenciar en el manejo de la representación gráfica, cuando la representación gráfica generada no coincide con lo que el estudiante considera que le debe aparecer según el movimiento realizado. En ocasiones este fenómeno se presenta al describir la trayectoria sin tener en cuenta la variación de las magnitudes.

Otro fenómeno didáctico que se puede evidenciar es el proceso de ***adaptación perceptual***, debido a que al tener que realizar diferentes movimientos para generar la gráfica dada de distancia en función del tiempo, se hace evidente el sentido del movimiento con relación al CBR para generar una gráfica con pendiente positiva, negativa o constante, ésta además determina el signo de la velocidad en el movimiento rectilíneo.

Y finalmente se puede observar el fenómeno de ***determinación localizada***, pues esta actividad privilegia principalmente la representación gráfica, no se plantea el cambio de aplicación en la calculadora simbólica, pues es más factible repetir el mismo tipo de técnica dentro de la aplicación RANGER, sin embargo, se han incluido algunas preguntas para relacionar ésta representación con la tabular y el lenguaje natural, a pesar de esta dificultad, es posible hacer ajustes al realizar una regresión lineal, pero los datos no aparecen en listas de tablas.

3.7.1.4. Instrumentalización

Restricciones del artefacto

A continuación se presentan las restricciones que preestructuran las acciones de los estudiantes en el desarrollo efectivo de la situación según la clasificación realizada por Defouad (2000, citado por Trouche, 2005a):

Restricciones Internas

- Deben realizar los movimientos frente al CBR y éste no se puede mover puesto que afecta la toma de datos.
- En la toma de datos el objeto no puede estar ubicado a menos de 0,5 metros, ni a más de 6 metros.
- La distorsión o discontinuidad que se genera a la gráfica por la estructura de la pantalla, compuesta por un número finito de pixeles.
- Se necesita 17.500 bytes de memoria para instalar el programa RANGER.
- La calculadora debe estar configurada en idioma inglés

Restricciones de comando

- Existen varias opciones para iniciar la toma de datos con ENTER, DELAY o TRIGGER.
- Se puede configurar la unidad de medida en pies o metros.
- Una vez se genera una nueva gráfica no se puede volver a recuperar la anterior.

Restricciones de organización

- El menú principal no siempre se encuentra disponible, es un menú flotante que se activa al dar ENTER u oprimir la tecla ESC.

3.7.2. Situación 2: Movimiento parabólico "Caída libre"

En la guía de la segunda situación (ver ANEXO B) referente al estudio del movimiento parabólico, inicialmente se presentaron algunas pautas a tener en cuenta en la captura de datos y el programa a utilizar, para esta actividad se recomienda la participación de dos personas, uno para sujetar la pelota y otro para sostener el CBR y pulsar Trigger. La gráfica obtenida se debe parecer a una pelota botando (Figura 13), si no es así se debe repetir la toma de datos.

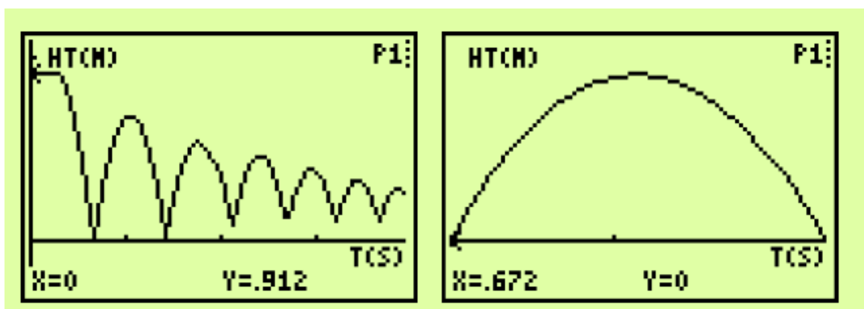


Figura 13. Gráficas normales de una pelota botando

Las primeras preguntas indagaron por las magnitudes y unidades de medida utilizadas en la representación gráfica y el punto de referencia real y el homólogo de éste en la gráfica, a partir del que se representaron los datos.

El siguiente grupo de preguntas fue una exploración que se realizó para determinar el significado de A en la expresión matemática que representa la caída libre y su variación en cada uno de los botes que podían ser seleccionados.

En esta actividad a diferencia de la anterior se realizaron conjeturas no solamente a partir de los datos tomados de la pelota botando, sino que también se utilizaron ajustes manuales a la función cuadrática que representa este movimiento por medio del editor (Y=) de la calculadora.

Debido a los rebotes de la pelota, el CBR puede no apuntar directamente a ella, por lo tanto la gráfica obtenida puede mostrar puntos de datos erráticos (picos de ruido) que no se ajustan al patrón general del dibujo, el programa BALL BOUNCE no permite aumentar el grado de suavizado para obtener resultados más satisfactorios.

A continuación se presentan los elementos teóricos que se tuvieron en cuenta para su análisis.

3.7.2.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica cuadrática

A continuación se presentan los diferentes momentos de estudio de la praxeología matemática propuesta para el estudio de la variación de funciones de variable real en esta situación:

- **Momento del primer encuentro**

En este momento los estudiantes realizan el experimento de dejar caer la pelota para observar la gráfica que se genera en la pantalla de la calculadora, antes de observar la gráfica que se genera se recomienda indagar por el resultado esperado, generalmente los estudiantes afirman que se deben generar gráficos rectilíneos como en la situación anterior, sin embargo se debe llevar los estudiantes a concluir que el gráfico debe parecerse a una pelota botando.

- **Momento Exploratorio**

En este momento se intentó construir una técnica adecuada para generar el movimiento sin mayor interferencia, al considerar que el sensor debía estar siempre a igual distancia del suelo y que la pelota debía rebotar sin desplazarse mucho de manera horizontal para que el sensor pueda capturar los datos. Esta experiencia se realiza varias veces teniendo en cuenta la distancia del sensor a la pelota y el momento en que se debe soltar la pelota.

Además se deben reconocer las magnitudes y unidades de medida utilizadas, igualmente los estudiantes deben interpretar la gráfica generada e identificar el punto de referencia (suelo) con el que trabaja el programa BALL BOUNCE, se registra la altura máxima y el tiempo correspondiente al primer bote (vértice).

Posteriormente se someten a prueba los valores obtenidos experimentalmente en el editor de ecuaciones (Y=) al introducir la altura y el tiempo en la función cuadrática $Y=A(X-H)^2+K$, se explora el valor que debe tomar A para que la gráfica coincida con el bote obtenido de manera experimental.

- **Momento del trabajo de la técnica**

Una vez identificadas las variables a tener en cuenta los estudiantes realizan el experimento con nuevas condiciones posición inicial de la pelota, diferente tipo de pelotas, o al seleccionar no el primero sino el último bote capturado por el sensor con el objetivo de establecer el valor de A en el primer experimento y verificar que el valor de A siempre es aproximado a -4,9 metros/segundos^2.

- **Momento tecnológico – teórico**

Los estudiantes justifican los gráficos obtenidos de manera experimental y en el editor de ecuaciones (Y=), identifican las magnitudes que varían y las que permanecen constantes, así mismo llegan a identificar qué propiedad física representa A, el sentido positivo o negativo el cual está determinado por convención, cuándo la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo o representa una función constante.

- **Momento de Institucionalización**

En este momento, la investigadora indica la manera correcta de realizar la actividad, las condiciones que se deben tener en cuenta para que no se generen ruidos en la captura de los datos, las relaciones que se establecen entre las magnitudes de la gráfica, este proceso se puede hacer durante el transcurso de la actividad al observar las estrategias utilizadas por los diferentes estudiantes.

- **Momento de evaluación**

Se deben conocer las razones que motivaron la creación y desarrollo de este tipo de situaciones, para ello fue importante que el estudiante conozca la manera cómo funciona el CBR, el tipo de tecnología con la que funciona y las condiciones del espacio en el momento de la captura de datos, se debe establecer para qué sirve y cómo utilizar el CBR y las diferentes representaciones que se generaron a partir de la captura de los datos, la función de BALL BOUNCE al invertir los datos y cómo puede relacionarlos con el modelo matemático involucrado.

3.7.2.2. Praxeología Matemática

La estructura de la praxeología matemática que se estudió considera:

Tareas: Se privilegiaron aquellas que permiten el estudio de la variación en un contexto físico de movimiento.

Tipo de tarea: Establecer el gráfico generado por la caída libre de una pelota y su expresión algebraica.

Técnicas: Se favoreció la recuperación de los datos reales obtenidos en la experimentación utilizando EDITOR DATA/MATRIZ, así como la interpretación de gráficos, a partir de la identificación de los puntos máximos y mínimos. Se estableció la relación del gráfico con la función cuadrática a partir del ajuste a las curvas. Se realizaron ajustes manuales a la función cuadrática que representa este movimiento por medio del editor Y= de la calculadora, dando diferentes valores para comparar y obtener el significado del coeficiente A y si variaba en cada bote de la pelota. De la misma forma, el trabajo con el editor de la calculadora permitió determinar automáticamente la función que mejor se ajusta a los datos al utilizar las posibilidades que en cuanto a regresión se refiere.

Tecnología: En la interpretación de gráficos se dieron justificaciones a partir de la práctica experimental, al identificar las magnitudes y unidades de medida de los ejes de coordenadas para deducir que el punto de referencia utilizado no es el CBR sino el suelo y por tanto uno de los puntos máximos es la distancia inicial a la cual se deja caer la pelota y mínimo cuando toca el suelo. Se identificó el coeficiente A con $\frac{1}{2}g$, al relacionar $Y=A(X-H)^2 +K$ con $y = y_o t - \frac{1}{2}gt^2$.

Para la traducción del registro gráfico al lenguaje algebraico, K representa la altura, H corresponde al tiempo y A debía se estimado por aproximación al gráfico experimental, se justificó su concavidad según el signo positivo o negativo y cómo puede afectar el gráfico si su valor es cero, para llegar finalmente a establecer su valor cercano a $\frac{1}{2}g$.

Teoría: Hace referencia al estudio de la teoría de funciones con variable real.

3.7.2.3. Instrumentación

Esquemas de uso

Los esquemas de uso que se pueden evidenciar en el desarrollo de la situación fueron:

- Conocer la forma de conexión del CBR a la calculadora.
- Transferir el programa RANGER del CBR a la calculadora o verificar que la calculadora lo tiene.
- Ejecutar el programa RANGER.
- Verificar el espacio disponible en la memoria de la calculadora para poder transferir el programa (17.500 bytes).
- Transferir el programa RANGER de calculadora a calculadora.
- Ingresar al menú principal del programa RANGER.
- Seleccionar en el menú principal APPLICATIONS, ejecutar el programa BALL BOUNCE, este programa invierte los datos de distancia para que la gráfica se ajuste mejor al movimiento de la pelota que perciben los estudiantes.
- Repetir la toma de datos cuando no se obtiene la gráfica deseada, para ello se debe asegurar que el CBR apunte siempre a la pelota.
- Seleccionar en el menú flotante PLOT MENU, luego PLOT TOOLS y después SELECT DOMAIN, para selección de un solo bote.
- Regresar al menú principal o salir del programa RANGER.
- Ingresar al editor de ecuaciones Y=.
- Definir el valor de las variables en el HOME.
- Activar y desactivar los gráficos que se quieren ver en la ventana de GRAPH.
- Recuperar los datos tomados de manera experimental con el CBR al utilizar el programa EDITOR DATA/MATRIZ

- Definir los valores de las magnitudes a partir de los datos almacenados en L1 y L2.

Esquemas de acción instrumentada

Los esquemas de acción de acción instrumentada que se pueden presentar en el desarrollo efectivo de la situación son:

- Identificar el punto de referencia que utiliza el CBR para capturar los datos.

- Establecer a qué distancia del CBR se debe iniciar el movimiento.

- Reconocer que las gráficas generadas por la caída libre de la pelota son parábolas.

- Identificar que y=0 en la gráfica es realmente el punto en que la pelota está a máxima distancia del CBR, es decir cuando golpea el suelo.

- Establecer que A depende de la aceleración debida a la gravedad, cuando se estudia el movimiento vertical, se puede tomar cualquiera de los sentidos, hacia arriba o hacia abajo, como positivo. Sin embargo BALL BOUNCE toma el sentido hacia arriba como positivo, así se define la gravedad como -9,8 metros/segundos^2. El signo negativo indica que la aceleración gravitacional es siempre hacia abajo en esta experimentación.

- Determinar que el valor de A es aproximadamente la mitad de la aceleración debida a la gravedad, o -4,9 metros/segundos^2.

- Establecer los valores adecuados en WINDOW para poder ver la gráfica según los valores asignados al coeficiente A.

Fenómenos didácticos

Los fenómenos didácticos que se pueden presentar en el desarrollo efectivo de la Situación 2 son:

Pseudo transparencia. En este caso, este conflicto es evidenciado en el manejo de la representación gráfica y se presenta porque BALL BOUNCE invierte los datos de distancia para que la gráfica se ajuste mejor al movimiento de la pelota que perciben los estudiantes, lo que genera conflicto entre el movimiento realizado y la representación gráfica que se genera a partir de él.

Este fenómeno también se puede evidenciar cuando los estudiantes deben definir en el editor de ecuaciones Y= la expresión A*(X-H)^2+K y al dar ENTER aparece en pantalla $A \cdot (X-H)^2 + K$.

Otro fenómeno didáctico que se puede evidenciar es el proceso de ***adaptación perceptual***, debido a que deben considerar el signo negativo o positivo de la aceleración según el sentido del movimiento. En el programa BALL BOUNCE se hace evidente el sentido del movimiento con relación al CBR y cuál debe ser el punto de referencia para calcular la altura máxima de cada bote de la pelota. Además la velocidad de la pelota es positiva si ésta se mueve hacia arriba y negativa si lo hace hacia abajo.

Y finalmente se observa el fenómeno de ***determinación localizada***, pues esta actividad privilegia principalmente la representación gráfica, aunque se propone el cambio de aplicación en la calculadora simbólica, al editor de ecuaciones. Se trabaja fundamentalmente con dos tipos de representación, la algebraica y la gráfica. También se plantea la necesidad de hacer ajustes al aplicar una regresión cuadrática para determinar el valor de A.

3.7.2.4. Instrumentalización

Restricciones del artefacto

Al igual que en la primera situación las restricciones que se tomaron en consideración y que se pueden presentar en el desarrollo de la segunda situación son:

Restricciones Internas

- La pelota debe rebotar sin desplazarse mucho de manera horizontal y el sensor debe estar siempre a igual distancia del suelo.
- En la toma de datos la pelota no puede estar ubicada inicialmente a menos de 0,5 metros.
- La distorsión o discontinuidad que se genera a la gráfica por la estructura de la pantalla, compuesta por un número finito de pixeles.
- Se necesita 17.500 bytes de memoria para instalar el programa RANGER.
- La calculadora debe estar configurada en idioma inglés.
- Una vez seleccionado un bote no se puede recuperar la gráfica inicial.

Restricciones de comando

- Existen varias opciones para iniciar la toma de datos con ENTER, DELAY o TRIGGER.
- Se puede configurar la unidad de medida en pies o metros.
- Una vez se genera una nueva gráfica no se puede volver a recuperar la anterior.
- Para seleccionar un bote se debe ubicar al inicio del bote dar ENTER y luego al final de ese bote y dar ENTER no se puede hacer de manera inversa.

- En la ventana WINDOW el valor de *xmin* no puede ser mayor al valor de *xmax*.

- En ocasiones las variables H y K ya tienen un valor asignado por otro usuario y no permite redefinirlas, por lo cual se debe utilizar una letra diferente o en VAR-LINK borrar la asignación.

Restricciones de organización

- El menú principal no siempre se encuentra disponible, es un menú flotante que se activa al dar ENTER u oprimir la tecla ESC.

3.8. Análisis de la Actividad Potencial de los Estudiantes

En esta sesión se presentaron los conceptos y procedimientos prescritos para el desarrollo de cada tipo tarea, según las preguntas formuladas en cada situación.

3.8.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín

Las primeras preguntas de la guía (ANEXO A) indagan o están enfocadas a la lectura e interpretación de datos a partir de la representación gráfica, para ello es necesario identificar las magnitudes involucradas en el movimiento, las unidades de medida y las escalas utilizadas.

Una vez identificados los elementos básicos de la gráfica, los estudiantes deben realizar conjeturas acerca de la distancia a la que se debe empezar el movimiento; el tipo de desplazamiento que debe realizarse para obtener pendiente positiva, negativa o constante; justificar su elección, es importante la verbalización de las elecciones, para corroborar posteriormente dichas hipótesis al realizar la experimentación.

A continuación se presenta el análisis de las preguntas realizadas y las posibles opciones de solución a cada una:

PARTE I

Distancia Inicial

Para responder la primera pregunta, ¿a qué distancia del CBR piensa que debe empezar? Los estudiantes deben realizar la interpretación del gráfico cartesiano, al identificar las magnitudes involucradas o representadas en cada uno de los ejes de coordenadas, con sus respectivas unidades de medida; en este caso, en el eje $\boldsymbol{x}$ se representa el tiempo en segundos y en el eje $\boldsymbol{y}$ la distancia en metros. La distancia inicial corresponde al valor que toma el eje $\boldsymbol{y}$ cuando $\boldsymbol{x=0}$. Una vez se establece esta pareja ordenada, se debe realizar dicha medida, al tomar como punto de referencia el CBR.

De la misma manera los estudiantes deben relacionar el punto (0,0) con la posición en la que se encuentra el CBR y a partir de dicha posición estimar la distancia a la que se debe iniciar.

Al estimar la distancia por ser ésta una magnitud continua se hace uso de los números reales positivos. Una de las dificultades de los estudiantes para dar respuesta a esta pregunta es el no considerar la unidad de medida o la de utilizar una unidad de medida inadecuada, al no considerar la información dada en el gráfico. Así mismo, al efectuar la medida de dicha distancia, puede ser más fácil para algunos estudiantes utilizar una unidad de medida equivalente, es decir, medir la distancia en centímetros y no en metros, en dicha estimación se debe usar un patrón de medida, este para algunos estudiantes esta dado por la medida del lado de una baldosa, cuando el piso no posee baldosas algunos estudiantes utilizan un patrón corporal, tal como un paso equivalente a un metro.

Movimientos a realizar

Para determinar si debe acercarse o alejarse del CBR para intentar reproducir la gráfica en la segunda pregunta, los estudiantes deben establecer que cuando se acercan al

CBR la distancia disminuye y cuando se alejan la distancia aumenta, pero además deben considerar el tiempo, es decir, establecer la razón de la distancia en el tiempo (velocidad media = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) para poder reproducir la gráfica dada.

Es posible encontrar tramos de la gráfica dada en que no haya desplazamiento, es decir, que no deban acercarse o alejarse del CBR, sino que deban quedarse por un tiempo en una misma posición, en este caso, la pendiente es nula, pues no existe velocidad media.

Los tramos en los que la distancia aumenta en un determinado tiempo, es decir, cuando se alejan del CBR, la velocidad media tiene signo positivo; los tramos en los que la distancia disminuye en un tiempo determinado, es decir, cuando se acercan al CBR, la velocidad media tiene un signo negativo. Esto significa que el signo de la velocidad media o de la pendiente indica si deben acercarse o alejarse del CBR.

Validación de la distancia inicial

Una vez planteadas las conjeturas en las preguntas anteriores acerca de la distancia inicial y de los movimientos a realizar para reproducir la gráfica y de realizar la experimentación, con la tercera pregunta se desea corroborar si la distancia a la que se ubicó la persona fue la adecuada y qué tan acertada fue dicha estimación.

Para los estudiantes, la utilización de cuantificadores *demasiado cerca* o *demasiado lejos* de la distancia inicial solicitada, no son muy claros, es decir, no tienen una adecuada estimación del margen de error permitido en este tipo de experiencias; y para algunos causa confusión contestar con respecto a qué se realiza la pregunta, si a la gráfica dada por DISTANCE MATH, o al CBR. ¿Comenzaste demasiado cerca, demasiado lejos, o a la distancia adecuada?

Consideraciones para reproducir exactamente la gráfica

En la cuarta pregunta se indaga por otros elementos que se deben considerar para reproducir exactamente la gráfica dada. Además del manejo de los elementos y la interpretación del gráfico cartesiano, mencionados anteriormente se deben considerar la variación de las magnitudes y cómo están relacionadas, cómo medir la distancia y el tiempo, distinguir la posición, de la distancia y el desplazamiento y las restricciones del artefacto.

Es frecuente encontrar que los estudiantes realicen los movimientos describiendo la trayectoria que se observa en la pantalla, una de las causas por las cuales esto puede suceder, es por falta de conocimiento del funcionamiento del CBR, pues al no conocer que el detector envía una señal ultrasónica y posteriormente calcula el tiempo que tarda dicha señal en volver después de chocar con el objeto más cercano, no se tiene en cuenta que los movimientos se deben hacer en línea recta al sensor de movimiento para garantizar que la señal choque con el cuerpo de la persona y no con otro objeto que se encuentre frente al CBR, además se debe evitar interferencias con otros objetos próximos, lo cual garantiza que la zona se encuentre despejada en la amplitud del haz que emite el CBR (Figura 14)

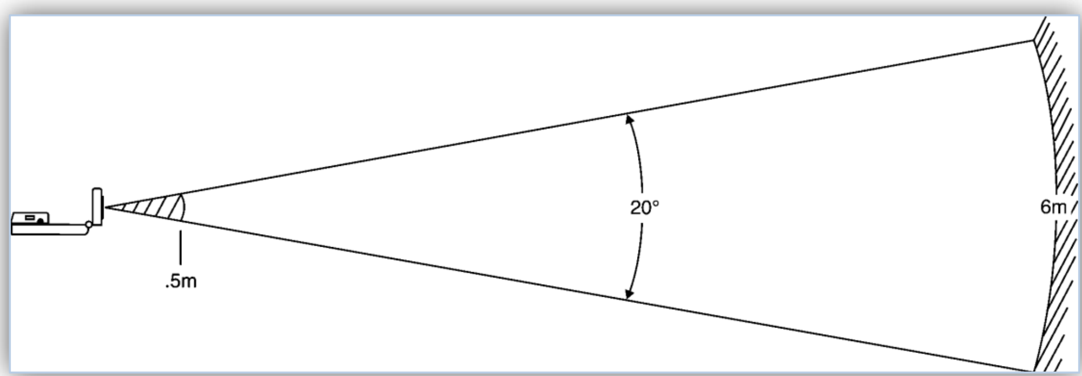


Figura 14. Amplitud del haz

Igualmente para obtener una gráfica más aproximada, se deben realizar estimaciones del número de pasos que se debe dar por segundo, o la distancia recorrida en un tiempo determinado, según la información dada por la gráfica, éstas preguntas involucran un nuevo concepto, el de la velocidad y para esto se debe determinar en qué tramos se deben mover más rápidamente o más lentamente

Propiedad física de la pendiente

En la quinta pregunta se averiguó por el significado en el contexto de la física de la pendiente de los segmentos para determinar si logran relacionarla con la velocidad media.

PARTE II

Distancia recorrida y tiempo empleado

En la primera pregunta se deben establecer cuántos metros debes caminar y en cuántos segundos, al considerar sólo el primer segmento del gráfico, en ella se resalta la utilización de las unidades de medida y se debe realizar el análisis solamente del primer tramo del gráfico. Algo que no es usual, pues generalmente se analiza toda la gráfica, se debe diferenciar la posición inicial de la distancia inicial recorrida.

Cabe resaltar que en caso de que en el primer segmento no haya desplazamiento se debe generar una nueva gráfica en la que en el primer segmento haya desplazamiento para que las preguntas siguientes tengan sentido y no obtener en todas como respuesta cero.

Como las magnitudes involucradas son continuas, las medidas de distancia y tiempo no se presentan en los gráficos necesariamente de manera exacta, los estudiantes están en libertad de realizar las estimaciones que consideren pertinentes y de utilizar números enteros o decimales, esto depende de la estimación realizada.

Conversiones de distancia y tiempo empleado

Una vez realizada la estimación se puede establecer la relación directa que hay entre la distancia dada en metros y el tiempo en segundos. En la segunda pregunta se pidió calcular cuántos metros recorre por segundo y se solicitó realizar la conversión de este valor a metros/minuto, metros/hora, kilómetros/hora y establecer qué distancia se recorrió realmente. Estas preguntas son importantes puesto, que involucra algunos aspectos del pensamiento métrico, el cual muchas veces se deja relegado sólo a la geometría y con estas preguntas se subraya la importancia de la relación entre las magnitudes y las diferentes unidades de medida que se pueden utilizar de manera equivalente en el desarrollo del pensamiento variacional.

Para realizar las conversiones los estudiantes pueden aplicar como estrategia regla de tres o multiplicar por un factor de conversión así:

Regla de tres

Realiza la conversión de segundos a minutos.

1min $\longrightarrow$ 60 seg

X $\longrightarrow$ 3 seg

X = $\frac{1\,\text{min} \times 3seg}{60seg}$ = 0,05 min

Por lo tanto 1m/0,05 min= 20 m/min

Factor de conversión

$$\frac{1m}{3\ seg} \times \underbrace{\frac{60\ seg}{1\ min}}_{\text{Factor de conversión}} = \frac{60\ m}{3\ min} = 20m/min$$

Los estudiantes para realizar las conversiones solicitadas en la segunda pregunta pueden utilizar solamente uno de los anteriores procedimientos, o según la conversión solicitada utilizar uno de los dos, esto nos permitiría observar la flexibilidad que pueden llegar a tener en la técnica utilizada. Por otro lado pueden considerar el valor inicial de metros por segundos y a partir de él realizar todas las conversiones o retomar la última conversión realizada para hallar la siguiente.

Distancia recorrida

En la tercera pregunta para calcular ¿qué distancia recorriste realmente? se debe realizar una distinción entre distancia y desplazamiento, es decir se debe hallar el total de la distancia recorrida, considerada ésta como una magnitud escalar y no su diferencia lo cual es equivalente al desplazamiento, cuya magnitud es vectorial.

Esta pregunta causa confusión porque los estudiantes tienden a encontrar el desplazamiento y no la distancia recorrida

Momentos de desplazamiento rápido o lento

Como una de las habilidades a desarrollar es la conversión de un sistema de representación a otro, las estimaciones realizadas también sirven de base para organizar la información de manera tabular y establecer la distancia inicial para realizar el movimiento y a qué distancia del CBR se encuentra en cada segundo durante la captura de los datos. Al calcular la diferencia entre la posición final e inicial, los estudiantes establecen los tramos en los que se deben desplazar más rápido o más despacio para dar respuesta a la cuarta pregunta.

Enunciado que describe el movimiento

Finalmente en la quinta pregunta se espera que los estudiantes hayan construido esquemas suficientes a partir de la experimentación realizada de tal manera que les sirva de referencia para plantear diferentes enunciados de situaciones en lenguaje natural, que describan el comportamiento de la gráfica dada.

3.8.2. Situación 2: Movimiento parabólico "Caída libre"

A continuación se presenta el análisis y posibles opciones de solución a las preguntas planteadas:

Las primeras cuatro preguntas indagaron sobre la identificación de la magnitud y la unidad de medida utilizada en cada eje, se espera que los estudiantes logren relacionar el eje ***x*** con el tiempo medido en segundos y el eje ***y*** con la altura medida en metros.

La quinta y sexta preguntas indagaron sobre los puntos extremos de la gráfica, al relacionar la práctica experimental con lo que se observó en el gráfico obtenido a partir de la toma de datos.

La séptima y octava preguntas averiguaron por el tipo de justificaciones que pueden dar los estudiantes acerca de la inversión que realiza el programa BALL BOUNCE a la gráfica y por qué parece representar el movimiento de botes de la pelota por el suelo.

Las primeras ocho preguntas se respondieron básicamente a partir del análisis e interpretación del gráfico obtenido a partir de la experiencia de dejar caer una pelota a una altura determinada superior a 0,5 m.

Una vez seleccionado el primer bote completo, se debió realizar lectura específica de puntos sobre la gráfica para determinar el vértice del bote y en la novena pregunta debían registrar la altura máxima y el tiempo correspondiente al primer bote, el tiempo se obtiene a partir de la lectura del vértice sobre el gráfico, éste no debe ser calculado.

Se graficó la función $Y=A\ (X - H)^2 + K$, donde K representa la altura y H el tiempo anteriormente registrado, y se definió A=1. En la pregunta diez debían comparar la gráfica obtenida de manera experimental con la gráfica generada por el editor de ecuaciones, para determinar la razón por la que coinciden o no coinciden. Se espera que los estudiantes concluyeran que para A=1 no coincidían porque tienen una concavidad opuesta. El mismo análisis debió hacerse en la pregunta once para A=2, 0, -1, con ello se puede observar en las siguientes tres preguntas conclusiones acerca del valor positivo, negativo o nulo para A.

En la pregunta catorce los estudiantes debían seleccionar los valores de A hasta conseguir una buena aproximación al variar los valores de A.

Se debía repetir la experiencia seleccionando ahora el último bote y en la pregunta quince debían encontrar el valor de A que hacía coincidir el gráfico experimental con el generado por el editor de ecuaciones.

Para terminar en la pregunta quince debían concluir con qué propiedad física podían relacionar el valor de A.

Finalmente, es importante mencionar que la caracterización de las dos situaciones presentadas anteriormente aportan al reconocimiento del papel de los CAS en la interpretación de datos a partir de la toma de datos reales y su representación gráfica, así como los esquemas de uso y de acción instrumentada que se pueden llegar a favorecer; las restricciones internas, de comando y los fenómenos didácticos que se pueden presentar en el desarrollo de cada situación.

La organización y gestión de la clase está dada por los diferentes momentos didácticos, que fueron caracterizados para cada situación. Todos estos elementos permiten a los estudiantes concebir y construir recursos pedagógicos que consideren la complejidad de *la génesis instrumental*.

CAPÍTULO 4.

ANÁLISIS A POSTERIORI

ANÁLISIS DEL DESARROLLO EFECTIVO DE LAS SITUACIONES

En este capítulo se reporta el análisis de la implementación de las situaciones para el estudio de la variación en un contexto físico (de movimiento), según el análisis *a priori, el análisis de familiarización con el CBR y el análisis de la actividad potencial de los estudiantes* presentados en el capítulo anterior, de este modo se describe la manera como los estudiantes accedieron a la secuencia, la desarrollaron, la distancia entre lo previsto y lo efectivo y las reformas que realizaron de las mismas.

4.1. Situación 1: Estudio de la gráfica lineal y afín

En este análisis se describieron los diferentes momentos didácticos llevados a cabo durante la implementación de la situación a partir del registro audiovisual, aunque los momentos propuestos por Chevallard, Bosch y Gascón, (1997) no se exhiben necesariamente en este orden, por la manera como fue organizada la guía de aplicación, se encuentran preconcebidos los diferentes momentos que se presentaron, lo cual facilitó la identificación y descripción de los mismos de la siguiente manera:

4.1.1. Momentos didácticos para el estudio de la gráfica lineal y afín

Momento del Primer Encuentro

Inicialmente se entregó a cada estudiante una guía en la cual se presentó la primera situación y se solicitó a uno de ellos que de manera voluntaria realizara la lectura y desarrollara la primera parte de la situación propuesta. Es importante mencionar que ninguno de los estudiantes había tenido experiencia con el manejo del CBR, por tal motivo no se sintieron con la confianza y seguridad para participar de manera espontánea.

Es Julia quién decidió salir a desarrollar la situación, en su primer acercamiento ella tuvo que conectar el CBR a la calculadora y ésta al ViewScreen con el fin de proyectar la pantalla de la calculadora y que sus compañeros pudieran observar el procedimiento realizado, luego debió seguir los pasos señalados en la guía para ejecutar el programa, para ello la investigadora leyó en voz alta el procedimiento a seguir y Julia los ejecutó, los demás compañeros observaron de manera simultánea lo que aparecía en la pantalla. La investigadora resaltaba cada paso y lo que aparecía en pantalla. Una vez se generó la gráfica a estudiar (Gráfico 1)[10], se procedió a responder la primer pregunta ¿A qué distancia del CBR piensa que debería empezar?

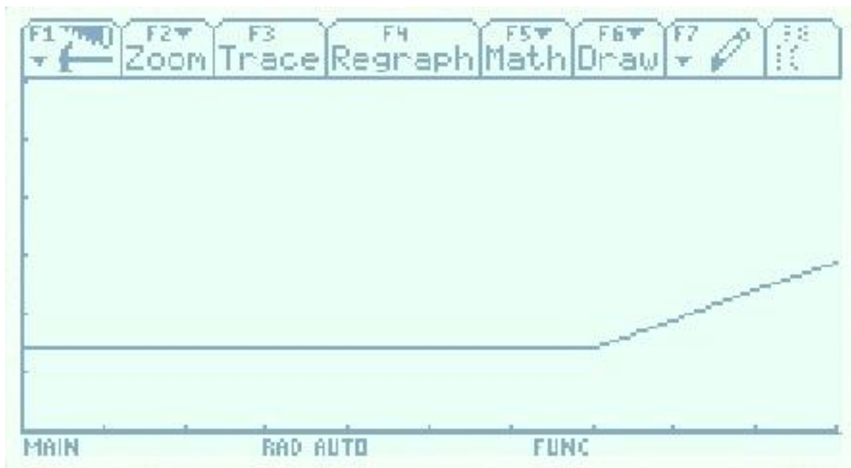
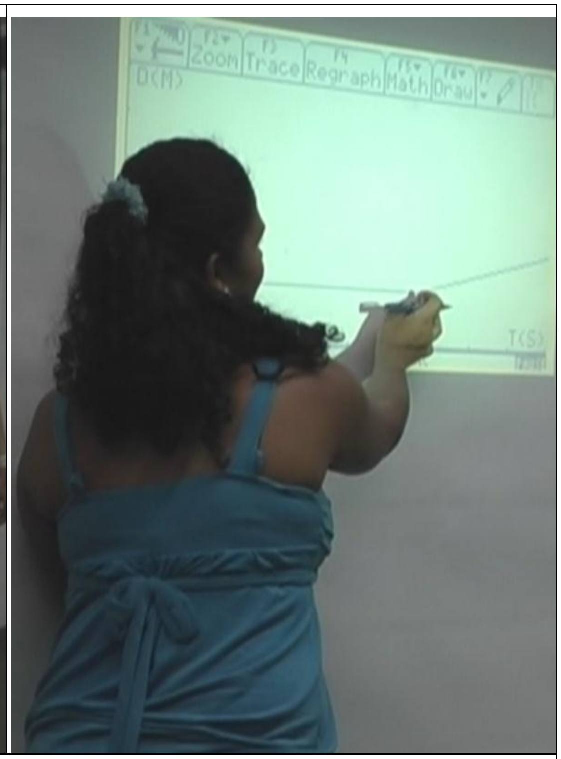


Gráfico 1. Primera gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte I

Como aún no se han construido los esquemas de uso y de acción instrumentada necesarios para poner en práctica y responder la pregunta, surgieron interrogantes acerca del funcionamiento del CBR y de la información que suministra el gráfico respecto al sistema de referencia utilizado tal y como se muestra en el siguiente diálogo.

[10] Se denomina gráfico a las imágenes generadas en la calculadora Voyage 200.



Pablo: ¿Qué función tiene el CBR?
Investigadora: Es un sensor de movimiento el cual registra los movimientos que realiza un objeto y/o persona. Aquí está el CBR, ¿a qué distancia piensa que se debería ubicar?
Lila: No entiendo a qué distancia se debe ubicar.
Investigadora: Una vez se active el sensor, él tomara los movimientos que realice Julia, se verán en el gráfico unos punticos que determinan los movimientos de ella, Julia debe entonces realizar unos movimientos de tal manera que reproduzca la gráfica. Para ello la primera pregunta es ¿a qué distancia se debe ubicar para iniciar el movimiento?
Lila: El CBR es la intersección entre las dos líneas? –intersección de los dos segmentos, sale y señala en el gráfico-.
Investigadora: ¿Cuál es el sistema de referencia en el gráfico?
Lila: El punto de referencia es el punto de intersección de las dos líneas generadas.
Investigadora: Observa la pantalla en su conjunto y piensa si realmente este podría ser el punto de referencia, porque lo que se ha mencionado es que las gráficas van variando cada vez que se ejecute el programa.
Lila: ¿El sensor ya está tomando los datos?
Investigadora: No, primero se está analizando el gráfico para saber qué movimientos se deben realizar. Cuando se presione [Enter] otra vez él comienza a emitir un sonido y una luz verde que indica que se están tomando los datos, esto dura sólo 10 segundos.

En el diálogo mostrado anteriormente se ve claramente que los interrogantes que generaron los estudiantes apuntaron al funcionamiento, la toma de datos y el sistema de referencia utilizado por el CBR, esto se debe a que están construyendo los esquemas de uso del artefacto. De acuerdo a la orientación dada por la investigadora se inició la identificación de las magnitudes, la escala y unidades de medida utilizadas en el sistema de referencia, esto se puede evidenciar en el siguiente diálogo.

Pablo: Los puntos que están en la parte de abajo, siempre están a la misma distancia?
Investigadora: Sí, te brindan una información según el gráfico y hace parte del sistema de referencia.
Pablo: Entonces si hay 1, 2, 3, 4, 5, 6, más o menos porque está en línea recta y de 6,5 en adelante como aumentó la trayectoria, entonces comenzó a moverse, esto significa que cada puntico es 1 m, es decir 6,5 m o 65 cm.
Investigadora: Observa en el gráfico esos puntos ¿qué están midiendo?
Pablo: Tiempo
Investigadora: ¿En qué unidades?
Pablo: En segundos.
Investigadora: Por tanto, lo que estás contando no son metros, es el tiempo en segundos.

En este primer acercamiento se observó que aunque es Julia quien decidió salir a realizar la experiencia, las intervenciones se dieron por parte de sus compañeros y el interés estuvo centrado básicamente en comprender el funcionamiento del CBR, se podría afirmar que están descubriendo el artefacto, es decir, en la parte inicial del proceso de instrumentalización. Los estudiantes intentaron establecer el punto de referencia, es decir, en identificar cómo está representado en la gráfica el CBR, una primera interpretación errada es que es el punto de intersección de los dos segmentos generados representa el CBR. Sin embargo, lograron identificar los ejes de coordenadas y las unidades de medida utilizadas para cada eje, es decir lograron identificar que en el eje x se encuentra el tiempo en segundos y en el eje y la distancia en metros.

Aclaradas las inquietudes de los estudiantes, Julia logró responder la primera pregunta ¿A qué distancia del CBR piensa que debería empezar?

Julia: Me debo ubicar en 1m y 4
Investigadora: A un metro y 4 más o menos, antes de determinar los movimientos ¿cómo mides esta distancia?
Julia: Para calcular esta distancia un paso es un metro, así que 4 baldosas equivalen aproximadamente a 1m y por tanto para 1,40 m me ubico a 6 baldosas.

Para la segunda pregunta ¿Debes acercarte o alejarte del CBR para intentar reproducir la gráfica?

Julia: No estoy muy segura
Investigadora: ¿Qué indica el incremento en la gráfica?
Julia: Que hay un aumento en la distancia y por tanto debo moverme en sentido contrario al CBR.

En esta parte algunos estudiantes indicaron que debía moverse de manera diagonal, sólo un estudiante sostuvo que no importaba el sentido, esto evidenció las concepciones iniciales de realizar el movimiento siguiendo la trayectoria de la gráfica sin considerar las magnitudes.

Pedro: No importa el sentido, pues a medida que transcurre el tiempo se debe ir alejando a una velocidad no muy rápida.
Lila: Sí importa puesto que desde el punto de referencia si disminuye va a ser una distancia negativa y si aumenta va a ser una distancia positiva.
Pedro: Cuando disminuye la mínima distancia a la que puede llegar es cero.
Pablo: Debe quedarse a la distancia inicial un tiempo determinado, en este caso 6 segundos y luego debe comenzar a moverse- no especifica en qué sentido-.
Julia: En el incremento se muestra un salto [la investigadora explica que aunque no se ve de manera continua, es continua y esta dificultad visual se debe a los píxeles de la pantalla de la calculadora].
Sara: El movimiento se debe hacer de manera diagonal.
Pedro: Afirma que debe moverse en tres segundo 1,60 m.
Investigadora: ¿Importa la manera de hacer el movimiento?
Julia: No importa, pues cuando comience a alejarme la distancia va a aumentar.

En el desarrollo de la actividad Sara ratifica lo mencionado en el análisis de familiarización frente a la idea de realizar los movimientos describiendo la trayectoria que se observa en la pantalla, en este caso de manera diagonal, como ya se mencionó una de las causas por las cuales esto pudo suceder, es por falta de conocimiento del funcionamiento del CBR, por lo tanto no se tiene en cuenta que los movimientos se deben hacer en línea recta al sensor de movimiento para garantizar que la señal choque con el cuerpo de la persona y no con otro objeto que se encuentre frente al CBR. Otra de las razones es que no se considera la variación de las magnitudes, así se puede concluir que las anteriores dificultades se presentaron por la falta de esquemas de uso y de acción instrumentada.

Para corroborar las dos hipótesis que brindaron los estudiantes la investigadora sugirió hacer el movimiento de manera diagonal y observar cómo se comporta la gráfica.

A pesar de toda la discusión que se generó, cuando se decidió realizar la toma de datos Julia no esperó los 6 segundos para iniciar el movimiento sino que comenzó a moverse a penas se activó el sensor. La experiencia debió repetirse nuevamente y en esta ocasión Julia tomó en cuenta que debe permanecer en la misma posición un determinado tiempo, son sus compañeros quienes le indicaron según lo que ocurría en la pantalla cuando debe comenzar a moverse.

La falta de experiencia con este tipo de situaciones hizo que en el momento de activar el sensor la persona considere que debe comenzar a moverse, sin tener en cuenta el análisis previo realizado, así mismo se observó que quien realiza los movimientos está pendiente de la distancia que debe moverse pero no de contabilizar el tiempo requerido para su movimiento. Es importante que los estudiantes sean conscientes de la variación de las dos magnitudes de manera simultánea.

Momento Exploratorio

Al realizar por segunda vez la experiencia se observó que no se ubicó a la distancia inicial solicitada pues se tomó una medida menor a 1,40 m (ver Gráfico 2), además al iniciar el movimiento de manera diagonal hay un salto y luego continua constante, lo anterior se debió a que la onda enviada por el CBR chocó con otro objeto del salón puesto que Julia salió de su campo de acción.

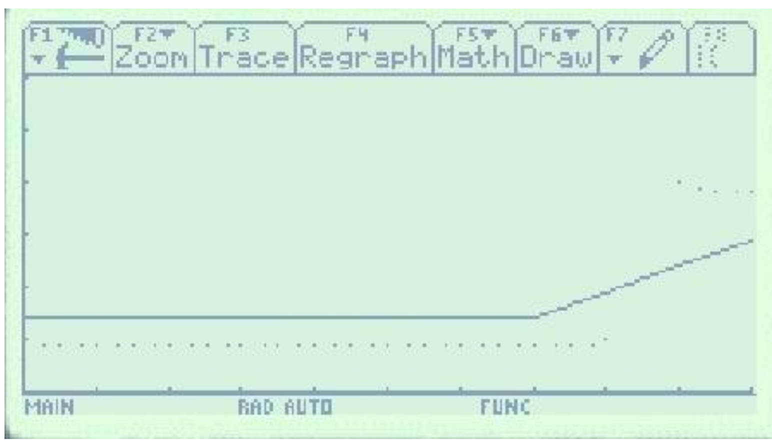


Gráfico 2 Captura de datos con trayectoria diagonal

La investigadora explicó lo sucedido y se procedió a realizar por tercera vez la experiencia. En esta ocasión se consideró que el lado de cada baldosa mide 20 cm, así que para 1,40 m, se contaron 7 baldosas, aunque no dio exacta la medida, el margen de error es mucho más pequeño, pues estuvo bastante cercana la aproximación lo mismo para el segundo segmento cuando se incrementó la distancia (Gráfico 3).

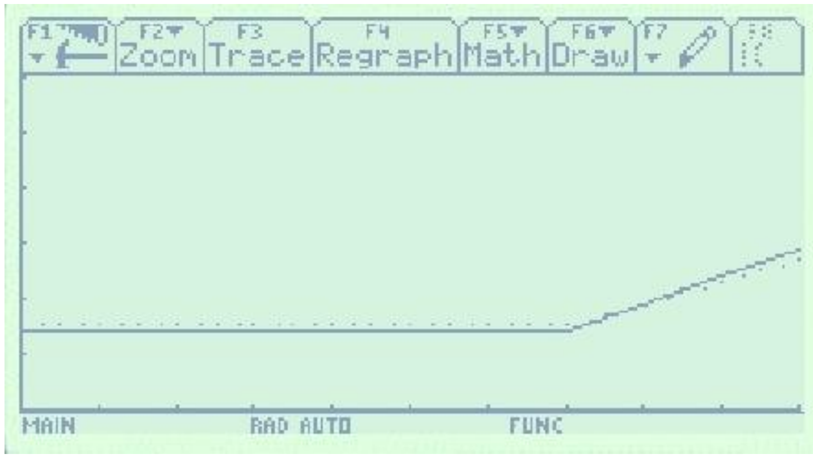


Gráfico 3 Captura de datos frente al CBR

Una vez realizada la experimentación por Julia, cada estudiante respondió de manera individual las preguntas de la parte I según la experiencia anterior, debido a que en estas preguntas se indagó por las valoraciones y estimaciones que debieron realizar para generar una gráfica aproximada a la dada por el programa DISTANCE MATH, no se realizaron procedimientos escritos.

4.1.2. Praxeología Matemática

A continuación se presentan los diferentes elementos teóricos que se pudieron identificar en el desarrollo de la primera parte de la situación 1 a partir de las respuestas dadas por Julia de manera escrita:

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
1. ¿A qué distancia del CBR piensa que debería empezar?	• Lectura de puntos del gráfico. • Utilizó como patrón de medida la longitud del lado de una baldosa. Inicialmente tomó como referencia las baldosas, si un metro es un paso aproximadamente, entonces más o menos 4 baldosas es un metro, así que 6 baldosas equivale aproximadamente 1,40 cm, una vez realizada la experiencia y corroborada la distancia inicial se realiza una nueva estimación en esta ocasión el lado de la baldosa se estima que mide 20 cm y por tanto se contó 7 baldosas para obtener 1,40 m.	Estimación de la distancia para t=0. Relación entre medidas arbitrarias y estandarizadas.	Establecer a qué distancia del CBR se debe iniciar el movimiento utilizando patrones arbitrarios en este caso utilizó un paso equivalente a un metro y el lado de una baldosa.
2. ¿Debes acercarte o alejarte del CBR para intentar reproducir la gráfica?	• Interpretación del gráfico: Conteo de los segundos en el eje x. Se realizó el conteo de los segundos en que debía permanecer a 1,40 m. • Diferencia entre distancia final y la inicial. Luego a partir de la distancia inicial midió con el mismo patrón 1,60 m medida que resultó de la diferencia de 3m-1,40m=1,60m para saber hasta dónde se debe mover en los últimos tres segundos de la toma de datos. Cuando se le preguntó por el significado del incremento en el gráfico, afirmó que es un aumento de distancia y por tanto no debe moverse acercándose al CBR, sino que debe alejarse. No se realizó una estimación del tiempo, la decisión de cuando se debía iniciar el movimiento se dio según los puntos que aparecieron en la pantalla.	Magnitudes y unidad de medida. Estimación del tiempo y la distancia. Lectura de puntos del gráfico Distancia recorrida. Relación entre distancia y tiempo.	-Comprender a qué distancia y en cuánto tiempo debo realizar el movimiento en cada uno de los tramos de la gráfica. -Anticipar la gráfica que genera el CBR en la calculadora al realizar un determinado movimiento.

Tabla 3. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte I

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
3. ¿Comenzaste demasiado cerca, demasiado lejos o a la distancia adecuada?	• Punto de referencia: Utilizó dos puntos de referencia, el CBR y la gráfica, por tanto dio una respuesta en función de la distancia considerada en la práctica (cerca al CBR) y otra con lo que se obtuvo en la gráfica (cuando los datos graficados estuvieron por debajo de la distancia inicial solicitada) por tanto afirmó: "Demasiado cerca del CBR por lo que lejos de la gráfica a reproducir".	Punto de referencia Incertidumbre de las medidas. Margen de error.	Corroborar o validar las hipótesis al efectuar el movimiento según la estimación realizada.
4. Además de elegir si tienes que acercarte o alejarte del CBR ¿Qué otros elementos debes considerar para reproducir exactamente la gráfica dada?	Según su experiencia identificó como elementos importantes: • Tener en cuenta cómo se va a medir la distancia. • Tener la velocidad adecuada. • No moverse en diagonal porque se sale del campo de acción del CBR.	Identificación de magnitudes y unidades de medida. Relación entre medidas arbitrarias y estandarizadas. Relación entre la distancia y el tiempo Restricciones del CBR.	Identificar las magnitudes, sistema coordenado y la escala.
5. ¿Qué propiedad física representan las pendientes de los segmentos?	Asoció las pendientes con: • Velocidad constante: en el primer tramo del gráfico porque estuvo constante tiene velocidad constante. • Distancia: en el segundo tramo como debe desplazarse lo asocia con la distancia, en el segundo tramo no tuvo en cuenta su relación con el tiempo, por tanto la identifica como la distancia que debe alejarse del CBR.	Velocidad.	La variación de la distancia vs el tiempo = velocidad.

Tabla 3. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte I. (continuación)

De acuerdo a lo presentado en la Tabla 3 en la tercera pregunta no fue muy claro para los estudiantes determinar si estuvieron demasiado cerca o lejos a la distancia adecuada, Julia se ubicó a 1 m, esto significa que faltaba más o menos 40 cm, se podría afirmar que estuvo bastante cerca a lo solicitado. En esta pregunta se evidenció como esquema de acción instrumentada la estimación que debían realizar los estudiantes, pues debían buscar un patrón de medida diferente al convencional (metro) para encontrar la distancia a la que se debe iniciar el movimiento, se debe tener presente que las medidas experimentalmente siempre tienen un margen de error que se debe considerar.

En la cuarta pregunta no identificó como elementos importantes la escala utilizada en los ejes de coordenadas, la correspondencia de cada uno de los ejes con una magnitud, el significado de posición inicial, es decir, la distancia para cuando t=0, que el CBR representa el origen de los ejes de coordenadas, cómo calcular el tiempo sin mirar lo que sucedía en la pantalla.

En la quinta pregunta aunque Julia mencionó la velocidad constante, no logró establecer la relación de la variación de la distancia respecto al tiempo, para concluir que la pendiente representa la velocidad y que en el caso de la distancia constante la velocidad es cero.

4.1.3. Instrumentación

Esquemas de uso

Los esquemas de uso que utilizó Julia durante el desarrollo de la primera parte de la situación 1 fueron:

- Estableció la forma de conexión del CBR a la calculadora de manera intuitiva.
- Ejecutó el programa RANGER( )
- Ingresó al menú principal del programa RANGER ( )
- Seleccionó como unidad de medida el metro.

- Seleccionó en el menú principal APPLICATIONS, ejecutar el programa DISTANCE MATCH.

Se debe aclarar que Julia no tuvo dificultad en la ejecución de los pasos descritos en la guía, para ejecutar los diferentes comandos, sin embargo esto no significa que se haya apropiado de ellos y los pueda integrar de manera espontánea en la solución de una tarea.

Los esquemas de acción instrumentada fueron presentados en la Tabla 3

Fenómenos Didácticos

Con relación a lo previsto, los fenómenos didácticos que se pudieron evidenciar de la primera parte de la situación 1 fueron:

Pseudo Transparencia

Este fenómeno se presentó inicialmente cuando se realizó el movimiento de manera diagonal y se presentó un salto en el gráfico con la captura de datos y luego quedó constante (ver Gráfico 2), se generó un conflicto entre lo que esperaban ver y el gráfico realmente generado en la toma de datos.

Adaptación perceptual

Se evidenció cuando Julia adaptaba sus movimientos según lo que aparecía en la pantalla del ViewScreen y no realizó la estimación del tiempo. Una vez se generó el esquema de acción instrumentada de la manera de medir la distancia, perceptualmente se estableció el tiempo.

Determinación Localizada

En esta parte de la situación se privilegió fundamentalmente la representación gráfica generada por la calculadora.

4.1.4. Instrumentalización

Restricciones del artefacto

A continuación se presentan las diferentes restricciones que se explicitaron en el desarrollo efectivo la primera parte de la situación 1:

Restricciones internas

Las restricciones que identificó Julia y que se evidenciaron en esta parte fueron:

- Identificó que debía realizar los movimientos frente al CBR y durante la captura de datos no se puede mover el CBR puesto que esto afecta la toma de los mismos.
- Por la resolución de la pantalla de la calculadora en el gráfico generado por DISTANCE MATH se pudo observar una discontinuidad la cual se debe a que la pantalla está compuesta por un número finito de pixeles.

Restricciones de comando

Julia identificó que existen dos opciones para elegir la unidad de medida de la distancia en pies o metros.

Restricciones de organización

La utilización del menú flotante no fue utilizado por Julia, puesto que en los momentos de repetir la toma de datos fue la investigadora quien ejecutó los comandos.

En la parte II de la situación propuesta se afianzó el trabajo realizado en la primera parte así:

Momento de Trabajo de la Técnica

Se realizó una experiencia similar con otra gráfica generada de manera aleatoria por el programa DISTANCE MATH, con el fin de corroborar que se haya construido una técnica adecuada por parte de los estudiantes, se solicitó la participación de otro estudiante. Es Ana quien decidió aceptar el reto en esta ocasión.

La investigadora mostró la manera de generar una nueva gráfica, al dar [ENTER] aparece MAIN MENU, este es un menú flotante y se selecciona NEW MATH para generar una nueva gráfica (ver Gráfico 4).

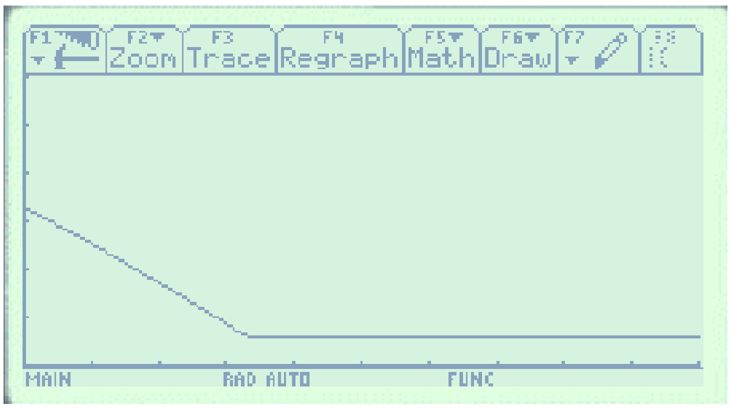


Gráfico 4 Segunda gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte II

En este momento se evidenció una mejor interpretación de la gráfica, como se muestra en el siguiente diálogo:

Investigadora: Observa la gráfica y describe los movimientos que debes hacer para generar una gráfica igual. **Investigadora:** ¿A qué distancia inicial debes ubicarte? **Ana:** La distancia inicial es de 3,2 m, durante 3,3 segundos realizo el movimiento, luego permanezco en posición constante a 0, 8 m durante 6,7 segundos. **Investigadora:** Ahora ubícate en la posición inicial y me dices cuando ya tengas claro los movimientos que debes hacer.

Ana contó 16 baldosas para medir 3,2 m y con los aportes de los compañeros determinó hasta que punto debía moverse. Inició su movimiento y aunque no generó de manera exacta la gráfica, estuvo bastante cercana a lo solicitado (Gráfico 5).

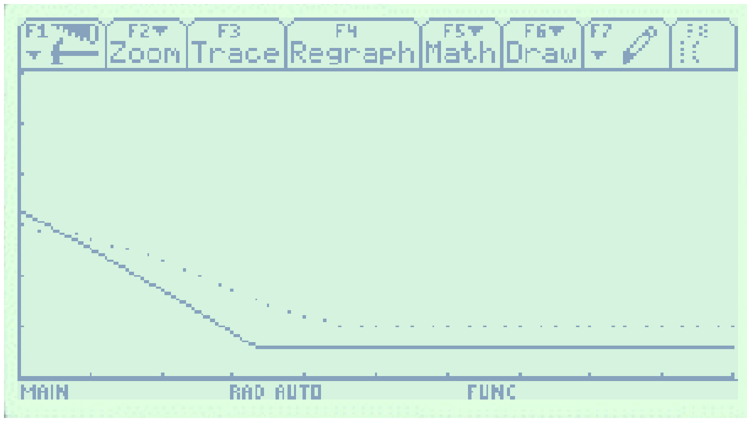


Gráfico 5 Primer intento de captura de datos con el CBR

Esto evidenció la construcción de esquemas de acción instrumentada que permitieron relacionar las variables tiempo vs distancia para generar una gráfica aproximada a la solicitada.

Al repetir la experiencia, Ana se ubica a 17 baldosas del CBR, pero como los compañeros le dijeron que debía moverse de manera más rápida, al aumentar la velocidad, no consideró la distancia y se pasó de la distancia solicitada, saliéndose del campo de acción del CBR (ver Gráfico 6).

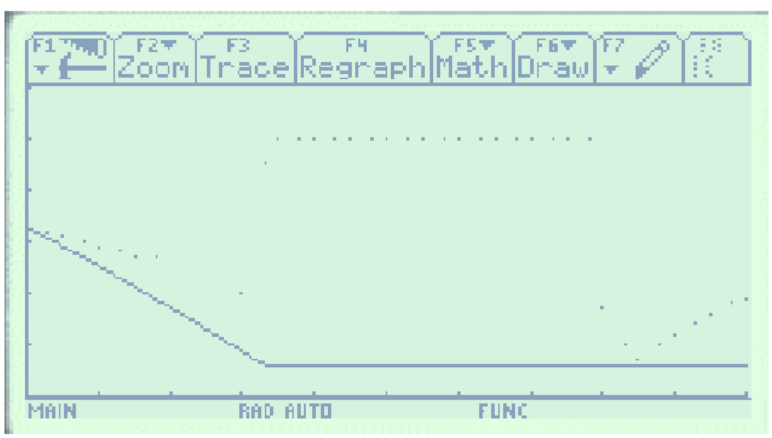


Gráfico 6 Segundo intento de captura de datos con el CBR

La investigadora intervino con el fin de realizar una comparación de las dos gráficas generadas y que tomara en cuenta qué hizo en la primera experiencia y porque estuvo más aproximada que en la segunda gráfica, este proceso es fundamental, pues se sabe que la construcción de instrumentos que medien el aprendizaje de las matemáticas es un proceso a largo tiempo, y aunque a partir de este tipo de situaciones se inicia la construcción de los esquemas necesarios es importante este tipo de conflictos que ayuden a generar esquemas ricos y aplicables en diferentes contextos.

Investigadora: ¿Qué hiciste en la primer gráfica y que no tuviste en cuenta en esta segunda ocasión?
Ana: por moverme rápido no tuve en cuenta la distancia y me choque con el CBR.
Investigadora: ¿Durante cuánto tiempo debes moverte rápido?
Ana: Durante 3 segundos.
Investigadora: ¿Hasta qué posición debes moverte y por qué no te puedes salir del campo de acción del CBR?
Pedro: a 80 cm del CBR.

Para Ana no es claro, hasta qué posición debe moverse y se le generó un conflicto entre la posición inicial y final. En este momento fue necesario realizar un cambio en la disposición del CBR, pues al realizar el movimiento se obstaculizaba la proyección como se observa en la fotografía.

Ana debió entonces volver a estimar la distancia inicial al CBR y la posición hasta la que debía moverse, este cambio de posición del CBR, le ayudó a comprender la relación que había establecido inicialmente entre las magnitudes. La gráfica generada fue la siguiente (ver Gráfico 7).

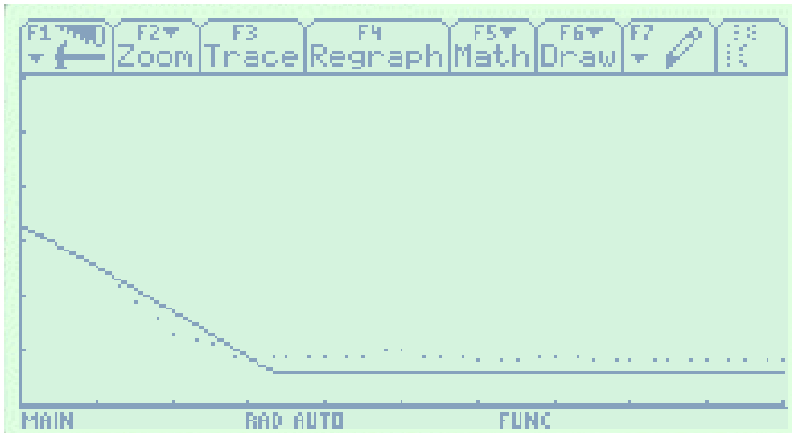


Gráfico 7 Tercer intento de captura de datos con el CBR

Se observó que Ana logró generar nuevamente una gráfica bastante aproximada a la esperada. Otros estudiantes realizaron la experiencia con la misma gráfica, uno de ellos fue Pablo quién generó en su primer intento el Gráfico 8.

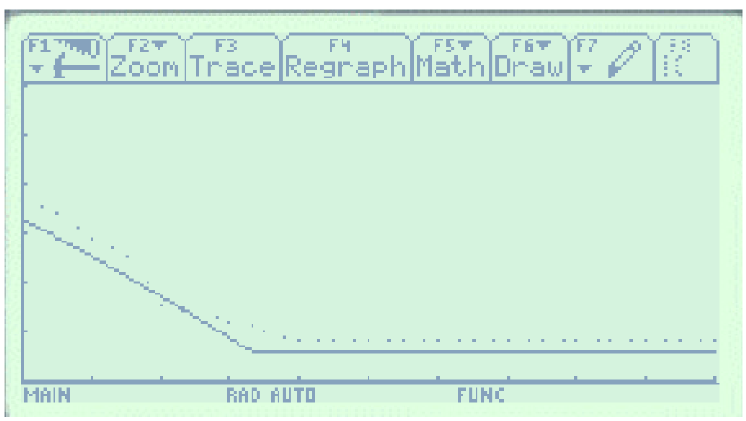


Gráfico 8 Captura de datos con el CBR realizado por Pablo

Se observó que aunque Pablo no se ubicó en una distancia inicial adecuada, logró generar una gráfica bastante cercana a la solicitada y decidió volverlo a intentar (ver Gráfico 9).

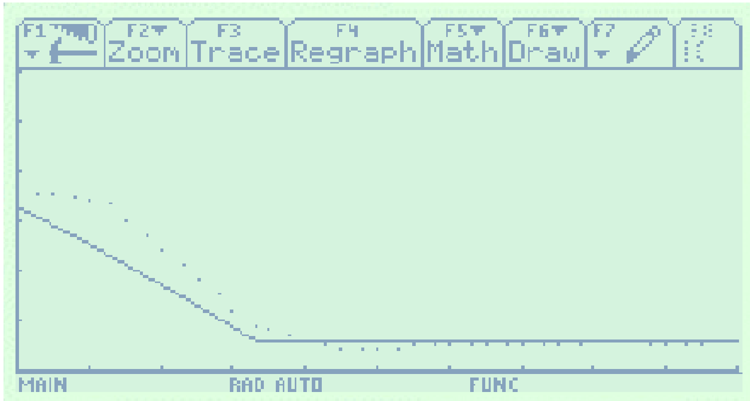


Gráfico 9 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Pablo

En este nuevo intento no logró moverse de tal manera que generara un gráfico cercano al primer segmento, sin embargo, si logra ubicarse a la distancia adecuada para el segundo segmento.

Aunque no se logró obtener una gráfica más cercana, se observó que los otros estudiantes comprendían los movimientos que debían realizar y el por qué de los errores en las gráficas generadas, pues mientras uno de ellos realizaba la experimentación los otros daban justificaciones tales como, no inició a la distancia exacta, se detuvo antes de tiempo, caminó muy rápido, muy despacio, entre otras, lo cual contribuía a la construcción de esquemas de acción instrumentada y los animaba a salir a realizar la actividad.

Ahora es Pedro quien decidió realizar la experiencia (ver Gráfico 10).

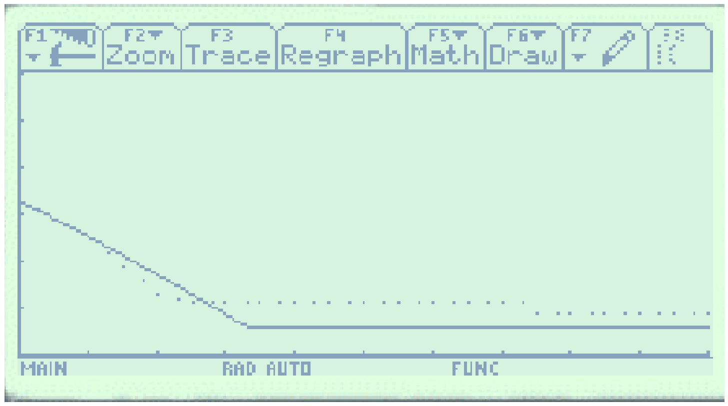


Gráfico 10 Captura de datos con el CBR realizado por Pedro

Pedro se ubica a la posición inicial adecuada y logra moverse en los primeros dos segundos generando la gráfica solicitada, sin embargo en el tercer segundo se acelera y se detiene antes del tiempo previsto. Realizó un segundo intento (ver Gráfico 11).

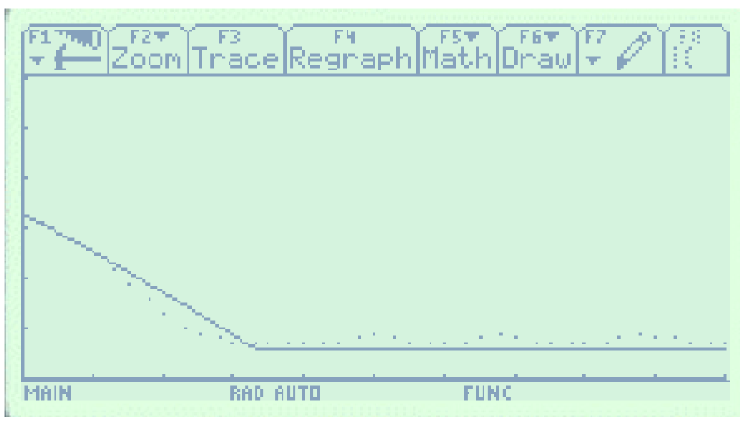


Gráfico 11 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Pedro

En el segundo intento estuvo bastante cercano al gráfico solicitado, aunque en el segundo tramo que debía quedarse en una misma posición Pedro se balancea y por eso se observan esas curvitas. Y lo intentó por tercera vez (ver Gráfico 12).

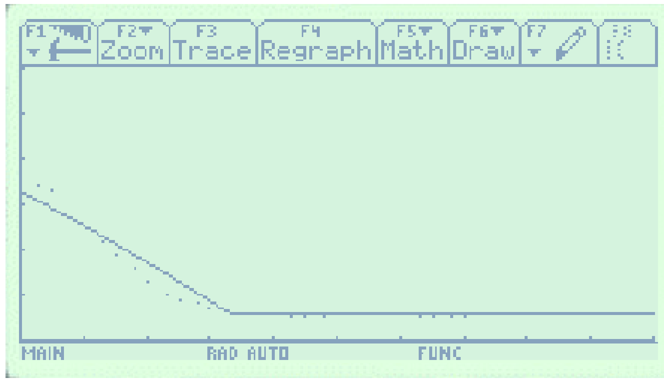


Gráfico 12 Tercer intento de captura de datos con el CBR realizado por Pedro

Se observó que hubo momentos en los cuales coincidió totalmente con el gráfico por tanto no se vieron los puntos generados en la captura.

Es importante mencionar que mientras uno de los estudiantes realizaba la experiencia los demás estaban atentos a sus justificaciones, a la manera como planificaba sus movimientos y a observar lo que pasaba al tomar los datos a través del viewscreen, interactuaban brindando sus aportes para que se cumpliera con el propósito de generar la gráfica de manera exacta.

Momento Tecnológico –Teórico

Para responder las preguntas de la segunda parte se solicitó que otro voluntario saliera a realizar los pasos, es Yuri quien decidió realizar esta parte de la situación, siguió los pasos dados en la guía y generó una gráfica con tres segmentos (ver Gráfico 13).

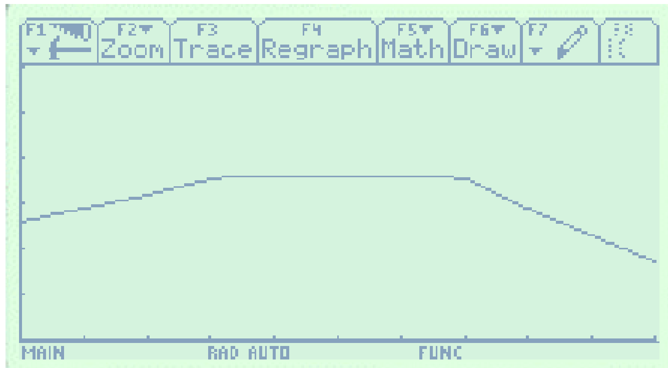


Gráfico 13 Gráfica aleatoria generada por DISTANCE MATH Parte II

Investigadora: Observa cuántos segmentos tiene la gráfica, para el primer segmento, ¿cuántos metros debes caminar y en cuántos segundos?
Yuri: Debo caminar 2,60 m, como en 3,3 segundos.
Investigadora: ¿Es la distancia que debes caminar?

Sin embargo para iniciar el movimiento fue necesario establecer la posición inicial a partir de la cual se debe realizar el movimiento, así cuando Yuri se ubica para realizar la experiencia se da cuenta que no sólo necesita la relación tiempo vs distancia, sino la posición inicial a la que se debe ubicar. Como se muestra en el siguiente diálogo.

Investigadora: La distancia que mediste ¿qué representa?
Yuri: La distancia a la que me debo ubicar para iniciar el movimiento
Investigadora: Entonces cuántos metros y en cuántos segundos debes caminar en el primer segmento
Yuri: Ah, ahora sí, debo caminar un metro en 3 segundos
Investigadora: ¿Luego qué debes hacer?
Yuri: Quedarme quieta en 4 segundos, luego camino tres segundos
Investigadora: ¿Cuánto caminas en tres segundos?
Yuri: Camino un metro y medio en 3 segundos
Investigadora: ¿Cómo debes hacer el desplazamiento del primer y el tercer segmento, acercándote o alejándote del CBR? ¿Para el primer segmento como lo harías?
Yuri: Alejándome porque aumenta la distancia.
Investigadora: ¿Y para el tercer segmento?
Yuri: Me acerco porque disminuye la distancia
Investigadora: Listo, ya sabes ¿cuánto te vas acercar y cuánto te vas alejar?.
Yuri: Listo.

En el primer intento el tercer segmento lo realizó de manera “exacta” y reafirmó que la posición inicial es la indicada (ver Gráfico 14). Lo cual evidenció la construcción de esquemas que permitieran realizar una estimación adecuada de la posición inicial, además al observar en la proyección de manera simultánea lo que sucedía con sus movimientos le permitía corregir sobre la marcha y establecer en qué posición debía permanecer quieta, técnica con la cual logró un desplazamiento en función del tiempo exacto para el tercer segmento.

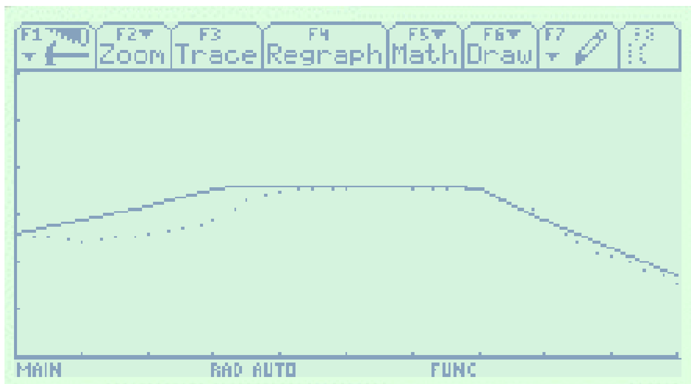


Gráfico 14 Primer intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri

En el segundo intento, para el primer segmento se alejó más rápido y logró generarlo de manera exacta, sin embargo no se detuvo en la posición indicada por lo cual en el segundo segmento se ubicó a una distancia mayor a la solicitada y en el tercer segmento aunque inicia nuevamente el movimiento en el tiempo requerido no lo hace con la rapidez que se requiere por lo que no logra realizarlo de manera exacta, pero es bastante aproximado a lo solicitado. (ver Gráfico 15).

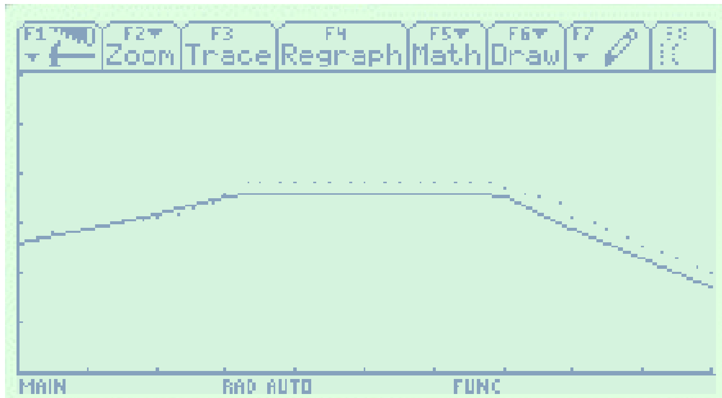


Gráfico 15 Segundo intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri

En el tercer intento Yuri logró generar la gráfica esperada (ver Gráfico 16).

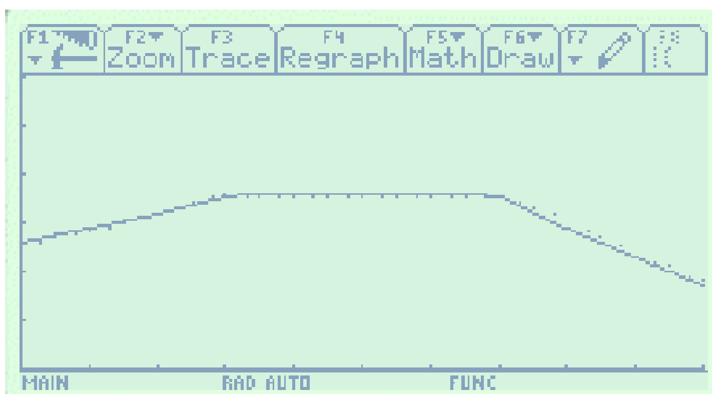


Gráfico 16 Tercer intento de captura de datos con el CBR realizado por Yuri

En la toma de datos de los Gráficos 14, 15 y 16 se observó una construcción adecuada de los esquemas de acción instrumentada para generar gráficas lineales y afines aproximadas a las solicitadas.

Una vez generada la gráfica esperada se procedió a responder las preguntas 1 a la 5 en pequeños grupos de la segunda parte.

4.1.6. Praxeología Matemática

A continuación se presentan los diferentes elementos teóricos que se pudieron identificar en el desarrollo de la segunda parte de la situación 1, a partir de las respuestas dadas de forma escrita por Yuri:

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
1. Para el primer segmento ¿cuántos metros debes caminar y en cuántos segundos?	Inicialmente contestó que debe caminar 2,60 m en 3,3 segundos, pero 2,60 m representa la posición inicial y no el desplazamiento en el primer tramo, al momento de ubicarse para tomar los datos logró identificar que realmente debe desplazarse 1 m y 3,3 segundos. Utilizó como patrón de medida el lado de la baldosa donde 1m=5 baldosas.	Lectura de puntos del gráfico. Magnitudes y unidad de medida. Estimación del tiempo y la distancia. Distancia recorrida.	Comprender a qué distancia y en cuánto tiempo debía realizar el movimiento en cada uno de los tramos de la gráfica.
2. Convierte el valor de la pregunta anterior en metros/segundos. Metros/minuto Metros/hora Kilómetros/hora	Escribió como razón 1m/3,3 segundos $\frac{1\text{m}}{3{,}3\text{ seg}} \times \frac{60\text{ seg}}{1\text{ min}} = 18{,}18\text{ m/min}$ $\frac{1\text{m}}{3{,}3\text{ seg}} \times \frac{3600\text{ seg}}{1\text{ h}} = 1090\text{ m/h}$ $1090\frac{\text{m}}{\text{h}} \times \frac{1\text{km}}{1000\text{m}} = 1{,}090\text{km/h}$	Razón entre la distancia y el tiempo. Conversión en el sistema métrico por factor de conversión.	-Establecer una razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado. -Establecer la equivalencia entre medidas expresadas en diferentes unidades.

Tabla 4. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte II

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
3. ¿Qué distancia recorriste realmente?	1 metro considerando sólo el primer tramo del gráfico.	Distancia	Establecer la diferencia entre posición final e inicial.
4. A partir de los datos de la tabla puedes determinar ¿en qué momentos se debe desplazar más rápido o más despacio?	Para el primer tramo $$\frac{3{,}5-2{,}6}{3}=\frac{0{,}9}{3}$$ Para el tercer tramo $$\frac{3{,}50-1{,}80}{10-7}=\frac{1{,}8}{3}$$ De acuerdo a las relaciones anteriores concluye que 0-3 segundos el movimiento es más lento y 7-10 segundos el movimiento es más rápido.	Relación entre medidas arbitrarias y estandarizadas Razón entre la distancia y el tiempo.	Identificar la variación de la distancia vs el tiempo como velocidad.
5. De acuerdo a las características estudiadas de las gráficas anteriormente construye un enunciado que describa el movimiento que debes realizar para reproducir exactamente la gráfica.	Iniciamos alejados del CBR a una distancia de 2,60 m, luego me alejo 1 m en 3 seg. caminando lento luego me quedo detenida durante 3 segundos, después me acerco al CBR en 4 seg recorriendo 1,7 m caminando rápido y queda alejado en 1,8 m del CBR	Descripción en lenguaje natural de los movimientos a realizar para reproducir exactamente la gráfica. Relación entre distancia y tiempo. Magnitudes y unidades de medida.	Comprender a qué distancia y en cuánto tiempo debía realizar el movimiento en cada uno de los tramos de la gráfica. Identificar la variación de la distancia vs el tiempo como velocidad.

Tabla 4. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de la situación 1 Parte II (continuación).

En la segunda pregunta algunos estudiantes utilizaron la regla de tres, un ejemplo de ello es el procedimiento utilizado por Pablo y descrito en el siguiente diálogo:

Investigadora: Para convertir a metros por minuto, ¿qué realizas?
Pablo: Para realizar la conversión se tiene que un minuto es igual a 60 segundos, ahora 3 segundos ¿cuánto tiene?, ¿cómo se saca la regla de tres?
Julia: Así es, coloque la x aquí y divides 3 entre 60 y da 0,05
Pablo: Ahora si pasamos esto, 1 dividido en 0,05, queda metros por minuto, da 20 m/min
Investigadora: Es correcto el resultado
Pablo: No, no creo.
Investigadora: Es coherente si se continua con esta misma velocidad, no por tres segundos sino por un minuto… ¿cuántos metros recorrerá?
Pablo: Si, si, porque lo que me dice es que recorre 20 metros en un minuto, yo tomo esto como velocidad.

La expresión matemática utilizada fue:

$$1\text{min} \rightarrow 60 \text{ seg}$$

$$\text{X} \rightarrow 3 \text{ seg}$$

$$x = \frac{3}{60} = 0{,}05\ min$$

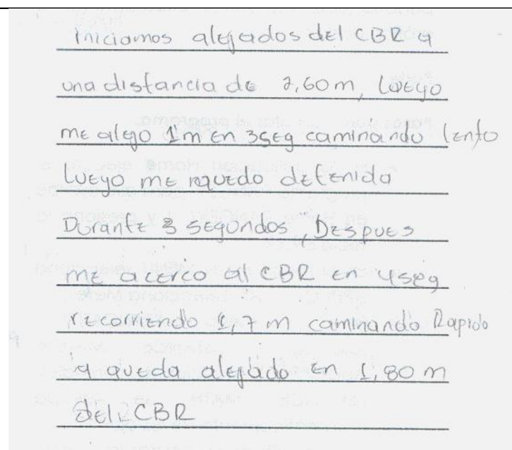
Lo cual significa que $\frac{1m}{0{,}05min} = 20\ m/seg.$

En la tercera pregunta fue claro para la mayoría de los estudiantes que la distancia recorrida en el primer segmento era de un metro aproximadamente, la discusión se generó al tratar de responder la distancia recorrida en toda la gráfica como se muestra en el siguiente diálogo.

Investigadora: Si yo te pregunto qué distancia recorrerías en toda la gráfica ¿qué responderías?
Pablo: El subió un metro y bajó hasta aquí, siguió recorriendo… subió un metro, se detuvo aquí y bajo dos metros, aunque se está devolviendo. ¿Entonces seria 2-1 ó 2+1?
Investigadora: ¿Cuál es la pregunta?, ¿qué distancia recorrió realmente, interesa que sea acercándose o alejándose?
Pablo: Entonces es 1m menos 2 metros es 1 metro. Recorrí un metro.
Yuri: Inicialmente camine 1 metro, me detuve y luego me devolví 1,5 metros, o sea que en realidad recorrí medio metro.
Investigadora: ¿Por qué estas restándole un metro y medio?
Yuri: Porque me devolví, entonces aumente 1 metro la distancia y le resto 1,5 metros porque me devolví.
Lila: Y no será que si aumentas un metro y luego disminuyes 1,5 metros, debes sumarlos porque ambos se están recorriendo.

Según el diálogo ellos daban respuesta restando al recorrido inicial la distancia recorrida en el tercer segmento y se consideraba que realmente sólo se había recorrido 0,5 m, es decir, se interpretó como desplazamiento y no como distancia recorrida, es Lila quien logró determinar que en realidad para hallar la distancia recorrida se debían sumar y que la distancia recorrida era de 2,5 m.

En la quinta pregunta el enunciado que construyó Yuri fue:


Iniciamos alejados del CBR a
una distancia de 2,60m, luego
me alejo 1m en 3seg caminando lento
Luego me quedo detenida
Durante 3 segundos, Despues
me acerco al CBR en 4seg
recorriendo 1,7 m caminando Rapido
y queda alejado en 1,80 m
del CBR

Iniciamos alejados del CBR a una distancia de 2,60 cm, luego me alejo 1 m en 3 segundos caminando lento. Luego me quedo detenida durante 3 segundos. Después me acerco al CBR en 4 segundos recorriendo 1,7 m caminando rápido y queda alejado en 1,80 m del CBR.

Sólo Julia construyó un enunciado por fuera de la experiencia vivida en el desarrollo efectivo de la situación de clase como se evidencia en la siguiente respuesta:

II/ 1) Daniel se encuentra en su casa, a una distancia de 2,50 m alejado de su computador, para ir por él, recorre 1 m en 3 seg, por lo que no debe ir ni muy despacio ni muy rápido.
Al recorrer 1 m se queda quieto 4seg pensando si ir por el computador o mejor ir a comer algo, y decide ir a la cocina, esta quedaba a 2 metros de donde estaba y como tenía hambre se demoró 3 seg en llegar, lo que indica que caminó más rápido que al principio.

Daniel se encuentra en su casa, a una distancia de 2,50 m alejado de su computador, para ir por él recorre 1 m en 3 seg, por lo que no debe ir ni muy despacio ni muy rápido.
Al recorrer 1 m se queda quieto 4 seg pensando si ir por el computador o mejor ir a comer algo, y decide ir a la cocina, esta queda a 2 metros de donde estaba y como tenía hambre se demora 3 seg en llegar, lo que indica que caminó más rápido que al principio.

4.1.7. Instrumentación

Esquemas de uso

Los esquemas de uso que utilizó Yuri durante el desarrollo efectivo de la segunda parte de la situación 1 fueron:

- Ingresó al menú principal del programa RANGER ( )
- Seleccionó NEW MATH y generó la gráfica que se analizó en la segunda parte.
- Reconoció que la gráfica generada estaba formada por tres segmentos.

Se resalta que Yuri no tuvo dificultad en la ejecución de los pasos descritos en la guía, para generar una nueva gráfica y repetir la toma de datos, sin embargo al igual que para Julia esto no significa que se haya apropiado de ellos y los pueda integrar de manera espontánea en la solución de una tarea.

Los esquemas de acción instrumentada fueron presentados en la Tabla 4.

Fenómenos Didácticos

Según lo previsto los fenómenos didácticos que se evidenciaron en la segunda parte de la situación 1 fueron:

Adaptación perceptual

Se evidenció cuando Yuri adaptaba sus movimientos según lo que aparecía en la pantalla del ViewScreen y no realizó la estimación del tiempo. Una vez se generó el esquema de acción instrumentada de la manera de medir la distancia, perceptualmente se estableció el tiempo en que debía desplazarse o permanecer a una distancia constante.

Determinación Localizada

En esta parte de la situación se privilegió fundamentalmente la representación gráfica generada por la calculadora.

4.1.8. Instrumentalización

A continuación se presentan las diferentes restricciones que se explicitaron en el desarrollo efectivo la segunda parte de la situación 1:

Restricciones internas

Las restricciones que identificó Yuri y que se evidenciaron en esta parte fueron:

- Identificó que debía realizar los movimientos frente al CBR y durante la captura de datos no se puede mover el CBR puesto que esto afecta la toma de los mismos.

Restricciones de comando

Yuri una vez se generó una nueva gráfica no se puede volver a recuperar la anterior.

Restricciones de organización

Yuri identificó que el menú principal se encuentra siempre disponible, al dar ENTER, aparece como menú flotante.

Momentos de Institucionalización

Se presentaron diferentes momentos de institucionalización durante la situación, éstos básicamente se dieron cuando la investigadora explicaba el funcionamiento del CBR o las razones por las cuales son válidos los argumentos dados por los estudiantes. A continuación se muestran algunos diálogos en los que se evidencian momentos de institucionalización:

Pablo: ¿El CBR qué es lo que hace?
Investigadora: Este es un detector sónico de movimiento, éste detecta los movimientos que hace un objeto en este caso una persona. Bueno, Jenny ¿a qué distancia piensas que te debes ubicar?
Lila: ¿Cómo así? ¿ella es la que se tiene que ubicar a la distancia del CBR?
Investigadora: Cuando activemos el CBR, él comienza a tomar los movimientos que va hacer Julia y se van registrando en el gráfico unos punticos que nos determina los movimientos de ella, la idea es que ella se mueva de tal manera que reproduzca esa gráfica.
Lila: ¿El CBR está ubicado en la intersección de los dos segmentos?
Investigadora: Observa toda la pantalla en su conjunto y piensa cual sería el punto de referencia realmente, porque lo que se ha dicho es que las gráficas van variando cada vez que se ejecuta el programa.
Lila: ¿El CBR ya está activado?
Investigadora: No, estamos analizando la gráfica no podemos comenzar a movernos sin analizar primero la gráfica. Cuando presionemos [Enter] otra vez, él comienza a titilar y a emitir un sonido y una lucecita verde y comienza tititititi…., que es lo que nos indica que está tomando los datos y esa toma de datos dura sólo 10 segundos.

Los interrogantes que generaron en los estudiantes, hizo que la investigadora debiera explicar cómo funciona el CBR.

Otro momento de institucionalización que se pudo evidenciar en la interpretación de los datos tomados así:

Investigadora: ¿Qué movimientos vas hacer para representar la gráfica?
Julia: Hay un desplazamiento y una subida.
Investigadora: ¿Qué te indica este incremento aquí?
Julia: Un incremento en la distancia, o sea que no debo ir hacia allá, sino hacia atrás.
Yuri: Yo creo debe hacerlo en diagonal.
Investigadora: Ella dice que debes hacerlo diagonal como hacia el tablero.
Yuri: No, pero para acá.
Pedro: Dice que lo único que importa es que se aleje.
Investigadora: ¿Por qué?
Pedro: Porque de todas maneras el sentido no importa, lo que importa es que se aleje.
Investigadora: ¿Qué movimientos debe realizar entonces Julia?
Pedro: Debe desplazarse 1,60 m en tres segundos.
Investigadora: Importa el sentido en qué Julia realiza el movimiento, algunos decían que debía realizarlo hacia el tablero y otros hacia ustedes. Pongamos a prueba la forma de hacerlo.
Julia: No importa el sentido porque igual la distancia va aumentar.
Yuri: Hagámoslo caminando hacia acá.
Se activa el CBR y se realiza el movimiento (ver gráfico 2).
Investigadora: Observen que los puntos no quedaron a la distancia indicada, es decir, no se inició a la distancia indicada, ¿debe alejarse o acercarse? y cuando comenzó a moverse se alcanza a ver un pedacito, ¿pero qué pasó luego?
Estudiantes: Se quedó quieta
Investigadora: Resulta que el campo de acción del CBR, y era la segunda razón que les iba a dar es de frente, porque este CBR funciona con el efecto murciélago, el envía una onda choca con el objeto que está en movimiento y devuelve la onda, entonces si ustedes se desplazan en diagonal, se van a salir del campo de acción del CBR, estos posibles puntos son los que pueden rebotar allá con el vidrio o con otro objeto, porque es con el primer objeto que él encuentre. Por esa razón no se puede desplazar en diagonal porque se sale del campo de acción.
Lila: Pero entonces no puede desplazarse.
Investigadora: Puede desplazarse pero, sólo acercándose o alejándose del CBR.

Al igual que en el momento anterior según las intervenciones de los estudiantes, la investigadora realizó preguntas de tal manera que se generara un conflicto entre lo que ellos piensan y lo que se observó al tomar los datos. Finalmente se institucionaliza la forma de tomar los datos al explicar el funcionamiento del CBR.

Todo lo descrito hasta el momento se dio en la primera clase de dos horas.

4.1.10. Análisis de la actividad observable de los estudiantes

En la segunda clase se retomó la actividad y se socializaron las respuestas que dieron los estudiantes por escrito, esta discusión fue dirigida por la investigadora y tenía como objetivo institucionalizar las respuestas dadas acorde a lo previsto. Así cuando se indagó sobre los otros elementos que los estudiantes deben considerar para reproducir exactamente el gráfico 1, la investigadora enfatizó en los conceptos matemáticos involucrados.

Los estudiantes inicialmente mencionaron las conclusiones a las que se debían llegar con este tipo de situaciones tales como, si no se mueve la gráfica es constante, si se aleja del CBR la gráfica es ascendente y si se acerca al CBR la gráfica es descendente, es decir que se resaltó la caracterización del movimiento que se debe realizar, de manera general sin considerar las magnitudes y las unidades de medida. Por lo cual la investigadora hizo énfasis en el reconocimiento de los elementos constitutivos de la representación gráfica, de esta manera se identificaron las unidades de medida de los ejes de coordenadas, la escala y el punto de referencia (0,0) que representa la posición del CBR.

Así, los estudiantes lograron identificar la importancia en la variación de la distancia y el tiempo como conceptos claves en la situación, sin embargo, al retomar la forma en que se realizó la experiencia se evidenció que se midió solamente la distancia y el tiempo no lo calculaban. Éste era estimado según los puntos que generaba el movimiento en el gráfico. Razón por la cual se solicitó repetir la experiencia sin el ViewScreen con el fin de obligar a realizar la estimación tanto de la distancia como del tiempo.

Los estudiantes lograron identificar que las dos organizaciones de la clase son diferentes y que exigen de destrezas diferentes para obtener una gráfica cercana a la dada, puesto que sin el ViewScreen es necesario planear bien los movimientos teniendo en cuenta el tiempo y la distancia, mientras que si se está utilizando el ViewScreen se puede tomar decisiones sobre la marcha para obtener la gráfica más adecuada de acuerdo a los puntos que se generan por el movimiento efectuado.

¿Qué aporta este tipo de situaciones al estudio de las funciones?

Los estudiantes resaltaron la posibilidad de representar la gráfica a partir de movimientos corporales, algo que no es posible cuando se trabaja a lápiz y papel.

¿Qué conceptos matemáticos se trabajan?

Los temas que identificaron para poder responder a las diferentes preguntas de la situación son: números decimales, unidades de medida, plano cartesiano, relaciones, función lineal y afín como variación de las magnitudes, pendiente, específicamente la pendiente como razón, la velocidad y la aceleración que aunque no son conceptos matemáticos, representan las propiedades físicas de los elementos matemáticos estudiados.

La investigadora aclaró que este tipo de situaciones se encuentra en un contexto físico del mundo real.

¿Cuál es el propósito de la situación?

Los estudiantes identificaron como propósito de la situación introducir el tema de función lineal y afín; modelar la gráfica a partir de la toma de datos con el CBR; aprender a manejar los diferentes artefactos como el CBR, la calculadora, el ViewScreen e igualmente la interpretación y construcción de gráficas. Concuerdan en que no puede ser un sólo propósito.

¿Cuál es la teoría matemática que da cuenta de los conceptos matemáticos estudiados?

Se menciona la teoría de funciones, y por tratarse de las gráficas lineales sería la teoría de funciones lineales, la investigadora debió intervenir y explicar que este es un caso particular, pero que igual se pueden estudiar otros tipo de gráficas como la cuadrática, trigonométricas con este tipo de situaciones y que específicamente las funciones a estudiar son de variable real. Por tanto se trata de la teoría de funciones con variable real.

El tipo de tarea que se desarrolló en esta situación pretendía establecer los movimientos que debe realizar una persona para generar la gráfica lineal o afín de distancia en función del tiempo dada por el programa DISTANCE MATH.

No se realizó una estimación del tiempo, la decisión de cuando se debía iniciar el movimiento se dio según los puntos que aparecieron en la pantalla.

4.2. Situación 2: Movimiento Parabólico "Caída Libre"

Para el análisis de esta situación se tuvo en cuenta también dos tipos de registros: audiovisual y escrito, a través del registro audiovisual, se identifican los diferentes momentos didácticos llevados a cabo durante la implementación de la segunda situación. Al igual que en la primera situación en este análisis se describieron los diferentes momentos de estudio.

4.2.1 Momentos didácticos para el estudio de la gráfica cuadrática

Momento del primer encuentro

Al igual que en la situación 1, el primer encuentro se dio cuando los estudiantes se enfrentaron a la guía y debieron seguir los pasos indicados para iniciar la toma de datos, lo cual Trouche (2005a) identifica como la adquisición de esquemas de usos, en este caso para la captura efectiva de datos, para ello la investigadora solicitó a un estudiante que de manera voluntaria realizara la lectura y desarrollara la situación propuesta. Es importante mencionar que en esta ocasión la participación de los estudiantes se dio de manera más espontánea, pues ya se conocía la dinámica de trabajo, la cual se caracterizó por ser un trabajo grupal, colaborativo el cual estuvo guiado por las preguntas de la investigadora y la participación activa de los diferentes estudiantes.

En este caso es Pablo quien decidió salir a desarrollar la situación. Pablo conectó el CBR a la calculadora y ésta al ViewScreen sin dificultad, ingresó a la aplicación HOME y al escribir RANGER ( ) y dar ENTER se dio cuenta que no ingresaba al programa. Esta es una primera restricción pues la calculadora no cuenta con el programa y se debe transferir el programa del CBR a la calculadora. La investigadora le explicó la manera de transferir el programa, de esta manera socializa un nuevo esquema de uso, la transferencia del programa RANGER () del CBR a la calculadora.

Pablo siguió los primeros pasos sugeridos en la guía con la ayuda de Lila (ver Figura 15) y antes de conectar nuevamente la calculadora para saber qué gráfica se obtuvo una vez se dejó caer la pelota, la investigadora preguntó sobre la gráfica que se espera obtener.

Figura 15. Toma de datos de la pelota botando

Pablo: Al igual que en la situación anterior en el eje x se encuentra el tiempo y en el eje y la distancia, así que el gráfico iría aumentando.
Lila: No entiendo, porque si la pelota rebota, esto significa que sube y baja y como en la guía se menciona movimiento parabólico, estaría relacionada con una parábola.
Investigadora: ¿Qué pasa cuando la pelota toca el suelo?
Pablo: Hasta que toca el suelo el tiempo y la distancia aumenta, pero cuando toca el suelo y se devuelve, llegaría a un punto máximo y se devolvería.
Investigadora: La pelota se encuentra en una posición inicial, cuando se suelta y toca el suelo, ¿se encuentra la distancia máxima o mínima?
Pablo: Cuando toca el suelo sería la máxima.
Investigadora: ¿Y cuando se devuelve?
Pablo: Sería la mínima.
Investigadora: ¿Alcanza la posición inicial?
Pablo: No se devuelve pero disminuye la altura.
Lila: El piso ejerce una fuerza sobre la pelota, por lo cual vuelve y sube, no llega a la posición inicial, pero tampoco es mínima.
Investigadora: Entonces ¿cómo sería el gráfico?

Pablo realiza el siguiente dibujo en el tablero y afirma que se vuelve más pequeño porque va perdiendo velocidad (ver Figura 16).

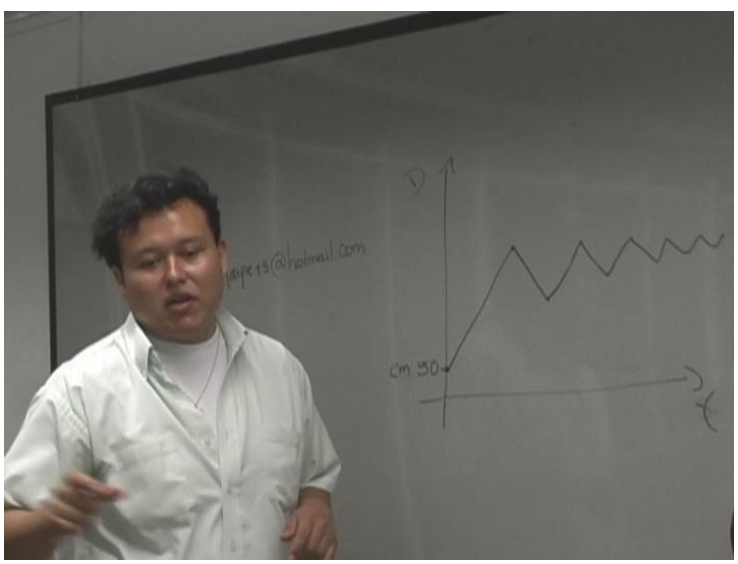


Figura 16. Hipótesis del gráfico esperado

Al conectar la calculadora aunque no se obtuvo el gráfico esperado por la interferencia en el movimiento de la mano de Lila, lograron reconocer qué parte de la gráfica puede servir. Y al visualizar la gráfica concluyeron que son parábolas que disminuyen en altura. (ver Gráfico 17).

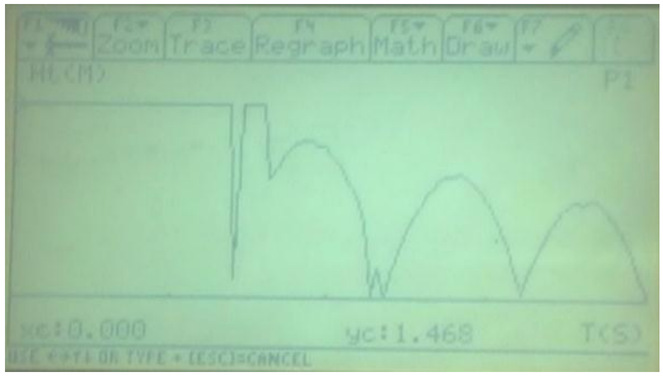


Gráfico 17 Gráfico generado de manera experimental

Momento Exploratorio

Una vez los estudiantes identificaron las condiciones y la manera como se deben tomar los datos para obtener la gráfica esperada se realizó la actividad otras dos veces hasta obtener el gráfico esperado (ver Gráfico 18).

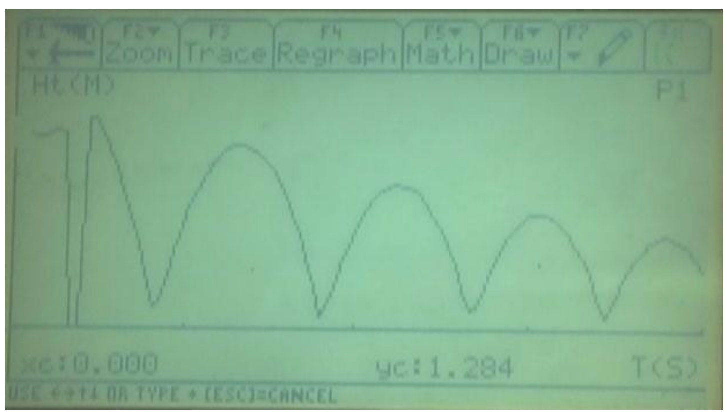


Gráfico 18 Gráfico esperado generado de manera experimental

De acuerdo al gráfico que se obtuvo, Pablo no se encontraba muy convencido del gráfico generado y se le presentó un conflicto, pues no entendía por qué si la altura que alcanza la pelota y en cada rebote disminuye no se ve de esa manera en la gráfica. Para comprender esto la investigadora sugirió responder las primeras 8 preguntas. Cada estudiante debía registrar su respuesta en la guía entregada, a continuación se presenta el análisis de las respuestas dadas por Pablo y Lila:

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
1. ¿Qué propiedad física se representa en el eje X?	Pablo: Identificó en el eje X, la magnitud tiempo, relacionándola con la experiencia anterior. Lila: Identificó en el eje X, la magnitud tiempo.	Identificación de la magnitud tiempo. Lectura del gráfico.	Identificar el sistema coordenado y sus magnitudes.
2. ¿En qué unidades?	Lila y Pablo: Identificaron como unidad de medida del tiempo los segundos.	Identificación de unidades de medida. Lectura del gráfico.	Identificar el sistema coordenado y sus unidades de medida.
3. ¿Qué propiedad física se representa en el eje Y?	Pablo: Como lo relacionó con la situación anterior inicialmente identificó el eje Y con la distancia. Sin embargo cuando contestó la pregunta ya lo había relacionado con la altura. Lila: Mencionó que el eje Y representa la distancia.	Identificación de la magnitud altura. Lectura del gráfico.	Identificar el sistema coordenado y sus magnitudes.
4. ¿En qué unidades?	Pablo: Identificó como unidad de la distancia el metro. Lila: Mencionó que la unidad es la altura en metros.	Identificación de unidades de medida. Lectura del gráfico.	Identificar el sistema coordenado y sus unidades de medida.

Tabla 5. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de las primeras preguntas de la situación 2

Tipos de Tarea	Técnicas	Tecnología	Esquemas de acción instrumentados
5. ¿Qué representa el punto más alto de la gráfica?	Pablo: La altura mínima, porque se encontraba más cerca del CBR. Lila: Mencionó que es cuando la pelota toca el piso.	Distancia inicial de la pelota al CBR.	Se realizó una interpretación no del gráfico sino de la distancia entre la pelota y el CBR.
6. ¿Y el punto más bajo?	Pablo: La altura máxima, porque cuando toca el suelo, es la mayor altura que puede alcanzar alejado del CBR. Lila: Es de 50 cm.	Distancia de la pelota al CBR cuando toca el suelo.	Se realizó una interpretación no del gráfico sino de la distancia entre la pelota y el CBR.
7. ¿Por qué dio la vuelta a la gráfica el programa BALL BOUNCE?	Pablo: Argumentó que el programa invierte tomando como eje de coordenadas el suelo. Lila: El CBR lo voltea para que sea tomado el punto (0,0)	Sistema de referencia.	Identificar que y=0 en la gráfica es realmente el punto cuando la pelota está a máxima distancia del CBR, es decir cuando toca el suelo.
8. ¿Por qué parece representar la gráfica el movimiento de botes de la pelota por el suelo?	Pablo: Porque el suelo va a representar la altura inicial. Lila: La pelota sube y baja es un movimiento vertical, además por la gravedad todo lo que sube debe bajar.	Sistema de referencia.	Reconocer que las gráficas generadas por la caída libre de la pelota son parábolas.

Tabla 5. Rejilla de análisis del desarrollo efectivo de las primeras preguntas de la situación 2 (continuación).

Una vez se realizó la interpretación del gráfico con las preguntas orientadoras de la guía, la exploración se dirigió a identificar las diferentes variables en la expresión algebraica de la función Y= A $(X\text{-}H)^2$ + K, para ello se debía seleccionar el primer bote completo.

Es Pablo quien siguió los pasos de la guía, fue a Plot Menu, seleccionó Plot Tools y Select Domain, y seleccionó el primer bote completo, en este momento debió hacer uso de un *esquema de acción instrumentada* pues tuvo que definir dónde inicia y dónde termina el primer bote completo, según la selección realizada. La gráfica obtenida fue:

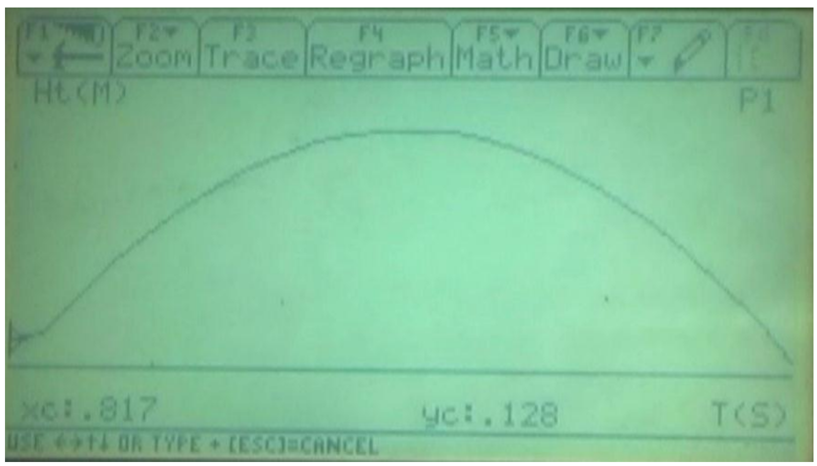


Gráfico 19 Primer bote completo

Se debía determinar el vértice de la gráfica, como se encontraba en modo Trace, la investigadora explicó que al desplazarse sobre la gráfica se observa la variación de “x” y “y” para determinar el vértice, por lo cual se debe seleccionar el mayor valor de “y” que en este caso fue de 1,202 metros.

Altura máxima y tiempo del primer bote completo

Pablo debió establecer la altura máxima y el tiempo correspondiente al primer bote completo. Se presentó dificultad en establecer el tiempo, pues no fue claro que se debía hacer la lectura del punto que representa el vértice y para ello Pablo decidió restar el tiempo final y el inicial. Una vez identificado este procedimiento se establece como tiempo inicial 0.860 segundos y tiempo final 1,806 segundos por tanto el tiempo del primer bote fue de 0,946 segundos y como altura máxima 1,202 metros.

Una vez definida la función Y= A $(X\text{-}H)^2$ + K, en el editor de ecuaciones, en la ventana principal HOME, se debía definir el valor de cada variable para generar un gráfico similar al obtenido de manera experimental, para ello K, representa la altura, H el tiempo y se toma A=1.

Pablo siguió nuevamente los pasos brindados en la guía, salió del programa Ranger (), y buscó en *Apps*, *Y=EDITOR* e introdujo la función indicada sin dificultad. No es claro para Pablo cuál es la pantalla principal y la investigadora le explica que es el *HOME*. Igualmente tiene dificultad para definir las variables por lo que debe buscar en el menú el comando adecuado, es Julia quien le dice que en F4 con el comando *Define* lo puede realizar. Al *Definir* la variable K, presenta dificultad porque no deja espacio entre el comando y la variable a definir; con H hay una restricción de comando pues H ya se encuentra definida y no se deja redefinir, por lo cual se optó por cambiar H por L; esto implica que en la expresión introducida en el EDITOR de ecuaciones se debía cambiar la expresión por Y= A $(X\text{-}L)^2$ + K, la investigadora explicó que para evitar esto se puede definir primero las variables y luego introducir la expresión. Una vez modificada la expresión se pulsó GRAPH la gráfica obtenida fue:

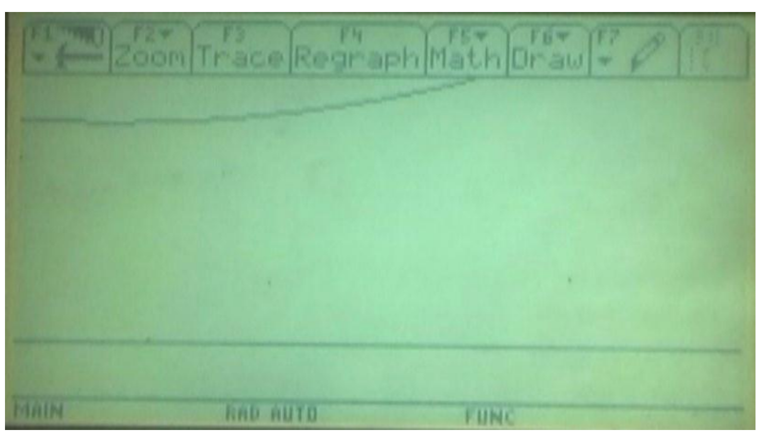


Gráfico 20 Representación de $Y=A(X\text{-}H)^2$ + K con la función GRAPH

Investigadora: ¿Es el gráfico esperado?
Investigadora: ¿Qué pudo haber pasado?
Pablo: Profe, ¿la dificultad no está en el rango de la calculadora?
Investigadora: Ahh bueno, la dificultad está en el rango, se debe modificar los valores para “x” y “y” vamos entonces a definir el rango para esa gráfica.
Pablo: ¿Dónde defino el rango?
Investigadora: Debes ir a Windows, con Ctrl E.

En este momento se debe utilizar un esquema de acción instrumentada que permitiera definir el rango adecuado para visualizar el gráfico, este análisis se orientó así: Pablo definió el siguiente rango (ver Gráfico 21).

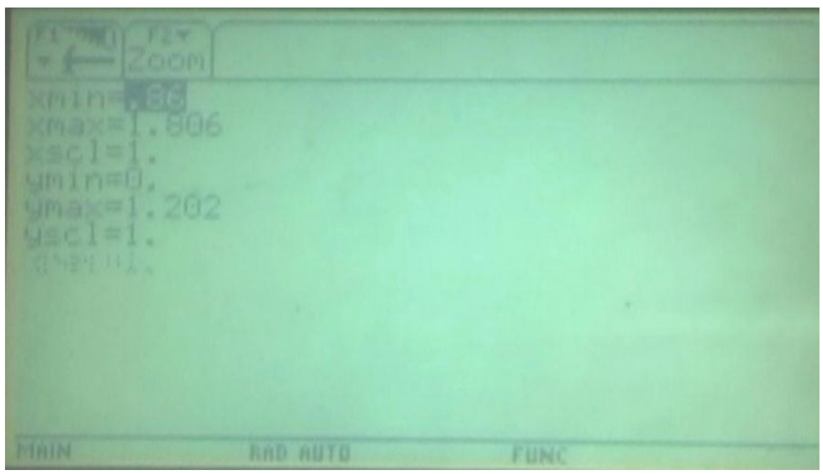


Gráfico 21 Definición del rango en Window

Y el gráfico que obtuvo fue:

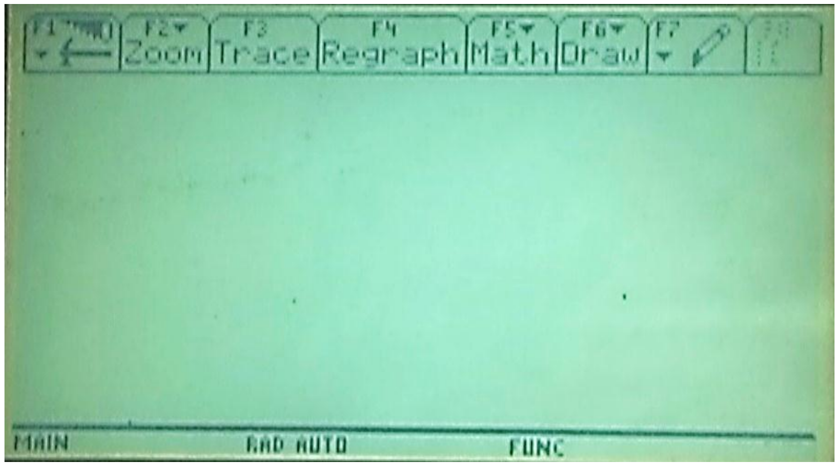


Gráfico 22 Visualización del gráfico en GRAPH

Como no se pudo visualizar el gráfico esperado, se verificó el rango nuevamente, el cual se encuentra bien, lo que no alcanzan a comprender los estudiantes es que la gráfica no coincide con la generada de manera experimental, de ahí la dificultad para definir el rango.

Al modificar el rango según los valores dados en el Gráfico 23.

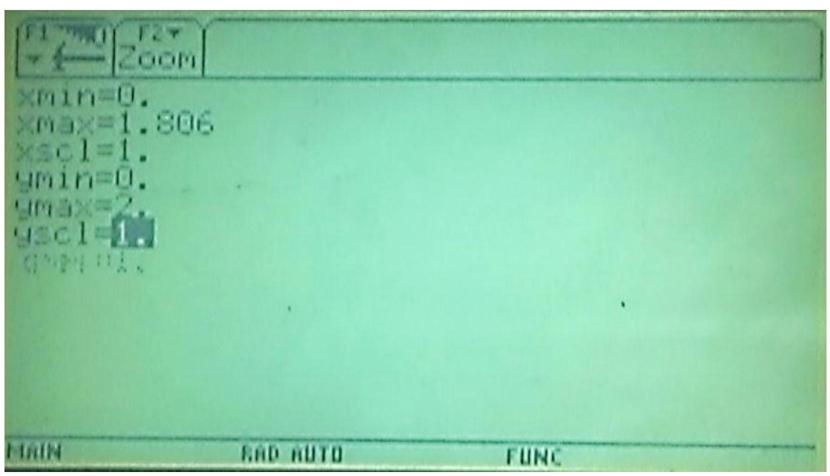


Gráfico 23 Modificación del rango en Window

Se obtuvo el Gráfico 24.

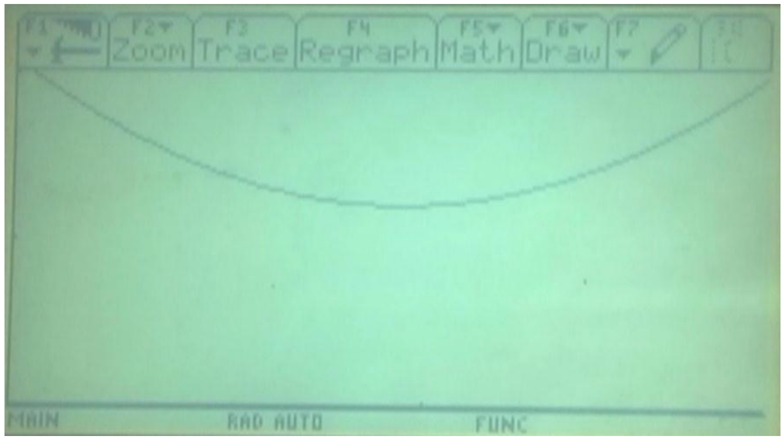


Gráfico 24 Visualización del gráfico en GRAPH

Aunque con este nuevo rango se alcanzó a visualizar parte del gráfico, se decidió cambiar nuevamente el rango así (ver Gráfico 25)

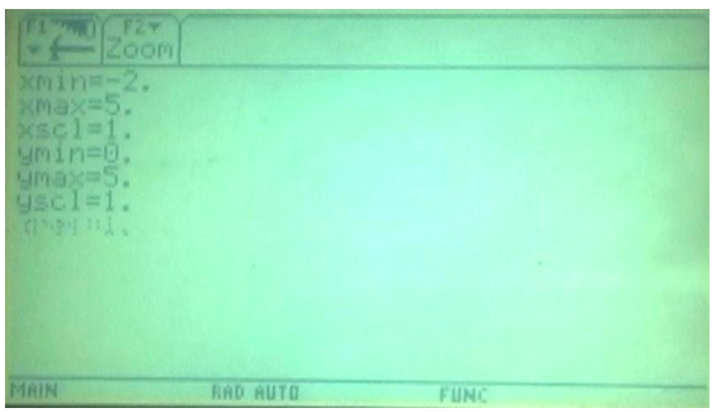


Gráfico 25 Modificación del rango en Window

Se obtuvo el Gráfico 26, en el que se muestra la parábola y su corte con el eje *y*.

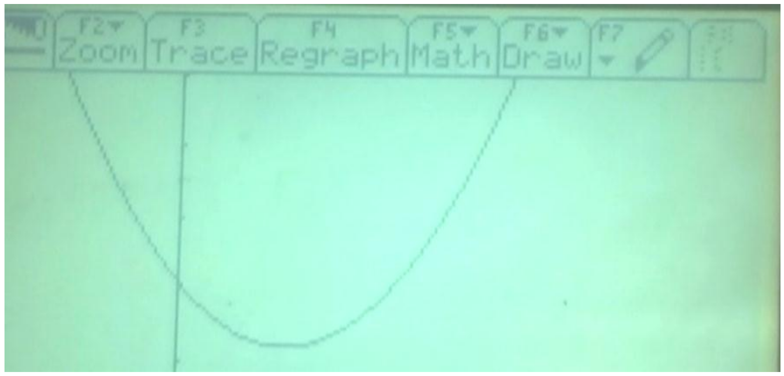


Gráfico 26 Visualización del gráfico en GRAPH

Al comparar el Gráfico 26 con el Gráfico 19 los estudiantes concluyeron que no coinciden porque el Gráfico 26 es cóncavo hacia arriba y el Gráfico 19 es cóncavo hacia abajo.

Luego se realizó el mismo procedimiento para A=2, 0 y -1

A continuación se presenta el Gráfico 27 que fue el gráfico obtenido para A=2

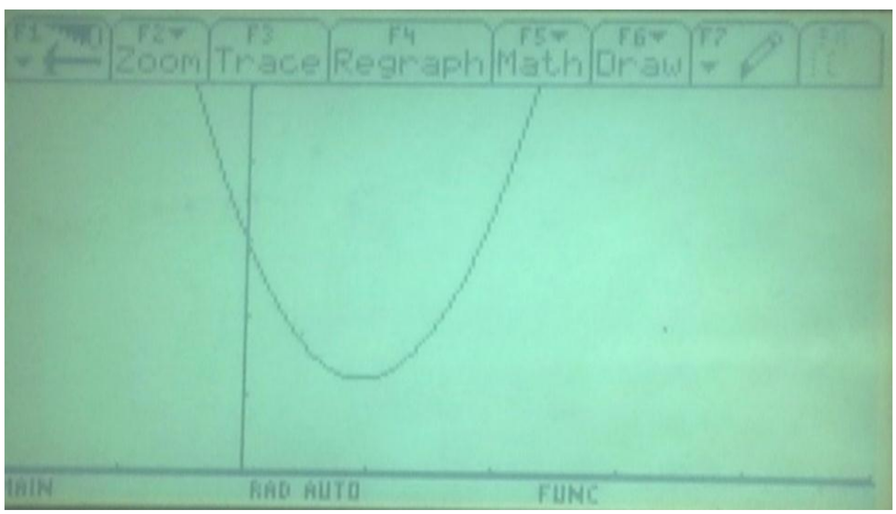


Gráfico 27 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=2

Pablo logró identificar que la parábola se encuentra más cerrada.

Yuri salió a modificar el valor de A=0, se obtuvo el siguiente gráfico.

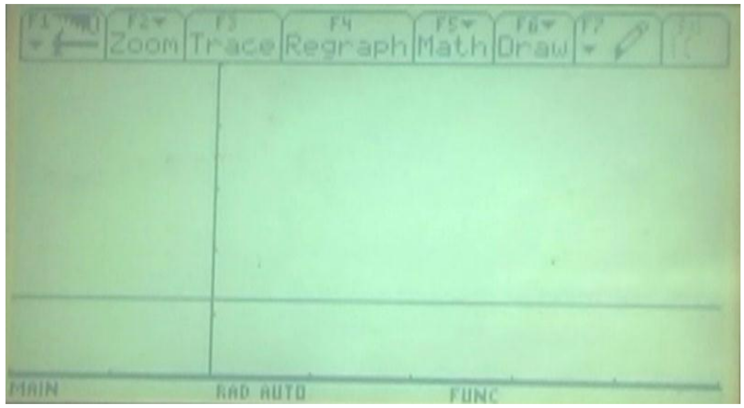


Gráfico 28 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=0

Investigadora: ¿Qué pasó con la parábola?
Pablo: Como A=0, al multiplicar por cero da cero
Investigadora: Sólo queda el valor de K y ¿qué representa K?
Pablo: La altura máxima igual a 1,202 m
Investigadora: Por tanto queda sólo la constante de ahí que se obtenga la recta paralela al eje x.
Investigadora: Al definir A=-1 qué se espera en el gráfico.
Pablo: Que cambie la concavidad de la gráfica.

Yuri definió A= -1 y se obtuvo el Gráfico 29

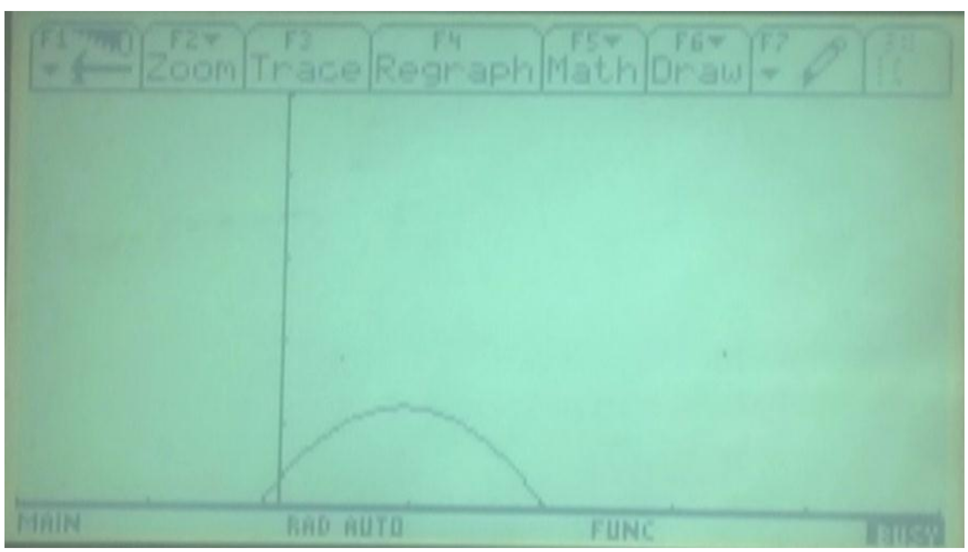


Gráfico 29 Representación de $Y=A(X-H)^2 + K$ para A=-1

Se pudo observar que los estudiantes al cambiar los valores de A lograron construir esquemas de acción instrumentada, pues debieron identificar cómo varia la gráfica para poder visualizarla completamente en la pantalla de la calculadora.

Momento de Institucionalización

Un momento representativo se dio cuando la investigadora explicó que a medida que cambia el valor de *Ymax*, las coordenadas del gráfico no cambian, lo que cambia es el sector que se visualiza en la pantalla, lo que puede variar es la escala y el número de unidades o divisiones en el eje, el gráfico es el mismo porque se trabaja con la misma función, entonces los valores van a ser los mismos, así, el rango modifica es la parte que se puede visualizar de la pantalla.

Yuri: Ahora sí, se parece al gráfico inicial.
Pablo: Modifica el rango.
Yuri: ¿Cómo lo hago?
Pablo: Ctrl E
Yuri: ¿Qué valor modifico?
Pablo: Yo creo que se debe modificar la altura.
Yuri: Ymax= 8 y se da cuenta que no necesita un valor tan alto pues al graficarlo salió mas chiquito, decidió disminuirlo, en esta ocasión define Ymax=3 afirma que a medida que disminuye el valor va creciendo la gráfica, para Ymax=2 obtuvo el siguiente gráfico.
Yuri: A medida que disminuye el valor de Ymax la gráfica va aumentando.

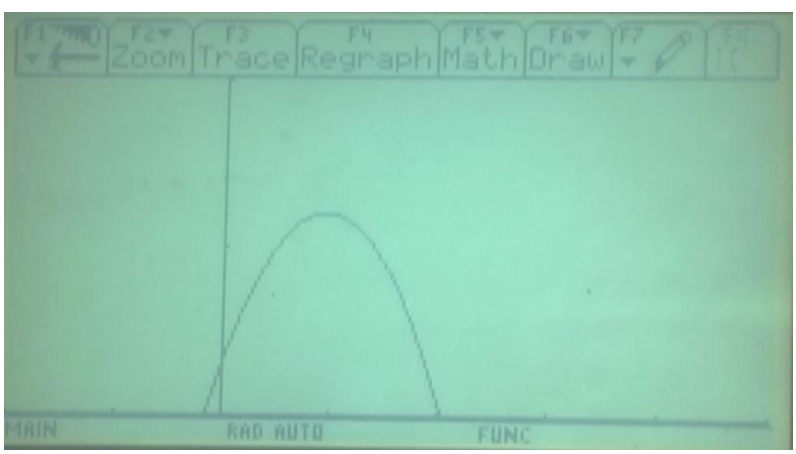


Gráfico 30 Visualización del gráfico al modificar el rango

Esta es pues, una de las acciones instrumentadas que se pudieron identificar, porque para poder modificar esos rangos el estudiante debía tener una visión de la gráfica, saber cuál es el mínimo y máximo para cada eje para poder ver la gráfica completa, el rango cambia la forma de ver la gráfica aunque sea la misma, cambia la visualización porque esa pantalla lo que nos muestra es todo el plano infinito, así que si nos ubicamos en un cuadrante en el que no está la gráfica, no podemos ver la gráfica, que es lo que pasaba al inicio. No se debía conocer sólo que en Windows se cambian los valores, sino que se debe utilizar el conocimiento matemático para poder establecer los valores.

Momento de Trabajo de la Técnica

Por dificultades de tiempo en la implementación de la situación, los estudiantes no alcanzaron a realizar la actividad con el último bote, por tanto no pudieron concluir que en ambos casos el valor de A es el mismo y el significado de esta constante.

4.2.2. Instrumentación

Esquemas de uso

Durante el desarrollo de la situación 2 se lograron identificar algunos esquemas de uso que no se hicieron evidentes en la primera situación tales como:

- Utilizaron la tecla [APPS] de aplicaciones para buscar de manera espontánea los programas que necesitaban tales como: Y=EDITOR, HOME y GRAPH, no manejaban el esquema de CTRL Q para ir a HOME, CTRL W para ir al editor de ecuaciones Y=EDITOR, y CTRL R para ir a GRAPH, por lo cual este esquema debió ser socializado por la investigadora.

- Una vez ubicado en el editor de ecuaciones, debían activar y desactivar las funciones que se deseaban analizar, para ello se debe pulsar F4, este fue otro esquema puesto en práctica durante el desarrollo de la situación.

- Identificaron como pantalla principal el programa HOME, aunque siempre ejecutaban el programa RANGER en el HOME, cuando se mencionó en la guía la pantalla principal, no fue claro para los estudiantes a cual aplicación debían ingresar.

- Para definir una variable en el HOME, el comando utilizado fue *Define*, para este se debe tener en cuenta que se debe dejar un espacio entre en comando y la variable que se va a definir así *Define K=1.202* y la respuesta de la calculadora debe ser *Done*. Con este comando se presentó dificultad por que al no dejar el espacio entre el comando y la variable la calculadora devuelve *Define K=1* y no fue claro que no había sido aceptado el valor por la calculadora.

- La ventana de configuración de los gráficos, es decir en donde se debía definir el rango de la gráfica para ello se debe ir a Windows con CTRL E.

Entre los esquemas de uso previstos que se pudieron evidenciar:

- En el menú principal del programa RANGER identificaron como ingresar al programa BALL BOUNCE

- Establecieron que BALL BOUNCE invierte los datos de distancia para que la gráfica se ajuste mejor al movimiento de la pelota que perciben los estudiantes.

- Utilizaron de manera adecuada el CBR para repetir la toma de datos cuando no obtuvieron la gráfica deseada, para ello se aseguraron que la pelota rebotara de manera vertical debajo del CBR durante la toma de datos.

- Aprendieron cómo regresar al menú principal o salir del programa RANGER.

Fenómenos Didácticos

En el desarrollo efectivo de la situación 2 se evidenciaron los siguientes fenómenos didácticos:

Pseudo Transparencia

Durante la experiencia cuando Pablo obtuvo una gráfica como la que se había concluido que debía aparecer según los intentos anteriores, no se encontraba muy convencido de dicho resultado.

Al introducir la expresión Y=A*(x-H)^2+K, en el editor de ecuaciones y dar [Enter] aparece: $Y= A\ (X\text{-}H)^2 + K$, aunque no generó ningún conflicto, puesto que era un esquema ya adquirido por los estudiantes.

Adaptación perceptual

Este fenómeno se evidenció cuando se debía generar una gráfica que coincidiera con la experimental y definen A=1, en este momento los estudiantes esperan una parábola cóncava hacia abajo y por tanto tienen dificultad para definir el rango de visualización para ver el gráfico que se obtiene. No alcanzan a relacionar el signo de A con la aceleración, es decir la gravedad.

Determinación Localizada

La situación privilegió la representación gráfica, su interpretación al identificar las variables involucradas y el ajuste que se debía realizar en la ventana Windows para poder visualizar el gráfico, este ejercicio obligó a la manipulación de la expresión algebraica y su relación con el gráfico, sin embargo es aún restringido el paso de una representación a otra.

4.2.3. Instrumentalización

Restricciones del artefacto

A continuación se presentan las diferentes restricciones que se explicitaron en el desarrollo efectivo en la segunda parte de la situación 2:

Restricciones internas

- El sensor debe apuntar siempre hacia la pelota.
- La distorsión o discontinuidad que se genera en la gráfica por el movimiento de la mano y por la estructura de la pantalla, compuesta por un número finito de pixeles.
- La calculadora debe estar configurada en idioma inglés.

Restricciones de comando

- Existen varias opciones para iniciar la toma de datos pero los estudiantes utilizaron solo la opción TRIGGER.
- Se configuró la unidad de medida en metros.
- Una vez se genera una nueva gráfica no se puede recuperar la anterior.
- La variable H ya se encontraba definida así que se decidió cambiar la letra por L.

Restricciones de organización

- El menú principal es un menú flotante que se activa al dar ENTER.

4.3. Análisis de las elecciones de sesiones propuestas por la investigadora

De acuerdo a la descripción de lo ocurrido en la aplicación del diseño experimental, se pudo corroborar que este tipo de situaciones requieren de una mayor cantidad de tiempo para su implementación, no se puede esperar que en tan corto tiempo los estudiantes hayan adquirido los esquemas de uso y de acción instrumentada para el diseño de situaciones al utilizar el CBR, sin embargo en los trabajos finales escritos donde los estudiantes debían realizar un análisis de las situaciones y proponer modificaciones al diseño presentado inicialmente, lograron reconocen estos dispositivos como instrumentos que median el conocimiento, los cuales dinamizan y resaltan la identificación de las variables utilizadas en cada situación, la expresión algebraica que los representa y su representación gráfica, esto se pudo evidenciar en el trabajo de Julia con la siguiente reflexión:

> Esta propuesta privilegia una génesis instrumental colectiva, pues a medida que se desarrolla la situación, a pesar de que sea sólo uno o dos estudiantes que la resuelvan, todos los demás estudiantes apoyan la realización de la situación dando sugerencias, posibles soluciones a los interrogantes, haciendo hipótesis de lo que se espera obtener al capturar los datos con el CBR. Estas situaciones se caracterizan por la continua reflexión de las estrategias de solución y las soluciones mismas.
>
> […] De esta manera como menciona Guin (2007) comprender la génesis instrumental supone la articulación de dos procesos duales el de instrumentalización y el de instrumentación, al respecto podríamos decir que se inició el proceso de instrumentalización al reconocer la manera cómo funciona el CBR, cómo se debe manipular el CBR para la captura efectiva de datos, el menú principal con el que funciona y una primera exploración de los programas DISTANCE MATH y BALL BOUNCE, aunque no se dio el proceso de adaptación de los artefactos según las necesidades. Los esquemas de uso y de acción instrumentada que se evidenciaron ya fueron mencionados en la descripción de cada situación.

Algunos estudiantes lograron hacer propuestas de modificación al diseño de las situaciones propuestas. Específicamente se dieron modificaciones a la primera situación así:

- Julia propuso caminar con el CBR apuntando a un punto fijo en la pared. De esta manera el punto de referencia es la pared y no el CBR.

- José planteó la posibilidad de explorar la velocidad de dos cuerpos que se mueven acercándose uno respecto al otro en línea recta, es decir, el concepto de la pendiente de una gráfica lineal en relación con la velocidad relativa entre dos cuerpos. (ver ANEXO D).

Igualmente los estudiantes lograron identificar las características del escenario que se debe construir al considerar elementos como el tipo de situaciones, el tiempo necesario para su implementación, la organización de la clase, el rol del profesor y los estudiantes, así mismo la relación entre el conocimiento procedimental y conceptual, esto se puede observar en afirmaciones como:

- No se debe colocar cualquier situación, sino que debe tener una intencionalidad, para que los estudiantes se sientan motivados al resolverla, se crea un espacio para formular preguntas, hacer conjeturas y corroborar sus hipótesis.

- La situación se puede realizar en tres horas aproximadamente, aunque esto puede variar dependiendo de los esquemas desarrollados por los estudiantes, los cuales le permitirán llevar a cabo la actividad de manera más lenta o más rápida.

- Es conveniente que los estudiantes trabajen en forma grupal, ya que de esta manera se propicia una colaboración e intercambio de ideas entre ellos, permitiendo la construcción de la noción de función lineal grupalmente.

- El rol del profesor cambia, se rompe el esquema tradicional de la clase expositiva, así el profesor pasa a ser un moderador que hace intervenciones significativas y no interviene mientras el estudiante progrese "correctamente" o tenga la oportunidad de evolucionar en sus esquemas por sí mismo.

- El estudiante tiene la posibilidad de validar o refutar sus construcciones, puede corregir la decisión tomada, construyendo de esta manera su propio conocimiento.

- Cuando recurrimos al uso de tecnología para enseñar [o propiciar el aprendizaje de] las matemáticas se hace necesario que los estudiantes cuenten con cierta información técnica del programa antes de empezar a trabajar en la situación, ya que si no es así, no se podrá sacar el mejor provecho al uso de tecnologías en la clase, pues el tiempo que se podría usar para analizar, conjeturar, verificar los resultados, entre otros, se gastará tratando de manipular la herramienta.

En la última viñeta se puede observar que existe una concepción muy arraigada que se deben conocer los artefactos que se desean utilizar (calculadora o CBR), para poder producir o aplicar algún conocimiento matemático, sin embargo, se debe tener claro que los esquemas de uso y de acción instrumentada se pueden construir de manera simultánea, es decir, no se debe separar la parte procedimental de la parte conceptual.

En la ejecución de comandos que dejan ver los esquemas de uso con los que se cuenta, las intervenciones tanto de la investigadora como de los estudiantes se realizaron de manera directa, en muy pocas ocasiones se brindó la oportunidad de que se exploraran el menú y/o el teclado de la calculadora para buscar el comando que se requería para la acción a realizar. Sin embargo, se espera que generalmente las intervenciones de quien dirige el desarrollo de la situación sea a partir de preguntas orientadoras que le permitan al sujeto realizar, observar los resultados, contrastar para tomar decisiones a cerca de sus conjeturas, realizar inferencias, esto le permitiría construir su propio conocimiento. Igualmente el orientador debe institucionalizar las respuestas, los procedimientos correctos y/o explicar los fenómenos didácticos que se presentan para obtener una justificación correcta de lo observado.

A la par los estudiantes lograron establecer las potencialidades y limitaciones del CBR al implementar situaciones como las realizadas en esta investigación entre ellas identificaron:

Potencialidades

- El CBR permite a los estudiantes explorar las relaciones matemáticas que hay entre distancia, velocidad, aceleración y tiempo utilizando los datos de la gráfica de la actividad.
- El estudiante puede crear la gráfica de acuerdo al bote que realizó, es decir, él mismo experimenta la actividad.
- Puede interactuar con el recurso, es un recurso tangible.
- Con el CBR se pueden trabajar situaciones que son reales y cotidianas para el estudiante.
- Se pueden trabajar situaciones que no necesariamente se presentan en matemáticas, tienen conceptos matemáticos pero están inmersas en física.
- El CBR es un tipo de tecnología que se convierte en un medio de enseñanza el cual motiva a los estudiantes en el trabajo de las matemáticas y la física, esta motivación está asociada a la toma y trabajo con datos reales, esto los convence de que los conceptos tratados en clase están conectados con el mundo real y no son ideas tan abstractas.
- El trabajo con el CBR brinda un trabajo de exploración de los estudiantes, dependiendo de las distintas actividades que proponga el docente, se hacen las

clases más dinámicas en las que los estudiantes realizan generalizaciones y corroboran distintos conceptos matemáticos y físicos, se hacen evidentes conceptos que en lápiz y papel pueden permanecer ocultos.

En las potencialidades identificadas por los estudiantes se hizo explícito la importancia del contexto de las situaciones, en este caso, el contexto físico, así mismo, se resaltó el trabajo con las matemáticas experimentales, es decir, la importancia de poder capturar y analizar los datos “reales” a partir de representaciones gráficas y algebraicas, en los cuales se hacen evidentes conceptos que a lápiz y papel no son objeto de estudio.

Limitaciones

- Cuando no está el programa RANGER en la calculadora hay que transferirlo del CBR antes de capturar los datos, porque si no, no se puede realizar la actividad.

- Cuando se pide ejecutar el programa RANGER, por lo general se tiende a buscarlo en la calculadora y en realidad sólo se trata de escribir la palabra RANGER ( ).

- Se debe trabajar con el programa en inglés y esto representa una complicación para personas que no entienden el idioma.

- También aparece una dificultad en el momento de calcular la medida exacta a la debemos estar separados del CBR para empezar la actividad; al igual que la medida en metros y segundos con las que se deben trabajar el desplazamiento y su velocidad.

- Este recurso no es muy accesible para todos, pues por su costo no lo pueden poseer todos los colegios y por ende no se puede aplicar en las aulas de clase.

- Es un recurso que al usarlo se debe tener cuidado pues cualquier movimiento brusco que se haga al CBR este captura estos movimientos e igualmente si se está a una distancia o altura muy lejana este no captura los datos.

- Las dificultades están relacionadas con la parte técnica del artefacto, en el que se deben generar esquemas de manejo en la parte de las distintas conexiones. La calculadora debe estar en inglés, pero estas dificultades se pueden superar con el manual del CBR.

La mayoría de limitaciones encontradas por los estudiantes aluden a restricciones de comando, sólo se menciona una restricción institucional referida a la adquisición de las calculadoras y el CBR para poder llevar este tipo de situaciones al aula de clase.

Para finalizar Julia menciona que:

“Implementar situaciones como las descritas, resulta importante para la enseñanza de las matemáticas, no sólo porque teniendo las condiciones adecuadas la tecnología puede favorecer que los estudiantes adquieran aprendizajes significativos; sino que se está cumpliendo con los objetivos en la Ley General de Educación, para la Educación Básica, como el desarrollar habilidades comunicativas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente; también mediante estas experiencias se fomenta en los estudiantes el interés y el desarrollo de actitudes hacia la práctica investigativa e incluso se lleva a ampliar y profundizar en su razonamiento lógico y analítico que permite interpretar y solucionar problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.

En el mismo sentido como se menciona en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, algunos procesos y procedimientos transversales a varios tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio); entre ellos podemos ver necesarios para llevar a cabo representaciones gráficas, como es el caso de la situación presentada, pues ésta incluye no solo una representación lineal de los números en el recta numérica, sino también la representación de relaciones entre dos variables (tiempo y distancia) por medio de gráficas cartesianas".

En este análisis este estudiante logró relacionar lo propuesto curricularmente desde el Ministerio de Educación con las habilidades que se pueden desarrollar con situaciones que involucran la toma de datos reales con el CBR. Esto también se logró observar en la siguiente reflexión realizada por Ana:

"Con este tipo de actividad, los estudiantes pueden llegar a ser capaces de interpretar en términos de la realidad información que hay en la representación gráfica de una función. A menudo, el trabajo con funciones se centra en producir la representación gráfica a partir de la expresión algebraica, pero en este caso, se promueve una serie de acciones encaminadas a profundizar en el estudio propio de una función representada gráficamente y de elementos característicos suyos, como los intervalos de crecimiento, los de decrecimiento, las constantes, la relación y escala entre los ejes, las unidades de medida, etc. Por otro lado, los estudiantes manejan de manera práctica nociones físicas como la distancia, la velocidad o el tiempo y que generalmente no son más que datos estáticos en los problemas. Con este tipo de problemas los escolares se involucran directamente en la resolución de problemas. Además, si se usa un proyector en el aula para que todos puedan ver el desarrollo del experimento, se fomenta el debate y la participación colectiva".

Así podemos decir que los estudiantes que participaron en la investigación lograron reconocer el papel de los CAS en la interpretación de datos y técnicas matemáticas utilizadas, así como los problemas subyacentes a su integración, aunque los encuentren centrados específicamente a las restricciones del artefacto.

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES

En este capítulo se relaciona lo teórico con lo práctico, se confronta lo realizado con la pregunta de investigación y los objetivos planteados y se dejan abiertas nuevas preguntas que contribuyen a realizar investigaciones alternativas utilizando los mismos o diferentes artefactos informáticos a los de esta investigación para el estudio de las funciones con variable real.

Con respecto a la pregunta de investigación, la actividad matemática que se genera en el estudio de un concepto matemático, parte de una pregunta generatriz que permite crear un tipo de situaciones y una técnica de solución, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo Chevallard (1999; citado por García, Bosh, Gascón y Ruiz 2007). El análisis epistemológico realizado, ayudó a identificar el contexto físico como uno de los contextos que históricamente motivó la creación y desarrollo de la noción de función, de ahí que se haya considerado propicio para el estudio de las relaciones espacio – temporales, además por ser un contexto cercano a los estudiantes y aplicable tanto en la educación secundaria como en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Así mismo, el contexto físico permitió la integración de un CAS y un sensor de movimiento (CBR), para el estudio de las relaciones espacio – temporales a partir de la representación gráfica de manera experimental, a través de la cual los estudiantes pudieron identificar magnitudes como la distancia y el tiempo, cuantificarlas y determinar la relación establecida entre ellas, es decir, identificar sus características según los diferentes tipos de variación.

Como el CBR brindó la posibilidad de tomar "datos reales" de manera experimental, los estudiantes pudieron tomar decisiones que les permitieron prever y anticipar el comportamiento de la gráfica que se generó al realizar la experiencia, específicamente en la situación 1, planificaron sus movimientos, hicieron conjeturas, las validaron, relacionaron la experiencia real o física con su representación gráfica, hicieron explícito el punto de referencia, la distancia inicial, el empleo de las unidades de medida estandarizadas y arbitrarias, la incertidumbre en las medidas y el margen de error, la velocidad como la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo empleado, entre otras.

De acuerdo a la actividad matemática que se describió en el *desarrollo efectivo de las situaciones* se puede afirmar que este tipo de situaciones aportó al estudio de la estructura de los problemas a partir de la variación de las magnitudes, de manera experimental al relacionar las variables y parámetros de las expresiones algebraicas con su representación gráfica, se le dio sentido a las expresiones algebraicas en el contexto físico y no se trabajaron como la aplicación de formulas de manera aislada.

Para dar cuenta de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes se transcribieron algunos episodios que mostraron la manera en que ellos afrontaron las situaciones propuestas y que le permitieron la identificación de los diferentes momentos de estudio en el desarrollo de cada situación, estos fueron preestructurados por los artefactos (CAS y CBR) y por la manera como se adaptaron las situaciones descritas en la *Guía para estudiantes del CBR*. Igualmente se hizo explicito el rol de la investigadora, del estudiante sherpa y de su interacción con sus compañeros. Se puede afirmar que las situaciones siempre fueron asumidas por los estudiantes, se discutieron de manera grupal y finalmente cada estudiante pudo dar respuesta a las preguntas planteadas.

Un ejemplo de ello se dio en la situación 2 referida al movimiento parabólico "Caída libre", en la que a partir de la representación gráfica generada de la experiencia de dejar caer una pelota, se identificó su vértice para generar una gráfica similar a partir de su expresión algebraica canónica, en la que el vértice representa el tiempo y la altura máxima alcanzada por la pelota; el parámetro A fue considerado desconocido y los estudiantes debieron realizar la exploración de diferentes valores en el Y=EDITOR para llegar a concluir que su valor es igual a un medio de la gravedad.

En esta investigación los estudiantes no lograron relacionar el valor de A con la gravedad, sin embargo a partir de la exploración identificaron la concavidad según su signo y qué ocurre cuando A vale cero. Entre las razones que se identificaron para que los estudiantes no llegarán a esta conclusión, se tiene el tiempo requerido para su implementación y la forma como se gestionó el desarrollo de esta situación, se espera que al implementar este tipo de situaciones en procesos a mediano y largo plazo se brinde a los estudiantes elementos suficientes para el trabajo con generalizaciones y no con el uso sólo de fórmulas, así como el trabajo con parámetros y no sólo con incógnitas, lo que corresponde a una algebrización de las funciones con variable real.

Así mismo, se pudieron evidenciar las dificultades de algunos estudiantes al interpretar las gráficas cartesianas para la descripción de las situaciones de variación en este contexto y que han sido reportadas por Kaput (1987) en los estudios de sistemas de representación matemática, tales como: al generar una gráfica dada de distancia vs tiempo, los estudiantes tienden a realizar el movimiento siguiendo la trayectoria del gráfico sin considerar la variación de las magnitudes que permiten describir el movimiento, lo cual se evidenció en la discusión que se generó entre los estudiantes en el *momento del primer encuentro* de la situación 1.

La TAD aporta elementos para el análisis de las prácticas institucionales, así como para cuestionar los cambios y posibles efectos de las praxeologías matemáticas propuestas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, éstos elementos no permiten visualizar y analizar los procesos de instrumentación e instrumentalización que se presentan al integrar artefactos informáticos (CAS y CBR), de ahí que el objetivo general de esta investigación apunte a fundamentar dicha integración desde la articulación de la TAD y el enfoque instrumental a partir de las técnicas instrumentada. Tanto en los análisis preliminares como en los análisis *a priori* preparados por la investigadora, en los análisis de familiarización con el CBR y en los análisis del desarrollo efectivo de las situaciones se mostró cómo cada una de las categorías utilizadas desde estos dos enfoques se complementan y brindan elementos a los profesores e investigadores para comprender y promover la instrumentación en la actividad matemática que se genera e identificar el tipo de técnicas que se favorecen, frente al estudio de las funciones con variable real en un contexto físico de movimiento.

En los anexos A y B se concretaron las situaciones que fueron seleccionadas y adaptadas por la investigadora de la Guía para estudiantes del CBR, se caracterizan porque a partir del movimiento generado de manera corporal o por la caída libre de una pelota se genera dos tipos de variación diferentes en este caso una función lineal o afín y cuadrática que hacen explícito la relación entre las magnitudes de distancia y tiempo, cuya praxeología matemática y didáctica fue descrita de manera detallada en los *análisis de familiarización con el CBR*, lo cual permitió corroborar que es posible el estudio de praxeologías puntuales, susceptibles de estar relacionadas y de articularse para generar praxeologías locales y no su estudio de forma fragmentada.

Una categoría importante del *enfoque instrumental* es la *orquestación instrumental*, a partir de la cual se pudo caracterizar *la gestión* de las situaciones de movimiento al integrar un CAS, la organización que se planteó fue realizada alrededor del *estudiante sherpa*, aunque éste no había construido instrumentos de manera individual, se utilizó el viewscreen para socializar la manera en que éste estudiante ejecutó el programa y los comandos requeridos para solución de la situación a sus compañeros, verbalizó sus conjeturas y el análisis de la situación propuesta realizada, es importante mencionar que las situaciones siempre fueron discutidas en grupo.

Este tipo de organización favoreció el manejo colectivo de los procesos de *instrumentación* e *instrumentalización*, pero sobretodo brindó información a la investigadora sobre los *esquemas de uso* y *esquemas de acción instrumentada* que estaban siendo construidos por el *estudiante sherpa* y que fueron presentados en el *análisis del desarrollo efectivo de las situaciones*. Igualmente favoreció el debate entre los participantes de la clase, así como la existencia de otro punto de vista distinta a la del profesor (la investigadora) lo que permitió una relación diferente a la tradicional entre los estudiantes y el profesor. Es importante resaltar que no siempre el mismo estudiante tuvo el rol de *estudiante sherpa*, sino que de manera voluntaria los estudiantes cumplieron dicho rol.

Entre los factores que incidieron en la construcción de los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada por parte de los estudiantes fue que la disponibilidad de la calculadora Voyage 200 y el CBR los cuales sólo se utilizaron en los momentos de clase y por contar sólo con un CBR siempre se trabajó de manera grupal haciendo uso del viewscreen, otro factor importante fue el tiempo destinado para la implementación de las situaciones.

Como parte de la *preparación brindada a los profesores en formación inicial* en el curso "Diseño de Ambientes de Aprendizaje informático y Nuevas Concepciones de Recursos Pedagógicos" se estudiaron elementos teóricos desde la didáctica de las matemáticas y el enfoque instrumental que les permitió a los estudiantes identificar el tipo de situaciones que se deben favorecer cuando se integra un CAS a la enseñanza del álgebra y específicamente para el estudio de las funciones con variable real.

En los trabajos presentados al final del curso por los estudiantes, resaltaron las características del escenario en términos del tipo de organización de la clase, el rol del profesor, el rol de los estudiantes, el tiempo requerido para implementar las situaciones, límites, potencialidades del CBR y la relación entre los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada, aunque en éste último punto es frecuente encontrar profesores que consideran necesario explicar la manera de utilizar los artefactos antes de proponer la situación matemática a realizar, es importante cambiar esta concepción puesto que los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada se pueden desarrollar de manera simultánea y coevolucionan.

Respecto a la Ingeniería Didáctica de Formación al integrar TIC en Didáctica de las Matemáticas, el modelo de formación inicial de profesores propuesto por Emprin (2006), permitió realizar el análisis del desarrollo efectivo de la secuencia a partir de los elementos que estructuran la praxeología matemática, de los momentos de estudio y los procesos de instrumentación e instrumentalización, así como plantear un diseño metodológico que tuviera en cuenta además del *desarrollo de la ingeniería didáctica exploratoria,* propuesta por Haspekian (2005), *la actividad y las preguntas de los* *estudiantes.* Lo que mostró ser un modelo pertinente para ser utilizado en diferentes electivas profesionales de la línea de formación de Tecnologías de la información y la Comunicación en Educación Matemática de la Licenciatura en Educación. Énfasis en educación matemática y de la Licenciatura en Educación Matemática y Física en la Universidad del Valle.

Este documento puede ser considerado un recurso pedagógico puesto a disposición de los profesores, debido a que brindó información a cerca de la manera de gestionar la situación, las restricciones, fenómenos didácticos, esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada que se pueden llegar a presentar en un practica de clase, sin embargo, es un artefacto hasta que los profesores no lo utilicen, busquen otras alternativas, se apropien y lo adapten a sus necesidades y a sus prácticas de clase.

Los profesores e investigadores, deben tener presente que la integración de TIC al aula de clase no va a resolver todos los problemas de la educación matemática, por el contrario se deben considerar los nuevos fenómenos didácticos, nuevas formas de organización de la clase, la naturaleza del conocimiento matemático y las restricciones del artefacto e institucionales presentes, para poder comprender las ventajas y dificultades de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al integrar un CAS.

Queda abierta la posibilidad de realizar investigaciones de este tipo presentando alternativas con otros software, tales como simuladores interactivos como el que ofrece la Universidad del Colorado http://phet.colorado.edu/en/simulation/moving-man, a partir del cual los estudiantes se enfrentan a otro tipo de gráficas, así se podría preguntar por: ¿Qué diferencias existen entre las gráficas generadas con el CBR y un simulador interactivo? ¿Qué tipo de *técnicas* y *tecnologías* favorece cada ambiente?

Buscar otras alternativas para abordar situaciones de variación en un contexto físico, no necesariamente de movimiento; el trabajo con otro tipo de gráficas distintas a las lineales y cuadráticas, tales como las exponenciales y trigonométricas, con el fin de establecer y si es posible generar praxeologías locales que favorezcan la modelización algebraica.

Finalmente, desde lo curricular, la modelización algebraica no se alcanzan de manera inmediata, necesita de periodos largos para su asimilación, así como de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones que posibiliten la exploración, el planteamiento de conjeturas, generalizaciones e ir avanzando a niveles cada vez más complejos a partir de la articulación de praxeologías puntuales, como las estudiadas en esta investigación.

BIBLIOGRAFÍA

Agudelo, C. (2007). La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase. *Revista electrónica iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*. 5 (001), 43-62.

Álvarez, C., & Martínez, R. (2000). *Descartes y la ciencia del siglo XVII.* México: Siglo veintiuno editores S.A.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Artigue, M. (2.009). Rapports et articulations entre cadres theoriques: Le cas dela Theorie Anthropologique du Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques , 29* (3), 305-334.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. *Una Empresa Docente* , 33-59.

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching - Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics 14 (2)* , 31-35.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds) (1996). Aproaches to algebra. Perspectives for research and teaching. *Mathematics Education Library; 18. Kluwer*.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 21* (3), 247-304.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., Ruiz, L.(2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18* (2), 37-74.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New York: Springer.

Castro, E. (1995). *Universidad de Lisboa.* Recuperado el 2 de mayo de 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro(CIBEM).pdf

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 12 (1)*, 73-112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1.997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. En D. R. Guin, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turing a Computacional Device into a Mathematical Instrument.* (págs. 163-196). New York: Springer.
Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Santiago de Cali: Traducido por la Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Emprin, F. (2006). Construction d'une ingénierie didactique de formation incluant les TICE en didactique les mathématiques. *Proposition de contribution-collloque de Versailles*, (p. 1-8). París.

Ferrucci, B., & Carter, J. (2003). technology active mathematical modeling. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,, 34* (5), 663-670.

García, F. J. (2007). El Álgebra como Instrumento de Modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, (p. 71-90). Universidad de Jaén.

García, F. J., Bosch, M., Gascón, J., & Ruiz, L. (2.007). Integración de la Proporcionalidad Escolar en una Organización Matemática Regional entorno a la Modelización Funcional: Los Planes de Ahorro. *I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. "Sociedad, Escuela y Matemáticas: Las aportaciones de la TAD"* (p. 439-460). España: Universidad de Jaén.

García, G., Serrano, C., & Espitia, L. E. (1997). El concepto de función en textos escolares. *Colciencias Universidad Pedagógica* , 22-35.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathematiques , 18/1* (52), 7-33.

Gascón, J. (1.999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática , 11* (1), 77-88.

Guin, D., & Trouche, L. (2007). Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de resources pédagogiques. En M. Baron, D. Guin, & T. Luc, *Environnemnets, informatisés er ressources numériques pour lápprentissage. Conception et usages, regards croises* (p. 197-226). Paris: Lavoisier.

Haspekian, M. (30 de Nov de 2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Étude du cas des tableurs.* Recuperado el 15 de

Noviembre de 2011, de Has scieces de l'homme et de la société: http://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00011388/

Haspekian, M., & Artigue, M. (2007). L'intégration d'artefacts informatiques professionnels à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableurs. En L. Trouche, D. Guin, & M. Baron, *Environnements, informatisés er ressources numériques pour I'apprentissage. Conception et usages, regards croises* (p. 37-63). Paris: Lavoisier.

Kaput, J. (1994). Los papeles representacionales de la tecnología al conectar las matemáticas con las experiencias reales. *Mathematics didactics as a scientific discipline ,* 379-397.

Kaput, J. (Ed.) (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. En C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 159 - 195). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Lagrange. (2005). Transposing computer tools from the mathematical sciences into teaching. Some possible obstacles. En D. R. Guin, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turing a Computacional Device into a Mathematical Instrument.* (p. 67-82). New York: Springer.

Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2.003). Technology and Mathematics Education: a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En M. C. A.J.Bishop, *Second International Handbook of Mathematics Education* (p. 239-271). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo Verdadero y de lo Falso en la clase de matemáticas.* (M. Acosta, & J. Fiallo, Trads.) Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá.

Monaghan, J. (2.005). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. *CAME 4 University of Leeds*, (p. 1-12). UK.

Moreno, L. (2002). Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. *Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas* (págs. 93-98). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Rico, L., & Castro, E. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias , 12* (1), 45-56.

Romero, Á. E., & Rodríguez, L. D. (2002). La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea. *Educación y Pedagogía , XV* (35), 57-67.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén.

Texas Instruments . (1987). *Texas Instrument; Conceptos básicos del CBR, incluye 5 actividades para estudiantes.* Recuperado el 13 de Enero de 2009, de http://education.ti.com/downloads/guidebooks/datacollection/cbr/cbr-esp.pdf

Trouche, L. (2005a). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. En D. R. Guin, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turing a Computacional Device into a Mathematical Instrument.* (págs. 137-162). New York: Springer.

Trouche, L. (2005b). Instrumental Genesis, Individual and Social Aspects. En K. R. Dominique Guin, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (págs. 197-230). New York: Springer.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts : a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* , 77-101.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI de España Editores S.A.

ANEXOS

ANEXO A. PRIMERA GUÍA DE APLICACIÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA
AREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Curso: Diseño de Ambientes de Aprendizaje informático y nuevas concepciones de recursos pedagógicos

SITUACIÓN 1: ESTUDIO DE LA GRÁFICA LINEAL Y AFÍN

"Gráficas de desplazamiento en función del tiempo"

¿Qué movimientos debe realizar una persona para reproducir exactamente la gráfica dada?

Parte I

Pasos para ejecutar el programa

- En la aplicación HOME ejecuta el programa RANGER, para ello escribe en HOME RANGER ( ) y presiona la tecla Enter.
- En el menú MAIN MENU selecciona APPLICATIONS. Selecciona Meters.
- En el menú APPLICATIONS, selecciona DISTANCE MATCH. Aparecen instrucciones generales. DISTANCE MATH se ocupa automáticamente de los ajustes.
- Pulsa Enter para mostrar la gráfica que vas a analizar para poder reproducirla. Antes de activar el sensor de movimiento CBR analiza la gráfica y responde:

1. ¿A qué distancia del CBR piensa que debería empezar?____________________
2. ¿Debes acercarte o alejarte del CBR para intentar reproducir la gráfica?

____
____
____
____
____
____

Ubícate donde piensas que comienza la gráfica. Pulsa ENTER para comenzar la captura de datos. Escucharás un clic y verás la luz verde a medida que se capturan los datos.

Tu posición aparece representada en la pantalla. Una vez terminado el experimento, examina bien lo que sucedió con tus movimientos y determina que tanto se ha ajustado a la gráfica y responde:

3. ¿Comenzaste demasiado cerca, demasiado lejos o a la distancia adecuada?

____

Pulsa Enter para mostrar en la pantalla el menú OPTIONS y selecciona SAME MATH. Intenta mejorar tu técnica al caminar.

Cuando finalices el experimento responde:

4. Además de elegir si tienes que acercarte o alejarte del CBR ¿qué otros elementos debes considerar para reproducir exactamente la gráfica dada?

____
____
____
____
____

5. ¿Qué propiedad física representan las pendientes de los segmentos? ________________________________
____

Parte II

Pulsa Enter para mostrar en la pantalla el menú OPTIONS y selecciona NEW MATH. Estudia la gráfica y responde:

1. Para el primer segmento, ¿cuántos metros debes caminar y en cuántos segundos? ________________________
2. Convierte el valor de la pregunta anterior en metros/segundos: ____
   Conviértelo en metros/minuto: ___
   Conviértelo en metros/hora: ____
   Conviértelo en kilómetros/hora ___
3. ¿Qué distancia recorriste realmente?__________________

   Completa la siguiente tabla:

Tiempo (Segundos)	Distancia (metros)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

4. A partir de los datos de la tabla puedes determinar ¿en qué momentos se debe desplazar más rápido o más despacio?

____
____

5. De acuerdo a las características estudiadas de las gráficas anteriormente construye un enunciado que describa el movimiento que debes realizar para reproducir exactamente la gráfica, utiliza expresiones como “detenido”, “rápido”, “lento”, “más rápido”, “disminuyó su velocidad”, “más alejado”, o utilizando valores de velocidad en metros/segundos.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

ANEXO B. SEGUNDA GUÍA DE APLICACIÓN

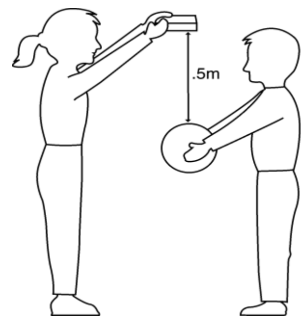
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA
AREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Curso: Diseño de Ambientes de Aprendizaje informático y nuevas concepciones de recursos pedagógicos

SITUACIÓN 2: MOVIMIENTO PARABÓLICO

“Caída libre”

- En la aplicación HOME ejecuta el programa RANGER, para ello escribe en HOME RANGER ( ) y presiona la tecla Enter.
- En el menú MAIN MENU selecciona APPLICATIONS. Selecciona Meters.
- En el menú APPLICATIONS, selecciona BALL BOUNCE. Aparecen instrucciones generales. BALL BOUNCE se ocupa automáticamente de los ajustes.
- Sujeta la pelota con los brazos extendidos. Pulsa Enter. El programa RANGER se encuentra en modo de activador (Trigger). En ese momento se puede desconectar el CBR de la calculadora.
- Pulsa Trigger. Cuando la luz verde comienza a parpadear, suelta la pelota y retrocede. *Sugerencias:* Coloque el CBR a más de 0,5 metros por encima de la altura del bote más alto. Sujete el sensor directamente sobre la pelota a una misma altura sin que la pelota se desplace hacia un lado y compruebe que no hay nada en la *zona despejada* (ver figura):



- Podrás escuchar un clic a medida que se capturan los datos. Se capturan datos de tiempo y distancia, y se calculan para la velocidad y la aceleración. Si ha desconectado el CBR, vuelva a conectarlo cuando termine de capturar los datos.

- Pulse Enter (Si la gráfica no tiene el aspecto deseado, repita el experimento). Analiza la gráfica y responde:

1. ¿Qué propiedad física se representa en el eje X? ____________________
2. ¿En qué unidades?_____________
3. ¿Qué propiedad física se representa en el eje Y?____________________
4. ¿En qué unidades?______________
5. ¿Qué representa el punto más alto de la gráfica? ___________________
6. ¿Y el punto más bajo? ___________

- Observa que BALL BOUNCE invierte automáticamente los datos de distancia.

7. ¿Por qué dio la vuelta a la gráfica el programa BALL BOUNCE?

____
____
____

8. ¿Por qué parece representar la gráfica el movimiento de botes de la pelota por el suelo?

____
____
____

- Pulsa Enter. En el menú PLOT MENU, seleccione PLOT TOOLS y después SELECT DOMAIN. Queremos seleccionar el primer bote completo. Mueva el cursor hasta la base del comienzo del bote y pulsa Enter. Mueva el cursor hasta la base del final de ese bote y pulsa Enter. Se vuelve a dibujar la gráfica, enfocando un sólo bote.
- La gráfica está en modo TRACE. Determina el vértice del bote.
- Registra la altura máxima y el tiempo correspondiente al primer bote completo.______________________
- Pulsa Enter para volver al menú PLOT MENU. Seleccione MAIN MENU. Seleccione QUIT.
- La *forma en función del vértice* de la función cuadrática, $Y = A(X-H)^2 + K$, resulta adecuada para este análisis. Pulse Y=. En el editor Y=, desactive cualquier función que esté seleccionada. Introduzca la forma en función del vértice de la función cuadrática: Yn=A*(X-H)^2+K.
- En la pantalla principal, almacena en la variable K el valor que ha registrado en la pregunta anterior para la altura; almacena el tiempo correspondiente en la variable H; almacena 1 en la variable A.
- Pulsa GRAPH para mostrar la gráfica y contesta:

9. ¿Coincide la gráfica para A=1 con su gráfica?____________________

____

10. ¿Por qué o por qué no?______________________________

____
____

- Prueba para A= 2, 0, -1 y compara las gráficas obtenidas con la gráfica de datos

____
____
____

11. ¿Qué implica un valor positivo de A? ___________________________
12. ¿Qué implica un valor negativo de A? __________________________
13. ¿Qué implica un valor cero de A? _________________

- Escoja sus propios valores para A hasta conseguir una buena concordancia para la gráfica

____
____
____

- Repite la actividad, pero en esta ocasión elije el último (más a la derecha) bote completo.
- Registra la altura máxima y el tiempo correspondiente para el último bote completo

____
____

14. ¿El valor de A será mayor o menor para el último bote?_______________
15. ¿Qué puede representar el valor de A? ______________________________

ANEXO C. RESTRICCIONES

En este anexo se presenta la clasificación de las restricciones señaladas en la guía para estudiantes del CBR:

Restricciones internas

- El programa RANGER y los datos necesitan aproximadamente 17.500 bytes de memoria. Si no cuenta con el espacio suficiente se pueden borrar programas y datos de la calculadora o transferirlos a un ordenador por medio de GRAPH Link o a otra calculadora se usa un cable de calculadora-calculadora o el cable de calculadora a CBR.
- Cuando el CBR envía una señal, la misma choca con el objeto, rebota y es recibida por el CBR. Si un objeto está a menos de 0,5 metros, las señales consecutivas pueden solaparse y es posible que el CBR las identifique mal. La gráfica sería incorrecta, de manera que debe colocar el CBR a más de 0,5 metros del objeto.

  Así mismo, al desplazarse la señal por el aire, va perdiendo intensidad. Tras recorrer 12 metros (6 de ida y 6 de vuelta al CBR), puede que el eco de vuelta sea demasiado débil para que el CBR lo detecte bien. Esto limita la distancia efectiva para obtener resultados fiables a un máximo de 6 metros de distancia al CBR.

- Cuando se utiliza más de un CBR en una habitación, un grupo debe completar la toma de datos antes de que el siguiente grupo comience con la suya.
- La distancia aproximada al objeto se calcula asumiendo la velocidad teórica del sonido. Sin embargo, la velocidad real del sonido depende de varios factores, principalmente de la temperatura del aire. Para situaciones de movimiento relativo, este factor no es importante. Para situaciones en que las medidas han de ser muy precisas, puede utilizarse una orden de programación para especificar la temperatura ambiente.

Restricciones de comando

Tiempos del experimento: TIME es el tiempo total en segundos necesarios para completar todo el experimento. Se debe introducir un entero entre 1 segundo (para movimiento rápido) y 99 segundos (para movimiento lento). Cuando REALTIME=YES, TIME es siempre 15 segundos.

Cuando TIME es un número más pequeño, el objeto debe estar más cerca del CBR. Por ejemplo, cuando TIME=1 SECOND, el objeto no puede estar a más de 1,75 metros del CBR.

- **REALTIME=YES**

Utilice el modo REALTIME=YES: para objetos lentos; para ver los resultados según se van capturando; cuando tiene que capturar o representar un solo tipo de datos (distancia, velocidad o aceleración) para un experimento.

En modo REALTIME=YES, el CBR procesa los datos de la gráfica que se desea (distancia, velocidad o aceleración) que se transfieren a la calculadora a medida que se van midiendo los datos individuales de la distancia. Después, RANGER dibuja un píxel individual para esa señal.

Puesto que todas estas operaciones deben completarse antes de realizar la toma siguiente, hay un límite de velocidad de toma de datos en modo REALTIME=YES.

Para un único dato, se emplean aproximadamente 0,080 segundos en capturarlo, procesarlo y transferirlo. Se necesita un tiempo adicional para operaciones como dibujar el punto, lo cual hace disminuir la velocidad efectiva de la toma de datos con el RANGER a aproximadamente 0,125 segundos.

- **REALTIME=NO**

Utilice el modo REALTIME=NO: para objetos rápidos; cuando es necesario el suavizado; para trabajar con el CBR en modo desconectado; o cuando necesita capturar o representar todos los tipos de datos (distancia, velocidad y aceleración) para un experimento.

En modo REALTIME=NO, los datos se almacenan en el CBR y no se transfieren a la calculadora hasta que se completa el experimento. La velocidad de la toma de datos puede ser de hasta una cada 0,005 segundos para objetos cercanos. Los datos del tiempo, distancia, velocidad y aceleración se transfieren a la calculadora.

Puesto que los datos se almacenan en el CBR, puede transferirlos desde él a una calculadora tantas veces como quiera.

Cada vez que cambia el suavizado, el CBR aplica el nuevo factor de suavizado, transfiere los datos ajustados a la calculadora y almacena los valores suavizados en las listas.

Al seleccionar un dominio cambian las listas almacenadas en la calculadora. Si es necesario, puede recuperar los datos originales del CBR. Desde el menú MAIN MENU del programa RANGER, seleccione TOOLS. En el menú TOOLS, seleccione GET CBR DATA.

También puede compartir los mismos datos con muchos estudiantes, incluso aunque se utilicen diferentes tipos de calculadoras gráficas de TI. Esto permite a los estudiantes participar en el análisis de las situaciones al utilizar los mismos datos

La pantalla SETUP del programa RANGER proporciona varias opciones para iniciar y detenerla toma de datos.

- **BEGIN ON: [ENTER]**. Inicia la toma de datos con la tecla ENTER de la calculadora cuando la persona que inicia la misma está más próxima a la calculadora.

- **BEGIN ON: DELAY**. Inicia la toma de datos tras un intervalo de 10 segundos desde el momento en que se pulsa ENTER. Es especialmente útil cuando la actividad la realiza una sola persona.
- **BEGIN ON: [TRIGGER]**. Inicia y detiene la toma de datos con el botón TRIGGER del CBR cuando la persona que inicia la misma está más próxima al CBR.

En esta opción, también puede seleccionar desconectar el CBR. Esto le permite configurar la toma de datos, desconectar el cable del CBR, llevar el CBR donde esté la acción, pulsar TRIGGER, realizar la toma de datos, volver a conectar el CBR y pulsar ENTER para transferir los datos. Utilice BEGIN ON: [TRIGGER] cuando el cable no sea suficientemente largo o cuando pudiera interferir con la captura de datos. Esta opción no está disponible en modo REALTIME=YES (como la aplicación MATCH).

El efecto de TRIGGER varía en función de los ajustes.

TRIGGER inicia la toma de datos, incluso si está seleccionado BEGIN ON: [ENTER] o BEGIN ON: DELAY. También detiene la toma de datos, aunque normalmente se realizará ésta hasta el final.

Si REALTIME=NO, una vez detenida la toma de datos, TRIGGER repite automáticamente la más reciente, pero no transfiere los datos a la calculadora. Para transferirlos, seleccione TOOLS en el menú MAIN MENU, y después seleccione GET CBR DATA (también puede repetir una toma de datos para ello se debe seleccionar REPEAT SAMPLE en el menú PLOT MENU o START NOW en la pantalla SETUP.)

ANEXO D. PROPUESTA DE SITUACIÓN

En este ANEXO se presenta el diseño de una situación elaborada por José uno de los estudiantes del curso "Seminario de Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática", para ello tomó como referencia la situación "Estudio de la gráfica lineal y afín", la situación se estructuró de la siguiente manera:

CAPTURA DE DATOS

1. Sujete el CBR en una mano y la calculadora en la otra. Apunte el sensor directamente hacia un compañero. Ayuda: La distancia máxima para cualquier gráfica es de 4 metros desde el CBR hasta tu compañero. La distancia mínima es de 0,5 metros. Compruebe que no hay nada en la zona despejada.
2. Ejecute el programa RANGER (consulte la página 5 del manual del CBR para obtener las combinaciones de tecla para cada calculadora).
3. En el menú MAIN MENU seleccione APPLICATIONS. Seleccione METERS.
4. Muévase con velocidad contante hacia su compañero mientras permanece inmóvil. Capture los datos de este movimiento y grafíquelos (escuchará un clic y verá la luz verde a medida que se capturan los datos).
5. Responda las preguntas 1 y 2 de la hoja de actividades.
6. Ahora ubíquese ambos estudiantes a la misma distancia anterior y muévanse, ambos uno hacia el otro, tratando de tener la misma velocidad del movimiento anterior. Capture los datos y grafique.
7. Realiza varios intentos y responda las preguntas 3 a la 9.
8. Repite el paso 6 pero con velocidades arbitrarias y responda 10.

PREGUNTAS

1. ¿Qué propiedad física se representa en el eje X?
   ¿En qué unidades? ¿Cuál es la distancia entre las marcas?
   ¿Qué propiedad física se representa en el eje Y?
   ¿En qué unidades? ¿Cuál es la distancia entre las marcas?
2. ¿A qué distancia de su compañero piensa que debería empezar?
3. ¿Comenzó demasiado cerca, lejos o a la distancia adecuada?
4. ¿En la gráfica cual es el punto de referencia: el que tiene el CBR o el compañero? ¿por qué?
5. ¿Qué debería hacer los dos para generar una gráfica de pendiente cero?
6. ¿Cómo es la pendiente de la gráfica inicial respecto a la pendiente final? ¿qué unidades tienen las pendientes? ¿por qué?

EXPLORACIONES

7. Si la velocidad de ambos es la misma y se mueven uno hacia el otro, ¿a qué distancia se encontraran los alumnos? ¿cuánto tiempo ha transcurrido? Debe tener en cuenta el rango máximo de tiempo de captura de datos del CBR.
8. Y si el estudiante A se mueve tres veces más rápido que el B. ¿Dónde se encontrará?
9. Si A se mueve hacia B y B se mueve en la misma dirección alejándose de A ¿Se encontraran en algún momento? ¿por qué?
10. ¿Cómo se relacionan éstas pendientes con la velocidad del movimiento inicial? ¿por qué?

INVESTIGA

- ¿Cómo se le denomina a este tipo de movimiento?
- ¿Cuál es la función que mejor lo modela?