UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 23 de Mayo de 2012
ESTUDIANTE: MARIA CRISTINA VALENCIA MOLINA - CODIGO: 0600034
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: **"INTERACTIVIDAD Y FORMACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA: UN ESTUDIO DE CASO"**
DIRECTOR DE TESIS: Profesor CESAR AUGUSTO DELGADO GARCIA
EVALUADORES: Profesora GLORIA GARCÍA OLIVEROS *Profesora NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA*
COMENTARIOS DE LOS JURADOS
APROBADO X *APLAZADO* ___ *RECHAZADO* ___

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. CÉSAR AUGUSTO DELGADO G.
Director de Tesis

Prof. GLORIA GARCÍA OLIVEROS
Jurado – Evaluador

Norma Lorena Vásquez

Prof. NORMA LORENA VÁSQUEZ L.
Jurado - Evaluador

Prof. ALFONSO CLARET ZAMBRANO CHAGUENDO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones)

INTERACTIVIDAD Y FORMACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA: UN ESTUDIO DE CASO

MARÍA CRISTINA VALENCIA MOLINA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI, 2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTERACTIVIDAD Y FORMACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA: UN ESTUDIO DE CASO

MARÍA CRISTINA VALENCIA MOLINA

Tesis de Maestría para optar al título de

Magister en Educación con Énfasis en Educación Matemática

DIRECTORES:

DR. CÉSAR DELGADO GARCÍA

DR. JAIRO ÁLVAREZ GAVIRIA

SANTIAGO DE CALI, 2012

A la memoria de mi padre, por haberme enseñado a disfrutar del asombro ante el conocimiento,
A mi madre por su empeño en sacar adelante a su familia,
A María Paula y Willy, guerrero incondicional, por el tiempo de mamá y esposa que les robé,
y por supuesto, a mis mejores maestros, Edmundo Gutiérrez y Carmen Inés Gamboa por transformar la vida de cientos de campesinos colombianos y la mía con sus valiosas enseñanzas.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a la profesora Ma. Ofelia Díaz, por permitirme entrar a su aula de clase y al profesor César Delgado, por asumir el gran desafío de enseñarme la Educación Matemática y dedicar tantas horas de su tiempo a revisar y orientar este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La motivación de iniciar este trabajo es la de tomar conocimiento de las prácticas que comparten los profesores de educación básica primaria cuando enseñan matemáticas con el fin de tener referentes que permitan orientar un programa de formación de docentes. Para captar en profundidad el "*hacer*" y las "*concepciones"* que lo orientan, se realiza un estudio cualitativo de *caso único* tomando en consideración tres dimensiones de análisis.

1. La *dimensión Epistemológica*, estudia la naturaleza del campo conceptual multiplicativo, en relación con la génesis de la operación de multiplicación. Con el propósito de establecer relaciones entre el surgimiento de este concepto y la manera como se ha introducido en los programas escolares y la forma en que los profesores lo interpretan.

2. La *dimensión cognitiva,* tiene como propósito identificar los *esquemas de acción* y teoremas en acto que los estudiantes activan al inicio del aprendizaje de la multiplicación y la manera como se relacionan en la actividad matemática en el aula en torno a las situaciones que propone la profesora y los esquemas que guían su acción didáctica.

3. La *dimensión didáctica,* permite el análisis de los lineamientos curriculares, las restricciones institucionales que favorecen o entorpecen las *prácticas de los docentes y* que se expresan en los actos de direccionamiento institucional, elección y uso del texto escolar al construir con sus estudiantes una *obra matemática* en torno al concepto de multiplicación.

El marco teórico que orienta el desarrollo de esta investigación tiene un enfoque ecléctico con el fin de dar cuenta de las dimensiones arriba mencionadas y comprende los conceptos –que conforman nuestras unidades de análisis– de *Campo Conceptual Multiplicativo,* presentado en la Teoría de los Campos Conceptuales, de Gerard Vergnaud (1993; 1994), *Esquema* y *ciclo cognitivo*, de la Epistemología genética de Jean Piaget (1969; 1975), el concepto de *Interactividad* de César Coll (1995) y *La Teoría antropológica de lo didáctico* de Yves Chevallard (1985, 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); que proporciona un piso teórico para analizar el trabajo de los docentes en relación con sus prácticas de aula. Todos estos referentes teóricos adquieren una unidad cuando el paradigma epistemológico que orienta nuestra investigación se inscribe en el marco de una *epistemología evolucionista* (Piaget, 1970; Yehuda Rav, 2006) centrada en la atención de los *mecanismos* cognitivos y socioculturales, que hacen posible el progreso del conocimiento, tomando en consideración el sistema cognitivo como producto de la evolución biológica y con una *continuidad funcional*, no estructural, que incide en la manera como actualmente accedemos al conocimiento gracias a ciertos *mecanismos* de adaptación que compartimos todos los seres humanos, como a las presiones del medio.

Dos resultados se destacan en esta investigación- El primero pone en evidencia las limitaciones que se generan cuando no se posee una visión más o menos consciente del aprendizaje, la enseñanza y la naturaleza de los objetos matemáticos. El segundo, de carácter metodológico, nos enseña que focalizar la mirada en los *observables* y *coordinaciones* de los sujetos que participan en una actividad, permite revelar en detalle las rupturas comunicativas que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje.

1. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

PRESENTACIÓN

Uno de los objetivos de todo programa de formación de docentes debería, más que llenar de información a los futuros profesores o maestros en ejercicio, orientarse al diseño de situaciones de aula que abran un espacio para la reflexión sobre cómo aprenden los seres humanos y en particular cómo se aprende un saber específico, para guiar el cómo, el qué y en qué momento enseñar. En este contexto, el conocimiento de las prácticas que comparten los profesores de educación básica primaria, cuando enseñan matemáticas, es el referente necesario para la orientación de un programa de formación.

Los aprendizajes surgidos en los espacios dedicados a la formación de maestros en los diferentes congresos internacionales de educación matemática (ICME), algunas investigaciones cercanas y experiencias en torno a la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de escuela, se constituyen en antecedentes de esta investigación,

Teniendo claro que en los primeros años de escuela se construyen las bases del conocimiento matemático, se decide explorar la construcción del concepto de multiplicación y para ello se dará respuesta a las siguientes preguntas: ¿Qué conocimientos tienen los maestros de básica primaria acerca de las matemáticas y en particular sobre el concepto de multiplicación? ¿Qué les enseñan a los niños en este tema? ¿Qué estrategias utilizan los maestros para la enseñanza de la multiplicación en la educación básica? ¿Qué transformaciones sufre el saber escolar en el proceso de enseñanza? Se pretende además validar la hipótesis de investigación en la cual se plantea que "*la enseñanza de la multiplicación se reduce a la aplicación de técnicas y algoritmos y se privilegia poco la estructuración del pensamiento en el niño".*

1.1 ANTECEDENTES

La reflexión en torno a la *formación de profesores* ha sido motivo de estudio de muchos investigadores, como Pablo Flores (1998) señala, haciendo referencia a los espacios dedicados al tema, por ejemplo, en los Congresos Internacionales de Educación matemática (ICME)[1]. Uno de los elementos de esta reflexión ha girado en torno al papel que juegan las matemáticas y otras disciplinas como la pedagogía, la psicología y las didácticas en la formación de los profesores (III ICME, 1976); en el ICME V, 1984 se concluye que sería deseable una formación holística en que los componentes de la formación estén integrados y se recomienda como actividad de formación de los estudiantes para docentes la observación de clases. En el ICME VI Paul Ernest (1989) llamó la atención sobre las recomendaciones de las organizaciones de matemáticos que sugerían cambios en las estrategias curriculares para mejorar la enseñanza de las matemáticas pero advertía que tales mejoras “dependen aún más esencialmente de los cambios individuales de los docentes en sus enfoques de la enseñanza de las matemáticas” (p.249) y que para ello era necesario abordar la transformación de concepciones y creencias de los profesores respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, cambios que “se asocian con una mayor reflexión y autonomía por parte del profesor de matemáticas” (p.249).

Esta propuesta contribuyó al desarrollo de una línea de investigación sobre concepciones de los profesores y alumnos de matemáticas cuyos resultados han tenido un impacto significativo en diferentes dominios, por ejemplo Alba Thompson (1992) señala

> [...] la investigación sobre las creencias de los docentes y concepciones ha hecho importantes contribuciones ellas son: formación de profesores de matemáticas, investigación sobre la formación del profesorado, y la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. (Thompson, 1992, p. 141)

Posteriormente Paul Andrews & Ghillian Hatch (1999) en una investigación desarrollada con 200 escuelas de Inglaterra concluyen que los profesores poseen 5 concepciones diferentes respecto a las matemáticas y 5 de su enseñanza y que pueden sostener simultáneamente concepciones diferentes de lo uno y lo otro. Esto y la no correlación entre concepciones de enseñanza y aprendizaje es consecuencia de

---

[1] FLORES, (1998, p. 247-249)

factores de ambigüedad, culturales y curriculares, respecto a la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra.

De otro lado, Javier Lezama (2008), señala la necesidad de introducir cambios en la formación de profesores de matemáticas y afirma que la formación de los profesores de matemáticas responde también a políticas, condiciones sociales, prácticas culturales y tradiciones institucionales e invita a indagar sobre las prácticas de los profesores y los contextos en que se desempeñan para recoger elementos que permitan diseñar planes de formación de maestros en ejercicio:

> Las prácticas de los profesores de matemáticas responden en muchos casos a sistemas de representación sobre dicha labor, construidos en largos y complicados procesos de naturaleza cultural.
>
> Conocer los sistemas de representación que inducen prácticas en los profesores de matemáticas y que no son posibles calificar de manera inmediata por agentes ajenos al medio donde los profesores se desenvuelven y regidos por criterios que contrastan con estos sistemas de representación, constituye un problema a estudiar por los especialistas que buscan intervenir en dichas prácticas con pretensión de modificarlas.
>
> En este contexto se inscribe la necesidad de indagar sobre las prácticas de los profesores y los contextos socioculturales que las rodea y motivan, a fin de contar con elementos concretos que permitan después crear propuestas de formación específicamente en profesores que cuentan ya con años de servicio. (Lezama, 2008, p 1)

Esta necesidad planteada por Lezama, motiva nuestra acción investigativa en torno a las prácticas educativas que se desarrollan en una aula de matemáticas de una escuela pública y la manera que ellas reflejan, o no, las recomendaciones contenidas en los lineamientos curriculares y las directrices normativas del Estado colombiano –por ejemplo, evaluación por logros y promoción automática– con el fin de disponer de un conocimiento que contrastado con el que proporcionan las investigaciones internacionales sirva como insumo para, en el futuro, elaborar estrategias de formación de profesores que respondan al reto de transformar las prácticas de enseñanza actuales y las prácticas de estudio de los alumnos.

Estas estrategias deberán responder al reto de superar las propuestas tradicionales de formación de profesores: cursos, diplomados, seminarios, etc., *centrados* en la *información* respecto a los desarrollos y aplicaciones de los distintos saberes. Estas propuestas que pretenden mejorar la calidad de la educación sin considerar críticamente las *restricciones* de los ámbitos socioculturales en que se orienta la acción educativa, ni las restricciones que imponen los *sistemas de representación* o *concepciones* de los profesores, no logran las mejoras deseadas.

La conclusión de Brian A. Jacob & Lars Lefgren (2004) en un estudio sobre el impacto de la capacitación de maestros en servicio como parte de la reforma de la escuela en Chicago, concuerda con nuestra propia experiencia cuando relativiza la cuestión de las estrategias de mejoramiento de la calidad de la educación en la escuela:

> Encontramos que aumentos marginales en capacitación en el servicio no tienen estadísticamente o académicamente efectos significantes en los logros de lectura o matemáticas, sugiriendo que las modestas inversiones en el desarrollo del personal pueden no ser suficientes para aumentar los logros de los niños de las escuelas elementales ubicadas en las zonas de alta pobreza. (Jacob y Lars 2004, p. 50)

Si bien es cierto que el problema de los logros en la escuela depende de múltiples y complejas variables sociales y culturales, también es cierto que la manera en que se orienta la capacitación es un factor importante. En particular, la ausencia de una mirada crítica del *Modelo Educativo* en el cual están inmersos los alumnos, padres y profesores y cuyas *restricciones* sufren de una manera ingenua, impide desarrollar capacidad de respuesta a condiciones adversas del medio no controlables directamente por la escuela.

En consecuencia con lo expresado, nos preguntamos ¿Cómo hacer visibles esas restricciones? La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) provee elementos de análisis en este sentido, a través de la identificación de *Niveles de Codeterminación*, que hacen referencia a la relación recíproca entre el desarrollo de las Organizaciones Didácticas (OD)[2]

---

[2] Ver definición de OD en apartado 2.4.

y el desarrollo de las Organizaciones Matemáticas (OM)[3] al interior de una institución. Yves Chevallard señala al respecto:

> Este “isomorfismo” didáctico-matemático lo expresaré mediante una jerarquía de niveles, que son niveles de determinación de las OD, o más exactamente, de codeterminación de la OD y de la OM, y que se pueden esquematizar del modo siguiente
>
> -Sociedad
> _Escuelas
> _Pedagogías
> _Disciplinas
> _Áreas
> _Sectores
> _Cuestiones
>
> El Principio del esquema anterior es el siguiente: cada nivel corresponde a un nivel de estructuración de la OM y, en cada uno de ellos, se introducen restricciones particulares sobre lo que será didácticamente posible en el aula. (Chevallard, 2001, p.3)

Así el estudio de determinada cuestión, está incluido en cierto sector en un área, es objeto de estudio de una disciplina, y está determinado por las pedagogías adoptadas en una escuela que a su vez responde a ciertos requerimientos sociales; por ejemplo, la cuestión de ¿cuándo dos triángulos son congruentes? Se considera en el sistema educativo colombiano como parte del tema de congruencia de triángulos y polígonos que se incluye en el sector de *Congruencias y Semejanzas* en el área de Geometría que se estudia en el grado 8° de educación básica secundaria.

Este panorama nos pone en conocimiento las restricciones a considerar en nuestra observación de la actividad del aula para delimitar el ámbito y alcance del profesor en la construcción de las obras, matemática y didáctica, y así recoger el material pertinente para informar posibles intervenciones de formación de profesor en el futuro.

---

[3] Idem 2

Las investigaciones de Marianna Bosch y J. Gascón (2009) basadas en las prácticas de aula de profesores de matemáticas han permitido avanzar en el estudio de los niveles de codeterminación y establecer algunos aportes de la TAD a la formación de los profesores de matemáticas:

> Distinguiremos tres contribuciones de la Teoría Antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de secundaria: la manera de plantear el problema de la formación y delimitar el ámbito empírico en el que éste debe situarse y abordarse; la propuesta y experimentación de dispositivos de formación; y, finalmente, la puesta en evidencia de fenómenos que inciden en el desarrollo de esta formación – dificultándola o facilitándola. Los resultados obtenidos durante estos últimos años con experiencias concretas de formación del profesorado de matemáticas de secundaria ponen de manifiesto algunas “dolencias” que no parecen poder remediarse sin una cooperación estrecha entre la propia formación, la investigación en didáctica de las matemáticas y este ente todavía desdibujado que es la profesión de profesor de matemáticas. (Bosch y Gascón 2009, p.89)

Complementariamente, desde una perspectiva más psicológica, nos interesa investigar las actuaciones del profesor en la medida en que ellas son una expresión de su intención didáctica y en este sentido los trabajos de César Coll, respecto a los mecanismos de Influencia educativa (sobre los procesos de enseñanza) se constituyen en un valioso aporte para el desarrollo de esta tesis. Particularmente, el concepto de *interactividad,* entendida como “*la articulación de de las actividades del profesor y de los alumnos en torno a un contenido o a una tarea de aprendizaje”* (Coll*,* 1992, p. 204) sugiere centrar la mirada en las interacciones que suceden entre los estudiantes y el profesor y facilita el análisis y la descripción de la manera como se construyen sistemas de significados que posibilitan aprendizajes concernientes a un contenido específico.

> El análisis de la interacción sería, pues, en esta perspectiva, sólo uno de los aspectos a tener en cuenta en el intento de alcanzar una comprensión más amplia y sistemática de los mecanismos de influencia educativa y de la práctica educativa en general. (Coll y otros, 1992, p.197)

El otro aspecto que para nosotros resulta importante es el de la teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Gerard Vergnaud (1990), teoría cognoscitivista que busca proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y el aprendizaje de competencias complejas, especialmente aquellas que se utilizan para la ciencia y la técnica, es fundamental para el desarrollo de esta tesis porque permite caracterizar formas de estructurar el concepto de multiplicación y se constituye en una herramienta poderosa para observar las prácticas de los maestros.

La TCC propone dos conceptos fundamentales, el concepto de *Esquema,* definido como "*La organización invariante de la conducta por una clase de situaciones dadas*" (Vergnaud 1990, p. 2-3) y el concepto de *Campo Conceptual* visto como un conjunto de situaciones de conceptos y teoremas que permiten analizar situaciones como tareas matemáticas. Esta teoría plantea que no se puede teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas ni partiendo únicamente del simbolismo, ni partiendo únicamente de situaciones, y, que se debe considerar el sentido de las situaciones y los símbolos. *La clave es considerar la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta"*.

Otro aporte que ha motivado la presente investigación, lo constituye el trabajo de Mariela Orozco (2003), quien ha venido desarrollando prácticas de formación de profesores centradas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y, paralelo a esto ha llevado a cabo investigaciones, que se centran en el estudio sobre la manera como los niños desarrollan estructuras cognitivas relacionadas con ciertos conceptos matemáticos y con la resolución de problemas. Particularmente, al estudiar el concepto de multiplicación, ha identificado, que pocos estudiantes aplican realmente esquemas multiplicativos en la solución de problemas y que la gran mayoría resuelve las situaciones propuestas usando esquemas aditivos y, reflexiona sobre el impacto que esto pueda tener en la construcción de unidades del sistema de numeración decimal.

La experiencia personal de quien realiza esta investigación en formación de profesores a lo largo de todo el territorio colombiano y en algunos países de América Latina por cerca de 20 años, han mostrado además que un proceso organizado y sistemático de formación de maestros puede posibilitar el avance en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes, como se ha evidenciado en los resultados de las pruebas ICFES presentadas por estudiantes del Sistema de Aprendizaje Tutorial, SAT[4] que la Fundación para la Aplicación y Enseñanza de las Ciencias – FUNDAEC- ha desarrollado.

---

[4] El programa SAT de La Fundación para la aplicación y la enseñanza de las ciencias (FUNDAEC) han desarrollado programas de educación básica y media dirigidos a comunidades rurales en Colombia y han

1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Si bien es cierto que la formación de maestros de educación básica en Colombia ofrece dentro de sus planes de estudio algunos cursos de matemáticas en los que se presentan elementos básicos, y que en el ejercicio de la actividad docente en variadas ocasiones estos reciben cursos de actualización en teorías y nuevos enfoques de enseñanza de las matemáticas, el trabajo en el aula no refleja en la mayoría de los casos avances significativos; esto da origen a preguntas como: ¿Qué conocimientos tienen los maestros de básica primaria acerca de las matemáticas? ¿Qué les enseñan a los niños en esta área? ¿Cómo aprenden matemáticas los estudiantes de básica primaria? ¿Qué estrategias utilizan los maestros para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica? ¿Qué transformaciones sufre el saber sabio en el proceso de enseñanza? ¿Cómo mejorar las prácticas que realizan los maestros al enseñar matemáticas? Las respuestas a estos interrogantes podrían aportar elementos significativos para iniciar el diseño de una estrategia de formación de maestros que permita mayores avances en el proceso de aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes.

Los interrogantes anteriores son generales, pero encaminar los pasos hacia la identificación de elementos que permitan fundamentar una propuesta de formación para maestros obliga necesariamente a enfocarse en un tema específico de la educación básica primaria. En esta investigación se aborda el concepto de multiplicación y para ello se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Qué conocimientos tiene los maestros de básica primaria acerca de las matemáticas y en particular sobre el concepto de multiplicación? ¿Qué les enseñan a los niños en este tema? ¿Qué estrategias utilizan los maestros para la enseñanza de la multiplicación en la educación básica? ¿Qué transformaciones sufre el saber escolar en el proceso de enseñanza?

Atendiendo a las condiciones de quien llevaría a cabo este trabajo, se realizó un estudio de caso centrado en *la construcción* del *concepto de multiplicación con niños en el grado segundo de educación básica* en una institución oficial de la ciudad de Cali.

---

desarrollado estrategias de capacitación de maestros que integran tanto conceptos de las matemáticas como de otras ciencias como la pedagogía, la sociología y la didáctica.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Identificar elementos que contribuyan a fundamentar una estrategia de formación de maestros para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas de la educación básica primaria en una Institución Educativa oficial.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar los conocimientos que tienen los maestros acerca del concepto de multiplicación al interior de una institución Educativa oficial.
- Caracterizar la interactividad que los docentes de básica primaria establecen con sus estudiantes en la enseñanza del concepto de multiplicación.
- Caracterizar las prácticas de los maestros al construir el concepto de multiplicación a partir de los planteamientos de la Teoría Antropológica de la didáctica (TAD).

1.4 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Con esta investigación se espera validar la hipótesis de que "*la enseñanza de la multiplicación se reduce a la aplicación de técnicas y algoritmos y se privilegia poco la estructuración del pensamiento en el niño".*

2. MARCO TEÓRICO

PRESENTACIÓN

Este marco teórico tiene por objetivo presentar los elementos que se toman de diferentes teorías y las unidades de análisis que se utilizarán en nuestra investigación sobre la interactividad de una maestra y sus estudiantes de segundo grado de educación básica primaria al introducir el concepto de multiplicación.

La epistemología genética, de Jean Piaget, constituye sin duda alguna el piso teórico que nos permite conocer y entender la construcción y el funcionamiento de las estructuras de conocimiento e identificar los *"esquemas"* y "*ciclos cognitivos"* -unidades de análisis- que los estudiantes han construido a través de la interactividad con su maestra. De otra parte, y como complemento a la teoría de Piaget, se consideran algunos elementos propuestos por Lev Vygotski a fin de entender la mediación de procesos cognitivos y para ello se abordan los conceptos de Mediación y Zona de desarrollo próximo.

Este último concepto, nos lleva a establecer una relación entre las intenciones del maestro (experto) con los conocimientos que ponen en juego los estudiantes, aspectos relacionados con el concepto de *"Interactividad"* propuesto por César Coll. Pero para llevar a cabo tal mediación, el experto deberá abordar la enseñanza y el aprendizaje y organizar sus acciones en torno a unos contenidos y, es precisamente en este punto que el concepto de "*praxeología*" desarrollado por Chevallard en su **Teoría Antropológica de lo Didáctico** adquiere una gran importancia para el desarrollo del presente trabajo.

Finalmente, **la Teoría de los Campos Conceptuales**, de Gerard Vergnaud, discípulo de Piaget que integra elementos de la teoría de Vygotski provee una herramienta valiosa al desarrollar una propuesta de estudio del Campo Conceptual Multiplicativo.

2.1 LA EPISTEMOLOGÍA GENÉTICA

El estudio que nos ocupa toma como *supuesto epistemológico básico* que "la *acción* es constitutiva de todo conocimiento"; es decir, "el conocimiento es dependiente de la acción y la acción es productora del conocimiento" (Piaget, 1978): La epistemología genética, llama la atención sobre el carácter *sistémico abierto*, *complejo* y *dinámico* de nuestras estructuras de conocimiento cuando se producen intercambios con el medio, fuente de desequilibrios, que dan lugar a los aprendizajes. En consecuencia, nos interesa observar la manera cómo se articulan las acciones de la maestra y de los alumnos cuando la primera actúa con la intención de enseñar y los segundos actúan con el objetivo de aprender la multiplicación en el grado 2° de básica primaria.

2.1.1 Los esquemas de acción y el aprendizaje de conceptos locales

El concepto de esquema piagetiano constituye una unidad básica en nuestro análisis.

Es cierto que Piaget no se ocupa de los aprendizajes locales, sin embargo su teoría nos ilumina respecto a los mecanismos que compartimos todos los seres humanos cuando, en un mismo estado de desarrollo, pasamos de un estado de conocimiento a otro más avanzado. Según Piaget “el conocimiento no es copia de lo real” ni es el producto de la mera intuición y racionalidad humana, pero sí una construcción producto de *“equilibraciones incrementantes*” en la que la protagonista principal en los intercambios entre sujeto y medio es la acción*.* Desde esta posición epistemológica, el concepto de *esquema de acción* resulta ser un constructo necesario para explicar este mecanismo de ***equilibración*** y su relación con la acción que se realiza en una situación determinada:

> Las acciones, en efecto, no se suceden por azar, sino que se repiten y se aplican de manera semejante a situaciones comparables. Más precisamente, se reproducen tal y como son si, a los mismos intereses, corresponden situaciones análogas, pero se diferencian y combinan de manera nueva si las necesidades o las situaciones cambian. Llamaremos *esquemas* de acciones a lo que de una acción, es de tal manera transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, o dicho de otra manera, a lo que hay de común en las diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción. (Piaget, 1969, pp. 8-9).

Así, el esquema de acción en primer lugar es inseparable de la clase de situaciones que “corresponden a los mismos intereses” y, en segundo lugar, son *“conjuntos estructurados”* y *dinámicos* que se modifican en función de las exigencias de la situación. Sin embargo, el esquema de acción que en principio aparece ligado al acto mismo es susceptible de ser re-presentado internamente mediante recuerdos, imágenes mentales y símbolos a este proceso Piaget lo denomina *interiorización*. La interiorización de las acciones proporciona ciertas ganancias en el funcionamiento cognitivo ya que supone la proyección del acto a un plano superior (pensamiento) y su reconstrucción, en este plano, de aquello que ya estaba en el plano de la acción.

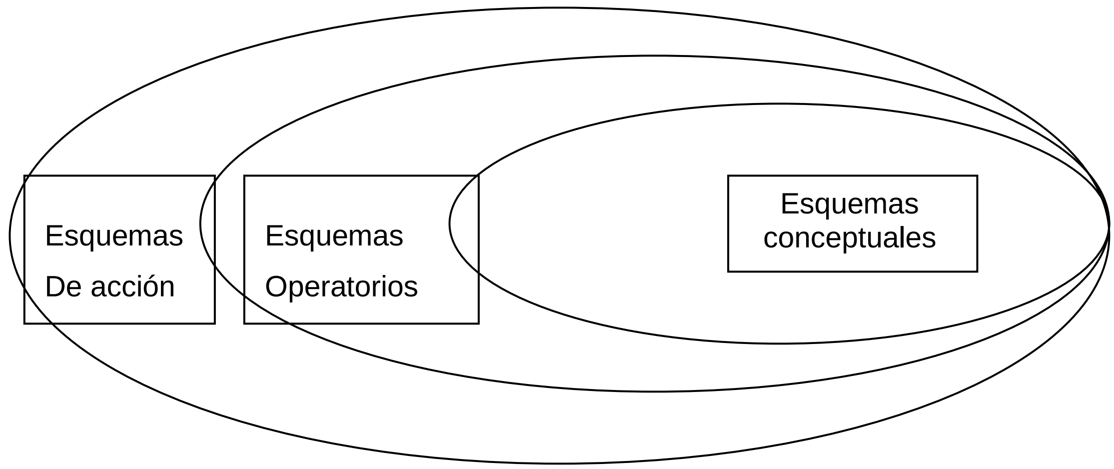
Este concepto de esquema se amplía cuando el esquema de acción interiorizado se hace ***operatorio***: la acción se puede hacer y deshacer en el pensamiento (es reversible). El *esquema operatorio* da lugar a conocimientos más objetivos y puede transformar en el pensamiento la acción actuando sobre imágenes mentales, recuerdos, intuiciones, etc., sin tener que recurrir a la realización del acto en el espacio y el tiempo. Esto permite explicar el surgimiento de los aprendizajes a partir de la coordinación de las acciones:

> Hay que buscar las raíces del pensamiento en la acción, y los esquemas operatoriosse derivan inmediatamente de los esquemas de acción: la operación suma proviene de las acciones de reunir, etc. Las estructuras lógico matemáticas se sacan de la coordinación general de las acciones mucho antes de apoyarse en un lenguaje natural o artificial” (Piaget, 1969, pp..,166-167).

Pero, estos esquemas, de acción y operatorios, sin la ayuda del lenguaje serían muy limitados. Piaget, al igual que Lev Vygotski (1995), le asignan un papel al lenguaje en la *toma de conciencia* de la acción y la operación. Cuando el esquema operatorio se “tematiza”[5] (c.f. Piaget y García, 1982, p. 103)) se accede a una toma de conciencia sobre lo que ya se hace en los dos niveles anteriores del comportamiento (incluso si esta toma es errónea) y el esquema se denomina conceptual. Es decir, el*esquema conceptual* es un esquema operatorio "...que está más o menos íntimamente ligado a un lenguaje [...]" (Piaget, 1969, p., 167). En resumen, los esquemas inician su génesis en la acción la cual da lugar a procesos constructivos que como se muestra en la figura N°1 dan lugar a formas más generales que se diferencian del esquema de acción inicial pero que lo integran y se diferencian por el grado de conciencia que tiene el sujeto de la acción y sus resultados.

[5] Paso de uso implícito de una idea a la utilización consciente y a la conceptualización.

Figura 1. Relaciones de inclusión de los esquemas piagetianos



Como ya lo dijimos, Piaget no se ocupó del aprendizaje de conceptos locales sino en la construcción de las estructuras más generales de conocimiento en un *sujeto epistémico*, sin embargo no fue ajeno a los problemas que plantea la educación y en sus últimos años, junto con Inhelder y su equipo de trabajo investigó al *sujeto sicológico* cuando este resuelve problemas y allí hace énfasis en el desarrollo funcional.

Los esquemas realizan dos funciones que Piaget llama *asimilación* y *acomodación*. La asimilación, incorpora elementos externos al medio interno y, la acomodación, adecua la forma general a las condiciones particulares del dato externo; el desequilibrio entre estas dos funciones en una determinada circunstancia puede dar lugar a errores o prácticas costosas en tiempo y complejidad cuya toma de conciencia –del error o el costo de la práctica– obligará a coordinar nuevos esquemas o modificar algunos de los ya existentes. A continuación explicaremos en algún detalle esta situación.

2.1.2 Funcionamiento de los esquemas: asimilación y aprendizaje

Los aspectos funcionales de los esquemas explican la relación *dialéctica* entre el sujeto y la situación. La *asimilación* es la función del esquema que da significado al objeto y en tal sentido lo transforma en función del estado actual de desarrollo del esquema y la función recíproca, de acomodación, responde a las resistencias del objeto a la adecuación del esquema, en tanto que forma general, a sus particularidades y con ello se obliga a modificarse en función de éstas. Esta relación dialéctica Piaget la llama *proceso cognitivo*: Un esquema *A* interactúa (×) -asimilando y acomodándose- con un objeto *S* y produce la activación de un esquema *B*, necesario para dar continuidad a la acción. Se simboliza:

$$A \times S \rightarrow B$$

2.1.3 Ciclos cognitivos

Los procesos cognitivos se organizan en "*ciclos*" o, dicho de otra manera, en *una secuencia de procesos cognitivos* que se inicia con la percepción de un estímulo y la *activación de un esquema A*–Delgado (1998) lo llamó *esquema director* dado que coordina los esquemas que se ven como necesarios para el logro de la meta–que asimila el estímulo y se acomoda a los datos particulares en función de un objetivo de la acción, para lo cual activa y organiza una sucesión de esquemas que se proponen como medios para el logro del objetivo y, el ciclo se cierra en A_F –el esquema A se satisface en una respuesta a la situación, como se muestra, siguiendo la notación de Piaget (1990, p. 6), de manera esquemática

$$(A \times A') \rightarrow B;\ (B \times B') \rightarrow C;\ ...;\ (Z \times Z') \rightarrow A_F \text{ etc.}$$

> "[...] donde *A, B, C,* etc., a las partes constitutivas de un ciclo de esta clase y *A', B', C'*, etc., a los elementos del entorno que son necesarios para su alimentación" (Piaget, 1990, p. 6)

De acuerdo con lo anterior, afirma Delgado:

> Ejecutar una tarea significa, entonces, emplear un esquema director A de las acciones, este esquema director en el primer nivel de interacción con el medio organiza un ciclo cognitivo que es resultado de la inteligencia que coordina un conjunto de esquemas que asimilan los datos y se acomodan a ellos integrándolos al ciclo produciendo así una respuesta que, en caso de éxito, debe ser acorde con A (cierre del ciclo), y esto independientemente de la conciencia o no del sujeto sobre los procesos y de la naturaleza del objeto (la toma de conciencia conduce a la conceptualización).
>
> Los aciertos y errores en las respuestas son índices de los esquemas puestos en juego y es la toma de conciencia de ellos lo que lleva a reequilibraciones del

sistema cognitivo que se reflejan en estados de conocimiento más evolucionado. (Delgado, 1998, p. 121)

2.1.4 Ciclos de interacción cognitivos y aprendizaje

Esta manera de ver el progreso de los estados de conocimiento es claramente constructivista: la construcción es el resultado de la modificación de los equilibrios entre asimilaciones y acomodaciones de los esquemas o como lo dice Piaget es el resultado de "equilibraciones mejorantes" en las que las novedades son producto de inferencias que en el caso de las matemáticas se obtienen de las acciones del sujeto a partir de observables y coordinaciones (inferencias) que se realizan en "ciclos de interacción cognitivos" para alcanzar el objetivo de la acción, que es el que da sentido al ciclo y obliga a las rectificaciones o refuerzos de los esquemas que se organizan en el ciclo.

Según Delgado (1998, pp.75-80) los aprendizajes son, en parte, el producto de la adaptación del sujeto que interactúa con un conjunto de situaciones presentes en el medio. En consecuencia, tenemos, entonces, que considerar el ciclo de interacción cognitivo propuesto por Piaget (1990):

$$\text{Obs } \boldsymbol{S}(n) \longrightarrow \text{Coord } \boldsymbol{S}(n) \longleftrightarrow \text{Obs } \boldsymbol{O}(n) \longleftarrow \text{Coord}\boldsymbol{O}(n)$$

2

Dónde:

Obs *O*(*n*)≡ Lo que el sujeto cree comprobar de la lectura inmediata de los hechos mismos: *aquello que se cree registrado en el objeto*. Comprobaciones efectuadas en los objetos en la medida en que estos han sido modificados por las operaciones, en el nivel *n*. Implica la realización material de las acciones u operaciones del sujeto (Obs S)

Obs *S*(*n*) ≡ Lo que el sujeto cree comprobar respecto de su acción y la *forma* que aplica al objeto o respecto a sus intenciones operatorias. Lo que el sujeto cree comprobar en el acto: *aquello que se registra de las acciones*. Implica una toma de conciencia de las intenciones operatorias del sujeto o de sus acciones, en el nivel *n*.

O→S≡OS: *El sujeto sólo conoce sus acciones por los resultados a través de las modificaciones en los objetos*

Coord S(n)≡ Coordinaciones inferenciales de las acciones u operaciones del sujeto: *organización de medios para alcanzar el objetivo de la acción*.

C**oord. O(n)≡** Coordinaciones inferenciales entre los objetos: transformaciones entre los arreglos de los objetos de acuerdo a un fin de la acción del sujeto. En el caso de las interacciones con objetos matemáticos estas coordinaciones son las mismas Coord***S***(*n*), dado que se aplican a objetos que son formas que el sujeto impone sobre lo real y el ciclo se representa:

Obs***O***(*n*)→Obs***S***(*n*)→Coor***S***(*n*)→Obs***O***(*n*+1→Obs***S***(*n*+1)→

Coor***S***(*n*+1)→…etc

S→O≡ SO: El sujeto sólo comprende los objetos por las inferencias ligadas a las coordinaciones de sus acciones

El detalle de los observables y las coordinaciones y la sucesión de equilibraciones hasta el cierre del ciclo, permite detallar las condiciones y la calidad de la adaptación de los esquemas a la situación cuando se busca su solución (conocimiento en el estado *n*).

Y el progreso, en el caso del conocimiento matemático se explica en términos de abstracciones reflexivas que se contraponen a las abstracciones empíricas propias del conocimiento causal. Así se diferencian tres tipos de abstracción:

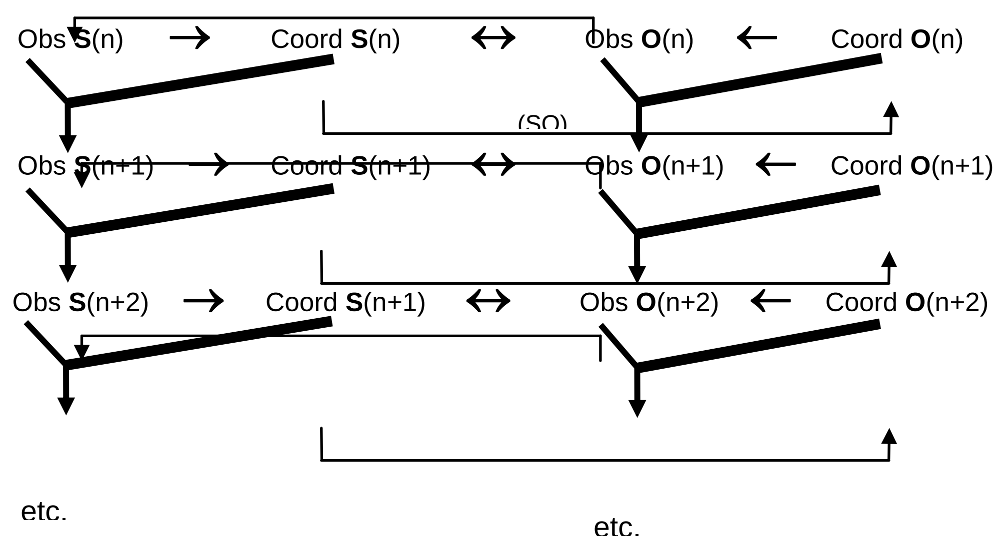
- Empírica: extrae su información de los objetos físicos
- Pseudoempírica: se extrae de las acciones del sujeto atribuidas a los objetos
- Reflexiva: se extrae de las coordinaciones. Recordando que: Una coordinación supone inferencias necesarias y sobrepasa los observables y se incluyen como coordinaciones las inferencias erróneas causadas por malas observaciones que provienen a su vez de los marcos asimiladores o de lagunas.

Piaget señala claramente la pertinencia de considerar la abstracción matemática como un proceso de abstracción reflexiva:

> La abstracción lógico matemática puede ser referida como «abstracción reflexiva» y ello por dos razones. De una parte, esta abstracción «refleja» (en el mismo sentido como un reflector o proyector) todo eso que estaba en un plano inferior (por ejemplo, eso de la acción) y proyecta esto en un plano superior, aquel del pensamiento o de la representación. Por la otra parte, ella es una «abstracción reflexiva» en el sentido de una reorganización de la actividad mental, como reconstrucción en el plano superior de todo lo que fue dibujado en la coordinación de las acciones. (Piaget, J. 1973. p.82).

Siguiendo a Delgado (1998; 2010), el proceso constructivo se explicaría en concordancia con el proceso de reequilibración de Piaget, de manera esquemática en la figura:

Figura 2. Estados secuenciales de equilibración de interacciones causales y lógico-matemáticas. (Piaget, 1990, p. 63)



Donde cada observable de un rango determinado está en función (trazos gruesos y oblicuos) de observables y coordinaciones del sujeto o de los objetos, respectivamente (Piaget, 1990, p. 63) los trazos gruesos y oblicuos señalan las abstracciones reflexivas (conocimiento lógico matemático) o empíricas (conocimiento causal). En el caso del conocimiento Lógico-matemático las *Coord S* coinciden con las *Coord. O* y el ciclo de interacción se reduce a:

Figura 3.Ciclo de interacción cognitivo en el caso del conocimiento Lógico-matemático

1

$$\text{Obs } \boldsymbol{S}(n) \longrightarrow \text{Coord } \boldsymbol{S}(n) \longleftrightarrow \text{Obs } \boldsymbol{O}(n)$$

2

En nuestro caso, estarán presentes los dos modelos: lógico matemático cuando se refiere a las operaciones del sujeto y *causal* cuando se refiere a las actuaciones de la profesora sobre el *medio.* Esto nos lleva a considerar las acciones, con intención educativa, que realiza la profesora en su calidad de directora de la actividad de estudio de los alumnos. Es decir, coloca sobre el escenario teórico la teoría de la mediación en la construcción de concepto científicos de Lev Vygotski.

2.2 VYGOTSKI Y LA INTERNALIZACIÓN: COMPLEMENTOS DE LA INTERACCIÓN PIAGETIANA

Para Vygoski (1896-1934), al igual que para Piaget, el conocimiento no es algo que se transmite, sino que se construye por medio de operaciones y habilidades cognoscitivas. Sin embargo, para él los procesos cognitivos se inducen en la interacción social. Así, sin interacción social no es posible el conocimiento pero, a diferencia de Piaget, para Vygotski el desarrollo de las funciones psicológicas superiores: memoria lógica, atención voluntaria y elaboración de conceptos, se logra de acuerdo a su "*LEY GENÉTICA GENERAL DEL DESARROLLO CULTURAL*": primero en el plano social y después en el nivel individual. La transmisión y adquisición de conocimientos y patrones culturales es posible cuando de la interacción – plano interpsicológico – se llega a la internalización – plano intrapsicológico.

Este proceso de internalización entendido como un proceso donde ciertos aspectos de la estructura de la actividad que se ha realizado en un plano externo pasan a ejecutarse en un plano interno, no fue suficientemente explicado y es aquí que Delgado (1998) considera necesario establecer una relación entre los dos paradigmas, piagetiano y vigotskiano, para dar completa cuenta de una construcción sociocultural en la que el sujeto es activo y aporta sus propios instrumentos, procesos y mecanismos de construcción resignificados por el lenguaje y la mediación sociocultural.

Para nuestra investigación nos interesan, en particular, dos conceptos de la teoría de Vygotski: la mediación y Zona de desarrollo próximo.

2.2.1 Mediación de procesos cognitivos

El supuesto básico de Delgado es que el concepto Vygtskiano de *mediación* se puede interpretar como las resistencia que el experto organiza para oponerla a una acomodación a la que espontáneamente se obliga el esquema y en este sentido se relaciona con el concepto piagetiano de adaptación como un equilibrio de asimilación y acomodación.

Bajo este supuesto, se trata de una adaptación activa basada en la interacción del sujeto con su entorno. El aprendizaje es concebido como un producto de dos operadores: uno interno que responde por los procesos de *autorregulación* del sujeto y otro externo que regula la interacción del medio ambiente sobre el organismo: la exposición directa a fuentes de estímulo y de ACCIONES MEDIADAS por instrumentos socioculturales. Así el aprendizaje se ve como un proceso en el que el experto que hace de agente mediador trata de influir en los procesos cognitivos del novato guiado por sus intenciones educativas, su cultura y sus móviles afectivos , cuando selecciona y organiza el mundo de los estímulos e impone restricciones a las acciones del aprendiz.

2.2.2 Zona de desarrollo próximo (zdp)

Vygotski define ZDP:

> No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero capaz (Vygotsky, L.S., 1996, p. 133).

Este importante concepto permite relacionar (c.f. Delgado, 2010 p.79) las intenciones del experto (la obra didáctica de Chevallard, 1985) con los conocimientos que pone en juego el aprendiz y de esta manera trazar “rasgos de aprendizaje” para ser internalizados a partir de la modificación de los esquemas actuales del alumno (obra matemática del alumno).

2.2.3 Interactividad y aprendizaje socioconstructivista

Delgado afirma que el concepto de interactividad (Coll, 1995) supera el dualismo que se establece entre lo que hace el profesor, cómo y por qué lo hace y lo que hace el estudiante, cómo y por qué lo hace; este dualismo, tradicionalmente conduce a un reduccionismo de la problemática atribuyéndola bien a factores psicológicos, actitudinales o motivacionales de los profesores o alumnos, o, bien a factores metodológicos. Por lo contrario poner el acento en la interactividad,

> […] definida como *la articulación de las actuaciones de los profesores y los alumnos* (o del adulto y del niño, en el caso de situaciones educativas no escolares) *en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje determinado*, supone pues una llamada de atención sobre la importancia de analizar actuaciones de los alumnos en estrecha vinculación con las actuaciones del profesor; y recíprocamente. (Coll, C., y otros 1995. p. 204).

La *articulación de* las *acciones* en torno a una *tarea socialmente significativa*, como se deduce del planteamiento de Coll, cambia la perspectiva de la problemática usual que mira hacia un solo polo (profesor, estudiante, saber a enseñar, o, el contexto socio-cultural) llamando la atención respecto a la *organización* de *acciones conjuntas* en torno a *significados sociales,* como elemento central de estudio de la problemática didáctica.

Esta focalización en la *interactividad* como *unidad de análisis* de la problemática coincide con lo postulado (en Chevallard y otros, 1997) sobre la fuente de explicación de un fenómeno didáctico:

> Las explicaciones didácticas deben..., partir de la descripción de la actividad matemática que realizan conjuntamente profesor y alumnos en el aula y fuera de ella, así como de las cláusulas del contrato didáctico que rigen la actividad. (Chevallard, Y., y otros. 1997. p.76)

Esto, implica abordar la enseñanza y el aprendizaje como un todo que se define y comprende por las acciones que se organizan en torno a un determinado contenido a enseñar y a aprender; donde las acciones del estudiante que conduzcan a un *aprendizaje* es el objetivo de las acciones del profesor en la enseñanza. Pero, sobre todo, interesa como objeto de estudio el conjunto de intersección de las acciones, de unos y otros, que se puede definir por el encuentro funcional de las transformaciones que cada actor del proceso realiza sobre el objeto a enseñar y a aprender, en un marco sociocultural que media tales acciones.

El marco teórico que hemos expuesto conduce a interpretar el aprendizaje escolar en el sentido que propone César Coll:

> [...] como un proceso de *construcción progresiva de sistemas de significados compartidos* a propósito de las tareas, situaciones o contenidos en torno a los cuales se organiza la actividad conjunta de los participantes. (Coll, C., y otros 1995. p. 224).

En el terreno del aprendizaje y la enseñanza muchos didactas se apoyan en la epistemología genética y la psicología genética y la relacionan con la teoría Vigotskiana sobre la formación de conceptos científicos, tomando elementos de estas dos teorías para adaptarlos al estudio de los fenómenos didácticos y la comunicación de conocimientos en situaciones de aula. Tal es el caso de la teoría de campos conceptuales de Gerard Vergnaud (1990), su aplicación al caso de la multiplicación (1994) y sus implicaciones didácticas (2007).

2.3 TEORÍA DE CAMPOS CONCEPTUALES

Como ya lo hemos dicho Gerard Vergnaud, discípulo de Piaget desarrolla los conceptos básicos de la teoría piagetiana para ocuparse del sujeto psicológico que aprende conceptos particulares y locales en el aula de matemáticas. Por otro lado, Vergnaud reconoce y aplica elementos de la teoría sociocultural de Lev Vygotski para dar cuenta en la interacción alumno-profesor el papel de la mediación de las acciones del profesor y de los diferentes sistemas de representación en la construcción de dominios compartidos de conocimiento de lo que él llama campo conceptual

Vergnaud afirma que el conocimiento está organizado en campos conceptuales, entendiendo por tal:

> [….] un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. (Vergnaud, 1982, p.40)

Vergnaud (1990) retoma y adapta el concepto de esquema de Piaget al definir "la noción de concepto desde el punto de vista psicológico" como

$$\mathbf{C\ (S,\ I,\ \Gamma)}$$

(Conjunto de situaciones S, Invariantes I, y lenguajes Γ) llama al primer conjunto el referente (S), al segundo conjunto (I), el significado y las representaciones simbólicas (Γ) son el significante. Los conceptos poseen, por tanto un *papel funcional*: comunicar, significar, comprender, orientar la acción y resolver problemas; así Vergnaud, está considerando los conceptos en su calidad de esquemas conceptuales, según Piaget.

Vergnaud desarrolla el concepto de situación desde una perspectiva diferente a la que propone Brousseau[6], considerando una situación en el sentido que se le da en sicología:

> Una situación didáctica es ante todo un planteamiento interesante y rico. Las relaciones elementales distinguidas y las clases de problemas que permiten engendrar, no presentan por ellas mismas más que un interés didáctico moderado, justamente porque son demasiado elementales. Son antes que nada instrumentos para el análisis de las situaciones y para el análisis de las dificultades conceptuales encontradas por los alumnos. Toda situación compleja es una combinación de relaciones elementales, y no se puede soslayar el análisis de las tareas congoscitivas que esas relaciones permiten generar, pero la organización de una situación didáctica en un proyecto colectivo de investigación para la clase, supone la consideración a la vez de las funciones epistemológicas de un concepto, del significado social de los ámbitos de experiencia a los que se hace referencia, de los papeles que juegan los actores de la situación didáctica, del dinamismo del

---

[6] Para Brousseau una situación es, por una parte un *juego hipotético* (que puede ser definido matemáticamente), que explica un sistema mínimo de condiciones necesarias en las cuales un conocimiento (matemático) determinado, puede manifestarse por las decisiones (respecto) a los efectos observables (de las acciones) de un actuante en un *medio*.

Por otra parte, un modelo del tipo antes dicho, está destinado a interpretar la parte de las decisiones observables de un sujeto real que están incluidas en su relación con un conocimiento matemático determinado.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. En: http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdfTraducción al castellano: Glosario de algunos conceptos de la teoría de situaciones en didáctica de las matemáticas. Delgado C., Documento de uso académico. Universidad del Valle. Cali, Colombia, 2001

> juego, del contrato y de la transposición. La tesis subyacente en la teoría de los campos conceptuales, sin embargo, es que un buen planteamiento didáctico se apoya necesariamente en el conocimiento de la dificultad relativa de las tareas congnoscitivas, de los obstáculos encontrados habitualmente, del repertorio de los procedimientos disponibles y de las representaciones posibles. La psicología cognoscitiva es esencial"[7]. (Vergnaud, 1990 p. 40).

Al enfocarse en el aprendizaje, Vergnaud interpreta para la didáctica el concepto de esquema al definirlo como la organización invariante de la conducta por una serie de situaciones dadas. (Vergnaud 1988, p. 51) y establece además que los esquemas tienen algunos ingredientes: ***Metas y anticipaciones***, que le permiten al sujeto definir la finalidad de sus acciones y, al mismo tiempo prever posibles consecuencias de sus actos; ***Reglas de acción*,** que posibilitan la generación y la continuidad de secuencias de acción del sujeto para actuar sobre el objeto atendiendo a su propósito de manera que su acción sea eficiente y eficaz, ***Invariantes operatorios***, que son los conocimientos implícitos y explícitos (conscientes e inconscientes) del sujeto que le ayudan a identificar las diferentes clases de situaciones e inferir las reglas de acción para orientar sus acciones y, por último ***Posibilidades de inferencia****,* que son los razonamientos que permiten al sujeto partir de los invariantes para definir reglas de acción y alcanzar la meta deseada.

Las particularidades arriba mencionadas están ampliamente relacionadas con la idea de esquema de Piaget y se pueden representar en los ciclos de interacción cognitivos propuestos por El, permitiendo ver la relación entre observables e inferencias, y al mismo tiempo analizar los procesos de construcción de nuevos observables que son abstracciones reflexivas.

Se puede afirmar que los esquemas están directamente relacionados con las situaciones o el conjunto de situaciones por resolver; Vergnaud (1990, p.31) establece que un sujeto se puede entonces enfrentar a dos tipos de situaciones:

1. Situaciones en las que se dispone de un repertorio de esquemas previamente elaborados y que son evocados para dar solución a la situación, y

---

[7]Vergnaud, G. (1994) "La théorie des Champs Conceptuales" Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol. 10, 2 -3, pp. 133 - 170. 1990

2. Situaciones en las que no se dispone de esquemas que le ayuden a resolver exitosamente la tarea. En este caso, el sujeto se ve obligado a buscar respuestas, a explorar e investigar y las consecuencias de su acción sobre los objetos pueden ser o no exitosas.

En el primer caso, un esquema único orienta las acciones del sujeto y lo conducen al éxito. Tal es el caso de acciones que se vuelven repetitivas y se traducen en "destrezas" o "habilidades", en el segundo caso, al mismo tiempo varios esquemas entran a "competir" entre si y, como lo explica Piaget, mediante procesos de asimilación y acomodación se logra finalmente, dar una respuesta a la situación activando un esquema ya construido o construyendo uno nuevo.

Los invariantes operatorios son los conocimientos contenidos en los esquemas y Vergnaud los define en términos de *"teoremas en acto"* y *"conceptos en acto"*:

> Teorema-en-acción es una proposición sobre lo real considerada como verdadera. Concepto –en-acción es un objeto, un predicado, o una categoría de pensamiento considerada como pertinente, relevante. (1996c, p.202; 1998, p.167).

Si bien es cierto que un concepto es una categoría de conocimiento que en su elaboración integra elementos, relaciones y propiedades e interacciones entre dichos elementos y un teorema, siendo una proposición considerada como verdadera es también un ingrediente que interviene en la construcción de un concepto, debe tenerse presente que los términos *concepto en acción* y *teoremas en acción,* se refieren a los conceptos y teoremas que se hacen "visibles" en la acción del sujeto y estas acciones presentan conocimientos que aunque el sujeto posee no necesariamente puede hacer explícitos.

2.3.1 El papel mediador del lenguaje

Vergnaud también considera en su teoría algunos elementos importantes de Vygotski, al atribuir importancia a la relación del sujeto con el entorno, al lenguaje y a la simbolización trascendiendo la idea de que el lenguaje tiene la doble finalidad de comunicar y representar:

> Es clásico decir que el lenguaje tiene una doble función de comunicación y de representación. Pero se puede de esta manera subestimar su función de ayuda al pensamiento, que sólo está parcialmente cubierta por las funciones de

> representación y de comunicación. Ciertamente la designación y la identificación de las invariantes dependen en buena medida de la función de representación; pero no es muy seguro que el acompañamiento por el lenguaje de una actividad manual o de un razonamiento dependa únicamente de la función de representación. (Vergnaud 1991 p. 21).

La TCC aborda la función de los significantes (I) en el pensamiento y explora las funciones congnoscitivas que se atribuyen al lenguaje y a las representaciones simbólicas en matemáticas afirmando que:

> En la teoría de los campos conceptuales, esta función es triple:
>
> - Ayuda a la designación y por tanto a la identificación de las invariantes: objetos, propiedades, relaciones, teoremas;
> - Ayuda al razonamiento y a la inferencia;
> - Ayuda a la anticipación de los efectos y de los fines, a la planificación y al control de la acción.
>
> (Vergnaud, 1990, p.152)

Este elemento es importante para la presente investigación porque orienta nuestra observación sobre el papel y la importancia que la maestra asigna a los lenguajes, natural y simbólicos, que ella utiliza en clase. En particular, si en efecto se orientan a mediar la acción de los alumnos para favorecer los aprendizajes mediante la *toma de conciencia* de los conceptos en acto y los teoremas en acto.

Vergnaud llama la atención sobre el papel de las representaciones simbólicas y el rol de los investigadores en educación matemática:

> Una tarea esencial teórica y empírica para investigadores debe ser entender por qué una representación simbólica particular puede ser provechosa, bajo cuáles condiciones y cuándo y por qué puede ser sustituida rentablemente por otra más abstracta y general. La necesidad de educar a todos los estudiantes a un nivel razonablemente de proficiencia en el álgebra hace que estas consideraciones sean esenciales. (Vergnaud, 1994 p. 43).

Lograr que los conceptos puedan ser formulados, presentados en forma de esquema y/o usando símbolos permite que se tornen explícitos y esta es una condición necesaria para la transferencia de conceptos y teoremas a cualquier valor numérico y a cualquier dominio de experiencia.

Una presentación detallada del Campo conceptual Multiplicativo puede orientar el análisis de las acciones de la maestra en nuestro caso.

2.3.2 El Campo Conceptual Multiplicativo

En particular, Vergnaud caracteriza el campo conceptual multiplicativo (CCM) como consistente de todas las situaciones problema cuyas soluciones implican multiplicación o división y clasifica estas situaciones en tres categorías: proporción simple, producto de medida, y proporción múltiple (Vergnaud, 1983, 1988).

> […] el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor, etc. (Vergnaud, 1988, p.58).

Vergnaud considera que las relaciones de base más simples en las estructuras multiplicativas no son terciarias sino cuaternarias, porque los problemas más sencillos de multiplicación y división implican la proporción simple de dos variables.

Haciendo referencia al conjunto de invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto), en el CCM podemos mencionar:

Concepto de multiplicación:

$$a \times n = a+a+a+\ldots^{\text{n veces}}+a \text{ “}n\text{ veces más”}$$

Concepto de División:

$$a \div n \text{ “}n\text{ veces menos”}$$

Concepto de Razón:

Relación entre dos magnitudes distintas.

Concepto de Tasa:

Medida del cambio que expresa una cantidad (y) por cada unidad de otra cantidad x, de la cual y es dependiente. Si $y= y(x)$ y $\Delta y= y(x + \Delta x)$ -

> y(x), entonces la tasa promedio de cambio es $\Delta y/\Delta x$. El límite cuando Δx tiende a cero (derivada) es la rata instantánea.

Frente a los teoremas en acto, Vergnaud (1994), establece que:

> Entre los teoremas que dan su función a estos conceptos, hay que mencionar: las propiedades de isomorfismo de la función lineal
>
> $$f(nx) = nf(x)$$
>
> $$f(n_1x_1\ ,\ n_2x_2) = n_1n_2 f(x_1, x_2)$$
>
> $$f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$$
>
> Y su generalización a relaciones no enteras, las propiedades referidas al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas
>
> $$f(x) = a\,x \qquad\qquad x = 1/a\ f(x)$$
>
> Y algunas propiedades específicas de la bilinealidad
>
> $$f(n_1x_1\ ,\ n_2x_2) = n_1 \,.\, n_2 f(x_1\ ,\ x_2)$$
>
> Hay varias más, y la elaboración pragmática del campo conceptual de las estructuras multiplicativas pasa así por etapas que es posible identificar claramente (p41-59).

Es claro que el planteamiento de situaciones estudiadas en el Campo conceptual multiplicativo (CCM) involucran proporciones simples, fracciones, invitan a comparar ratas y razones y plantean proporciones dobles así como concatenaciones de proporciones simples, pero en el caso que nos ocupa centraremos nuestros análisis en el paso de la suma iterada a la multiplicación, señalando la importancia que tiene el hacer un análisis dimensional y un estudio de la naturaleza de las unidades de medida como se precisa en el siguiente ejemplo propuesto por Vergnaud:

> La multiplicación simple implicada en el cálculo del precio de cinco coches en miniatura a un costo de 4 dólares cada uno, levanta preguntas cruciales.
>
> 1. El resultado se da en dólares no en coches miniatura. ¿Por qué?
> 2. Uno puede entender la multiplicación 4 x 5 como la iteración de pagar 4 dólares, 5 veces; pero sería imposible explicar a niños de 7 8 años que la multiplicación 5 x 4 es 4 iteraciones de 5: uno no puede añadir coches en miniatura y encontrar dólares, y no hay ninguna razón de iterar 5, puesto que sólo han sido comprados 5 coches en miniatura.

Dado que se está estudiando la interactividad que una maestra de 2° de básica primaria establece con sus estudiantes al introducir el concepto de multiplicación, se hará un particular énfasis en los conceptos de razón, multiplicación y sus propiedades (conmutativa y asociativa), en la relación entre los conceptos de suma y multiplicación, la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y al concepto de transitividad.

2.4 LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA

La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), desarrollada por Ives Chevallard, nos permite hacer un análisis de la Obra Didáctica (OD) desplegada por la maestra, esto es, conocer en detalle la manera en que se han organizado sus acciones en el aula para lograr "gestionar" con eficiencia y eficacia la Obra Matemática (OM), que en este caso lo constituye la construcción del concepto de multiplicación. Como lo afirman Espinoza y Azcárate:

> El enfoque antropológico se sitúa, en primer término en el campo más general de las prácticas y actividades humanas y, en segundo, propone un modelo de conocimiento matemático que lo considera como actividad matemática., Este enfoque se podría describir de forma progresiva partiendo de una de sus primeras y más conocidas formulaciones realizadas por Yves Chevallard, llamada la Transposición didáctica (Chevallard, 1985), y llegando hasta una de sus últimas elaboraciones que modeliza el proceso de estudio de una obra matemática por medio de la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997). Entre estos dos extremos del intervalo temporal de desarrollo fueron apareciendo sucesivos instrumentos y formulaciones teóricas que han permitido a dicho autor poner en forma lo que hoy podemos definir como un cuerpo teórico didáctico. (Espinoza y Azcárate 2000 p. 357).

Un concepto de la TAD, - que para el presente trabajo constituye una unidad de análisis-, es el de *praxeología*, que Chevallard, introduce a través de la siguiente afirmación:

> …se admite en efecto que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único,* que se resume aquí con la palabra de *praxeología",* y, si se hace referencia a una *Praxeología Matemática*, u O*bra Matemática* (OM), diremos que es una herramienta que nos permite analizar el conocimiento matemático y está compuesta por cuatro categorías de elementos:

> Tipos de tareas, técnicas matemáticas, elementos tecnológicos y elementos teóricos. (Chevallard 1999, p.235)

La modelización de un proceso de estudio[8], supone que se ha constituido una comunidad de estudio, -que en este caso podría ser la escuela-, y una problemática que interesa a esa comunidad. Para resolver dicha problemática, se trabaja alrededor de un tipo de tareas (T); cuya realización requiere de la aplicación de ciertas técnicas (τ); pero la comunidad de estudio deberá haber definido una tecnología (θ) que justifique dichas técnicas, y, consecuentemente habrá adoptado o desarrollado una teoría que justifique la tecnología (Θ).

La TAD permite centrar nuestra atención en la organización de la actividad de estudio en torno del saber hacer o *praxis* [T; τ] y el Saber escolar matemático o *logos* [θ;Θ] que conforman la obra matemática (OM= [T; τ] +[θ;Θ]).

La OD pone en relación los elementos [[T; τ], [θ;Θ]] en una organización dinámica que se describe en seis *dimensiones o momentos didácticos* (Chevallard, Bosch y Gascón 1997):

1. **Momento del primer encuentro:** Permite hacer surgir el problema para los estudiantes. Se llega a él a través de los tipos de tareas (T) que se proponen para ser abordados.
2. **Momento Exploratorio: Hace** referencia a la exploración del tipo de tarea (T) y de la elaboración de una técnica (τ) para resolverla.
3. **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico [θ;Θ]:** Este momento busca que aparezcan justificaciones, interpretaciones, demostraciones tanto de las técnicas (τ) como de las tecnologías (θ) que se emplean para abordar los tipos de problemas.
4. **Momento de Trabajo de la Técnica.** Este momento tiene la función de establecer limitaciones y alcances de la técnica, así como el perfeccionamiento de la misma para extender su aplicabilidad.

---

[8] Un proceso de estudio se refiere tanto al proceso de creación-o recreación- de una organización matemática cómo al producto de dicho proceso. Proceso y producto aluden a dos aspectos distintos del trabajo matemático pero inseparables. Ibid, p.357.

5. **Momento de Institucionalización.** Permite precisar la organización matemática elaborada, integrando aspectos que no habían sido integrados y los elementos que harán parte definitiva de la Obra Matemática.
6. **Momento de evaluación.** Es el momento del balance, en donde se examina lo que se ha aprendido; podría llamarse un momento de verificación.

Puesto que la organización de la OM, y su implementación, la OD contempla el diseño de dispositivos y entornos, organización y conducción del proceso de estudio que da vida a la obra matemática escolar, la TAD se constituye en una Unidad de análisis fundamental para caracterizar la interactividad que establece la maestra con sus estudiantes en la presente investigación.

3. METODOLOGÍA E INSTRUMENTOS

PRESENTACIÓN

La estrategia metodológica adoptada para la realización de esta investigación fue hacer un *Estudio de Caso único* que se construyó con varios elementos: observación de la actividad de estudio en el aula, estudio de los lineamientos curriculares para las matemáticas de segundo grado, en particular lo referente a la multiplicación, Proyecto Educativo institucional (PEI), plan de aula, textos escolares usados y entrevista en profundidad con la profesora.

Las *observaciones de la actividad* en el aula, brindan elementos para caracterizar el tipo de "interactividad" que la profesora establece con sus estudiantes y su relación con la obra matemática y los momentos de estudio que consciente o inconscientemente Ella pone en acto.

La entrevista responde a un doble propósito. Por un lado, se busca indagar a la profesora respecto a la manera como orientó sus acciones al trabajar con los estudiantes a fin de poder establecer si algunas inferencias que se hicieron en el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de cada episodio[9] son válidas, y al mismo tiempo "explorar" el manejo que tiene la profesora de algunos elementos de la praxeología que fueron revelados en las observaciones. Para este propósito se plantean las preguntas atendiendo a las dimensiones de análisis mencionadas. De otro lado, el indagar sobre algunos aspectos personales del proceso de formación como docente y sobre sus concepciones respecto a las matemáticas, su enseñanza y el aprendizaje, puede aportar elementos que aclaren el análisis de la interactividad establecida entre Ella y sus estudiantes.

El análisis de los textos y documentos que la profesora utilizó para la preparación de sus clases provee información sobre la secuencia de los contenidos y el nivel de coherencia entre ellos. Pero, especialmente permiten identificar las *restricciones institucionales* que se ejercen sobre la profesora, el grado de conciencia que posee y la manera como estas

---

[9]Se eligieron tres episodios de observación que más adelante se enuncian: introducción del concepto de multiplicación, desarrollo de la técnica y evaluación.

restricciones *se relacionan* con sus concepciones y finalmente con la Obra Matemática y la Obra Didáctica.

3.1 LOS EPISODIOS

La necesidad de iniciar un análisis de la observación directa de las actividades de aula que desarrolló una docente de 2° de educación básica en una institución Educativa Oficial del municipio de Cali, con el propósito de introducir el concepto de multiplicación, -y que se llevó a cabo a lo largo de dos meses-, nos llevó a definir tres momentos representativos o "Episodios" de dicho proceso.

El Episodio 1 muestra el proceso de construcción del concepto de multiplicación a partir de sumas iteradas; el Episodio 2 por su parte constituye un ejemplo del manejo que dio la maestra a la introducción de las tablas de multiplicar, específicamente, al tratamiento de la tabla del número 8, y el episodio 3 permite conocer la manera cómo se abordó la solución a un problema o situación que los estudiantes debían resolver utilizando la multiplicación.

3.1.1 Episodio 1

Esta clase no se filmó pero se tomó atenta nota de la actividad. Al estudio de la multiplicación se han dedicado ya 6 sesiones de trabajo, con los estudiantes la docente ya trabajó el concepto de multiplicación a partir de sumas reiteradas y se ha construido con Ellos las tablas del 2, 3 y 4. En este episodio se hace un concurso para "evaluar" la representación de sumas sucesivas usando el producto.

La profesora inicia la clase diciendo a sus estudiantes:

"En el día de hoy vamos a hacer un concurso en el cual todos van a participar y lo vamos a hacer por filas. No van a sacar cuaderno"

A cada una de las filas se les asigna un espacio en el tablero y se propone una suma cuyos sumandos son iguales. Salen los primeros niños de cada fila al tablero (en paréntesis).

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Dana Maray)	(Danna)	(Edinson)	(Carolain)
4 + 4 + 4 + 4 =	**6 + 6 + 6 =**	**3 + 3 + 3 =**	**2 + 2 + 2 + 2 =**

La profesora no hace explícita la consigna, simplemente escribe en el tablero las sumas indicadas arriba. Se da un tiempo para que cada uno de los participantes escriba el resultado de la suma propuesta y se les pide que lo escriban en forma de multiplicación. Los niños hacen el ejercicio mientras sus compañeros desde sus puestos les vociferan lo que deben escribir. A continuación las respuestas:

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Dana Maray)	(Danna)	(Edinson)	(Carolain)
4 + 4 + 4 + 4 = 16	**6 + 6 + 6 = 18**	**3 + 3 + 3 = 12**	**2 + 2 + 2 + 2 = 8**
4 x 4 = 16	**6 x 12 = 18**	**3 x 3 = 12**	

La profesora dice: -"Bueno, vamos a revisar":

Y refiriéndose a la solución propuesta por la FILA 1 dice:

P: ¿Está buena la suma?

Niños en coro: "Sii"

P: ¿Qué número se suma?

Niños en coro: "cuatro"

P: O sea que cuatro por cuatro es dieciséis……Punto para esta fila.

Refiriéndose a la FILA 2:

P: Seis mas seis más seis es igual a dieciocho, pero ¿está buena la multiplicación?

Niños: si, no.

P: hasta aquí está bien; coloco el seis que es el que se está sumando pero no aparece cuántas veces…. No hay punto.

Algunos niños aplauden, otros expresan su enojo por no ganar.

Ahora la profesora se detiene en la FILA 3:

P: ¿Está buena la suma?

Niños: Noo!

P: Se repite el tres y lo estoy sumando tres veces, esto da 9…..Cero puntos.

Respecto a la FILA 4:

P: Como no se hizo no hay punto. Sigamos.

Pasa un nuevo grupo de estudiantes y se asignan nuevos ejercicios. A continuación las respuestas de los niños.

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Cristian)	(Joselín)	(Teresa)	(Kevin)
5 + 5 + 5 =15	**4 + 4 + 4 + 4 = 15**	**8 + 8 + 8 = 24**	**7 + 7 = 12**
5 x 3= 15	**4 x 4 = 15**	**8 x 3 = 24**	**7 x 3**

La profesora hace el análisis de cada respuesta:

FILA1: La suma está bien, y la multiplicación también. Hay punto.

FILA 2: La suma no está bien y la multiplicación tampoco. No hay punto.

FILA 3: La suma y la multiplicación están buenas, hay punto.

FILA 4: La suma quedó mala y no terminó la multiplicación. No hay punto.

Al tercer grupo se le asignan los ejercicios siguientes:

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Yurani)	(Luisa)	(Carolain)	(Geraldín)
3 + 3 + 3 + 3 = 15	**7 + 7 + 7 + 7 + 7 =35**	**9 + 9 + 9 = 27**	**6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30**
4 x 3 = 15	**7 x 4 = 35**	**9 x 3 = 27**	**6 x 5 = 30**

Análisis de las respuestas.

FILA1: Aquí hizo bien 4 veces se repite el 3 pero el resultado está malo. No hay punto.

FILA 2: La suma está bien pero la multiplicación no. No hay punto.

FILA 3: La suma está buena y la multiplicación también. Hay punto.

FILA 4: La suma quedó buena y la multiplicación también. Hay punto.

En medio de la algarabía, la profesora da por terminado el juego y pide a los niños que saquen el cuaderno para copiar. Toma uno de los textos guía y escribe en el tablero:

Actividad en Clase

1. **Completa la tabla:**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4											

2. **Completa con la suma. Observa el ejemplo**

0 x 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0

1 x 4 =

2 x 4 =

3 x 4 =

4 x 4 =

5 x 4 =

6 x 4 =

7 x 4 =

8 x 4 =

9 x 4 =

10 x 4 =

Haciendo referencia a l primer caso (**1 x 4 =)** la profesora preguntó:

P: ¿Cuántas veces se debe sumar el uno?, Cuatro veces".

3. **Une con una línea la suma, la multiplicación y su producto:**

3 + 3 + 3 + 3	**3 X 8**	**12**
8 + 8 + 8	**4 X 2**	**20**
5 + 5 + 5 + 5	**4 X 10**	**24**
10 + 10 + 10 + 10	**5 X 4**	**40**
2 + 2 + 2 + 2	**4 X 3**	**8**

La profesora dice a los niños: “Si sumamos las tablas, nunca vamos a aprender…. Hagan los ejercicios”.

3.1.2 Episodio 2

Se trabajó la clase en torno a la tabla del #8.

En el tablero se presentaron los números 16 y 24.

8+8 = 16 24 = 8 +8 +8

2x 8 = 16 3 x 8 = 24

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24

24 = 2 +2 +2 +2 +2 + 2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 = 24 = 12 x 2

La profesora dice “esto se escribe así”: 12 x

2

24

Cada niño trajo fríjoles o maíz y los tiene sobre su pupitre. Ahora se les pide que organicen el # 32 en grupos iguales. Algunos hacen lo siguiente:

o o o o o o o o o o o o

o o o o o o o o o o o o

o o o o o o o o

La profesora hace pasar a Kelly al tablero para que cuente lo que hizo. Kelly contó a sus compañeros que formó 4 grupos de 8 fríjoles y cuando la profesora le pregunta “¿eso cómo se escribe?" Ella escribe lo siguiente:

8 + 8 + 8 +8 = 32

8 x 4 = 32

Los niños ensayan haciendo grupos de a 6 fríjoles pero no les da, la profesora hace pasar al tablero a Eyder y Él contó que agrupó los fríjoles así:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 y escribe

4 +4+4+4+4+4+4+4 = 32 8 x 4 = 32

La profesora dice. "Eyder agrupó 8 grupos de a 4 fríjoles y esto es 32" y añade "¿alguien encontró otra forma distinta?"

La profesora hace pasar a Yenny pasó al tablero quien escribió:

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 + 2+ 2 + 2 + 2 + 2 +2 = 32

2 x 16 = 32

La profesora explica que esto se puede escribir así:

$$\begin{array}{r} 16 \times \\ \underline{\;\;2} \\ 32 \end{array}$$

Y luego pregunta a los estudiantes: "¿Cuántos grupos formó?" los estudiantes contestaron en coro "16".

"y cada grupo con ¿cuántos elementos?" los estudiantes respondieron "con 2".

La maestra dice "Así se presentarán todos los múltiplos de 8" y ustedes deberán seguir los siguientes pasos:

1. Dado un número, cada niño lo representa con fichas o semillas.
2. Se debe organizar grupos de semillas y la condición es que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas.
3. En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números.

"Ahora el 40" dice la profesora y algunos niños son seleccionados para salir al tablero presentando estas soluciones:

1. 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40
   4 x 10 = 40
2. 20 + 20 = 40
   2 x 20 = 40
3. 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40

   8 x 5 = 40
4. 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40

   8 x 5 = 40

En cada caso la profesora pregunta: “¿Qué tabla estamos estudiando aquí? Y cuando se le dice

1. 4 x 10 “La tabla del 4” dice la profesora señalando el 4
2. 2 x 20 “La tabla del 2” responden los niños y la profesora
3. 8 x 5 “La tabla del 8” “ “
4. 8 x 5 “La tabla del 8” “ “

Una vez que los niños han respondido la profesora invierte los números y les dice:

1. 10 x 4 “la tabla del 10”
2. 20 x 2 “la tabla del 20”
3. 5 x 8 “la tabla del 5”

La profesora ahora dice a sus estudiantes “A sus 40 le van a aumentar una cantidad de manera que sean 48” y pregunta “¿qué cantidad le tengo que aumentar a esos 40 para que sean 48?”. Los niños responden “8”.

Esta pregunta la hizo a en cada caso y para pasar a los números 56, 64, 72 y 80.

Un niño organizó las semillas así

0000 0000 0000 0000 0000 0000

0000 0000 0000 0000 0000 0000

Y escribió:

6 x 8 = 48

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48

Otro estudiante organizó sus semillas así:

oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo Y escribió en el tablero

6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48.

La profesora dice “completemos ahora 56”; cuando ya tengan 56 empiecen a formar los grupitos.

Valeria dejó los grupos que había organizado en el ejercicio anterior (6 grupos de 8) y agregó un grupo de 8 y le quedaron 7 grupos de 8 semillas. En el tablero escribió:

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56; 7 x 8 = 56

Dana alzó la mano y al salir al tablero escribió:

7 + 7+ 7 + 7 + 7 +7 +7 + 7 = 56;   7 x 8 = 56

A continuación la profesora le planteó el siguiente ejercicio: “¿Cuántos grupos pueden formar con 80 unidades?”.

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 80;

10 x 8 = 80;

8 x 10 = 80

A continuación la profesora borra el tablero y escribe:

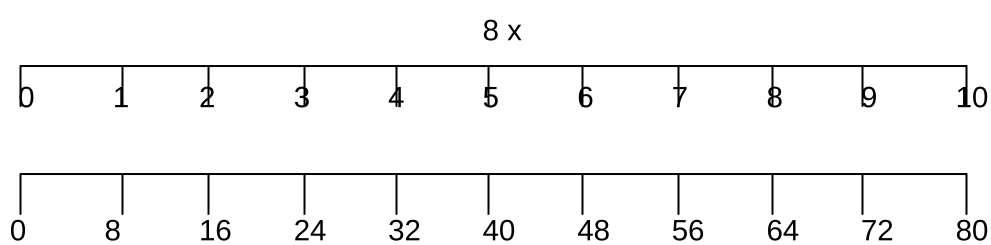
Multiplicación Por 8

*Cuando multiplicamos por 8 hacemos 8 veces más grande el número que multiplicamos.

Observa:

- 8 + 8 = 16
- 8+8+8=24
- 8+8+8+8 =32
- 8+8+8+8+8 = 40
- 8+8+8+8+8+8= 48
- 8+8+8+8+8+8+8= 56
- 8+8+8+8+8+8+8+8 = 64
- 8+8+8+8+8+8+8+8+8 =72
- 8+8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 80

*Observa la tabla:



Para finalizar, se entregó a los niños un taller para traer resuelto para la próxima clase.

3.1.3 Episodio 3

La clase del día de hoy se dedica a la solución de problemas multiplicativos. En las clases anteriores, la profesora introdujo el concepto de la multiplicación a través de situaciones sencillas de suma reiterada y piensa que sus estudiantes conocen y manejan los símbolos adecuados para la multiplicación, más aun, sus estudiantes ya conocen y aplican el algoritmo de la multiplicación y se han memorizado las tablas de multiplicar. La profesora anima a sus estudiantes a resolver algunas situaciones en las que Ellos deben aplicar lo que hasta el momento han aprendido de multiplicación. Ya se hizo en el tablero un primer problema y este que se va a plantear es el segundo que se propone.

En total, en este curso de 2º grado, hay 40 niños cuyas edades oscilan entre 7 y 10 años. La profesora inicia con algunas recomendaciones:

Profesora. Pónganle cuidado y no vamos a responder así, cualquier número porque no es adivinando, es pensando. – y lee el enunciado de un texto escolar de matemáticas: *"En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja….*

Interrumpe el enunciado para preguntar a los niños *¿cuánto es un par de zapatos?*

***Niños**. "Dos"*

Profesora. *La pregunta es:* "*¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?"*

Profesora. ¿Cuántas cajas hay?

Niños. Dos

Profesor. No vamos a adivinar, vuelvo a repetir el problema "En una fábrica…. ¿En una que?

Niños. En una fábrica

Profesora. En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos…. ¿Un par de zapatos son cuántos zapatos?

Niños. Dos

Profesora. Cada par de zapatos en una caja. En una caja hay dos zapatos. La pregunta es ¿cuántos zapatos hay en 34 cajas?

Niños. "140", "34", "50".

Profesora. Nada de adivinar

Niños. “74”, “132”, “68”

Profesora. Muy bien Luisa, venga para acá

Luisa se acerca al tablero.

Profesora. ¿Cómo hiciste la operación?

Luisa escribe

$$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{\times\ 2\ \ } \\ 68 \end{array}$$

Profesora. Muy bien, ¡un aplauso para Luisa! Por qué 34?, 34 ¿por qué? Y lo señala en el tablero. Porque... ¿qué?, ¿por qué el 34?

Luisa contesta en voz muy baja

Profesora. Bueno, porque el número que es de dos cifras, más grande lo debo colocar arriba. Explícanos el proceso. El dos lo multiplicaste por…

Luisa: Cuatro

Profesora: Primero hay que empezar a multiplicar ¿por cuales? Por las unidades, dos por cuatro, me da ocho y después por las…

Luisa. Decenas

Profesora. Dos por tres me da 6. Muy bien Luisa. Puede sentarse. Muy bien, leo la pregunta y levanta la mano el niño que me la quiera responder: “*¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?”*

Niños. ¡2!, ¡3!

Dana levanta la mano y dice “En la caja hay…” la profesora la hace pasar al frente

Dana**.** En la caja hay…

Profesora. En la caja no, En cuántas cajas.

Niños. ¡34!

Dana. En 34 cajas hay 68

Profesora. ¿68 qué?

Dana: zapatos,

Niño. Pares de zapatos.

Profesora. Vaya siéntese. ¿Hacemos otro problema?

Niños. ¡Si!

3.2 LOS INSTRUMENTOS

Como se mencionó en la presentación de este capítulo, los instrumentos utilizados en esta investigación incluyen los ciclos de interacción cognitivo, los documentos aportados por la docente y la Institución en la planeación del curso, los textos escolares usados y la entrevista realizada a la docente.

Como se trata de observar la interactividad se tomó, para cada uno de los Episodios una adaptación (Delgado, 1995, 1998) del ciclo de interacción cognitivo propuesto por Piaget (1975) porque permite observar los estados de equilibrio cognitivo de los alumnos en términos del funcionamiento de sus estructuras cognitivas cuando enfrentan un medio que es fuente de resistencias y retroalimentaciones que tienen el propósito de afectar sus estados de conocimiento. Como se explicó en el marco teórico, se trata, de la interacción sujeto-objeto propuesta por Piaget (1990) en términos de:

Obs *O*(*n*)≡ Lo que el sujeto cree comprobar de la lectura inmediata de los hechos mismos: *aquello que se cree registrado en el objeto*. Comprobaciones efectuadas en los objetos en la medida en que estos han sido modificados por las operaciones, en el nivel *n*. Implica la realización material de las acciones u operaciones del sujeto (Obs S) **Obs *S*(*n*)** ≡ Lo que el sujeto cree comprobar respecto de su acción y la *forma* que aplica al objeto o respecto a sus intenciones operatorias. Lo que el sujeto cree comprobar en el acto: *aquello que se registra de las acciones*. Implica una toma de conciencia de las intenciones operatorias del sujeto o de sus acciones, en el nivel *n*.

O→S≡OS: ***El sujeto sólo conoce sus acciones por los resultados a través de las modificaciones en los objetos*****Coord S(n)≡** Coordinaciones inferenciales de las acciones u operaciones del sujeto: *organización de medios para alcanzar el objetivo de la acción*.

C**oord. O(n)≡** Coordinaciones inferenciales entre los objetos: transformaciones entre los arreglos de los objetos de acuerdo a un fin de la acción del sujeto. En el caso de las interacciones con objetos matemáticos estas coordinaciones son las mismas Coord***S***(*n*), dado que se aplican a objetos que son formas que el sujeto impone sobre lo real. **S→O≡ SO:** ***El sujeto sólo comprende los objetos por las inferencias ligadas a las coordinaciones de sus acciones***El detalle de los observables y las coordinaciones y la sucesión de equilibraciones hasta el cierre del ciclo, permite detallar las condiciones y la calidad de la adaptación de los esquemas a la situación cuando se busca su solución (conocimiento en el estado *n*). El seguimiento, en el tiempo, de los estados de conocimiento permite explicar las adaptaciones progresivas que se obtienen de un nivel (*n*) de conocimiento a otro (*n*+1) gracias al proceso constructivo de la abstracción reflexiva (en el caso del conocimiento matemático) o empíricas (en el caso del conocimiento causal). Y por supuesto en este ciclo no se deja de lado la mediación del experto que el alumno ve como un observable más incluido en los Obs**O**. En el siguiente cuadro explicamos cómo empleamos el modelo para describir la actividad en el aula y sus efectos en los alumnos. Para el registro de los datos se construye la siguiente tabla:

OS: Toma de conciencia de las acciones propias, por la relación entre las intenciones operatorias y los resultados de las acciones sobre los objetos

SO: *Comprensión* de los mecanismos internos de la acción en función de las resistencias de los objetos. Y, recíprocamente, de los mecanismos de los objetos en función de las asimilaciones a los esquemas activos del sujeto.

Obs *S*	**Coord *S***	**Obs *O***	**Coord *O***
Se consigna: Una descripción de la acción del sujeto respecto al objeto **O** **Las intenciones operatorias del sujeto.**	**Se consigna:** **Inferencias, implícitas o explícitas, que organizan y dan sentido a la acción en términos del objetivo de la tarea.**	**Se consigna:** **Lo que el sujeto cree comprobar de su lectura inmediata de los hechos mismos: aquello *que se cree registrado en el objeto*.** **O, la realización material de las acciones** **u operaciones del sujeto**	**Se consigna:** **Inferencias, implícitas o explícitas, del sujeto respecto de las acciones entre los objetos** **En el caso de objetos matemáticos Coord*O* son las mismas *CoordS.***

A continuación se presentan los ciclos cognitivos para cada uno de los episodios

3.2.1 Ciclo de Interacción Cognitivo Episodio 1

Momento 1 (Primer grupo de estudiantes al tablero)

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**	**COORDINACIONES OBJETO**
CICLO DE LA PROFESORA			
Organizaré el trabajo por filas para que algunos estudiantes puedan representar sumas sucesivas como productos.	Al proponer dos tipos de problemas: tipo 1, el sumando que se repite es igual al número de veces que lo hace; tipo 2 el sumando que se repite es diferente al número de veces que lo hace. Se obligará a discriminar: Sumando y veces que itera. Esto es necesario para expresar la suma como un producto.	La profesora dice: "En el día de hoy vamos a hacer un concurso en el cual todos van a participar y lo vamos a hacer por filas. No van a sacar cuaderno"	Si se comprende la multiplicación, como una suma abreviada, los niños deberán discriminar el sumando y el número de veces que se repite. La observación del invariante (número de veces que se repite) como el factor o número que se repite en los dos casos determinará el éxito de la tarea. Los Niños observan y escuchan
Primer Encuentro: Se propone a los estudiantes una situación que deben resolver con conocimientos previos elaborados por ellos (relación entre suma iterada y multiplicación).		Fila 1: 4+4+4+4 = Fila 2: 6+6+6 = Fila 3: 3+3+3 = Fila 4: 2+2+2+2 = La profesora pide que el primer niño de cada fila pase al tablero y realice el ejercicio indicado.	
CICLO DE DANA MARAY			
Debo sumar cuatro más cuatro más cuatro más cuatro	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es dieciséis. O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	4+4+4+4 =	El total es dieciséis. Escribiré el dieciséis frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica Dana Maray deberá explorar el tipo de tarea y la técnica para resolver la situación que se le propone para, inicialmente hallar el resultado de una suma iterada.		4 + 4 + 4 + 4 = 16	

Debo expresar cuatro más cuatro más cuatro más cuatro usando la multiplicación.	Como el cuatro se está sumando cuatro veces esto se puede escribir como cuatro por cuatro y esto es igual al resultado de la suma que es dieciséis.	4 + 4 + 4 + 4 = 16	El producto es dieciséis. Escribiré cuatro por cuatro y el 16 frente al igual, porque el 16 es el resultado de la suma.
Momento exploratorios y de aplicación de la técnica: Dana Maray explora la técnica para expresar una suma iterada como un producto y la aplica.		4+4+4+4 = 16 4 x 4 = 16	
CICLO DE DANNA			
Debo sumar seis más seis más seis.	Seis más seis es doce, más seis es dieciocho. O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	6 + 6 + 6 =	El total es dieciocho. Escribiré el dieciocho frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma. [Algunos estudiantes vociferan las respuestas a los ejercicios, otros resuelven el ejercicio asignado a su fila utilizando los dedos o consultando con sus compañeros. La profesora no hace explícita la consigna, simplemente escribe en el tablero.]
Momento exploratorio: Danna deberá explorar el tipo de tarea y la técnica que deberá aplicar para resolver la suma iterada y expresarla como una multiplicación.		6 + 6 + 6 = 18	
Debo expresar seis más seis más seis usando la multiplicación.	Como el seis se suma tres veces, debo escribir el seis y como seis más seis es doce, debo multiplicar el seis por doce y esto es igual al resultado que me dio la suma de seis más seis más seis que es dieciocho.	6 + 6+ 6 = 18	El producto es dieciocho. Escribiré seis por doce y el 18 frente al igual, porque es 18 es el resultado de la suma. Algunos niños observan atentos, otros realizan el ejercicio.
Momento de aplicación de la técnica: Danna aplica la técnica que conoce para expresar una suma iterada como una multiplicación y establece relación entre el resultado de la suma iterada y el producto.		6 + 6+ 6 = 18 6 x 12 = 18	
CICLO DE EDINSON			
Debo sumar tres más tres más tres	Tres más tres más tres es doce.	3 + 3 + 3=	El total es doce. Escribiré el doce frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.

Momento exploratorio: Edinson deberá explorar el tipo de tarea y la técnica que deberá aplicar para resolver la situación.		3 + 3 + 3 = 12	
Debo expresar tres más tres más tres usando la multiplicación.	Como el tres se está sumando tres veces esto se puede escribir como tres por tres y esto es igual al resultado de la suma que es doce.	3 + 3 + 3 = 12	El producto es doce. Escribiré tres por tres y el 12 frente al igual, porque es 12 es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica: Edison aplica la técnica para expresar una suma iterada como una multiplicación		3 x 3 = 12	
CICLO DE CAROLAIN			
Debo sumar dos más dos más dos más dos.	Dos más dos es cuatro, más dos es seis más dos es ocho (O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos).	2 + 2+ 2+ 2=	El total es ocho. Escribiré el ocho frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica: Carolain aplica la técnica para resolver una suma iterada.		2 + 2 + 2 + 2 = 8	
¿?		2 + 2 + 2 + 2 = 8	
CICLO DE LA PROFESORA			
Revisaré el trabajo de cada uno de los niños representantes de las filas. Comenzando por la primera fila. Preguntaré a los niños si el resultado de la suma es correcto.	En la fila 1, cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es dieciséis.	La profesora dice " Bueno, vamos a revisar" y se concentra en el ejercicio: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 4 x 4 = 16	El resultado de Dana es correcto la suma es dieciséis. Es posible que los niños se equivoquen al realizar la suma o no estén actuando sobre la tarea. Los niños observan y escuchan
Momento de evaluación: La profesora está haciendo una verificación sobre los conceptos construidos por sus estudiantes.		¿Está buena la suma?	
Verificaré si los niños hacen bien la suma y si están comprometidos con la tarea.	cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es dieciséis	¿Está buena la suma?	Los niños verifican que la suma es correcta
Momento de evaluación: La profesora hace un balance de lo que sus estudiantes saben.		Los niños responden en coro: "¡Sí!"	
Identificaré el número que se repite.	El número que se repite es el cuatro.	4 x 4 = 16	Preguntaré a los niños cuál número se suma.
Momento de Evaluación: La profesora hace un balance de lo que sus estudiantes saben.		La profesora pregunta: "¿Qué número se suma?	

Verificaré si los niños identifican el número que se repite	El número que se repite es el cuatro.	“¿Qué número se suma?	Los niños identifican el cuatro como el número que se suma.
		Los niños responden en coro “Cuatro”	
Debo relacionar Cuatro con las veces que se suma.	Como el cuatro se suma cuatro veces entonces la suma de cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es igual a cuatro por cuatro	La profesora concluye: “O sea que cuatro por cuatro es dieciséis……”	Los niños deben haber establecido la relación entre cuatro más cuatro más cuatro más cuatro con el producto de cuatro por cuatro y por transitividad deben concluir que el producto es igual al resultado de la suma Les diré que hay punto para esta fila
Momento de Institucionalización: se trata del reconocimiento de una respuesta como válida. Momento de		“Punto para esta fila” Algunos niños aplauden, otros expresan su enojo por no ganar.	
Revisaré el trabajo de Danna quien representa a la fila 2.	Seis más seis más seis es dieciocho. El seis se suma tres veces y esto se expresa como seis por tres.	La profesora observa el ejercicio propuesto a la fila 2: 6 + 6 + 6 = 18 6 x 12 = 18	Danna obtuvo una suma correcta. Sin embargo, la expresión de la suma como seis por doce es diferente de seis por tres, luego Danna expresó erróneamente la suma como un producto. Es posible que los niños no compartan la respuesta de Danna
Momento de evaluación: La profesora está verificando las respuestas de sus estudiantes.		“Seis más seis más seis es igual a dieciocho, pero…	
Espero que los estudiantes se hayan percatado de que seis por doce no representa la suma de seis más seis más seis	Seis más seis más seis es dieciocho y esto se expresa como seis por tres	¿Está buena la multiplicación?”	Hay respuestas afirmativas y negativas,
Momento evaluación; Se está haciendo una verificación de aplicación de la técnica y allí se puede ver qué tanto aprendieron los estudiantes.		“¡Sí!”, “¡No!”.	
Danna no supo expresar seis más seis más seis como una multiplicación.	Seis más seis más seis es dieciocho y esto es seis por tres.	La profesora dice. “Hasta aquí está bien; coloco el seis que es el que se está sumando pero no aparece cuántas veces… ”	No aparece el tres como factor que indica el número de veces que se suma el seis. Los niños observan y escuchan.
		La profesora dice “…No hay punto”	

		Algunos niños aplauden, otros expresan su enojo por no ganar.	
Momento de evaluación y de institucionalización: La profesora está verificando la aplicación de una técnica y al mismo tiempo está haciendo caer en cuenta a los estudiantes de respuestas que no son válidas mostrando por qué.			
Revisaré el ejercicio que hizo Edinson quien representa a la fila 3.	Tres más tres más tres es nueve.	Ahora la profesora se detiene en la fila 3 y el ejercicio planteado: 3 + 3 + 3 = 12 3 x 3 = 12	Edison se equivocó en la suma. Verificaré que los niños se hayan dado cuenta del error.
Momento de evaluación: La profesora está verificando la aplicación de una técnica.		La profesora pregunta a los estudiantes. "¿está buena la suma?	Los niños observan el ejercicio resuelto en el tablero, y operan para calcular el total.
		Los niños contestan en coro "¡No!"	
Edinson supo expresar tres más tres más tres como una multiplicación, pero como se equivocó en la suma	Tres más tres más tres es nueve y esto se expresa como tres por tres.	Ahora, la profesora observa el producto 3 x 3 = 12	Aunque Edinson se equivocó en la suma, la expresión de la suma de tres más tres más tres como tres por tres es correcta pero como el resultado de la suma le dio doce entonces el no trasladó como el producto de tres por tres. Haré explícito el procedimiento para pasar de la suma reiterada a la multiplicación.
Momento de evaluación e Institucionalización: La profesora explica a sus estudiantes la aplicación de la técnica.		La profesora dice "Se repite el tres y lo estoy sumando tres veces, esto da nueve. Cero puntos " Algunos niños celebran	
Carolain sólo realizó la suma dos más dos más dos más dos.	Dos más dos más dos más dos es ocho.	La profesora revisa el ejercicio asignado a la fila 4: 2 + 2 + 2 + 2 = 8	Carolain realizó la suma pero no pudo representarla como una multiplicación.
Momento de Evaluación: Se verifica la aplicación de una técnica.		La profesora dice " Como no se hizo no hay punto, sigamos"	

Momento 2 (Segundo grupo de estudiantes al tablero)

Pasa un nuevo grupo de estudiantes y se asignan nuevos ejercicios. A continuación las respuestas de los niños.

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Cristian)	(Joselín)	(Teresa)	(Kevin)
5 + 5 + 5 =15	**4 + 4 + 4 + 4 = 15**	**8 + 8 + 8 = 24**	**7 + 7 = 12**
5 x 3= 15	**4 x 4 = 15**	**8 x 3 = 24**	**7 x 3**

La profesora hace el análisis de cada respuesta:

FILA1: La suma está bien, y la multiplicación también. Hay punto.

FILA 2: La suma no está bien y la multiplicación tampoco. No hay punto.

FILA 3: La suma y la multiplicación están buenas, hay punto.

FILA 4: La suma quedó mala y no terminó la multiplicación. No hay punto.

Ciclo de Interacción Cognitivo Momento 2 – Episodio 1

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**	**COORDINACIONES OBJETO**
Nuevamente Organizaré la actividad por filas para que algunos estudiantes puedan representar umas sucesivas como productos.	Al proponer dos tipos de problemas: tipo 1, el sumando que se repite es igual al número de veces que lo hace; tipo 2 el sumando que se repite es diferente al número de veces que lo hace. Se obligará a discriminar: Sumando y veces que itera. Esto es necesario para expresar la suma como un producto.	La profesora propone nuevos ejercicios a sus estudiantes. La profesora les pide que escriban el resultado de la suma y que la escriban como un producto.	Si se comprende la multiplicación, como una suma abreviada, los niños deberán discriminar el sumando y el número de veces que se repite. La observación del invariante (número de veces que se repite) como el factor o número que se repite en los dos casos determinará el éxito de la tarea. Los Niños observan y escuchan
Primer Encuentro: El nuevo grupo de estudiantes que ha pasado al tablero y sus compañeros se enfrentan a una nueva situación por resolver.		Fila 1: 5 + 5 + 5 = Fila 2: 4 + 4 + 4 + 4 = Fila 3:8 + 8 + 8 = Fila 4: 7 + 7 = La profesora pide que el niño que está de segundo en cada fila pase al tablero y realice el ejercicio indicado.	

CICLO DE CRISTIAN			
Debo sumar cinco más cinco más cinco.	Cinco más cinco es diez más cinco es quince. O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	5 + 5 + 5 =	El total es quince. Escribiré el quince frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio: Cristian busca posibles técnicas que le ayuden a resolver sumas iteradas y a expresar estas como una multiplicación.		5 + 5 + 5 = 15	
Debo expresar cinco más cinco más cinco usando la multiplicación.	Como el cinco se está sumando Tres veces esto se puede escribir como cinco por tres y esto es igual al resultado de la suma que es quince.	5 + 5 + 5 = 15	El producto es quince. Escribiré cinco por tres y el quince frente al igual, porque el quince es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica: Cristian aplicó técnicas para resolver una suma iterada, expresarla como una multiplicación y relacionar el resultado de la suma con el producto.		5 x 3 = 15	
CICLO DE JOSELÍN			
Debo sumar cuatro más cuatro más cuatro más cuatro	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es quince O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	4 + 4 + 4 + 4 =	El total es quince. Escribiré el quince frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Joselín explora el método a usar para resolver la suma iterada y aplica la técnica que considera adecuada para ello.		4 + 4 + 4 + 4 =15	
Debo expresar cuatro más cuatro más cuatro más cuatro usando la multiplicación	Como el cuatro se está sumando cuatro veces escribo cuatro por cuatro y esto es igual al resultado de la suma que es quince.	4 + 4 + 4 + 4 = 15	El producto es quince. Escribiré cuatro por cuatro y el quince frente al igual, porque el quince es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica: Joselín aplica la técnica que le ayuda a expresar una suma iterada como una multiplicación y establece que el producto es el mismo resultado de la suma al aplicar la propiedad transitiva..		4 x 4 =15	
CICLO DE TERESA			
Debo sumar ocho más ocho más ocho.	Ocho más ocho es dieciséis, más ocho es veinticuatro. O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	8 + 8 + 8 =	El total es veinticuatro. Escribiré el veinticuatro frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Teresa explora las posibles técnicas para resolver una suma iterada		8 + 8 + 8 = 24	
Debo expresar ocho más ocho más ocho usando una multiplicación.	Como el ocho se está sumando tres veces, esto se puede escribir como ocho por tres y esto es igual al resultado de la suma que es veinticuatro.	8 + 8 + 8 = 24	El producto es veinticuatro. Escribiré ocho por tres y el veinticuatro frente al igual, porque el veinticuatro es el resultado de la suma.

Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Teresa aplicó una técnica para expresar una suma iterada como una multiplicación y relacionó el resultado de la suma con el producto indicado		8 x 3 = 24	
CICLO DE KEVIN			
Debo sumar siete más siete.	Siete más siete es doce. O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	7 + 7 =	El total es doce. Escribiré el doce frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento de exploración y aplicación de la técnica: Kevin exploró posibles técnicas para resolver una suma iterada y aplicó una de ellas para encontrar el resultado.		7 + 7 = 12	
Debo expresar siete más siete usando la multiplicación.	Como el siete se suma entonces escribo el siete y lo multiplico por tres como hicieron mis compañeros de las filas 1 y 3. (o escuchó a un compañero que le dijo que era siete por tres)	7 + 7 = 12	Escribiré siete por tres
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: El estudiante encontró una técnica para expresar una suma iterada como una multiplicación y relacionó el resultado de la suma con el producto.		7 x 3	
CICLO DE LA PROFESORA			
Revisaré el trabajo de cada uno de los niños representantes de las filas.	Cinco más cinco más cinco es quince. Como el cinco se suma tres veces entonces la suma de cinco más cinco más cinco es cinco por tres que es igual a quince.	La profesora se concentra en la revisión del ejercicio siguiente: FILA 1 5 + 5 + 5 = 15 5 x 3 = 15	El resultado de Cristian es correcto, la suma es quince. Cristian estableció la relación entre cinco más cinco más cinco con el producto de cinco por tres y por transitividad de la igualdad concluyó que el producto es igual al resultado de la suma.
Momento de evaluación: Se hace una verificación de los conceptos y aplicación de la técnica que hacen los estudiantes .		La profesora dice: “La suma está bien y la multiplicación también. Hay punto” La mayoría de los niños celebra.	
Revisaré el trabajo de Joselín quien representa a la fila 2. Debo verificar si el total de la suma es correcto y si esta suma se ha expresado correctamente como un producto.	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es igual a dieciséis y esto se expresa como cuatro por cuatro.	La profesora revisa el ejercicio realizado por Joselín 4 + 4 + 4 + 4 = 15 4 x 4 = 15	Joselín se equivocó al realizar la suma, la expresión de la suma como cuatro por cuatro es correcta , sin embargo, como escribió el mismo resultado de la suma como el producto de cuatro por cuatro, el ejercicio no es correcto
Momento de evaluación: La profesora define si se aplicó o no bien la técnica .		La profesora dice: “La suma no está bien y la multiplicación tampoco. No hay punto”. Algunos niños aplauden y otros muestran su enfado.	

Revisaré el trabajo de Teresa. Debo verificar si el total de la suma es correcto y si esta suma se ha expresado correctamente como un producto.	Ocho más ocho más ocho es veinticuatro y como el ocho se suma tres veces esto se expresa como ocho por tres.	La atención de la profesora se concentra en la respuesta de Teresa 8 + 8 + 8 = 24 8 x 3 = 24	El resultado de la suma es correcto, la suma es veinticuatro y Teresa expresó la suma de ocho más ocho más ocho como ocho por tres, Ella estableció bien la relación entre el resultado de la suma y el producto que es veinticuatro.
Momento de Evaluación. La profesora revisa si se aplicó o no bien la técnica para expresar una suma iterada como una multiplicación.		La profesora dice: “La suma está buena y la multiplicación también. Hay punto” Algunos niños aplauden.	
Revisaré el trabajo de Kevin. Debo verificar si el total de la suma es correcto y si esta suma se ha expresado correctamente como un producto.	Siete más siete es catorce y como el siete se repite dos veces, esto se expresa como siete por dos que es igual a catorce. l Kevin debería escribir siete por dos y no siete por tres. Además no expresa a qué es igual el producto	La profesora revisa el ejercicio de la FILA 4: 7 + 7 = 12 7 X 3	Kevin no hizo bien la suma, tampoco la pudo expresar correctamente como un producto y no estableció relación entre el resultado dela suma y el producto de siete por tres.
Momento de evaluación. Se establece si la aplicación de la técnica está bien o no.		La profesora dice “La suma quedó mala y no terminó la multiplicación”. No hay punto. Los niños se preparan para los nuevos ejercicios.	

Momento 3 (Tercer grupo de estudiantes al tablero)

Al tercer grupo se le asignan los ejercicios siguientes:

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Yurani)	(Luisa)	(Carolain)	(Geraldín)
3 + 3 + 3 + 3 = 15	**7 + 7 + 7 + 7 + 7 =35**	**9 + 9 + 9 = 27**	**6 + 6 + 6 + 6 + 6 =**
304 x 3 = 15	**7 x 4 = 35**	**9 x 3 = 27**	**6 x 5 = 30**

Análisis de las respuestas.

FILA1: Aquí hizo bien 4 veces se repite el 3 pero el resultado está malo. No hay punto.

FILA 2: La suma está bien pero la multiplicación no. No hay punto.

FILA 3: La suma está buena y la multiplicación también. Hay punto.

FILA 4: La suma quedó buena y la multiplicación también. Hay punto.

En medio de la algarabía, la profesora da por terminado el juego y pide a los niños que saquen el cuaderno para copiar.

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO	COORDINACIONES OBJETO
CICLO DE YURANI			
Debo sumar tres más tres más tres más tres.	Tres más tres, más tres, más tres es quince. (O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	3 + 3 + 3 + 3 =	El total es quince. Escribiré quince frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma..
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica. Los estudiantes deben explorar técnicas para resolver un nuevo grupo de ejercicios.		3 + 3 + 3 + 3 = 15	
Debo expresar tres más tres más tres más tres usando la multiplicación.	Como el l tres se está sumando cuatro veces entonces escribo cuatro por tres y esto es igual al resultado de la suma que es quince	**3 + 3 + 3 + 3 = 15**	El producto es quince Escribiré cuatro por tres y el quince frente al igual, porque el quince es el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica. Yurani debe explorar y aplicar una técnica para resolver una suma iterada y expresarla como una multiplicación.		4 x 3 = 15	
CICLO DE LUISA			
Debo sumar siete más siete más siete más siete más siete.	Siete más siete es catorce, más siete veintiuno, más siete veintiocho más siete treinta y cinco. (O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	7 + 7 + 7 + 7 + 7 =	El total es treinta y cinco. Escribiré treinta y cinco frente al igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Luisa explora la técnica para resolver una suma iterada.		7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35	
Debo expresar siete más siete, más siete, más siete más siete usando la multiplicación.	Como el siete está sumando y se repite cuatro veces, escribo siete por cuatro y luego escribo el resultado de la suma que es treinta y cinco.	7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35	El producto es treinta y cinco. Escribiré siete por cuatro y el treinta y cinco frente al igual, porque el es el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Luisa aplicó la técnica para expresar una suma iterada como una multiplicación y estableció relación entre el resultado de la suma y el producto.		7 x 4 = 35	
CICLO DE CAROLAIN			
Debo sumar nueve más nueve más nueve.	Nueve más nueve es dieciocho, más nueve es veintisiete. (O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	9 + 9 + 9 =	El total es veintisiete. Escribo el veintisiete frente del igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Se debe explorar la técnica para resolver una suma iterada.		9 + 9 + 9 = 27	

Debo expresar nueve más nueve más nueve usando la multiplicación	Como el nueve se está sumando tres veces esto se puede escribir como nueve por tres y esto es igual al resultado de la suma que es veintisiete.	9 + 9 + 9 = 27	El producto es veintisiete. Escribiré nueve por tres y el veintisiete frente al igual, porque el veintisiete es el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Se exploró y aplicó una técnica para expresar una suma iterada; se estableció relación entre el resultado de la suma y el producto.		9 x 3 = 27	
CICLO DE GERALDÍN			
Debo sumar seis más seis más seis más seis más seis.	Seis más seis es doce más seis es dieciocho más seis veinticuatro más seis es treinta. (O posiblemente hace el conteo con los dedos u otros procedimientos)	6 + 6 + 6 + 6 + 6 =	El total es treinta. Escribo el treinta frente del igual, porque el igual indica que se escribe el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Geraldín explora técnicas para resolver una suma iterada.		6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30	
Debo expresar seis más seis más seis más seis más seis usando la multiplicación.	Como el seis se está sumando cinco veces, esto se puede escribir como seis por cinco, y esto es igual al resultado de la suma que es treinta.	6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30	El producto es treinta. Escribiré seis por cinco y el treinta frente al igual, porque el treinta es el resultado de la suma.
Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Se exploraron técnicas para expresar una suma iterada como una multiplicación y se aplicó una de ellas; se estableció relación entre resultado de la suma y el producto.		6 x 5 = 30	
CICLO DE LA PROFESORA			
Revisaré el trabajo de cada uno de los niños representantes de las filas.	Tres más tres más tres más tres es doce. Como el tres se suma cuatro veces entonces la suma de tres más tres más tres más tres es tres por cuatro que es igual a doce.	La profesora se concentra en la revisión del siguiente ejercicio: FILA 1 3 + 3 + 3 + 3 = 15 4 x 3 = 15	Yurani se equivocó al realizar la suma, pues obtuvo quince y no doce, la expresión de la suma como cuatro por tres que quiere decir que cuatro veces se repite el tres es correcta, sin embargo, como escribió el mismo resultado que obtuvo al realizar la suma como el producto de cuatro por tres, el ejercicio no es correcto.
Momento de evaluación: La profesora revisa los resultados de la aplicación de una técnica por parte de sus estudiantes.		La profesora dice: “Aquí hizo, bien cuatro veces se repite el tres pero el resultado está malo. No hay punto”	
Revisaré el ejercicio que hizo Luisa quien representa a la fila 2.	Siete más siete más siete más siete más siete es treinta y cinco. El siete se suma cinco veces y esto se expresa como siete por cinco.	La profesora revisa el ejercicio realizado por Luisa FILA 2 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35 7 x 4 = 35	Luisa obtuvo una suma correcta. Sin embargo, la expresión de la suma como siete por cuatro es diferente de siete por cinco, luego Luisa expresó erróneamente la suma como un producto.
Momento de evaluación: Se define validez de los procedimientos y técnicas empleadas por los estudiantes.		La profesora dice: La suma está bien pero la multiplicación no. No hay punto.	

Revisaré el trabajo de Carolain. Debo verificar si el total de la suma es correcto y si esta suma se ha expresado correctamente como un producto.	Nueve más nueve más nueve es veintisiete y como el nueve se suma tres veces esto se expresa como nueve por tres.	La atención de la profesora se concentra en la respuesta de Carolain FILA 3 9 + 9 + 9 = 27 9 x 3 = 27	El resultado de la suma es correcto, la suma es veintisiete y Carolain expresó la suma de nueve más nueve más nueve como nueve por tres, Ella estableció bien la relación entre el resultado de la suma y el producto que es veintisiete.
Momento de evaluación. Se establece la validez de aplicación de una técnica.		La profesora dice: "La suma está buena y la multiplicación también. Hay punto"	
Revisaré el trabajo de Geraldín. Debo verificar si el total de la suma es correcto y si esta suma se ha expresado correctamente como un producto	Seis más seis más seis más seis más seis es treinta y como el seis se suma cinco veces esto se expresa como seis por cinco.	La profesora revisa el ejercicio de la FILA 4: 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30 6 x 5 =30	El resultado de la suma es correcto, la suma es treinta y Geraldín expresó la suma de seis más seis más seis más seis más seis como seis por cinco, Geraldine estableció bien la relación entre el resultado de la suma y el producto que es treinta.
Momento de evaluación. Se establece validez de la aplicación de una técnica.		La profesora dice: "La suma quedó buena y la multiplicación también. Hay punto" La profesora da por terminado el concurso y solicita a los niños sacar el cuaderno para iniciar la actividad en clase.	

3.2.2 Ciclo de Interacción Cognitivo. Episodio 2

Se trabajó la clase en torno a la tabla del #8.

En el tablero se presentaron los números 16 y 24.

8+8 = 16   24 = 8 +8 +8

2x 8 = 16   3 x 8 = 24

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24

24 = 2 +2 +2 +2 +2 + 2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 = 24 = 12 x 2

La profesora dice "esto se escribe así": 12 x

$$\begin{array}{r} 12 \times \\ \underline{\ \ 2} \\ 24 \end{array}$$

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO	COORDINACIONES OBJETO
CICLO DE LA PROFESORA			
Presentaré una composición aditiva y multiplicativa de dieciséis con sumandos de ocho.	Aditivamente la composición de Dieciséis es igual a sumar el ocho dos veces y multiplicativamente a multiplicar dos por ocho.	**La Profesora escribe**: 16 y 24	Ocho más ocho es igual a dieciséis Y dieciséis es igual a dos por ocho *Los niños observan y escuchan*
		La Profesora escribe: 8+8 = 16 2x 8 = 16	
Presentaré a los estudiantes una descomposición aditiva de veinticuatro usando grupos de ocho y la expresaré utilizando la multiplicación	Aditivamente la descomposición de veinticuatro es igual a sumar tres veces ocho y esto se puede expresar como tres por ocho usando la multiplicación.	La Profesora considera el numeral: 24	Veinticuatro es igual a ocho más ocho más ocho, y tres por ocho es igual a veinticuatro
		24= 8+8+8 3×8=24	
Voy a componer el veinticuatro pensando en grupos de tres.	3×8 es tres sumado ocho veces	Nuevamente La Profesora considera la expresión 3×8= 24	Tres más tres más tres más tres más tres más tres más tres más tres es igual a veinticuatro. *Los niños observan y escuchan*
Primer encuentro y aplicación de la técnica: La profesora presenta una situación a los estudiantes y les presenta una técnica para expresar un producto como una suma iterada.		3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24	
Mostraré a los estudiantes que el veinticuatro también se puede descomponer pensando en grupos de dos.	Veinticuatro es igual a dos sumado doce veces.	La Profesora considera nuevamente el número: 24	Veinticuatro es igual a dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos.
Primer encuentro y aplicación de la técnica: La profesora presenta una situación a los estudiantes y les presenta una técnica para expresar un producto como una suma iterada		24 = 2 + +2 +2 +2 +2 + 2 +2 +2 +2 +2 +2	
Veinticuatro es dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos, y esto se puede expresar usando la multiplicación.	Dos sumado doce veces es igual a doce por dos.	La profesora considera la expresión 24 = 2 +2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2	Veinticuatro es igual a doce por dos
Momento de aplicación de la técnica: La profesora presenta una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		24 = 12 x 2	
Señalaré que la multiplicación doce por dos también se puede escribir en forma vertical	Doce por dos se representa colocando arriba el número más grande y debajo el más pequeño	La profesora considera la expresión 24 = 12 x 2	"Doce por dos es veinticuatro, esto se escribe así" *Los niños observan y escuchan*
Momento de aplicación de la técnica y de institucionalización: La profesora explica a los estudiantes una manera de representar en forma vertical un producto y el algoritmo para resolverlo.		12 x _2 24	

Cada niño trajo fríjoles o maíz y los tiene sobre su pupitre. Ahora se les pide que organicen el # 32 en grupos iguales. Algunos hacen lo siguiente:

o o o   o o o   o o o   o o o

o o o   o o o   o o o   o o o

o o   o o   o o   o o

La profesora hace pasar a Kelly al tablero para que cuente lo que hizo. Kelly contó a sus compañeros que formó 4 grupos de 8 fríjoles y cuando la profesora le pregunta que eso cómo se escribe Ella escribe lo siguiente:

8 + 8 + 8 +8 = 32

8 x 4 = 32

Los niños ensayan haciendo grupos de a 6 fríjoles pero no les da, al tablero sale Eyder y contó que agrupó los fríjoles así:

0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0   0 0 0 0

y escribe

4 +4+4+4+4+4+4+4 = 32   8 x 4 = 32

La profesora dice. "Eyder agrupó 8 grupos de a 4 fríjoles y esto es 32" y añade "¿alguien encontró otra forma distinta?"

Yenny pasó al tablero y escribió:

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 + 2+ 2 + 2 + 2 + 2 +2 = 32

2 x 16 = 32

La profesora explica que esto se puede escribir así:

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{\times 2} \\ 32 \end{array}$$

Y luego pregunta a los estudiantes: "¿Cuántos grupos formó?" los estudiantes contestaron en coro "16".

"y cada grupo ¿con cuántos elementos?" los estudiantes respondieron "con 2".

"Así se presentarán todos los múltiplos de 8" y ustedes deberán seguir los siguientes pasos:

1. Dado un número, cada niño lo representa con fichas o semillas.
2. Se debe organizar grupos de semillas y la condición es que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas.
3. En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números.

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO	COORDINACIONES OBJETO
CICLO DE LA PROFESORA			
Espero que algunos estudiantes organicen 32 semillas en grupos con igual cantidad de semillas	De los diferentes grupos iguales que se puedan organizar con 32 semillas seleccionaré una respuesta que exprese cuatro grupos de ocho.	La profesora pide a los estudiantes que organicen con semillas el número 32 en grupos iguales	Kelly organizó cuatro grupos con ocho semillas cada uno, le pediré que pase al tablero.
		La profesora pide a Kelly que pase al tablero.	
CICLO DE KELLY			
Debo formar grupos con igual número, de semillas	Como estamos en la tabla del ocho formaré grupos de ocho semillas	La profesora me pide que organice con semillas el número 32 en grupos iguales	Se forman cuatro grupos de ocho semillas
Momento exploratorio: Kelly explora una posible solución a la situación presentada		Kelly obtuvo: o o oo o o o o oo o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o	
CICLO DE LA PROFESORA			
Espero que Kelly pueda mostrar a sus compañeros que organizó las treinta y dos semillas en cuatro grupos de ocho semillas cada uno	Esta organización se puede aprovechar para descomponer el treinta y dos como ocho por cuatro.	La profesora pide a Kelly que pase al tablero.	Kelly conformó cuatro grupos de ocho semillas.
Momento de evaluación: La profesora quiere verificar si Kelly realizó una aplicación apropiada de la técnica		La profesora le pide a Kelly que explique a sus compañeros lo que hizo.	
CICLO DE KELLY			
Debo contarle a mis compañeros que formé cuatro grupos de ocho	Los cuatro grupos de ocho semillas son ocho más ocho, más ocho, más ocho que es igual a treinta y dos.	La profesora le pide a Kelly que explique a sus compañeros lo que hizo.	Les contaré que formé cuatro grupos de ocho fríjoles cada uno
		Kelly dice "formé cuatro grupos de ocho fríjoles cada uno".	

<table>
<tr><th colspan="4">CICLO DE LA PROFESORA</th></tr>
<tr><td>Espero que Kelly represente la acción que verbaliza: “formécuatro grupos de ocho fríjoles cada uno” usando numerales y la operación de suma y multiplicación.</td><td>Treinta y dos es ocho sumado cuatro veces y esta suma es equivalente a la multiplicación de ocho por cuatro.</td><td>La profesora le pregunta a Kelly: “Y eso ¿cómo se escribe?</td><td>Kelly expresa una composición aditiva de treinta y dos, en cuatro grupos de ocho y una composición multiplicativa de ocho sumado cuatro veces.
Los niños observan y escuchan.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento de evaluación: La profesora intenta verificar que la estudiante aplicó la técnica para expresar una suma iterada como un producto.</td><td>Kelly escribe:
8 + 8 + 8 +8 = 32
8 x 4 = 32</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">CICLO DE KELLY</th></tr>
<tr><td>Cuatro grupos de ocho es treinta y dos</td><td>Cuatro grupos de ocho es ocho sumado cuatro veces que se escribe ocho por cuatro.</td><td>La profesora le pregunta a Kelly: “Y eso ¿cómo se escribe?</td><td>Ocho más ocho más ocho más ocho es igual a treinta y dos, escribiré ocho por cuatro, y el treinta y dos después del igual, porque el treinta y dos es el resultado de la suma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento exploratorio y de aplicación de la técnica: Kelly explora posibles soluciones y aplica la técnica que su profesora le enseñó al expresar una suma iterada como un producto.</td><td>Kelly escribe:
8 + 8 + 8 +8 = 32
8 x 4 = 32</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">CICLO LA PROFESORA</th></tr>
<tr><td>Eyder organizó ocho grupos de cuatro semillas.</td><td>Cuatro grupos de ocho semillas es treinta y dos.</td><td>La profesora observa que al organizar treinta y dos semillas en grupos con igual número de elementos Eyder agrupó los fríjoles
Formando ocho grupos de cuatro semillas cada uno:
0000 0000 0000 000
0
0000 0000 0000 000
0</td><td>Como la tarea de Eyder es correcta, me apoyaré en la explicación que El proporcione. Pediré a Eyder que pase al tablero y presente a sus compañeros lo que hizo.

Los niños tratan de organizar las 32 semillas en grupos que tengan igual número de semillas, pero que esa cantidad sea diferente de 8 semillas.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>La profesora dice:
“Eyder, pase al tablero.</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">CICLO DE EYDER</th></tr>
<tr><td>Debo organizar el treinta y dos en grupos con igual número de semillas, pero que no sean ocho semillas porque ya Kelly organizó cuatro grupos de ocho semillas.</td><td>Formaré grupos de cuatro semillas cada uno</td><td>La profesora me pide que organice con semillas el número 32 en grupos iguales</td><td>Se forman ocho grupos de cuatro semillas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento exploratorio: Eyder trata de establecer cómo resolver la situación propuesta.</td><td>Eyder obtuvo:

0000 0000 0000 000
0

0000 0000 0000 000
0</td><td></td></tr>
</table>

CICLO DE LA PROFESORA			
Espero que Eyder pueda mostrar a sus compañeros que organizó las treinta y dos semillas en ocho grupos de cuatro semillas cada uno.	Esta organización se puede aprovechar para descomponer el treinta y dos como cuatro por ocho.	La profesora pide a Eyder pase al tablero.	Eyder conformó ocho grupos de cuatro fríjoles.
Momento de evaluación: La profesora quiere verificar si Eyder realizó una aplicación apropiada de la técnica		La profesora dice: “explique a sus compañeros lo que hizo”	
CICLO DE EYDER			
Formé ocho grupos de cuatro.	Ocho grupos de cuatro semillas es cuatro sumado ocho veces que se escribe ocho por cuatro.	Eyder pasa al tablero y explica que formó ocho grupos de cuatro semillas cada uno	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es igual a treinta y dos, escribiré ocho por cuatro, y el treinta y dos después del igual, porque el treinta y dos es el resultado de la suma. Los estudiantes observan y continúan haciendo sus ensayos
Momento de aplicación de la técnica: Eyder aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		4 +4+4+4+4+4+4+4 = 32 8 x 4 = 32	
CICLO DE LA PROFESORA			
Espero que algún estudiante pueda mostrar a sus compañeros otra manera de componer treinta y dos.	Treinta y dos se puede componer con dieciséis grupos de dos semillas cada uno o con dos grupos de dieciséis semillas.	La profesora pregunta: ¿alguien encontró una manera distinta de organizar el 32?	Yenny levanta la mano, otros niños observan y escuchan
		La profesora pide a Yenny que pase adelante.	
CICLO DE YENNY			
Debo organizar treinta y dos semillas en grupos con igual número de semillas.	Formaré grupos de 2 semillas cada uno	La profesora me pide que organice con semillas el número 32 en grupos iguales	Se forman dieciséis grupos de dos semillas
Momento exploratorio: Yenny trata de establecer cómo resolver la situación propuesta.		Yenny obtuvo: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	
CICLO DE LA PROFESORA			
Espero que Yenny pueda mostrar a sus compañeros que organizó las treinta y dos semillas en dos grupos de dieciséis semillas o en	Esta organización se puede aprovechar para descomponer el treinta y dos como dieciséis por dos o como dos por dieciséis.	La profesora pide a Yenny que pase al tablero y explique a sus compañeros lo que	Pediré a Yenny que pase al tablero para ver qué composición hizo de treinta y

dieciséis grupos de dos semillas cada uno.		hizo	dos.
		Yenny pasa al tablero	
CICLO DE YENNY			
.	Ocho grupos de cuatro semillas es cuatro sumado ocho veces que se escribe ocho por cuatro.	Eyder pasa al tablero y explica que formó ocho grupos de cuatro semillas cada uno	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es igual a treinta y dos, escribiré ocho por cuatro, y el treinta y dos después del igual, porque el treinta y dos es el resultado de la suma. Los estudiantes observan y continúan haciendo sus ensayos
Formé dieciséis grupos de dos semillas.	Dieciséis grupos de dos semillas es dos sumado dieciséis veces que se escribe dos por dieciséis. 2	Yenny pasa al tablero y cuenta que organizó grupos con dos semillas.	Dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos es igual a treinta y dos, escribiré dos por dieciséis, y el treinta y dos después del igual, porque treinta y dos es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica: Yenny aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 + 2+ 2 + 2 + 2 + 2 +2 = 32 2 x 16 = 32	
CICLO DE LA PROFESORA			
Aprovecharé la presentación de Yenny para mostrar a los estudiantes que dos por dieciséis se puede escribir en forma vertical.	Dos por dieciséis se representa colocando arriba el número más grande y abajo el más pequeño	La profesora considera la expresión 2 x 16 = 32	Dieciséis por dos se puede expresar en forma vertical como dieciséis por dos y el producto de esto es treinta y dos que se escribe debajo de la raya que indica el producto.
Momento de aplicación de la técnica y de institucionalización: La profesora explica a los estudiantes una manera de representar en forma vertical un producto y el algoritmo para resolverlo.		La profesora dice: " dos por dieciséis se puede escribir así:" 16 x 2 32	Los estudiantes observan y escuchan
Quiero aprovechar para recordar a los estudiantes que el número de grupos y la cantidad de semillas por grupo está relacionado con el producto.	Los estudiantes deberán relacionar el número de grupos (dieciséis) con la expresión dos por dieciséis.	16 x 2 32	Veré si los niños establecen esta relación
		La profesora pregunta "¿Cuántos grupos formó Yenny?"	
Los estudiantes deberán establecer la relación entre el	Dieciséis veces el dos significa que el dos se suma dieciséis veces.	A la pregunta de "¿Cuántos grupos	Los estudiantes tienen conciencia del significado del

multiplicando y el multiplicador con la expresión dieciséis por dos.		formó Yenny?" los niños contestan en coro "16"	dieciséis y lo relacionan con la escritura del producto dos por dieciséis. Averiguaré si los estudiantes tienen conciencia del significado del dos.
Momento de Evaluación: La profesora verifica que los estudiantes establecen la relación entre el número de grupos y cantidad de semillas por grupos con la escritura del producto.		La profesora pregunta "¿Cada grupo con cuántos elementos?"	Niños en coro: " 2"
		La profesora dice: "Así se presentarán todos los múltiplos de 8" y ustedes deberán seguir los siguientes pasos: 1. Dado un número, cada niño lo representa con fichas o semillas. 2. Se debe organizar grupos de semillas y la condición es que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas. 3. En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números.	

La maestra, siguiendo con su clase dice "Así se presentarán todos los múltiplos de 8" y ustedes deberán seguir los siguientes pasos:

1. Dado un número, cada niño lo representa con fichas o semillas.
2. Se debe organizar grupos de semillas y la condición es que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas.
3. En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números.

"Ahora el 40" dice la profesora y algunos niños son seleccionados para salir al tablero presentando estas soluciones:

1. 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40

   4 x 10 = 40

2. 20 + 20 = 40

   2 x 20 = 40

3. 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40

   8 x 5 = 40

4. 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40

   8 x 5 = 40

La profesora escribe en el tablero los productos planteados por los estudiantes:

1. 4 x 10.
2. 2 x 20.
3. 8 x 5.
4. 8 X 5.

En cada caso la profesora pregunta: "¿Qué tabla estamos estudiando aquí? Y, señalando el número 4 en el primer item continua:

- 4 x 10 "La tabla del 4".

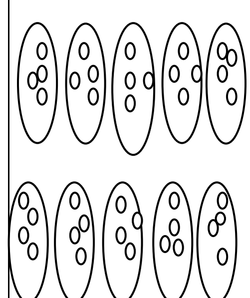
Los niños se unen a la profesora, cuando Ella señala los primeros números en cada caso y pregunta: "¿y aquí?"

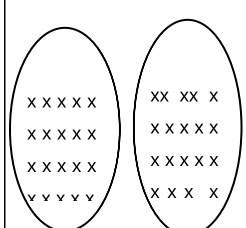
- 2 x 20 "La tabla del 2" responden los niños y la profesora
- 8 x 5 "La tabla del 8" " "
- 8 x 5 "La tabla del 8" " "

Una vez que los niños han respondido la profesora escribe los productos que resultan al invertir los factores en los casos anteriores y dice a sus estudiantes:

- 10 x 4 "la tabla del 10"
- 20 x 2 "la tabla del 20"
- 5 x 8 "la tabla del 5"

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**	**COORDINACIONES OBJETO**
CICLO DE LA PROFESORA			
A partir de los ejercicios presentados: ocho por dos igual a dieciséis, ocho por tres igual a veinticuatro y ocho por cuatro igual a treinta y dos, espero que los niños continúen con la	Los estudiantes organizarán el 40, el 48, el 56, etc. Organizando grupos con igual número de elementos	La Profesora dice: "Así se presentarán todos los múltiplos de 8" y ustedes deberán seguir los siguientes pasos:	Empezaremos con el número cuarenta Los alumnos empiezan a

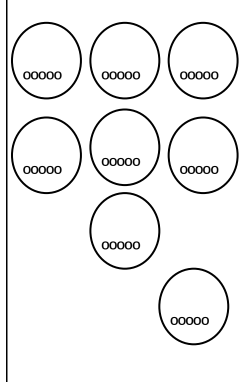
sucesión para formar representaciones con semillas de números que son múltiplos de ocho (40, 48, …..80) y que los representen usando una multiplicación.		1. Dado un número, cada niño lo representa con fichas o semillas. 2. Se debe organizar grupos de semillas y la condición es que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas. 3. En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números.	organizar las semillas en grupos iguales de acuerdo al número dado, siguiendo las instrucciones.
		La profesora dice: "Ahora el 40"	
Espero que algunos estudiantes organicen cuarenta semillas en grupos con igual cantidad de semillas	Revisaré el trabajo realizado por cada estudiante y pasaré al tablero a algunos de ellos para que escriban una descomposición aditiva y otra multiplicativa del cuarenta.	La profesora dice: "Ahora el 40"	Varios niños organizaron las cuarenta semillas en grupos con igual cantidad de ellas. **Veré si el estudiante 1 hizo una buena composición aditiva y multiplicativa del 40 usando números. Le pediré que pase al frente para que todos los estudiantes vean lo que El hizo.**
		La profesora pide al estudiante 1 que pase al tablero.	
CICLO DEL ESTUDIANTE 1			
Debo organizar cuarenta semillas en grupos con igual número de semillas.	Formaré grupos de 4 semillas cada uno	La profesora me pide que organice con semillas el número cuarenta en grupos iguales	Se forman diez grupos de cuatro semillas
Momento exploratorio: El estudiante 1 trata de establecer cómo resolver la situación propuesta.		El estudiante 1 obtuvo: 	

CICLO DE LA PROFESORA			
Veré qué tipo de organización de las cuarenta semillas hizo el estudiante 1.	El estudiante 1 puede haber organizado cuatro grupos de diez semillas, ocho de cinco, o dos de veinte, entre otras posibilidades.	La profesora pide al estudiante 1 que pase al tablero.	Pediré al estudiante 1 que escriba lo que hizo. Algunos niños aun están organizando sus 40 semillas, otros piden pasar al tablero para representar lo que hicieron.
¤¤¤¤¤ Momento de Evaluación: La profesora verifica si el estudiante resolvió bien la situación.		La profesora pide al estudiante 1 que escriba en el tablero lo que hizo.	
CICLO DEL ESTUDIANTE 1			
Diez grupos de cuatro es igual a cuarenta	Diez grupos de cuatro es cuatro sumado diez veces que se escribe cuatro por diez.	El estudiante 1 pasa al tablero	Cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro más cuatro es igual a cuarenta, escribiré cuatro por diez y el cuarenta después del igual, porque el cuarenta es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica. El estudiante 1 aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		El estudiante escribe en el tablero: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40 4 x 10 = 40	
CICLO DEL ESTUDIANTE 2			
Debo organizar cuarenta semillas en grupos con igual número de semillas.	Formaré grupos de veinte semillas cada uno.	La profesora me pide que organice con semillas el número cuarenta en grupos iguales	Se forman dos grupos de veinte semillas
Momento exploratorio: El estudiante 2 trata de establecer cómo resolver la situación propuesta.		El estudiante 2 obtuvo: 	

<table>
<tr><th colspan="4">CICLO DE LA PROFESORA</th></tr>
<tr><td>Veré qué tipo de organización de las cuarenta semillas hizo el estudiante 2.</td><td>El estudiante 2 puede haber organizado cuatro grupos de diez, cinco grupos de ocho semillas, dos de veinte, etc.</td><td>4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40

4 x 10 = 4</td><td>Pediré al estudiante 2 que escriba lo que hizo.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>La profesora pide al estudiante 2 que pase al tablero y escriba en el tablero lo que hizo.</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">CICLO DEL ESTUDIANTE 2</th></tr>
<tr><td>Dos grupos de veinte es igual a cuarenta</td><td>Dos grupos de veinte es veinte sumado dos veces que se escribe dos por veinte.</td><td>El estudiante 2 pasa al tablero</td><td>Veinte más veinte es igual a cuarenta, escribiré dos por veinte y el cuarenta después del igual, porque el cuarenta es el resultado de la suma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento de aplicación de la técnica. El estudiante 2 aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.</td><td>El estudiante 2 escribe en el tablero:

20 + 20 = 40

2 x 20 = 40</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">CICLO DEL ESTUDIANTE 3</th></tr>
<tr><td>Debo organizar cuarenta semillas en grupos con igual número de semillas.</td><td>Formaré grupos de cinco semillas cada uno.</td><td>La profesora me pide que organice con semillas el número cuarenta en grupos iguales</td><td>Se forman ocho grupos de cinco semillas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Momento exploratorio: El estudiante 3 trata de establecer cómo resolver la situación propuesta.</td><td>El estudiante 3 obtuvo:
</td><td></td></tr>
</table>

CICLO DE LA PROFESORA			
Veré si otro estudiante hizo una composición aditiva y multiplicativa diferente del 40 y le pediré que pase al tablero.	El estudiante 3 puede haber organizado cuatro grupos de diez, cinco grupos de ocho semillas, ocho grupos de cinco, etc.	El estudiante 2 escribe en el tablero: 20 + 20 = 40 2 x 20 = 40	Pediré al estudiante 3 que pase al tablero Algunos niños aun están organizando sus 40 semillas.
		La profesora pide al estudiante 3 que pase al tablero y explique a sus compañeros lo que hizo	
CICLO DEL ESTUDIANTE 3			
Ocho grupos con cinco semillas es igual a cuarenta	Ocho grupos de cinco es cinco sumado ocho veces que se escribe ocho por cinco.	El estudiante 3 pasa al tablero	Cinco más cinco más cinco más cinco más cinco más cinco más cinco más cinco es cuarenta, escribiré ocho por cinco y el cuarenta después del igual, porque el cuarenta es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica. El estudiante 3 aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		8 + 8 + 8 + 8 +8 = 40 8 x 5 = 40	
CICLO DEL ESTUDIANTE 4			
Debo organizar cuarenta semillas en grupos con igual número de semillas.	Formaré grupos de ocho semillas cada uno.	La profesora me pide que organice con semillas el número cuarenta en grupos iguales	Se forman cinco grupos de ocho semillas
Momento exploratorio: El estudiante 4 trata de establecer cómo resolver la situación.		El estudiante 4 obtuvo: ooo ooo ooo ooo ooo	

ICLO DE LA PROFESORA			
Haré pasar a un último estudiante para que muestre otra composición aditiva y multiplicativa del 40.	El estudiante 4 puede haber organizado cuatro grupos de diez semillas, o cinco grupos de ocho semillas.	8 + 8 + 8 + 8 +8 = 40 8 x 5 = 40	Algunos niños levantan la mano para salir al tablero, otros continúan organizando las 40 semillas.
		La profesora pide al estudiante 4 que pase al tablero y escriba lo que hizo	
CICLO DEL ESTUDIANTE 4			
Cinco grupos con ocho semillas es igual a cuarenta	Cinco grupos de ocho es ocho sumado cinco veces que se escribe como ocho por cinco.	El estudiante 4 pasa al tablero	Ocho más ocho más ocho más ocho más ocho es cuarenta, escribiré ocho por cinco y el cuarenta después del igual, porque el cuarenta es el resultado de la suma.
Momento de aplicación de la técnica. El estudiante 2 aplica una técnica para expresar una suma iterada como un producto.		8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40 8 x 5 = 40	
CICLO DE LA PROFESORA			
Aprovecharé estos enunciados para que los estudiantes identifiquen las tablas de multiplicar	El primer número de cada multiplicación indica la tabla que estoy trabajando.	La profesora llama la atención de los niños sobre lo que escribieron los 4 estudiantes que pasaron al tablero: • 4 x 10. • 2 x 20. • 8 x 5. • 8 X 5.	Escribiré los productos que indicaron los estudiantes.
		La profesora escribe: 4x 10. 2x 20. 8 x 5. 8 x 5.	
Haré caer en cuenta a los niños de que como el cuatro va primero, esta es la tabla	Aquí se está trabajando la tabla del cuatro.	La profesora señala 4 x 10 y pregunta:	Señalaré el número 4

del 4.¿?		"¿Qué tabla estamos estudiando aquí?"	
Momento de evaluación y de Institucionalización: La profesora desea saber si los estudiantes establecen relaciones entre las tablas de multiplicar y los factores de un producto dad y les enseña la técnica para ello.		"La tabla del 4", dice la profesora señalando el 4	
Haré caer en cuenta a los niños de que como el dos va primero, esta es la tabla del 2	Aquí se está trabajando la tabla del dos	"¿Qué tabla estamos estudiando aquí?", señala 2 x 20	La profesora señala el número 2 los niños responden en coro al mismo tiempo que la profesora: "la del dos"
		La P dice "La tabla del 2"	
Como el ocho va primero, esta es la tabla del 8	Aquí se está trabajando la tabla del ocho.	¿Y aquí? Pregunta la profesora señalando 8 x 5	La profesora señala el número 8 los niños responden en coro al mismo tiempo que la profesora: "la del ocho"
Momento de evaluación: La profesora indaga a sus estudiantes para saber si establecieron relaciones entre el orden de los factores de un producto y las tablas de multiplicar.		la profesora dice: "la tabla del ocho"	
Como el ocho va primero, los niños deberán responder que esta es la tabla del ocho	Aquí se está trabajando la tabla del ocho.	¿En este caso? Y señala 8 x 5	La profesora señala el número 8 los niños responden en coro al mismo tiempo que la profesora: "la del ocho"
		"Estamos estudiando la tabla del 8 también", dice la profesora.	
Me aseguraré de que los estudiantes han entendido que el primer número indica la tabla que se está trabajando.	En cada caso, el primer factor indica la tabla que se está trabajando.	la profesora invierte los factores de los productos presentados arriba y dice: 10 x 4 "la tabla del 10" 20 x 2 "la tabla del 20" 5 x 8 "la tabla del 5"	Señalaré los primeros números en cada ejercicio e indagaré a los niños sobre la tabla a multiplicar a que hacen referencia. Algunos niños observan y otros dicen en coro con la profesora "la tabla del 10, la del 20, la del 5"

Momento de aplicación de la técnica y de evaluación. La profesora verifica resultados y aclara respuestas a sus estudiantes-	"la tabla del 10, la del 20, la del 5"	

La profesora ahora dice a sus estudiantes "a sus 40 le van a aumentar una cantidad de manera que sean 48" y pregunta "¿qué cantidad le tengo que aumentar a esos 40 para que sean 48?". Los niños responden "8". (Esta pregunta la hizo en cada caso, para pasar a 56, 64, 72 y 80).

Un niño organizó las semillas así

0000 0000 0000 0000 0000 0000

0000 0000 0000 0000 0000 0000

Y escribió:

6 x 8 = 48

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48

Otro estudiante organizó sus semillas así:

oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo Y escribió en el tablero

6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48.

La profesora dice "completemos ahora 56"; cuando ya tengan 56 empiecen a formar los grupitos.

Valeria dejó los grupos que había organizado en el ejercicio anterior (6 grupos de 8), agregó un grupo de 8 y le quedaron 7 grupos de 8 semillas. En el tablero escribió:

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56; 7 x 8 = 56

Dana alzó la mano y al salir al tablero escribió:

7 + 7+ 7 + 7 + 7 +7 +7 + 7 = 56;   7 x 8 = 56

A continuación la profesora le planteó el siguiente ejercicio: "¿Cuántos grupos pueden formar con 80 unidades?".

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 80;

10 x 8 = 80;

8 x 10 = 80

Se pidió a los estudiantes guardar las semillas y escribir en el cuaderno.

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**	**COORDINACIONES OBJETO**
Los estudiantes deberán Completar 48 semillas a partir de 40 que ya tienen u organizar 48 semillas en grupos con igual cantidad de unidades.	Preguntaré cuántas semillas deberán aumentar	La profesora dice: "a sus 40 le van a aumentar una cantidad de manera que sean 48"	La profesora pregunta "¿qué cantidad le tengo que aumentar a 40 para que sea 48? Los niños empiezan a organizar las 48 semillas y responden en coro "8"
		La profesora observa las organizaciones que hacen los estudiantes y pide a algunos estudiantes que presenten a sus compañeros cómo organizaron las 48 semillas.	
Revisaré cómo organizó el estudiante 5 el número 48.	48 semillas se pueden organizar en 8 grupos de 6 semillas cada uno, en 4	La profesora pide al estudiante 5 que pase a tablero.	Los niños organizan las 48 semillas en grupos con igual número de unidades

	de 12, en 3 de 16, etc.		
		El estudiante 5 pasa al tablero.	
CICLO DEL ESTUDIANTE 5			
. 48 semillas se pueden organizar como 6 grupos de 8 semillas cada uno.	6 grupos de 8 semillas son 48 semillas, Esto se puede expresar usando el producto 6 x8 y la suma 8 +8+8+8+8+8.	El estudiante 5 que organizó las semillas en seis grupos de 8 semillas cada uno pasó al tablero. 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000 00000000	6 x 8 = 48 8+8+8+8+8+8 = 48 Algunos niños continúan organizando sus 48 semillas, otros escuchan y observan.
Momento de aplicación de la técnica: El estudiante 5 expresó su arreglo de cinco semillas en seis grupos y lo expresó usando el producto y sumas iteradas.		6 x 8 = 48 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48	
CICLO DE LA PROFESORA			
Esta organización permitirá mostrar que 48 semillas se pueden organizar en 8 grupos de 6 semillas cada uno.	Pediré al niño que explique a sus compañeros lo que hizo.	La profesora vio que otro estudiante organizó sus semillas así: oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo oooooo	La profesora le pide que explique a sus compañeros lo que hizo. Los niños están organizando sus 48 semillas
		La profesora pide al estudiante 6 que pase al tablero.	
CICLO DEL ESTUDIANTE 6			
8 grupos de 6 semillas cada uno son 48 semillas.	8 grupos de 6 semillas se puede expresar como una suma 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48.	El estudiante 6 pasa al frente	6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48. Los niños observan y escuchan

Momento de aplicación de la técnica y de evaluación: El estudiante expresa su arreglo como una suma iterada y la profesora verifica si está o no bien.		6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48.	
CICLO DE LA PROFESORA			
Los estudiantes organizarán 56 semillas en grupos con igual cantidad de unidades	A partir de la organización que cada niño elija, haré pasar a algunos estudiantes para que hagan en el tablero las representaciones de esos arreglos usando sumas y/o multiplicaciones.	La profesora dice "completemos ahora 56"; cuando ya tengan 56 empiecen a formar los grupitos.	La profesora observa a sus estudiantes y pide a Valeria pasar al tablero Los niños completan 56 semillas y empiezan a organizarlas en grupos con igual cantidad de unidades
		Valeria pasa al tablero.	
CICLO DE VALERIA			
Uno de mis compañeros que salió ahora organizó 48 semillas en seis grupos de ocho semillas cada uno y 56 tiene ocho semillas más que 48.	Agregaré un grupo de ocho a lo que hizo mi compañero	La profesora pide que organice 56 semillas en grupos iguales.	Se forman siete grupos de ocho semillas
Momento de exploración: Valeria explora una posibilidad de formar grupos iguales con igual cantidad de semillas.		Valeria obtuvo: 00000000 00000000 0000000000000000 00000000 00000000 00000000	
58 se puede organizar como 7 grupos de 8 semillas cada uno	7 grupos de 8 semillas cada uno se puede expresar como la suma 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56 y también como un producto 7 x 8 = 56	Valeria sale al tablero y contó lo que había hecho.	8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56 7 x 8 = 56 Los estudiantes observan y escuchan
Momento de aplicación de la técnica: Valeria establece relación ente el arreglo realizado y la representa como una suma iterada y un producto.		8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56 7 x 8 = 56	
CICLO DE LA PROFESORA			
Parece ser que Dana tiene otra organización de sus 56 semillas	Le pediré que salga al tablero y presente lo que hizo	Dana está levantando la mano	La profesora pide a Dana pasar al tablero

			Los niños observan y escuchan
		Dana pasa al tablero	
CICLO DE DANA			
56 semillas se pueden organizar en 8 grupos con 7 semillas cada uno.	56 es el 7 sumado 8 veces, esto también se puede expresar como 7 x 8.	Dana alzó la mano contó que organizó de otra forma las 56 semillas	7 + 7+ 7 + 7 + 7 +7 +7 + 7 = 56 7 x 8 = 56 Los estudiantes atienden
Momento de aplicación de la técnica: Dana expresa en forma de suma iterada y de producto el arreglo que hizo.		7 + 7+ 7 + 7 + 7 +7 +7 + 7 = 56 7 x 8 = 56	
CICLO DE LA PROFESORA			
Veré si los estudiantes pueden componer el número 80 aditiva o multiplicativamente.	Los estudiantes deberán decir que se pueden organizar 80 semillas en 10 grupos de 8 semillas o en 8 grupos de a 10 semillas.	La profesora le planteó el siguiente ejercicio: “¿Cuántos grupos pueden formar con 80 unidades?”.	Niños : “10”, “8”
80 se puede componer como 10 grupos de 8 semillas	80 es 8 sumado 10 veces y esto se puede escribir 10 x 8 = 80 u 8 x 10 = 80	La profesora escribe 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 80;	10 x 8 = 80; 8 x 10 = 80 Los niños observan y escuchan
Momento exploratorio Momento de aplicación de la técnica: La profesora indaga sobre la respuesta y representa en el tablero una de las posibilidades utilizando el producto.		10 x 8 = 80; 8 x 10 = 80	
Pediré a los niños que saquen el cuaderno	Ya se construyó con los niños la tabla del 8 y debemos consignar esto en el cuaderno.	La profesora dice: “Muy bien niños, vamos a guardar las semillas”.	“Vamos a sacar el cuaderno y van a copiar lo que voy a escribir en el tablero”. Los niños guardan sus semillas
		“Vamos a sacar el cuaderno y van a copiar lo que voy a escribir en el tablero”.	

3.2.3 Ciclo de Interacción Cognitivo Episodio 3

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO	COORDINACIONES OBJETO
Debo lograr la atención de los alumnos en los datos del problema.	Leeré y me cercioro si cada elemento de la pregunta es comprendido por los niños	**La P dice**: Pónganle cuidado y no vamos a responder así, cualquier número porque no es adivinando, es pensando.	
			Los niños observan y escuchan
Verificaré si se comprende que un par son dos unidades	Los niños deberán responder ¿Qué es un par?	**La P lee:** *"En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja….* ***La P pregunta****: ¿cuánto es un par de zapatos?*	
Primer encuentro: La profesora presenta sus estudiantes la situación a resolver.		"Dos"	Un par son dos zapatos. Los niños piensan que el número es dos
Leo la pregunta del problema referida al número total de zapatos en 34 cajas y verifico si se toma en consideración el número de cajas	La respuesta a la pregunta ¿Cuántas cajas hay? Me informará si los niños tienen conciencia del número total de cajas del enunciado de la pregunta.	**La P dice:** *La pregunta es, "¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?"* **Y a continuación pregunta:** ¿Cuántas cajas hay?	
Primer encuentro y momento exploratorio: La profesora presenta a los estudiantes la situación a resolver y Ellos tratan de buscar una respuesta acudiendo a los esquemas que han construido.		**Niños**." Dos"	*La atención de los niños se centra, posiblemente, en el numero de zapatos Los niños piensan en que el número a decir es dos*
Quiero cerciorarme de que el mayor número de niños se centren en lo que les leo	Si los niños me responden que "en una fábrica" será señal de su atención	**La P dice**. No vamos a adivinar, vuelvo a repetir el problema "En una fábrica….En ¿una que?	
		Niños. En una fábrica	*Los niños responden automáticamente*

De nuevo voy a verificar si los datos del problema están presentes en la mente de los niños.	Espero una respuesta como : un par son dos zapatos Lo que indicaría que el dato está en la mente de los niños.	**Profesora**. En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos…. ¿Un par de zapatos son cuántos zapatos?	
		Niños. Dos	*Los niños piensan y establecen que un par es dos zapatos*
Les preguntaré a los niños cuántos zapatos hay en 34 cajas	Espero que los niños sumen dos veces treinta y cuatro. O 34 veces dos, lo cual sería muy costoso y poco probable O espero que los niños multipliquen sin utilizar las suma: 34x 2 = (30 x 2) + (4 x 2)= 60 +8 = 68.	**Profesora**. Cada par de zapatos en una caja. En una caja hay dos zapatos. La pregunta es ¿cuántos zapatos hay en 34 cajas?	
Momento Exploratorio y de aplicación de la técnica: Los niños exploran posibles soluciones y proponen algunos números como respuesta, posiblemente han realizado algún producto.		**Niños.** "140", "34", "50".	*Los niños piensan y responden*
CICLO DE LUISA			
Los números son diferentes al que obtuve	Los niños están equivocados pues la profesora dice que están adivinando	**Niños.** "140", "34", "50". **Profesora**. Nada de adivinar	*Los niños piensan y responden*
Momento de aplicación de la técnica: Luisa comprendió la situación propuesta por la profesora y con los datos presentados aplicó la técnica para hallar la solución.		**Niños dicen.** "74", " 132", "68" Y yo digo : "68"	*Los niños vuelven a pensar un número*
CICLO DE LA PROFESORA			
Luisa dijo la respuesta correcta: "68"	*Debo comprobar que la respuesta es producto de aplicar el concepto de multiplicación*	***Luisa dice: "68"***	
		La P dice. Muy bien Luisa, venga para acá. ¿Cómo hiciste la operación?	*Sólo la respuesta de Luisa es correcta. Los niños observan.*

CICLO DE LUISA			
Debo ir donde está la profesora	Me acerco a la profesora	**La P me dice**. Muy bien Luisa, venga para acá	
Debo escribir la multiplicación	Escribo los números y el signo de la multiplicación	**La P me pregunta:** ¿Cómo hiciste la operación?	
Multiplico dos por cuatro	Dos por cuatro es igual a ocho. Escribo el resultado bajo la raya, en el lugar de las unidades.	34 x 2	
Multiplico dos por tres	Dos por tres es igual a seis. Escribo el seis a la izquierda del ocho, en el lugar de las decenas.	34 x 2 **8**	
Momento de aplicación de la técnica: Luisa resuelve una multiplicación utilizando las tablas de multiplicar y realizando el algoritmo correspondiente		34 x 2 **68**	
Mi resultado era el correcto	La profesora me felicitó luego realicé bien las operaciones	**La P dice:** Muy bien, un aplauso para Luisa!	
CICLO DE LA PROFESORA			
Verifico si Luisa tiene razones para elegir el número 34	Si Luisa responde que porque son 34 cajas entonces habrá establecido uno de los factores del producto	34 x 2 **68**	
Momento de Evaluación: La profesora espera verificar que la estudiante realizó bien la multiplicación. y tiene conciencia de la relación entre los datos presentados y el producto		Por qué 34?, 34 por qué? Y lo señala en el tablero. Porque…	*Pero Luisa ha escrito correctamente el algoritmo: arriba el más grande*

CICLO DE LUISA			
		(Inaudible)	
	¿?	La Profesora me pregunta … ¿qué?, ¿por qué el 34?.	
		contesto en voz muy baja	
Debo responder por qué número multipliqué a dos.	El dos lo multipliqué por cuatro	**Profesora**. Bueno, porque el número que es de dos cifras, más grande lo debo colocar arriba. Explícanos el proceso. El dos lo multiplicaste por…	
Momento de Aplicación de la técnica: Luisa explica cómo realizó el algoritmo para resolver la multiplicación.		Cuatro	
Debo responder que después de multiplicar las unidades debo multiplicar las decenas	Después de multiplicar por las unidades debo multiplicar por las decenas	**Profesora:** Primero hay que empezar a multiplicar por cuáles? Por las unidades, dos por cuatro, me da ocho y después por las…	
Momento de Aplicación de la técnica y de Institucionalización: Se está explicando el procedimiento para resolver una multiplicación y al mismo tiempo la profesora aprovecha para explicar nuevamente a sus estudiantes cómo se realiza este proceso.		Decenas **Profesora.** Dos por tres me da 6. Muy bien Luisa. Puede sentarse.	
Espero comprobar que los niños comprendieron la respuesta y que puedan establecer relación entre lo que se les pregunta y el resultado de la multiplicación.	Si los niños dicen 68 han entendido la respuesta de Luisa	Muy bien, leo la pregunta y levanta la mano el niño que me la quiera responder: "*¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*"	
Momento de Evaluación: La profesora verifica si los niños entienden la situación propuesta.		**Niños.** ¡2!, ¡3!	*Los niños piensan en el número de zapatos en una caja. O, posiblemente están adivinando*

Parece ser que Dana estableció relación entre lo que se pregunta y el producto Espero que Dana diga el número correcto	Haré pasar a Dana para que explique y poder controlar las respuestas	Dana levanta la mano y dice “En la caja hay…”	
Dana está pensando en una caja. Debo hacerle caer en cuenta de que mi pregunta se refiere a los zapatos en las 34 cajas	Le diré a Dana que no se trata de una caja y le preguntaré de cuántas cajas se trata.	la profesora la hace pasar al frente ***Dana***. En la caja hay…	
Espero que la aclaración y pregunta provoque una respuesta correcta	Mi pregunta centrará la atención de Dana en el número de cajas	**Profesora.** En la caja no, En cuántas cajas.	
Debo comprobar si son conscientes de la respuesta	Comprobaré si el 68 se refiere a zapatos o a cajas, según los niños.	**Niños.** ¡34! **Dana**. En 34 cajas hay 68	*Los niños toman conciencia del número total de cajas y Dana se apoya en esta respuesta para responder*
		Profesora. ¿68 qué? **Dana**: zapatos, **Niño.** Pares de zapatos. **Profesora.** Vaya siéntese. Hacemos otro problema?	
		Niños. Si!	

3.2.4 Lineamientos del Ministerio de Educación y Plan de Aula

Atendiendo a los fines de la educación en Colombia, y con el ánimo de orientar las acciones de las Instituciones Educativas del País, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) provee, para todas las áreas obligatorias establecidas en la Ley General de Educación, un marco amplio en el que se presentan los lineamientos generales que guían la acción de los maestros en relación con lo que se espera potenciar en la población escolar.

En lo referente a las matemáticas, se pretende que el currículo escolar propenda por el desarrollo de competencias:

> *Las Competencias se consideran como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.*(M.E.N. 2006 p.49)

Se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo.

El sentido de la expresión ser matemáticamente competente está íntimamente relacionado con los fines de la educación matemática en todos los niveles educativos y con la adopción de un modelo epistemológico sobre las propias matemáticas. La elección de este modelo epistemológico coherente requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como:

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.

- Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales, resultado que se configura como un cuerpo de conocimientos que están lógicamente estructurados y justificados.

Los supuestos anteriores permiten identificar dos **facetas básicas del conocimiento matemático:**

1. La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y contribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.

2. La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus registros de representación.

En el conocimiento matemático también se han distinguido dos **tipos básicos de conocimiento: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental**. El primero está más cercano a un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos, por tanto, está asociado con el saber cómo.

Las dos facetas (práctica y formal) y los dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalan nuevos derroteros para aproximarse a una interpretación enriquecida de la expresión ser matemáticamente competente.

Lo anterior permite precisar algunos **procesos generales** presentes en toda actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente:

- Formulación, tratamiento y resolución de problemas.
- La modelación
- La comunicación.
- El razonamiento
- La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los lineamientos curriculares:

1. Pensamiento numérico y Sistemas numéricos
2. Pensamiento espacial y sistemas Geométricos

3. Pensamiento métrico y Sistemas de medidas
4. Pensamiento aleatorio y Sistemas de datos
5. Pensamiento variacional y Sistemas algebráicos y analíticos

Se citan además los Contextos en el aprendizaje de las matemáticas:

1. Contexto inmediato o contexto de aula.
2. Contexto escolar o contexto institucional.
3. Contexto extraescolar o contexto sociocultural.

El Ministerio de Educación Nacional, también invita a la reflexión a las Instituciones Educativas y a los educadores sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación y brinda ciertas recomendaciones frente a estos procesos. Finalmente, integrando las ideas previas, se han establecido los Estándares básicos de competencias matemáticas, para orientar las construcción de los planes de estudios Institucionales y direccionar las acciones de los maestros en sus actividades con los estudiantes. Un estándar básico de competencias se define como:

"*Niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático"* (MEN.2006 p.76) y relacionan sistemas conceptuales y simbólicos asociados a él. Cada estándar de cada tipo de pensamiento pone énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática.

En el caso de la Institución Educativa Gabriel García Márquez, en la que realizó la presente investigación, se recogieron las formulaciones del MEN y se organizaron los contenidos de las diferentes áreas y a partir de allí se formuló una propuesta metodológica basada en los conocimientos y experiencias previas de los educandos y sus saberes.

A continuación se presentan algunas reflexiones registradas en la formulación del plan de estudios del área de matemáticas:[10]

> *Para el desarrollo de una clase del área de matemáticas, el docente antes de introducir un concepto matemático o un algoritmo formal, realizará con sus*

---

[10] Institución Educativa GABRIEL GARCÍA MÁRQUEZ, Plan de área de Matemáticas" 2003.

alumnos una actividad matemática previa a la clase o para el transcurso de la misma. Una actividad puede ser:

Una pregunta problema

Un problema propiamente dicho

Un juego lúdico o una recreación

Un proyecto de vida

Uso de materiales concretos o cualquier otro medio técnico o de comunicación que implícitamente ayude a descubrir, entender o consolidar un concepto.

El profesor trabajará las actividades desde tres momentos o etapas

1. Selección o diseño de la actividad, que consiste en escoger una actividad a través de un material didáctico, un juego y otra herramienta para el desarrollo del concepto a trabajar, por ejemplo: bloques, ábacos, objetos, cartones, cubos, palitos, bolas o diseñar con materiales del medio la actividad. Así, por ejemplo para trabajar el concepto de número entero se realiza una actividad con materiales como dados, fichas de colores, pista numérica, cartulina.
2. Ejecución de la actividad. Aquí el profesor tendrá en cuenta en primer lugar dar a los alumnos una explicación clara, sencilla y breve de la actividad a realizar. Luego guiará la actividad hacia el concepto para que no sea solo un juego involucrando el perfil den valores y la comunicación, como también las demás competencias.
3. Evaluación de la actividad, aquí se socializa el trabajo individual y grupal, un espacio para resaltar el propósito de la actividad, formar en valores, tener en cuenta el error, dar ejemplos y contraejemplos, hacer conjeturas, demostraciones, formular hipótesis, es decir abrir el camino que lleva al alumno a ser partícipe de este aprendizaje.

Una vez finalizada la actividad matemática, el docente dispondrá de su saber y quehacer en el aula para terminar el manejo de la clase. También se pueden realizar otras actividades complementarias y de retroalimentación como:

- Planteamiento y solución de problemas
- Talleres creativos

- Proyectos lúdicos, pedagógicos que involucren la integración con los proyectos transversales y de gestión empresarial.
- El debate y la mesa redonda
- Trabajar la historia de las matemáticas con base de lecturas de grupo, las cuales permiten el desarrollo de las competencias cognitivas, congnoscitivas, axiológicas y comunicativas.

Con esta metodología se espera crear un espacio significativo para el área de matemáticas, además de vincular los referentes dados en los lineamientos como son la resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento y demás elementos posibles para facilitar la adquisición de conocimientos.

Acerca de la evaluación de los educandos se establece que será continua e integral con el objetivo de valorar el alcance de logros, competencias y conocimientos de cada uno de ellos. Se proponen actividades de superación que permitan al estudiante revisar y reflexionar sobre sus intereses y deseos de aprender que le permita motivarse y realizar un buen trabajo. Para los estudiantes que presenten un mayor interés por el área se les propone realizar trabajos de investigación con mayor grado de dificultad para realizar tanto en clase como en su tiempo libre. También se promueve la realización de proyectos de investigación por parte de los estudiantes.

Para cada grado y período se propone un formato en el que se consideran los siguientes Ítems: Estándar, Logro-Competencia, Contenidos, Evaluación. El concepto de multiplicación se introduce en el II período académico del grado 2° de educación básica primaria y los contenidos en su orden propuesto son:

1. Adición de sumandos iguales.
2. Multiplicación por 2, 4 y 8.
3. Multiplicación por 5 y 10.
4. Multiplicación por 3,6 y 9.
5. Multiplicación por 7.
6. Términos de la multiplicación.
7. Ejercicios de la multiplicación.
8. Problemas de multiplicación

Se citan además algunos logros que se espera los estudiantes alcancen

1. Maneja correctamente de procedimientos para multiplicar los números naturales.
2. Reconoce en forma horizontal y vertical los términos de la multiplicación.
3. Desarrolla correctamente multiplicaciones propuestas.
4. Resuelve correctamente problemas de la vida cotidiana.

Para implementar el plan de estudios dentro de la Institución, cada grupo de docentes por nivel realiza un plan de trabajo en el que presenta los contenidos a desarrollar en cada período. A continuación se presenta la planeación referente a la introducción del concepto de multiplicación presentada por los docentes de grado 2°:

Institución Educativa Gabriel García Márquez- sede 02
Plan de Trabajo Área de Matemáticas - Grado 2°
Período III. Febrero-Marzo 2008

Contenidos	**Competencias**	**Actividades**	**Recursos**
MULTIPLICACIÓN Adición de sumandos iguales. - Términos de la multiplicación. - Tablas de multiplicar. - Multiplicaciones por una cifra. - Problemas de multiplicación.	Identifica y resuelve operaciones multiplicativas. Reconoce que la multiplicación es una suma de forma más corta que la suma. Identifica y resuelve operaciones multiplicativas con números hasta de cinco cifras. Resuelve problemas sencillos.	- Ejercicios prácticos en el aula de adición de sumandos iguales. - Ejercicios de cálculo mental. - Juego de competencia. - Salida al tablero. - Elaboración de tablas de multiplicar. - Aplicación de talleres en casa y en clase. - Evaluación por semana. - Juego de lotería con la tablas de multiplicar.	Objetos de aula como marcadores, tubos, palos. Cartulina Talleres Lotería

3.2.5 Presentación de la multiplicación en los textos escolares usados

3.2.5.1 Texto: Multisaberes 2. (Grupo Editorial Norma)

Tomando como referente los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas, el texto “Multisaberes 2”, de Editorial NORMA presenta la unidad 4: *Multiplicación y división* apuntando al desarrollo del pensamiento numérico y los procesos de comunicación y desarrollo del razonamiento lógico, proponiendo para ello los siguientes estándares básicos de competencias:

Pensamiento: Numérico

- Reconocer el significado del número en contextos de conteo, comparación y localización.
- Describir, comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Resolver y formular problemas en situaciones multiplicativas.

Proceso: Comunicación.

- Expresar la adición de sumandos iguales como una multiplicación.

Proceso: Razonamiento lógico.

- Comprender los algoritmos de la multiplicación y la división con números hasta 100.

Se describen además cuatro competencias fundamentales que se pretende desarrollar en los estudiantes al estudiar el texto:

Competencia Interpretativa:

1. Identifica la multiplicación como la suma de sumandos iguales.
2. Busca factores desconocidos empleando la división.
3. Aplica el algoritmo de la división.

Competencia Argumentativa:

1. Explica respuestas empleando la multiplicación y sus propiedades.
2. Justifica procedimientos empleados en la división.

Competencia propositiva.

1. Resuelve problemas que requieren de la multiplicación o división.

Competencia Ciudadana.

1. Conoce y respeta las reglas básicas del diálogo, como el uso de la palabra y el respeto por la palabra de otra persona.

Temas.

1. La Adición y la multiplicación.
2. Multiplicación por 2.
3. Multiplicación por 3.
4. Multiplicación por 4.
5. Multiplicación por 5.
6. Multiplicación por 6.
7. Multiplicación por 7.
8. Multiplicación por 8.
9. Multiplicación por 9.
10. Multiplicación por 0 y 1
11. Propiedades de la multiplicación.
12. Multiplicación de un número de dos cifras por una cifra.

El desarrollo de cada uno de estos temas está organizado en las siguientes sesiones:

- Un espacio en el que se presenta lo que significa ***multiplicar por*** 2, 3, 4, etc.
- ***Piensa y practica***, donde se presentan ejercicios para aplicar la definición propuesta anteriormente.
- ***Tarea*** o sesión en la que se plantean ejercicios para realizar fuera de la clase.

Desarrollo de la Unidad.

La Adición y la multiplicación.

Para introducir el concepto de multiplicación se presenta una sesión de ***Actividades preparatorias***, en la que se plantea una situación que invita al estudiante a realizar sumas:

"En un aula de clases hay cinco filas y en cada una hay seis niños
¿cuántos niños hay en el aula?"

Para introducir el primer tema: La Adición y la multiplicación, se presentan dos situaciones en las se han ordenado una cantidad de objetos en varios grupos con igual cantidad de elementos y, como en el primer caso se expresa esta organización así:

Hay 3 grupos de 4 pitos cada uno

4 + 4 + 4 = 12

3 **veces** 4 es 12

3 x 4 = 12

A continuación se presenta la siguiente definición:

Una adición de sumandos iguales se puede expresar en forma de multiplicación.

Los términos de la multiplicación son factores y producto.

3 x 5 = 15

Factores Producto

La sesión Piensa y practica presenta 6 ejercicios en los que a partir de un dibujo con organizaciones de diferentes objetos pide al estudiante completar:

Hay ____ grupos

En cada grupo hay ____ (objetos)

___ + ___ +___ = ___

_____ veces _____ es ____

Multiplicación por 2, 3, 4 y 5.

Cada una de las lecciones referidas a la multiplicación por 2, 3, 4, y 5 inician presentando dibujos con arreglos de ***n*** cantidad de grupos con una cantidad *m* de objetos y a continuación se escribe en cada caso:

En cada (Adjetivo que define el grupo) hay ***m*** (# objetos por grupo)

En total hay

$m + m + . . . + m = s$

n veces

n veces *m* es *s*

Luego de esta presentación se presenta en un recuadro:

> Siempre que multiplicamos por ***n***
>
> hacemos ***n*** veces más grande el
>
> número que multiplicamos.

La sesión Piensa y práctica.

1. Plantea 2 situaciones ilustradas y a partir de allí el estudiante debe completar con números siguiendo la secuencia:

   ___ + ___ = ___

   (n) veces _____ es ____

   (n) x ______ = _____, n = 2, 3, 4, 5
2. Se pide completar la serie contando de dos en dos, tres en tres, etc. Según el caso.
3. Se pide completar una tabla como la que se presenta a continuación para la multiplicación por 3:

Adición	**Expresión**	**Multiplicación**	**Producto**
8 + 8 + 8	3 veces 8	3 x 8	24
	3 veces 9		
		3 x 3	
4 + 4 + 4			
	3 veces 2		
7 + 7 + 7			
		3 x 6	
	3 veces 1		
			15

Por último, la sesión **Tarea** pide al estudiante completar la tabla de multiplicar:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2 x									

O se pide hallar el factor que falta en casos como

$\square$ X 6 = 24

4 x $\square$ = 32

Multiplicación por 6, 7, 8 y 9.

Para introducir estas multiplicaciones, ya no se presentan situaciones ni se usa explícitamente la relación suma producto, simplemente se presenta en un recuadro lo que significa la multiplicación por n (n= 6,7,8 y 9):

Cuando multiplicamos por ***n***

hacemos ***n* veces** más grande el

número que multiplicamos.

Y se escribe: ***n* veces** *m es igual a s*

$n \times m = s$

En la sesión Piensa y Practica se presentan dibujos, y se espera que el estudiante observe y complete las sumas iteradas usando números y luego las escriba en forma de producto. Se proponen además ejercicios de apareamiento como las siguientes:

9+9+9+9+9+9	6 x 7	48
7+7+7+7+7+7	6 x 8	42
4+4+4+4+4+4	6 x 4	54
8+8+8+8+8+8	6 x 9	24

Se pide además completar la tabla de multiplicar por 6, 7, 8, y 9 en la lección respectiva y se pide completar la secuencia esto es, 6, 12,18, etc. Para cada caso.

La Sesión de tareas propone dos situaciones problemas de aplicación de la tabla estudiada.

Conviene resaltar que en la lección correspondiente a la tabla del 7 introducen la conmutatividad al sugerir el siguiente ejercicio:

Efectúa cada multiplicación. Colorea del mismo color las tortugas que tengan productos iguales:

3 x 7 =	7 x 9 =	7 x 5 =	9 x 7 =
7 x 1 =	5 x7 =	7 x 3 =	1 x 7=

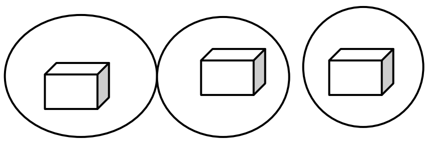
Y en las tablas del 8 y del 9 se emplea la escritura vertical de la multiplicación:

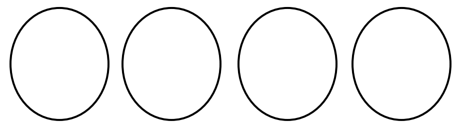
2	4	6	5	7
x 8	x 8	x 8	x 8	x 8

Multiplicación por 0 y por 1.

Estas multiplicaciones se introducen mediante las situaciones siguientes:

Contemos el número de manzanas en cada plato para hallar el total.





1 + 1 + 1 = 3

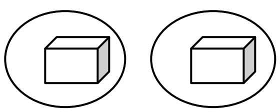
3 veces 1 es 3

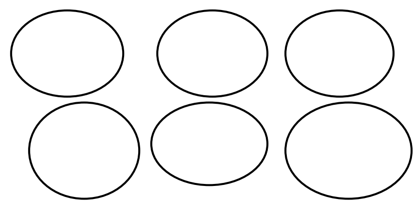
3 x 1 = 3

0 + 0 + 0 + 0

4 veces 0 es 0

4 x 0 = 0





1 + 1 = 2

2 veces 1 es 2

2 x 1 = 2

0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0

6 veces 0 es 0

6 x 0 = 0

Cuando uno de los factores es 1 el producto es el otro factor.

Cuando uno de los factores es **0** el producto es 0.

En la sesión Piensa y práctica se presentan ejercicios para seleccionar la respuesta correcta a multiplicaciones como: 5 x 1, 6 x 0, 9 x 1 y 4 x 0; también se invita a completar las tablas del 0 y 1 y, a establecer relaciones entre multiplicaciones y número de veces que se itera un número:

7 x 1	7 veces 0
7 x 0	7 veces 1

10 x 1	10 veces 1
5 x 0	5 veces 0

Propiedades de la multiplicación.

En esta lección se introducen las propiedades conmutativa, asociativa, modulativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Para el caso de la conmutatividad, se presentan dibujos con arreglos rectangulares correspondientes a las multiplicaciones:

1. 5 x 4 = 20 y 4 x 5 = 20
2. 3 x 2 = 6 y 2 x 3 = 6

Finalmente se enuncia la propiedad conmutativa así:

> El orden de los factores no altera el producto. Esta propiedad de la multiplicación se llama **conmutativa.**

Para abordar la propiedad asociativa presentan las siguientes multiplicaciones:

(5 x 3) x 2	5 x (3 x 2)
15 x 2	5 x 6
30	30

Y se presenta:

> En una multiplicación de tres o más factores, es posible agruparlos de distintas formas sin que el producto cambie.

En la sesión **Piensa y Practica**, se plantean los siguientes ejercicios:

a. $\square$ X 8 = 8 b. 6 x $\square$ = 6 c. 3 x $\square$ = 3

d. 9 x $\square$ = 9 e. $\square$ x 4 = 4 f. $\square$ x 7 = 7

Y se enuncia:

> Cuando alguno de los factores es 1, el producto es igual al factor diferente de 1. Esta propiedad de la multiplicación se llama **modulativa** o de elemento neutro.

Se plantean ejercicios de aplicación de las propiedades presentadas arriba y en la sesión de tarea se lleva al estudiante a reflexionar sobre la descomposición de uno de los factores en forma de suma para facilitar la realización de multiplicaciones sin enunciar la propiedad tratada:

4 x 8 = 4 x (6 + 2)

= (4 x 6) + (4 x 2)

$\square$ + $\square$

$\square$

9 x 11 = 9 x (10 + 1)

= (9 x 10) + (9 x 1)

$\square$ + $\square$

$\square$

Multiplicación de un número de dos cifras por una cifra.

A partir de una situación propuesta, se invita a que el estudiante realice en forma vertical la multiplicación de una cantidad de dos cifras por otro de una cifra. Se recuerda el proceso seguido cuando se multiplican cantidades de una sola cifra y se describe el proceso:

	d	u
	3	2
X		7

	d	u
	1	
	3	2
X		7
		4

c	**d**	u
	1	
	3	2
	X	7
2	2	4

En la sesión **Piensa y practica** se proponen multiplicaciones y se plantean situaciones en las que se deben realizar multiplicaciones para practicar lo que se enunció arriba. La sesión de tareas también invita a realizar multiplicaciones de dos cifras por una cifra y a organizar los resultados de menor a mayor.

3.2.5.2 Texto: Guía Matemáticas 2. (Editorial Santillana)

La guía de Matemáticas 2 está organizada en 12 unidades que trabajan en los distintos pensamientos que se proponen desde el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas y la unidad *Multiplicación* es abordada en el pensamiento numérico. Las cuatro actividades que este texto propone en cada unidad son:

- **Ejercitación** para practicar los conceptos presentados,
- **Razonamiento,** para analizar situaciones, buscar regularidades y determinar que los procedimientos realizados en los ejercicios sean correctos,
- **Comunicación**, para contar con palabras propias cómo se entiende la matemática,
- **Problemas**, para conocer, analizar y aplicar diferentes estrategias en la solución de situaciones problemáticas.

El texto también propone trabajo en grupo, proyectos de evaluación por competencias, que son pruebas en las que se aplican los conceptos aprendidos en contextos diferentes, valores y conexiones curriculares esto es, lecturas y ejercicios que relacionan las matemáticas con las ciencias naturales, las ciencias sociales y otras áreas.

Temas.

1. Multiplicación. Adición de sumandos iguales.
2. Multiplicación por 2.
3. Multiplicación por 4.
4. Multiplicación por 5.
5. Multiplicación por 10.
6. Multiplicación por 3.
7. Multiplicación por 6.
8. Multiplicación por 9.
9. Multiplicación por 7.
10. Multiplicación por una cifra sin reagrupar.
11. Problemas de multiplicación.
12. Evalúo mi proceso.

Desarrollo de la Unidad.

Multiplicación, adición de sumandos iguales.

Se presenta la multiplicación enunciando:

La multiplicación es una operación que abrevia la ***adición de sumandos iguales.***

Ejemplo:

3 + 3 + 3 + 3 = 12 **4 x 3 = 12**

4 **veces** 3 Se lee **4 por 3 igual a 12**

A continuación se proponen ejercicios en los que hay que completar, a partir de dibujos o situaciones problemas; en ellas, el valor que se itera varía desde 2 hasta 100.

Hay ____ grupos de (objetos de cada situación).

En cada grupo hay _________ (objetos)

En total hay ____ + _____ + _____ + ______ = _______ (objetos)

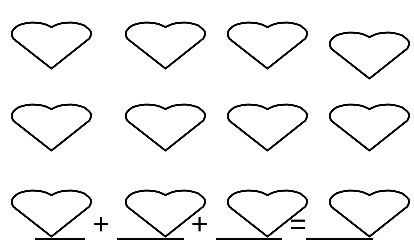
Hay _____ veces ______ (objetos)

Para expresar sumas iteradas como multiplicaciones se presentan sumas iteradas y se espera que el estudiante complete los diferentes ejercicios como el que se muestra a continuación:

6 + 6 + 6 = _____ veces _____ = ______ x ______

Finalmente, se presentan situaciones en las que se definen tanto la cantidad de grupos como la cantidad de objetos por grupo y se especifica el arreglo a realizar

3 grupos de 4



____ Veces ____ = ___

En cada hoja dibuja filas de x. Luego contesta.

	Hoja 1	**Hoja 2**
5 filas de 4. 3 filas de 8		

- ¿Cuántas x hay en total en la hoja 1? ___
- ¿Cuántas x hay en total en la hoja 2? ___
- Si en lugar de 5 filas de 4, hago 4 filas de 5, ¿hay algún cambio en el total de x?

Parece ser que en este último ejercicio propuesto se pretende introducir la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Multiplicación por 2.

Se relaciona la multiplicación por 2 con hallar el doble de un número.

El doble de ____ *es* ____

Se propone un ejercicio de razonamiento en los que se pide completar la tabla:

Número											
El doble											

Y se pide completar la serie de 2 en 2; finalmente invita a identificar *en qué terminan los números de la serie desde el 10".*

Es importante resaltar aquí que en la presentación de la tabla del 2 no se hace explícita la relación entre la presentación inicial, (m veces n) sino que se afirma que "*las multiplicaciones del 2 por cada uno de los primeros números se conoce como la tabla del 2".* Y luego la presenta así:

0 x 2 = 0 + 0 = 0

1 x 2 = 1 + 1 = 2

2 x 2 = 2 + 2 = 4

3 x 2 = ___ +___ = _____

4 x 2 = ___ +___ =_____

5 x 2 = ___ +___ =_____

6 x 2 = ___ +___ = _____

7 x 2 = ___ +___ = _____

8 x 2 = ___ +___ =_____

9 x 2 = ___ +___ =_____

10 x 2 = ___ +___ = _____

Obsérvese que no se tomaría aquí a 3 x 2 como 3 veces 2 sino que se sumaría el 3 dos veces.

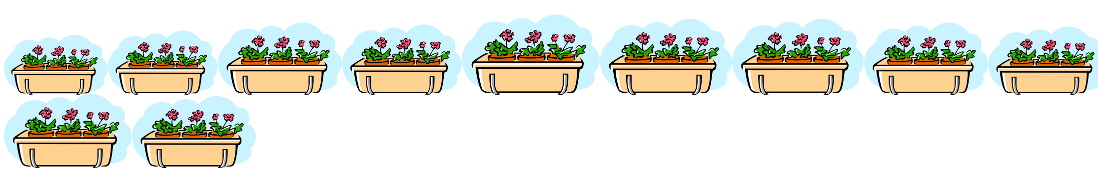
Finalmente, se presentan problemas y se explica otra técnica para escribir la tabla del 2, esto es usando la escritura vertical.

Multiplicación por 4.

La tabla del 4 se presenta a partir de la serie del 4 y se establece relación entre las tablas del 2 y del 4 a partir de una situación propuesta.

Llama la atención, la siguiente actividad:

Cuenta las flores de cada matera. Luego, completa la tabla.



X4

Materas	Flores

1	4
2	8
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Usa los resultados anteriores para construir la tabla del 4.

TABLA DEL 4

0 X 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0

1 X 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = ____

2 X 4 = _____________ = ____

3 X 4 = _____________ = ____

4 X 4 = _____________ = ____

5 X 4 = _____________ = ____

6 X 4 = _____________ = ____

7 X 4 = _____________ = ____

8 X 4 = _____________ = ____

9 X 4 = _____________ = ____

10 X 4 = ___________ = ___

Para completar la tabla que relaciona materas y flores, se partió de 10 grupos de 4 flores cada uno, esto es, se itera el 4; pero al pasar a construir la tabla del cuatro a partir de la tabla ya mencionada, se iteran los números 0, 1, 2, 3, etc. Lo cual muestra incoherencia.

Aprovechando la presentación de la multiplicación por 2 y por 4 se invita a "multiplicar por 8" y para ello se plantea el siguiente ejercicio:

Completa cada esquema:

- 8 + 8 = 16 2 x 8
- 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 +8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x
- 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = ____ x

Y se enuncia. "Esta es la tabla de multiplicar del 8".

También en este caso se evidencia incoherencia pues el proceso seguido para presentar las tablas del y del 4 sugerirían que la tabla del ocho se formulara de la siguiente manera:

0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 X 8

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 X 8

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 X 8

Y así sucesivamente.

Multiplicación por 5.

La introducción de la tabla del cinco se hace partiendo de una situación en la que se itera el cinco y luego se invita a escribir los resultados en una tabla.

x 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Luego, se hace caer en cuenta de que los números que resultan de multiplicar por cinco terminan en 0 o en 5.

Se plantea a continuación el ejercicio:

Calcula cuántas hojas hay en cada caso.

- En 5 sobres que tienen 2 hojas cada uno.
  Hay ______ hojas.
- En 5 carpetas que tiene 7 hojas cada una.
  Hay ____ hojas.
- En 9 libretas que tienen 5 hojas cada una.
  Hay ____ hojas.
- En 6 folletos que tienen 5 hojas cada uno.
  Hay ____ hojas.

En el caso anterior se utiliza indistintamente el cinco como cantidad que se itera y como número de veces que se itera la misma cantidad.

Multiplicación por 10.

La multiplicación por 10 se introduce a partir de gráficos de decenas; esto es, se itera el 10 varias veces y se construye la tabla.

Se llama la atención sobre la característica de los resultados de multiplicar por 10, y hace caer en cuenta que multiplicar por 10 es lo mismo que multiplicar por 2 y luego por 5 y que todos los números que han sido multiplicados por 10 terminan en 0. (Enseñanza de técnicas).

Multiplicación por 3.

Se introduce a partir de la conformación de “tres grupos” con x cantidades de elementos que también se pueden presentar mediante arreglos de la forma “x grupos de 3”. Como en los casos anteriores se construye la tabla de multiplicar y se proponen ejercicios en los que se escriben la multiplicaciones en forma vertical.

Luego se enuncia la multiplicación por 6, tomando como base una situación en la que se itera el número 6. De igual manera, se proponen ejercicios para resolver la tabla usando escritura en forma vertical y se proponen al mismo tiempo ejercicios sobre conmutatividad.

Multiplicación por 9.

La multiplicación por 9 surge de la tabla de la multiplicación por 10, tomando el siguiente ejercicio:

Completa la tabla de multiplicar por 10, luego, resta 1 a cada resultado para obtener la tabla de multiplicar del 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X 10	10	20	30							
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
X 9	9	18								

Mediante un ejercicio se lleva a que los estudiantes puedan evidenciar que la suma de las cifras de los números que resultan de 9 es 9.

Multiplicación por 7.

La multiplicación por 7 se presenta iterando el 7, se ejercita la multiplicación en forma vertical y se presenta la serie del 7. Para finalizar se proponen problemas de aplicación.

Términos de la multiplicación

Esta lección presenta información sobre el nombre que reciben los términos de una multiplicación e invita a realizar varias multiplicaciones identificándolos. También permite a los estudiantes practicar la escritura en forma vertical al realizar multiplicaciones e introduce una sesión de ejercicios sobre conmutatividad de esta operación.

Multiplicación por una cifra sin reagrupar.

Se presentan multiplicaciones de números de dos y tres cifras por números de una sola cifra y, una vez escritos en forma vertical se describe el proceso a seguir. Se presentan ejercicios para aplicar dicho proceso.

Problemas de multiplicación.

Esta es la última lección propuesta para la multiplicación, y en ella se proponen 5 problemas de aplicación que involucran cantidades de máximo 3 cifras.

3.2.6 Entrevista a Docente

La entrevista a la docente tiene un doble propósito; por un lado, se busca claridad frente a la manera como orientó sus acciones al trabajar con los estudiantes a fin de poder establecer si algunas inferencias que se hicieron en el análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de cada episodio fueron válidos, y al mismo tiempo "explorar" el manejo que tiene la profesora de algunos elementos que fueron revelados en las observaciones; para ello se plantean las preguntas atendiendo a las dimensiones de análisis ya mencionadas.

De otro lado, el indagar sobre algunos aspectos personales de la docente que pueden aportar elementos que aclaren el análisis de la interactividad establecida entre Ella y sus estudiantes.

A continuación se presentan las preguntas propuestas para las diferentes categorías:

Dimensión personal

1. ¿Cuáles han sido los estudios que Usted ha realizado?
2. ¿Cómo era como estudiante de las matemáticas?
3. ¿Cuáles fueron sus mejores profesores, por qué?
4. ¿Cómo llegó a ser profesora?
5. Comente sobre sus primeras experiencias como profesora
6. ¿Qué son las matemáticas para Usted?, ¿cómo las percibe?
7. ¿Cómo enseña las matemáticas?
8. ¿Cuál es el papel de un texto de estudio en el proceso de enseñanza de las matemáticas?
9. ¿Cómo percibe a sus estudiantes?
10. ¿Cómo cree que aprenden sus estudiantes?
11. ¿Qué piensa de la educación primaria?
12. ¿Qué piensa de la Institución Educativa Gabriel García Márquez?
13. ¿Qué piensa de su PEI?

14. ¿Qué piensa del plan de estudios para el área de matemáticas?
15. ¿Qué piensa del programa de matemáticas para 2° grado de educación básica primaria?
16. ¿Qué cosas, si estuviera en sus manos, cambiaría para que sus estudiantes se interesen por lo que usted enseña y aprendan cosas que les sea útiles en su vida?

Dimensión epistemológica: la obra matemática[11]

1 ¿Qué es para Usted la multiplicación?
2 ¿Qué símbolos se utilizan para representarla?
3 ¿Cuáles son las propiedades de la multiplicación y qué significa para Usted cada una de ellas?
4 ¿Cómo se resuelve una multiplicación?
5 Resuelva las siguientes multiplicaciones describiendo cada paso seguido:
   a. 342 x 2 = b. 364 x 5 = c. 143 x 26 =
6 ¿Cómo representa en forma de producto la siguiente expresión?

$$a + a + a + a + . . . + a$$

(b veces).

7. ¿Qué significa para Usted la tabla del ocho?
8. ¿Qué significa tres por ocho?
9. ¿Cómo se nota, matemáticamente, lo que tú me respondiste?
10. Qué relación existe entre la frase *" MULTIPLICAR POR TRES UN NÙMERO ES HACER TRES VECES MÀS GRANDE EL NÙMERO" "*[12] y una suma iterada

[11] Responde a cuestiones o problemas planteados por necesidades humanas. Comprende cuatro clases de elementos: tipos de tareas, técnicas matemáticas, elementos tecnológicos y elementos teóricos los cuales deben estar fuertemente interrelacionados.

[12] Esto es la proposición que se deduce de la aplicación del esquema multiplicativo. Debería ser un resultado que infieren los niños y lo validan en acto.

11. Señale cuáles son las posibles formas de resolver la situación que se propone adelante y explique la diferencia entre estas formas:

    "En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?"

12. Qué relación existe entre los procesos de composición y descomposición de un numeral en sumandos iguales y el concepto de multiplicación?

Dimensión didáctica: La obra didáctica[13]

1. ¿Qué elementos considera prioritarios en el aprendizaje de la multiplicación?
2. ¿Cómo presenta la multiplicación, por primera vez, a sus estudiantes?
3. ¿Para qué se representa la multiplicación con el símbolo *mxn*?
4. ¿Qué papel juegan las tablas de multiplicar?
5. ¿Cómo le enseña al niño las multiplicaciones de dos o tres cifras?
6. ¿Qué propiedades de la multiplicación enseña? ¿Cómo las enseña? ¿Tienen relación con la suma?
7. ¿Qué le aporta el PEI a su enseñanza de la multiplicación?
8. ¿Qué tiene en cuenta al escoger un texto guía para el trabajo de matemáticas con sus estudiantes?
9. ¿Cuál considera Usted que debe ser la secuencia para enseñar la multiplicación en los grados iniciales? ¿En qué momento incluir las propiedades, los algoritmos, las tablas? ¿Por qué?

Dimensión cognitiva[14]**:**

---

[13] Responde a la cuestión de "¿*cómo estudiar una obra matemática*?". En consecuencia también se denomina el proceso de estudio de la obra matemática y depende completamente de la manera como la obra matemática es concebida. Se estudia en función de los *momentos de estudio* definidos por Chevallard.

13. ¿Qué le indicaría a usted que un niño aprendió el concepto de la multiplicación?
14. ¿Cómo se relaciona el niño con las multiplicaciones de dos o tres cifras?
15. En una clase se presenta una situación en la que usted pregunta: En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja; ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas? y los estudiantes le responden dando el número de zapatos por caja ¿Cree usted que podría apoyarse en una respuesta errónea para ayudar a comprender el concepto a los niños, ¿cómo?

Respecto a la clase: Introduciendo la multiplicación

1. ¿Cuál es el propósito de la clase correspondiente al episodio 1?
2. ¿Se escogieron al azar los ejercicios propuestos a los estudiantes en la clase del episodio 1?
3. Cómo expresaría la suma 4 + 4 + 4 + 4+ 4 + 4 + 4 haciendo uso de la multiplicación? ¿Por qué?
4. Cuando, en el episodio 1 pide a sus estudiantes expresar la suma 4 + 4 + 4 + 4 usando el producto ¿lo hace a propósito? ¿Cómo saber cuál cuatro considera el que se repite y cuál las veces que se repite?
5. ¿Por qué se plantearon los ejercicios del episodio 1?
6. ¿La decisión de pedir a los estudiantes realizar los ejercicios por filas en el episodio 1 obedece a algún criterio?
7. ¿Qué hace cuando un estudiante al tratar de expresar una suma iterada como un producto presenta la siguiente respuesta?:

$$3+ 3+ 3+ 3 = 15$$

---

[14] Se refiere a los *esquemas* y su *dinámica* como observables en función de los *ciclos de interacción cognitivos*: el conjunto de ´procesos cognitivos que desembocan en un resultado de la acción de un sujeto que interactúa con una situación. Estos resultados dependen de los instrumentos de lectura, los esquemas, y de sus operaciones que se manifiestan en las coordinaciones tanto de las acciones, como las coordinaciones de los objetos. Su funcionamiento se regula por la *equilibración incrementante* (Piaget, 1975) que permite explicar la construcción de nuevo conocimiento –perturbación-regulación-compensación–

$$4 \times 3 = 15$$

10. Referente al episodio 2. La profesora introduce la actividad componiendo y descomponiendo aditivamente numerales:

    «El número 16 y lo compone a partir de la suma de dos sumandos iguales:

    $$8 + 8 = 16$$

    Luego continua descomponiendo el número 24 como una suma de tres sumandos iguales

    $$24 = 8 + 8 + 8$$»

    ¿Cuál es el objetivo de esta actividad? ¿Por qué componer y descomponer?

11. Por qué se sugirió a los padres, como texto guía el texto de Editorial Santillana y la secuencia presentada en clase corresponde al texto de Triareas de Editorial Norma?

12. Qué momentos privilegia Usted en su clase y en qué proporción? ¿por qué? Motivación hacia el aprendizaje del concepto, construcción de conceptos y procesos, ejercicios de aplicación, evaluación de lo que sus estudiantes aprendieron, etc.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

PRESENTACIÓN

En este capítulo se hace un análisis de la información recogida en las observaciones de aula. Se presentan aquí los análisis objetivos de cada uno de los episodios y un análisis general que recoge la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica que permite tener una mirada integral del proceso de estudio en referencia; se incluye también el análisis de la entrevista realizada a la docente.

4.1 Análisis Objetivo Episodio 1

Consigna: *Escribe en forma de multiplicación sumas de sumandos iguales y encuentra el producto.*

Para el presente episodio se consideraron dos situaciones, una en la que el número que se itera es igual a la cantidad de veces que esto se hace y otra, (situación 2) en la que el número que se itera es diferente a la cantidad de veces que se suma.

Se consideró en la situación 1 el caso de 4 + 4 + 4 + 4 y para la situación 2: 6 + 6 + 6. Para el análisis de ambas situaciones se presentan dos partes; la parte I en la que se resuelve la suma indicada y la parte II en que se establece la relación entre la suma indicada y el producto.

Situación 1

Ciclo de Interacción Cognitivo Parte I

Proceso Cognitivo 1:

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO
Sumar cuatro más cuatro, más cuatro más cuatro.	Señala cada sumando y va efectuando la suma hasta terminar.	*Realizar la suma de* *4 +4 +4 +4 =*
		"Cuatro más cuatro es ocho, más cuatro es doce más cuatro es dieciséis". *4 +4 +4 +4 =16*

Esquemas y Elementos Asimilados

T: Totalizar una Suma

S_1:*4 +4 +4 +4 =*

S: suma iterada sobre resultados conocidos.

S_2: *4 +4 +4 +4*

SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) ("*cuatro, ocho, doce, dieciséis*")

S_3: 4: cuatro; (4+4): ocho; (8+4): doce; (12+4): diciséis

$\mathbf{T_R}$: Totalización de la suma

$\mathbf{S_4}$**:** *4 +4 +4 +4*

$\mathbf{T_{F:}}$ *4 +4 +4 +4 = 16*

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	PROCESO COGNITIVO
T: Totalizar una suma	$\mathbf{T \times S_1 \longrightarrow S}$
S_1: *4 +4 +4 +4 =*	
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	$\mathbf{S \times S_2 \longrightarrow SI}$
S_2: 4 +4 +4 +4 =	
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*cuatro, ocho, doce, dieciséis*”)	
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*cuatro, ocho, doce, dieciséis*”)	$\mathbf{SI \times S_3 \longrightarrow T_R}$
S_3: 4: cuatro; (4+4): ocho; (8+4): doce; (12+4): diciséis	
T_R: Totalización de la suma	
T_R: Totalización de la suma	$\mathbf{T_R \times S_4 \longrightarrow T_F}$
S_4: 4 +4 +4 +4 =	
T_F: *4 +4 +4 +4 = 16*	

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

$$\mathbf{T \times S_1 \longrightarrow S;\ S \times S_2 \longrightarrow SI;\ SI \times S_3 \longrightarrow T_R;\ T_R \times S_4 \longrightarrow T_F}$$

Conceptos y Teoremas en Acto

Conceptos:

- Número entero positivo, se incluye el cero ($N \cup \{0\}$)
- Suma de números enteros positivos

Teoremas en acto:

- Algoritmo para resolver una suma iterada $f(a)= a$, $f(a+a)= f(a)+a=a+a=2a$, $f(a+a+a)= f(2a) + a=2a+a= 3a$, …, $f(a+a+a...+a)= f(n-1)+a$, $n \in N$
- ***f(n.1) = n f(1)***
- La asociatividad deja invariante el total.

***Sistemas de representación*:**

- **N**umerales induarábigos.
- Escritura simbólica de una "suma indicada" y relacionada con el símbolo igual para representar el resultado de las operaciones.
- Palabras número, «cuatro», «ocho», «doce», «dieciséis».

Esquema de suma:

$$N \cup \{0\}) \times N \cup \{0\}) \longrightarrow N \cup \{0\})$$

$$(a, b) \longrightarrow a + b = c$$

Situación 1

Ciclo de Interacción Cognitivo Parte II

Proceso Cognitivo 2:

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO
Identificar 1. Qué cantidad se está sumando reiteradamente y 2. Cuántas veces se suma la cantidad identificada en 1.	Observa la suma y cuenta los sumandos. El cuatro es el número que se suma reiteradamente, ese número debe ser el primer factor, y como el número cuatro se repite cuatro veces, se escribe el cuatro como segundo factor.	*4 +4 +4 +4 =*
Aplicar la transitividad	Observa la suma iterada y su resultado (parte I), así como su representación como una multiplicación y establece mediante transitividad que cuatro por cuatro es igual a dieciséis.	*4x4=*
		4 x 4 = 16

Esquemas y Elementos Asimilados

A: Expresar una suma iterada como un producto

S_1:*4 +4 +4 +4 =*

B: Identificar la cantidad que se suma

S_2: *4 +4 +4 +4*

B_R: la cantidad que se suma es 4

C: Identificar la cantidad de veces que se repite

S_2: *4 +4 +4 +4*

C_R: la cantidad de veces que se repite es 4

RM: representación del número *m* que se repite *n* veces

S_5: **B_R** y **C_R**

RM_R: ___4__ x __4___

PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)

S_6: **T_F**y **RM_R**:

A_R: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 = 4 x 4

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	PROCESO COGNITIVO
A: Expresar una suma iterada como un producto	$A \times S_1 \longrightarrow B$
S_1:*4 +4 +4 +4 =*	
B: Identificar la cantidad que se suma	
B: Identificar la cantidad que se suma	$B \times S_2 \longrightarrow B_R$
S_2: *4 +4 +4 +4*	
B_R: la cantidad que se suma es 4	
C: Identificar la cantidad de veces que se repite	$C \times S_2 \longrightarrow C_R$
S_2: *4 +4 +4 +4*	
C_R:la cantidad de veces que se repite es 4	
RM: representación del número *m* que se repite *n* veces	$RM \times S_5 \longrightarrow RM_R$
S_5: **B_R** y **C_R**	

<table>
<tr><td>RM$\mathbf{RM_R}$: ___4___ x ___4___</td><td></td></tr>
<tr><td>PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)</td><td rowspan="3">PTx $S_6 \longrightarrow$ $\mathbf{A_F}$</td></tr>
<tr><td>S_6: $\mathbf{T_F}$y $\mathbf{RM_R}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{A_F}$: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 = 4 x 4</td></tr>
</table>

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

A x $S_1 \longrightarrow$ B; B x $S_2 \longrightarrow$ $\mathbf{B_{R;}}$ **C x** $S_2 \longrightarrow$ $\mathbf{C_{R;}}$ **RM x** $S_5 \longrightarrow$ $\mathbf{RM_{R;}}$ **PTx** $S_6$$\mathbf{A_F}$

Conceptos y Teoremas en Acto

Conceptos:

- Suma de números enteros positivos
- Relación entre suma iterada y multiplicación

Teoremas en acto:

- Propiedad Transitiva
- *f(n.1) = n f(1)*

Sistemas de representación:

- **N**umerales induarábigos.
- Escritura simbólica de una “suma indicada” y relacionada una multiplicación.
- Palabras número.

Análisis Objetivo Episodio 1

Consigna: *Escribe en forma de multiplicación sumas de sumandos iguales y encuentra el producto.*

Situación 2

Ciclo de Interacción Cognitivo Parte I

Proceso Cognitivo 3

OBSERVABLES SUJETO →	COORDINACIONES SUJETO ↔	OBSERVABLES OBJETO
Sumar seis más seis, más seis.	Señala cada sumando y va efectuando la suma hasta terminar.	*Realizar la suma de* *6 + 6 + 6 =*
		"Seis más seis es doce, más seis es dieciocho". *6 + 6 + 6 = 18*

Esquemas y Elementos Asimilados

T: Totalizar una Suma

S_1: *6 + 6 + 6 =*

S: suma iterada sobre resultados conocidos.

S_2: *6 + 6 + 6*

SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) ("seis, *doce, dieciocho*")

S_3: 6: seis; (6 + 6): doce; (12+6): dieciocho

T_R: Totalización de la suma

S_4: *6 + 6 + 6*

$T_{F:}$ *6 + 6 + 6 = 18*

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	**PROCESO COGNITIVO**
T: Totalizar una suma	
S_1 *6 + 6 + 6 =*	**$T \times S_1 \longrightarrow S$**
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S_2: *6 + 6 + 6 =*	**$S \times S_2 \longrightarrow SI$**
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“ *seis, doce, dieciocho*”)	
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“ *seis, doce, dieciocho*”)	
S_3: 6: seis; (6 + 6): doce; (12+6): dieciocho	**$SI \times S_3 \longrightarrow T_R$**
T_R: Totalización de la suma	
T_R: Totalización de la suma	
S_4: 6 +6 +6 =	**$T_R \times S_4 \longrightarrow T_F$**
$T_{F:}$ *6 +6 +6 = 18*	

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

$$T \times S_1 \longrightarrow S;\ S \times S_2 \longrightarrow SI;\ SI \times S_3 \longrightarrow T_R;\ T_R \times S_4 \longrightarrow T_F$$

Conceptos y Teoremas en Acto

Conceptos:

- Número entero positivo, se incluye el cero ($N \cup \{0\}$)
- Suma de números enteros positivos

Teoremas en acto:

- Algoritmo para resolver una suma iterada f(a)= a, f(a+a)= f(a)+a=a+a=2a, f(a+a+a)= f(2a) + a=2a+a= 3a, …, $f(a+a+a...+a)= f(n-1)+a,\ n \in N$
- ***f(n.1) = n f(1)***
- La asociatividad deja invariante el total.

***Sistemas de representación*:**

- **N**umerales induarábigos.
- Escritura simbólica de una "suma indicada" y relacionada con el símbolo igual para representar el resultado de las operaciones.
- Palabras número, «seis», «doce», «dieciocho».

Esquema de suma:

$N \cup \{0\}) \times N \cup \{0\}) \longrightarrow N \cup \{0\})$

$(a, b) \longrightarrow a + b = c$

Situación 2

Ciclo de Interacción Cognitivo Parte II

Proceso Cognitivo 4:

OBSERVABLES SUJETO →	COORDINACIONES SUJETO ⟷	OBSERVABLES OBJETO
Identificar 1. Qué cantidad se está sumando reiteradamente y 2. Cuántas veces se suma la cantidad identificada en 1.	Observa la suma y cuenta los sumandos. El seis es el número que se suma reiteradamente, ese número debe ser el primer factor, y como el número seis se repite tres veces, se escribe el tres como segundo factor.	*6 +6 + 6 =*
Aplicar la transitividad	Observa la suma iterada y su resultado (parte I), así como su representación como una multiplicación y establece mediante transitividad que seis por tres es igual a dieciocho.	*6x3=*
		6 x 3 = 18

Esquemas y Elementos Asimilados

A: Expresar una suma iterada como un producto

S_1:*6 + 6 + 6 =*

B: Identificar la cantidad que se suma

S_2: *6 + 6 + 6*

B_R: la cantidad que se suma es 6

C: Identificar la cantidad de veces que se repite

S_2: *6 + 6 + 6*

C_R: la cantidad de veces que se repite es 3

RM: representación del número *m* que se repite *n* veces

S_5: **B_R** y **C_R**

RM_R: ____6___ x ___3____

PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)

S_6: **T_F**y **RM_R**:

A_R: 6 + 6 + 6 = 18 = 6 x 3

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	PROCESO COGNITIVO
A: Expresar una suma iterada como un producto	$A \times S_1 \longrightarrow B$
S_1:*6 + 6 + 6 =*	
B: Identificar la cantidad que se suma	
B: Identificar la cantidad que se suma	$B \times S_2 \longrightarrow$ **B_R**
S_2: *6 + 6 + 6*	
B_R: la cantidad que se suma es 6	
C: Identificar la cantidad de veces que se repite	
S_2: *6 + 6 + 6*	
C_R:la cantidad de veces que se repite es 3	**$C \times S_2 \longrightarrow C_R$**
RM: representación del número *m* que se repite *n* veces	
S_5: **B_R** y **C_R**	**RM x** $S_5 \longrightarrow$ **RM_R**
RM_R: ____6___ x ___3____	
PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)	
S_6: **T_F**y **RM_R**:	**PTx** $S_6 \longrightarrow$ **A_F**
A_F: 6 + 6 + 6 = 18 = 6 x 3	

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

A x S_1 $\longrightarrow$ B; B x S_2 $\longrightarrow$ **$B_{R;}$ C x S_2** $\longrightarrow$ **$C_{R;}$ RM x** S_5 $\longrightarrow$ **$RM_{R;}$ PTx** S_6A_F

Conceptos y Teoremas en Acto

Conceptos:

- Suma de números enteros positivos
- Relación entre suma iterada y multiplicación

Teoremas en acto:

- Propiedad Transitiva
- *f(n.1) = n f(1)*

***Sistemas de representación*:**

- **N**umerales induarábigos.
- Escritura simbólica de una "suma indicada" y relacionada una multiplicación.
- Palabras número.

4.2 ANÁLISIS EPISODIO 1

4.2.1 Dimensión Epistemológica: La Obra Matemática

En el presente episodio no se hizo explícita la consigna[15], simplemente se pide a los niños que pasen al tablero y resuelvan el ejercicio que se propone. Podría pensarse que

---

[15]En la clase anterior se trabajó la situación de convertir sumas iteradas en productos. Ahora, la profesora escribió la suma de a "a veces" con un igual o a "b veces" con un igual. Los alumnos parece que entienden que deben transformar las sumas en productos.

la profesora planeó proponer dos tipos de tareas: una, en la que la cantidad que se suma es igual al número de veces que se itera, es decir, propone ejercicios de la forma a +a + a + a…+a + a (a veces). Y otras, en las que la cantidad que se itera es diferente al número de veces que se suma reiteradamente

a + a + a´+ a…+a + a (b veces). De la primera clase de ejercicios, la profesora propuso 3 ejercicios (y repite uno de ellos). Del segundo tipo de tareas, la profesora propuso 9 ejercicios.

Desde el comienzo de la investigación, se identificó que la docente presentó a sus estudiantes que la suma iterada, podría representarse como un producto así:

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}} = a \times b$$

Y, aunque en algunos textos para docentes se expresa esta suma como

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}} = b \times a$$

Fue necesario adoptar uno de los dos esquemas a fin de poder establecer un parámetro para realizar los análisis respectivos, de modo que se asumió como válido el esquema propuesto por la profesora.

Las situaciones propuestas requieren, para que la acción sea exitosa, que los alumnos activen y coordinen los siguientes esquemas~~.~~

1. Activen el esquema de suma y puedan aplicar el algoritmo para resolver una suma iterada: f(a)= a, f(a+a)= f(a)+a=a+a=2a, f(a+a+a)= f(2a) + a=2a+a= 3a, …, f(a+a+a...+a)= *f(n-1)+a*, $n \in N$
2. Esquema multiplicativo que transforma una suma iterada en un producto.

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}} = a \times b$$

3. Transitividad que relaciona el resultado de la suma y el producto indicado: Si a=b y b=d entonces a= d.

4.2.2 Dimensión cognitiva

Ocho de los doce estudiantes pudieron resolver adecuadamente la suma, reflejando con ello la activación adecuada del esquema para aplicar el algoritmo para resolver una suma itereda y cuatro de ellos presentaron resultados no esperados, posiblemente porque responden a imitación (conocimiento figurativo) de las actuaciones de algunos compañeros.

La mayoría de los estudiantes (8 de 12) mostrando un adecuado manejo del esquema multiplicativo, mientras que las respuestas de tres de ellos reflejan la falta de coordinación entre el esquema que selecciona el factor y el esquema identificador del número de veces que se repite este. Podría suceder que en estos últimos casos, el razonamiento de los estudiantes se desviara por una centración inadecuada en el resultado producido por un esquema que interviene en el proceso. Finalmente, en una de las estudiantes no se activó el esquema multiplicativo y simplemente realizó la suma iterada y escribió su resultado.

Diez de los doce estudiantes aplicaron correctamente la propiedad transitiva al establecer la relación entre el resultado de la suma y el producto.

4.2.3 Dimensión Didáctica: Respecto a la Obra Didáctica

Conviene resaltar que las actividades sugeridas por la profesora en el presente episodio constituyen en general un momento de evaluación, y para ello combina momentos de aplicación de la técnica por parte de sus estudiantes a fin de representar una suma iterada como un producto. Se aprovecha además la revisión que la docente hace del trabajo de sus estudiantes para institucionalizar algunos conceptos.

Respecto a la relación que se establece entre los conceptos de suma y multiplicación, conviene mostrar que la profesora ha presentado a sus estudiantes en clases anteriores una técnica que permite definir el orden de los factores de un producto atendiendo a los siguientes criterios:

- El primer factor indica el número que se repite o se suma iteradamente

- El segundo factor indica el número de veces que se itera el primer factor.

Pero, al revisar las respuestas de algunos de sus estudiantes no muestra coherencia en la técnica definida por Ella, tal es el caso del ejercicio resuelto por Yurani, que presenta

3 + 3 + 3 + 3 = 15

4 x 3 = 15

Cuando la profesora argumenta ”Aquí hizo bien 4 veces se repite el 3 pero el resultado está malo”. Lo anterior evidencia que la profesora conoce y aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación, pero en ningún momento, en su presentación a los estudiantes ha tratado este tema.

Se presentan además dificultades en el momento de la evaluación, pues al revisar las diferentes respuestas de sus estudiantes, la profesora no aprovecha los *errores* de los alumnos para “indagar” acerca de los esquemas que éstos han activado, por ejemplo, se podría saber, por qué Danna al resolver 6 + 6 + 6 escribe:

6 + 6 + 6 = 18

6 x 12 = 18

O en el caso de Edinson

3 + 3 + 3 = 12, “averiguar” como obtuvo el resultado 12 y en el caso de Kevin, 7 + 7 = 12 preguntar por qué 12.

En los casos anteriores, la profesora no toma en cuenta las acciones erróneas de los alumnos para producir devoluciones de problema que perturben el conocimiento que origina el error y ayudar a una posible toma de conciencia que dé lugar a una mejor adaptación del esquema. Es decir, se priva de la oportunidad de construir una Zona de Desarrollo Próximo con base a la interactividad en torno a la situación.

El momento de evaluación podría constituirse en una oportunidad para institucionalizar algunos conceptos y procesos, pero no siempre se aprovechan estos espacios, a menudo la profesora incurre en el *efecto Topazze*:

Fila 1: 4 + 4 + 4 + 4 = 16

4 x 4 = 16

P: ¿Está buena la suma?

Niños en coro:“Sii”

P: ¿Qué número se suma?

Niños en coro: “cuatro”

P: O sea que cuatro por cuatro es dieciséis……Punto para esta fila.

Refiriéndose a la FILA 2:

6 + 6 + 6 = 18

6 x 12 =18

P: Seis mas seis más seis es igual a dieciocho, pero está buena la multiplicación?

Niños: si, no.

P: hasta aquí está bien; coloco el seis que es el que se está sumando pero no aparece cuántas veces….. No hay punto.

Ahora la profesora se detiene en la FILA 3:

3 + 3 + 3 = 12

3 x 3 = 12

P: ¿Está buena la suma?

Niños: Noo!

P: Se repite el tres y lo estoy sumando tres veces, esto da 9…..Cero puntos.

La revisión de los otros dos grupos de estudiantes no es tan exhaustiva y la profesora se centra en los resultados más que en los procesos seguidos por los estudiantes:

FILA 1	FILA 2	FILA 3	FILA 4
(Cristian)	(Joselín)	(Teresa)	(Kevin)
5 + 5 + 5 =15	**4 + 4 + 4 + 4 = 15**	**8 + 8 + 8 = 24**	**7 + 7 = 12**
5 x 3= 15	**4 x 4 = 15**	**8 x 3 = 24**	**7 x 3**

FILA1: La suma está bien, y la multiplicación también. Hay punto.

FILA 2: La suma no está bien y la multiplicación tampoco. No hay punto.

FILA 3: La suma y la multiplicación están buenas, hay punto.

FILA 4: La suma quedó mala y no terminó la multiplicación. No hay punto.

Frente a la secuencia didáctica, una vez terminada la actividad en plenaria, la profesora propone una actividad para realizar en clase y que copia de uno de los textos guías que ella usa:

Completa la tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4											

4. **Completa con la suma. Observa el ejemplo**

0 x 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0

1 x 4 =

2 x 4 =

3 x 4 =

4 x 4 =

5 x 4 =

6 x 4 =

7 x 4 =

8 x 4 =

9 x 4 =

10 x 4 =

5. **Une con una línea la suma, la multiplicación y su producto:**

3 + 3 + 3 + 3	**3 X 8**	**12**
8 + 8 + 8	**4 X 2**	**20**
5 + 5 + 5 + 5	**4 X 10**	**24**

10 + 10 + 10 + 10	**5 X 4**	**40**
2 + 2 + 2 + 2	**4 X 3**	**8**

En el ejercicio 3, se invierte en algunos casos la convención respecto a la representación de suma iterada como producto (en el concurso fue sumando por número de veces) y esto puede introducir confusión en los estudiantes.

4.3 Análisis Objetivo Episodio 2

Consigna: *Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas, escribirlo en forma de suma y representarlo como una multiplicación.,*

Nota: La consigna está implícita en la comunicación de la profesora en el momento del primer encuentro, ver ciclo de interacción cognitivo episodio 2.

A continuación se presentan dos ciclos de interacción cognitivo; cada uno de ellos atiende a una estrategia de base[16] seguida para resolver la situación

Estrategia I. Fijar el número de elementos por grupo y variar la cantidad de grupos. Se presentan dos posibles respuestas: Que una vez terminado el arreglo que se intente realizar no sobren semillas, lo que lleva a dar por terminado el ejercicio, o que el arreglo realizado lleve a que sobren semillas, es decir que no se tuvo éxito en la estrategia y que debe intentarse con un número diferente de elementos por grupo.

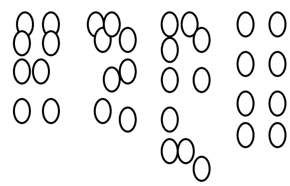
Estrategia II: Fijar el número de grupos y variar la cantidad de elementos por grupo. Se presentan también las dos posibilidades presentadas en la estrategia 1.

---

[16]Una estrategia se define como: [...] todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin hacia el que tiende el sujeto. (Inhelder, 1978, p. 7)

=Ciclo de Interacción Cognitivo Estrategia 1

Caso en que no sobran semillas

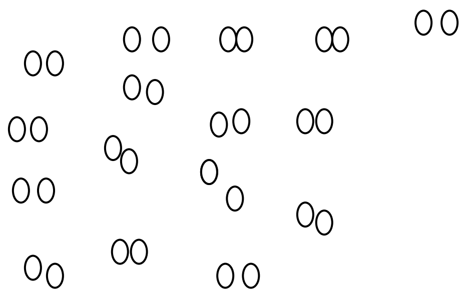
OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**
Fijar el número de elementos por grupo y variar la cantidad de grupos.	Distribuye las 32 semillas en varios grupos asignando dos semillas cada vez.	*Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas*
Representar cuatro grupos de ocho semillas cada uno como una suma iterada.	Dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos más dos mas dos más dos más dos más dos es igual a treinta y dos.	
Identificar: 1. Qué cantidad se está sumando reiteradamente y 2.Cuántas veces se suma la cantidad identificada en 1.	Observa la suma y cuenta los sumandos. El dos es el número que se suma reiteradamente, ese número debe ser el primer factor, y como el número dos se repite dieciséis veces, se escribe el dieciséis como segundo factor.	2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 +2+2+2+2+2+2 = 32
Aplicar la transitividad	Observa la suma iterada y su resultado, así como su representación como una multiplicación y establece mediante transitividad que dos por dieciséis es igual a treinta y dos.	*2 x 16*
		2 x 16 = 32

Esquemas y Elementos Asimilados

O: Organiza semillas en grupos con igual cantidad de elementos

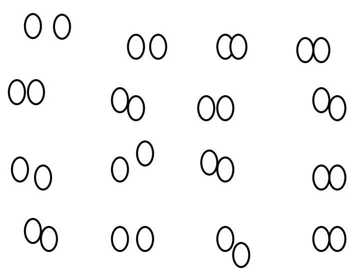
S_1*:* *32 semillas*

RS:



R: Representar un arreglo de elementos como una suma iterada.

RS:



S_1: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2

T: Totalizar una Suma

S_2: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =

S: suma iterada sobre resultados conocidos.

S_1: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2

SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce. Dieciséis, dieciocho, veinte, veintidós, veinticuatro, veintiséis, veintiocho, treinta, treinta y dos”*)

S_3: 2:dos; (2+2):cuatro; (2 + 4): seis; (6+ 2): ocho; (8+2): diez; (10+2): doce; (12+2): catorce; (14+2): dieciseis; (16 + 2): dieciocho; (18 +2): veinte; (20 + 2): veintidos; (22 + 2): veiniticuatro; (24 + 2): veintiseis; (26 + 2): veintiocho; (28 + 2):treinta; (30 + 2): treinta y dos

T_R: Totalización de la suma

S_2:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =

T_F: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 32

SP: Expresar una suma iterada como un producto

S_2:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =

CS: Identificar la cantidad que se suma

S_1:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2

CS_R: la cantidad que se suma es 2

VR: Identificar la cantidad de veces que se repite

S_1:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2

VR_R: la cantidad de veces que se repite es 16

RM: representación del número *m* que se repite *n* veces

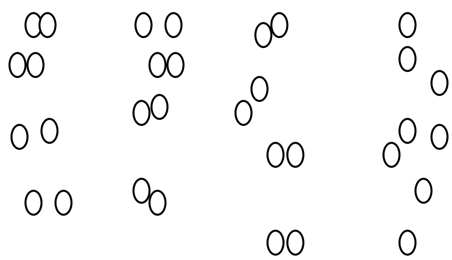
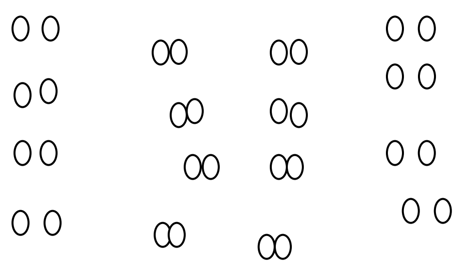
S_4: **CS_R** y **VR_R**

RM_R: ___2___ x ___16___

PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)

S_5: **T_F**y **RM_R**:

SP_R: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 32 = 2 x 16

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	**PROCESO COGNITIVO**
O: Organiza semillas en grupos con igual cantidad de elementos	
***S_1**: 32 semillas*	
RS 	$\mathbf{O \times S_1 \longrightarrow RS}$
R: Representar un arreglo de elementos como una suma iterada.	
RS 	R X RS $\longrightarrow$ S_1
S_1: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	
T: Totalizar una Suma	
S_2: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =	$\mathbf{T \times S_2 \longrightarrow S}$
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S_3: 2:dos; (2+2):cuatro; (2 + 4): seis; (6+ 2): ocho; (8+2): diez; (10+2): doce; (12+2):	

catorce; (14+2): dieciseis; (16 + 2): dieciocho; (18 +2): veinte; (20 + 2): veintidos; (22 + 2): veiniticuatro; (24 + 2): veintiseis; (26 + 2): veintiocho; (28 + 2):treinta; (30 + 2): treinta y dos.	**$S \times S_3 \longrightarrow SI$**
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce. dieciséis, dieciocho, veinte, veintidós, veinticuatro, veintiséis, veintiocho, treinta, treinta y dos”*)	
SI: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce. Dieciséis, dieciocho, veinte, veintidós, veinticuatro, veintiséis, veintiocho, treinta, treinta y dos”*).	
S_3: 2:dos; (2+2):cuatro; (2 + 4): seis; (6+ 2): ocho; (8+2): diez; (10+2): doce; (12+2): catorce; (14+2): dieciseis; (16 + 2): dieciocho; (18 +2): veinte; (20 + 2): veintidos; (22 + 2): veiniticuatro; (24 + 2): veintiseis; (26 + 2): veintiocho; (28 + 2):treinta; (30 + 2): treinta y dos.	**$SI \times S_3 \longrightarrow T_R$**
T_R: Totalización de la suma	
T_R: Totalización de la suma	
S_2:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =	**$T_R \times S_2 \longrightarrow T_F$**
T_F:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=*32*	
SP: Expresar una suma iterada como un producto	

S$_2$:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 =	**SP x S$_2$ $\longrightarrow$CS**
CS: Identificar la cantidad que se suma	
CS: Identificar la cantidad que se suma	**CS × S$_1$$\longrightarrow$CS$_R$**
S$_1$:2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	
CS$_R$: la cantidad que se suma es 2.	
VR: Identificar la cantidad de veces que se repite	**VR × S$_1$$\longrightarrow$VR$_R$**
S$_1$: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2	
VR$_R$:la cantidad de veces que se repite es 16	
RM: representación del número *m* que se repite *n* veces	**RM x S$_4$$\longrightarrow$RM$_R$**
S$_4$: **CS$_R$** y **VR$_R$**	
RM$_R$: 2 x 16	
PT: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)	**PT x S$_5$$\longrightarrow$SP$_F$**
S$_5$: **T$_r$**y **RM$_R$**:	
SP$_F$: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 32 = 2 x 16	

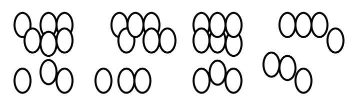
En consecuencia el ciclo cognitivo es:

O×S$_1$$\longrightarrow$RS; R X RS$\longrightarrow$ S$_1$; T ×S$_2$$\longrightarrow$S; S x S$_3$$\longrightarrow$SI; SI x S$_3$ $\longrightarrow$T$_R$;T$_R$ x S$_2$ $\longrightarrow$T$_F$;

SP x S$_2$ $\longrightarrow$CS;CS × S$_1$$\longrightarrow$CS$_R$; VR × S$_1$$\longrightarrow$VR$_R$; RM x S$_4$$\longrightarrow$RM$_R$; PT x S$_5$$\longrightarrow$SP$_F$

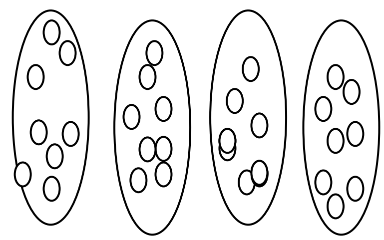
Ciclo de Interacción Cognitivo Estrategia 1

Caso en que sobran semillas

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**
Fijar el número de elementos por grupo y variar la cantidad de grupos.	Distribuye las 32 semillas en varios grupos asignando tres semillas cada vez.	*Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas*
Si se organizan grupos con tres semillas cada uno resultan 11 grupos pero sobra una semilla	No se logró obtener un arreglo con grupos de tres semillas cada uno. Debe intentarse con otro número de elementos por grupo.	
		Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas

Ciclo de Interacción Cognitivo Estrategia 2

Caso en que no sobran semillas

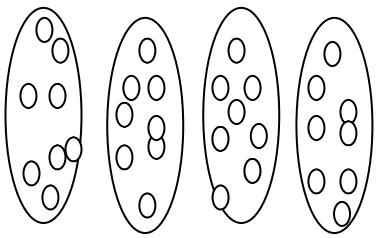
OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO
Fijar el número de grupos y variar la cantidad de elementos por grupo.	Distribuye las 32 semillas en cuatro grupos asignando una semilla por grupo cada vez.	*Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas*
Representar cuatro grupos de ocho semillas cada uno como una suma iterada.	Ocho más ocho más ocho más ocho es igual a treinta y dos.	
Identificar: 1. Qué cantidad se está sumando reiteradamente y 2.Cuántas veces se suma la cantidad identificada en 1.	Observa la suma y cuenta los sumandos. El ocho es el número que se suma reiteradamente, ese número debe ser el primer factor, y como el número ocho se repite cuatro veces, se escribe el cuatro como segundo factor.	8 + 8 + 8 + 8 = 32
Aplicar la transitividad	Observa la suma iterada y su resultado, así como su representación como una multiplicación y establece mediante transitividad que ocho por cuatro es igual a treinta y dos.	*8x4*
		8 x 4 = 32

Esquemas y Elementos Asimilados

O_1: Organiza semillas en grupos con igual cantidad de elementos

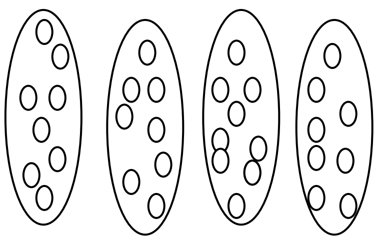
$S_{1,1}$:*32 semillas*

RS_1:



R_1: Representar un arreglo de elementos como una suma iterada.

RS_1:



$S_{1,1}$: 8+ 8+ 8+ 8

T_1: Totalizar una Suma

$S_{1,2}$: 8 +*8* +*8* +*8* =

S_1: suma iterada sobre resultados conocidos.

$S_{1,1}$: 8 +*8* +*8* +*8*

SI_1: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*ocho, dieciséis, veinticuatro, treinta y dos”*)

$S_{1,3}$: 8: ocho; (8+8): dieciseis; (16 +8): veiniticuatro; (24 + 8): treinta y dos

T_{R1}: Totalización de la suma

$\boldsymbol{S_{1,2}}$:*8 +8 +8 +8=*

$\mathbf{T_{F1}}$: *8 +8 +8 +8 = 32*

$\mathbf{SP_1}$: Expresar una suma iterada como un producto

$\boldsymbol{S_{1,2}}$: 8 *+8 +8 +8=*

$\mathbf{CS_1}$: Identificar la cantidad que se suma

$S_{1,1}$: 8 *+8 +8 +8*

$\mathbf{CS_{R1}}$: la cantidad que se suma es 8

$\mathbf{VR_1}$: Identificar la cantidad de veces que se repite

$S_{1,1}$: 8 *+8 +8 +8*

$\mathbf{VR_{R1}}$:la cantidad de veces que se repite es 4

$\mathbf{RM_1}$**:** representación del número *m* que se repite *n* veces

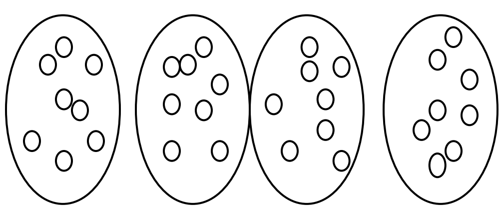
$\mathbf{S_{1,4}}$: $\mathbf{CS_R}$ y $\mathbf{VR_R}$

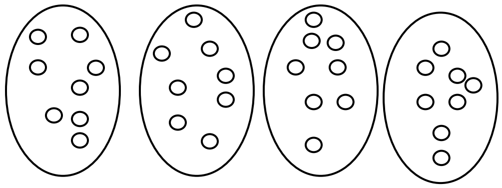
$\mathbf{RM_{R1}}$: ___8___ x ___4___

$\mathbf{PT_1}$**:** Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)

$\mathbf{S_{1,5}}$: $\mathbf{T_F}$y $\mathbf{RM_R}$:

$\mathbf{SP_{R1}}$: 8 + 8 + 8 + 8 = 32 = 8 x 4

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	PROCESO COGNITIVO
$\mathbf{O_1}$: Organiza semillas en grupos con igual cantidad de elementos	
$\boldsymbol{S_{1,1}}$: *32 semillas*	
$\mathbf{RS_1}$ 	$\mathbf{O_1 \times S_{1,1} \rightarrow RS_1}$
$\mathbf{R_1}$: Representar un arreglo de elementos como una suma iterada.	

RS_1 	R_1 X $RS_1 \longrightarrow$ $S_{1,1}$
$S_{1,1}$: 8+ 8+ 8+ 8	
T_1: Totalizar una Suma	
$S_{1,2}$: 8 +*8* +*8* +*8* =	**$T_1 \times S_{1,2} \rightarrow S_1$**
S_1: suma iterada sobre resultados conocidos.	
S_1: suma iterada sobre resultados conocidos.	
$S_{1,3}$: 8: ocho; (8+8): dieciseis; (16 +8): veiniticuatro; (24 + 8): treinta y dos	**S_1 x $S_{1,3} \rightarrow SI_1$**
SI_1: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*ocho, dieciséis, veinticuatro, treinta y dos”*)	
SI_1: Suma iterada (Asociatividad y totalización en palabras número) (“*ocho, dieciséis, veinticuatro, treinta y dos”*)	
$S_{1,3}$: 8: ocho; (8+8): dieciseis; (16 +8): veiniticuatro; (24 + 8): treinta y dos	**SI_1 x $S_{1,3}$** $\rightarrow T_{R1}$
T_{R1}: Totalización de la suma	
T_{R1}: Totalización de la suma	
$S_{1,2}$: 8 +*8* +*8* +*8*=	
T_{F1}: *8 +8 +8 +8 = 32*	**T_{R1} x $S_{1,2} \rightarrow T_{F1}$**
SP_1: Expresar una suma iterada como un producto	
$S_{1,2}$: 8 +*8* +*8* +*8*=	
CS_1: Identificar la cantidad que se suma	**SP_1 x $S_{1,2} \rightarrow CS_1$**
$CS_{1,2}$: Identificar la cantidad que se suma	

$S_{1,2}$: 8 *+8 +8 +8*	**$CS_{1,2}\times S_{1,2}\rightarrow CS_{R1}$**
CS_{R1}: la cantidad que se suma es 8	
VR_1: Identificar la cantidad de veces que se repite	
$S_{1,1}$: 8 *+8 +8 +8*	**$VR_1\times S_{1,1}\rightarrow VR_{R1}$**
VR_{R1}:la cantidad de veces que se repite es 4	
RM_1: representación del número *m* que se repite *n* veces	
$S_{1,4}$: **CS_{R1}** y **VR_{R1}**	**RM_1 x $S_{1,4}\dashrightarrow RM_{R1}$**
RM_{R1}: ___8___ x ___4___	
PT_1: Si a=b y b=d entonces a= d (Propiedad transitiva)	**PT_1 x $S_{1,5}\dashrightarrow SP_{F1}$**
$S_{1,5}$: **T_{F1}**y **RM_{R1}**:	
SP_{F1}: 8 + 8 + 8 + 8 = 32 = 8 x 4	

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

$O_1\times S_{1,1}\dashrightarrow RS_1$; R_1 X $RS_1 \longrightarrow S_{1,1}$; $T_1\times S_{1,2}\dashrightarrow S_1$; S_1 x $S_{1,3}\dashrightarrow SI_1$; SI_1 x $S_{1,3}\dashrightarrow T_{R1}$;T_{R1} x $S_{1,2}\dashrightarrow T_{F1}$; SP_1 x $S_{1,2}\dashrightarrow CS_1$;$CS_1\times S_{1,1}\dashrightarrow CS_{R1}$; $VR_1\times S_{1,1}\dashrightarrow VR_{R1}$; RM_1 x $S_{1,4}\dashrightarrow RM_{R1}$; PT_1 x $S_{1,5}\dashrightarrow SP_{F1}$

Conceptos y Teoremas en Acto

Conceptos :

- Número entero positivo, se incluye el cero ($N \cup\{0\}$)
- Suma de númerosenteros positivos
- Relación entre suma iterada y multiplicación

Teoremas en acto:

- Algoritmo para resolver una suma iterada:f(a)= a, f(a+a)= f(a)+a=a+a=2a, f(a+a+a)= f(2a) + a=2a+a= 3a, …, *f(a+a+a...+a)= f(n-1)+a, $n\in N$*

- *f(0)=0*
- *f(n.1) = n f(1)*
- La asociatividad deja invariante el total.
- Propiedad Transitiva

***Sistemas de representación*:**

- **N**umerales induarábigos.
- Escritura simbólica de una "suma indicada" y relacionada con el símbolo igual para representar la equivalencia del resultado de las operaciones.
- Palabras número, «ocho», «dieciséis», «veinticuatro», «treinta y dos».

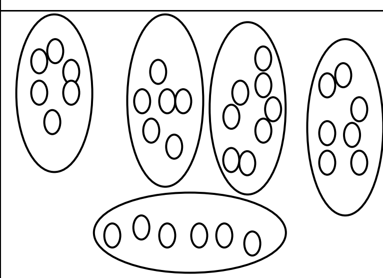
Esquema de suma:

$N \cup \{0\}) \times N \cup \{0\}) \longrightarrow N \cup \{0\})$

$(a, b) \longrightarrow a + b = c$

Ciclo de Interacción Cognitivo Estrategia 2

Caso en que sobran semillas

OBSERVABLES SUJETO	COORDINACIONES SUJETO	OBSERVABLES OBJETO
Fijar el número de grupos y variar la cantidad de elementos por grupo.	Distribuye las 32 semillas en cinco grupos asignando una semilla por grupo cada vez.	*Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas*
Si se organizan 32 semillas en cinco grupos, se obtienen 5 grupos con seis semillas cada uno y sobran dos semillas.	No se logró obtener un arreglo de 32 semillas con cinco grupos de igual cantidad de semillas sin que sobrara alguna de ellas. Debe intentarse con otra cantidad de grupos.	
		Organizar 32 semillas en grupos, de tal manera que cada grupo tenga la misma cantidad de semillas

4.4 ANÁLISIS EPISODIO 2

4.4.1 Dimensión Epistemológica: La Obra Matemática

Atendiendo a los contenidos previos tratados con los estudiantes como son el concepto de suma y la representación de una suma iterada en forma de producto que son prerrequisito para resolver las situaciones propuestas en esta clase, podría afirmarse que el propósito de la profesora para esta sesión de trabajo es construir con sus estudiantes la tabla del 8; para ello presenta a los niños el numeral16 y lo compone a partir de la suma de dos sumandos iguales:

$$8 + 8 = 16$$

Luego continua descomponiendo el numeral 24 como una suma de tres sumandos iguales

$$24 = 8 + 8 + 8$$

Finalmente, transforma las sumas iteradas –indicadas por el signo de la adición (+) y por sumandos que se repiten un número determinado de veces–, en productos –representados por el signo (×) que relaciona el número de veces que se repite el sumando con el sumando en cuestión. La equivalencia de esta transformación está implícita en la igualdad del resultado y la transitividad de la igualdad: si $a=c$ y $b=c$ entonces $a=b$. Esta compleja transformación es representada así:

$$8 + 8 = 16 \qquad 24 = 8 + 8+ 8$$

$$2 \times 8 = 16 \qquad 3 \times 8 = 24$$

A continuación propone a los estudiantes que tomen un grupo de 32 objetos y que los organicen en varios grupos con igual cantidad de elementos –proceso de descomposición-. Una vez hecho esto, se selecciona un estudiante que pase al tablero para que represente su trabajo usando sumas –tematización de la acción– y luego exprese dicha suma como una multiplicación –transformación de sumas iteradas en productos, -esquema multiplicativo-. Las acciones anteriores se deben aplicar también para los numerales 40, 48, 56, 64, 72 y 80.

Ante las situaciones propuestas, se espera que los estudiantes:

4. Encuentren estrategias básicas para organizar ***n*** objetos en ***m*** grupos con igual cantidad ***k*** de objetos cada uno.
5. Representen el arreglo realizado en *1* utilizando la suma.
6. Expresen la suma iterada en forma de producto, activando el esquema multiplicativo:

$$\underbrace{a + a + a + \ \dots \ + a}_{b \text{ veces}} = a \times b$$

4.4.2 Dimensión Cognitiva

La totalidad de los estudiantes que presentaron sus respuestas frente al grupo, al salir al tablero (12 de 12) pudo representar adecuadamente el arreglo de los objetos en grupos con igual cantidad de elementos haciendo uso de la suma. Solo cinco de doce estudiantes pudieron expresar, numéricamente, sin error una suma iterada como un producto a partir del esquema multiplicativo adoptado previamente por la profesora, en el que el número que se itera se escribe como primer factor y las veces que se suma se indica con el segundo factor. Por el contrario, 5 de ellos presentaron dificultades en la aplicación de este esquema, posiblemente influenciados por la presentación inicial, en la presente actividad, que hizo la profesora, que no fue coherente con la convención adoptada por Ella misma desde la presentación del concepto de multiplicación a sus estudiantes en clases anteriores.

En una de las situaciones propuestas, cuando se pidió organizar 48 semillas con igual cantidad de semillas en cada grupo, uno de los estudiantes organizó ocho grupos con seis semillas cada uno y en el tablero escribió:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$$

Pero no hubo respuesta frente a la escritura de la suma iterada como una multiplicación.

En otro caso, al componer el 80 un estudiante organizó diez grupos de ocho semillas cada uno y escribió en el tablero:

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 80$$

$$10 \times 8 = 80$$

8 x 10 = 80

pero no fue posible establecer cuál de los productos ellas respondía al arreglo realizado.

4.4.3 Dimensión Didáctica: Respecto a La Obra Didáctica

Las actividades propuestas a los estudiantes hacen que predomine en este episodio el *momento exploratorio*, pues se invita a los estudiantes a explorar la manera de resolver una situación. Este momento se combina permanentemente con el momento de *aplicación de la técnica*, cuando los estudiantes tratan de expresar mediante sumas y multiplicaciones el arreglo realizado. Se cuenta también con *momentos de evaluación* y *de institucionalización*, pues la profesora aprovecha las respuestas de sus estudiantes para verificar el manejo que ellos hacen de la aplicación de la técnica y para puntualizar algunos aspectos relacionados con el uso de los símbolos y la expresión de la multiplicación en forma vertical.

Respecto a la relación que se establece entre los conceptos de suma y multiplicación, conviene recordar que la profesora presentó en clases anteriores una técnica que permitía definir el orden de los factores de un producto atendiendo a los siguientes criterios:

- El primer factor indica el número que se repite o se suma iteradamente
- El segundo factor indica el número de veces que se itera el primer factor.

Pero, al iniciar esta sesión no mostró coherencia en la técnica definida por Ella, al expresar:

8 + 8 = 16   24 = 8 + 8+ 8

2 x 8 = 16   3 x 8 = 24

Al tratar de organizar 40 elementos en grupos iguales se presentaron estas respuestas:

5+5+5+5+5+5+5+5= 40   8+8+8+8+8=40

En ambos casos fueron expresadas en forma de multiplicación como

8 x 5= 40

La profesora no indagó a los estudiantes sobre estas representaciones, olvidando la convención establecida o asumiendo que los estudiantes conocían la propiedad conmutativa de la multiplicación, tema que hasta el momento no se ha tratado en este curso. Se pierde además una oportunidad para hacer preguntas a los estudiantes a fin de que ellos puedan construir esquemas adecuadamente.

Se aprovechan las respuestas de los niños para trabajar otros aspectos que aunque están relacionados con el tema y tienen que ver con la aplicación de una técnica, pueden desviar la atención de los estudiantes. Esto se evidencia cuando la profesora pregunta:

"¿Qué estamos estudiando aquí?" Y señalando las respuestas que presentaron los estudiantes dice:

4 x 10; "la tabla del 4"

2 x 20; "la tabla del 2" (los niños repiten con la profesora)

8 x 5; "la tabla del 8" (los niños repiten con la profesora)

8 x 5; "La tabla del 8" (los niños repiten con la profesora)

Además de incurrir en el efecto Topazze, la profesora establece que cuando se tiene una multiplicación, el primer factor es el que determina la tabla que se está trabajando, es decir en la expresión ***a*** x ***b***, ***a*** indica que se trabaja la tabla de "***a***". Esto es, se itera ***a*** las veces que indique ***b***, pero no tiene en cuenta de dónde provienen estas expresiones, tal es el caso citado arriba al componer el 40 como ocho grupos de cinco objetos cada uno, o cinco grupos con ocho objetos cada uno.

En el primer caso, la composición de 40 como suma iterada de "cinco" se presentó como 5 + 5+ 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40, es decir la tabla del "cinco". Al representar esta suma como multiplicación se presentó la expresión 8 x 5 = 40 lo que correspondería a la tabla del "ocho" según la información presentada por la profesora.

En el segundo caso, 40 se presenta como la suma iterada de "ocho", esto es: 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40, es decir la tabla del "ocho" y su representación como multiplicación se expresó como 8 x 5 = 40 lo que correspondería a la tabla del "ocho" según instrucciones de la profesora.

Como puede establecerse, el esquema multiplicativo no se aplicó adecuadamente en el primer caso -lo cual es una ruptura del contrato didáctico- y la profesora no intervino para hacer las aclaraciones pertinentes, puede ser que no identificó la inconsistencia presentada y esto, sin duda afecta la comprensión del concepto de multiplicación por parte de los estudiantes.

Se aprovechan las situaciones para enseñar técnicas, pero en esta ocasión esto puede desviar la atención de los niños sobre el propósito de construir la tabla del 8. Esto sucede cuando trata de explicar la escritura vertical de la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{2} \times \\ 24 \end{array}$$

Parece ser que el número grande va arriba.

Conviene mencionar además, que una vez dada la consigna, no se hace un acompañamiento al trabajo que hacen los estudiantes al organizar los objetos; sino, que al cerciorarse de que algunos han terminado la tarea, la profesora verifica que el arreglo sea válido y hace pasar frente a sus compañeros a algunos de los estudiantes que tuvieron éxito en su labor.

Algunas prácticas pueden afectar la secuencia de la presentación que se quiere hacer, por ejemplo, cuando la profesora hace pasar al tablero a Yenny, Ella mostró que 32 puede presentarse como dieciséis grupos de 2 objetos cada uno, es decir 2 x 16 y esto puede distraer a los estudiantes si se trata de construir la tabla del "ocho". Se podría ser más selectivo inicialmente y pasar al tablero solamente a quienes compongan los diferentes números pero que la multiplicación que represente cada arreglo recoja la tabla del ocho, y luego mirar las otras opciones que los estudiantes encontraron.

Al dar la consigna, la profesora utiliza expresiones que los niños no conocen: "así se presentarán todos los múltiplos del ocho" y falta precisión en algunas expresiones: "En el tablero se expresarán los grupos que formaron usando números"

Consideremos ahora la presentación que hace el texto guía de Editorial Norma (2005 pág. 69)[17] utilizado por la profesora para tratar la tabla del 8:

"*Cuando multiplicamos por 8 hacemos 8 veces más grande el número que multiplicamos";*

Observa:

- *8 + 8 = 16*
- *8+8+8=24*
- *8+8+8+8 =32*
- *8+8+8+8+8 = 40*
- *8+8+8+8+8+8= 48*
- *8+8+8+8+8+8+8= 56*
- *8+8+8+8+8+8+8+8 = 64*
- *8+8+8+8+8+8+8+8+8 =72*
- *8+8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 80*

**Observa la tabla:*

8 x										
0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
0	*8*	*16*	*24*	*32*	*40*	*48*	*56*	*64*	*72*	*80*

La profesora escribe en el tablero lo que aparece en el texto y pide a los estudiantes consignarlo en su cuaderno, pero no hace mención al significado de la frase inicial ni dedica tiempo para puntualizar la relación entre las sumas iteradas del 8 con la tabla presentada en el texto.

Podría afirmarse que lo anterior sugiere que la tabla del ocho es: 8 una vez, 8 sumado dos veces, 8 sumado tres veces, 8 sumado cuatro veces, etc.

[17] Castro Heublyn y otros. Multisaberes 2. Editorial Norma Bogotá 2005.

Cuando se trabajó en el episodio 1 la tabla del cuatro, la profesora copió en el tablero de uno de los textos guía el siguiente ejercicio.

6. Completa con la suma. Observa el ejemplo

0 x 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0

1 x 4 =

2 x 4 =

3 x 4 =

4 x 4 =

5 x 4 =

6 x 4 =

7 x 4 =

8 x 4 =

9 x 4 =

10 x 4 =

De lo cual podría inferirse que

1 x 4 = 1+1+1+1

2 x 4= 2+2+2+2

3 x 4= 3+3+3+3

4 x 4 = 4+4+4+4

5 x 4= 5+5+5+5

Lo anterior, difiere de la presentación de la tabla del 8 ya que se muestran dos maneras diferentes de concebir las tablas de multiplicar y la profesora parece no haber caído en cuenta de ello lo que afecta la secuencia que están construyendo los niños.

4.5 ANÁLISIS OBJETIVO EPISODIO 3

Consigna: *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*

Teniendo en cuenta que la solución del problema puede llevarse a cabo de dos formas distintas, se consideran aquí dos casos:

Caso 1. En el que x34 es un operador sin dimensión. Y

Caso 2. En el que se utilizan las sumas iteradas.

Caso 1

Ciclo de Interacción Cognitivo

OBSERVABLES SUJETO	**COORDINACIONES SUJETO**	**OBSERVABLES OBJETO**
Lee el enunciado	Establece la relación entre la cantidad de zapatos y una caja.	*En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*
"Dos por treinta y cuatro"	Si en una caja hay 2 zapatos, para saber cuántos zapatos hay en 34 cajas, entonces debo multiplicar el número de zapatos de cada caja -que es dos- por el número de cajas –que es treinta y cuatro-	*¿Si en una caja hay dos zapatos, entonces cuántos zapatos habrá en treinta y cuatro cajas?*
"Dos por cuatro es ocho" y escribe el ocho debajo de las unidades.		Escribe 34 x 2 O escribe 2 x 34
"Dos por tres es seis" y escribe el seis debajo de las decenas.	Aplica el algoritmo de la multiplicación: multiplica el dos por las decenas. Usa las tablas de multiplicar.	Escribe: 34 x 2 8
Expresa verbalmente el resultado de la operación	Finaliza la aplicación del algoritmo. Identifica unidades y decenas.	Escribe: 34 x 2 68
"En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos"	Establece relación entre la pregunta incial y el producto de 34 x 2	"68"
		"En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos"

Esquemas y elementos asimilados

T: Resolver una situación**:** *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*

R: Establece relaciones 1 a 1

S_1: *No. De cajas* *No.de zapatos*

1 *2*

P: En 34 cajas ¿cuántos zapatos hay?

$\mathbf{S_2}$: *No. De cajas* *No.de zapatos*

1 *2*

34 *x*

$\boldsymbol{S_3}$:

Cajas Zapatos

1 2

X *34* X *34*

34 *x*

$\mathbf{P_R}$: 2 x 34

V: Escritura de un producto en forma vertical.

$\mathbf{V_R}$: 34

x 2

A: Algoritmo de la multiplicación

$\mathbf{A_F}$: 68

R: Relación entre la situación propuesta y un producto.

T$_{F}$: *En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos*

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	**PROCESO COGNITIVO**
T: Resolver una situación: *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*	**$T \times R \longrightarrow S_1$**
R: Establece relaciones 1 a 1	
S$_1$: *No. De cajas* *No.de zapatos* *1* *2*	
P:En 34 cajas ¿cuántos zapatos hay?	**$P \times S_2 \longrightarrow S_3$**
S$_2$: *No. De cajas* *No.de zapatos* *1* *2* *34* *x*	
***S$_3$*:** Cajas Zapatos 1 2 X *34* X *34* 34 *x*	
P: En 34 cajas ¿cuántos zapatos hay?	**$P \times S_3 \longrightarrow P_R$**
***S$_3$*:** Cajas Zapatos 1 2 X *34* X *34* 34 *x*	
P$_R$: 2 x 34	
V: Escritura de un producto en forma vertical	**$V \times P_R \longrightarrow V_R$**
P$_R$: 2 x 34	
V$_R$: 34 x 2	

A: Algoritmo de la multiplicación	**A X V_R–→ A_F**
V_R: 34 x 2	
A_F: 68	
R: Relación entre la situación propuesta y un producto.	**R X T–→ T_F**
T: Resolver una situación: *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*	
T_F : *En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos*	

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

T×R –→S_1;P ×S_2–→S_3; P ×S_3–→P_R; V×P_R–→V_R; A X V_R–→ A_F; R X T–→ T_F

Caso 2

Ciclo de Interacción Cognitivo

OBSERVABLES SUJETO →	**COORDINACIONES SUJETO** ↔	**OBSERVABLES OBJETO**
Lee el enunciado	Establece la relación entre la cantidad de zapatos y una caja.	*En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*
"Treinta y cuatro veces dos"	Relaciona los datos de la situación con el concepto de la multiplicación partiendo de la suma abreviada 2+2+2+ 2+2+2…+2 34 veces	*¿Si en una caja hay dos zapatos, entonces cuántos zapatos habrá en treinta y cuatro cajas?*

	Y utiliza la definición a x b = a veces b y/o luego a x b = b x a	
"Dos por cuatro es ocho" y escribe el ocho debajo de las unidades.	Aplica el algoritmo de la multiplicación: multiplica el dos por las unidades. Usa las tablas de multiplicar	Escribe 34 x 2 O escribe 2 x 34
"Dos por tres es seis" y escribe el seis debajo de las decenas.	Aplica el algoritmo de la multiplicación: multiplica el dos por las decenas. Usa las tablas de multiplicar.	Escribe: 34 x 2 8
Expresa verbalmente el resultado de la operación	Finaliza la aplicación del algoritmo. Identifica unidades y decenas.	Escribe: 34 x 2 68
"En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos"	Establece relación entre la pregunta incial y el producto de 34 x 2	"68"
		"En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos"

Esquemas y Elementos Asimilados

T: Resolver una situación**:** *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*

R: Establece relaciones 1 a 1

S_1: *No. De cajas* *No.de zapatos*

1 *2*

P:En 34 cajas ¿cuántos zapatos hay?

S_2: Suma iterada de 2 34 veces

E: Escritura de una suma iterada

SI: $\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{34 \text{ veces}}$

SP: Expresar una suma iterada como un producto

S: Identificar la cantidad que se suma

$\mathbf{S_R}$: la cantidad que se suma es 2

C: Identificar la cantidad de veces que se repite

$\mathbf{C_R}$**:** la cantidad de veces que se repite es 34

RM: representación del número *m* que se repite *n* veces

$\mathbf{S_3}$: $\mathbf{B_R}$ y $\mathbf{C_R}$

$\mathbf{RM_R}$: ___2__ x __34___

V: Escritura de un producto en forma vertical.

$\mathbf{V_R}$: $\begin{array}{r} 34 \\ \times \underline{\ \ 2} \end{array}$

A: Algoritmo de la multiplicación

$\mathbf{A_F}$: 68

R: Relación entre la situación propuesta y un producto.

$\mathbf{T_F}$ **:** *En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos*

INTERACCIÓN: ESQUEMA-MEDIO	**PROCESO COGNITIVO**
T: Resolver una situación: *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?*	$\mathbf{T \times R \longrightarrow S_1}$
R: Establece relaciones 1 a 1	
S_1: *No. De cajas* *No.de zapatos*	

1 *2*	
P:En 34 cajas ¿cuántos zapatos hay?	$\mathbf{P \times S_1 \longrightarrow S_2}$
S_1: *No. De cajas* *No.de zapatos* *1* *2*	
S_2: Suma iterada de 2 34 veces	
S_2: Suma iterada de 2 34 veces	$\mathbf{S_2 \times E} \longrightarrow SI$
E: Escritura de una suma iterada	
SI: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + … + 2 34 veces	
SP: Expresar una suma iterada como un producto	$\mathbf{SP \times SI \longrightarrow S}$
SI: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + … + 2 34 veces	
S: Identificar la cantidad que se suma	
S: Identificar la cantidad que se suma	$\mathbf{S \times SI \longrightarrow S_R}$
SI: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + … + 2 34 veces	
$\mathbf{S_R}$: la cantidad que se suma es 2	
C: Identificar la cantidad de veces que se repite	$\mathbf{C \times SI \longrightarrow C_R}$
SI: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + … + 2 34 veces	
$\mathbf{C_R}$:la cantidad de veces que se repite es 34	
RM: representación del número *m* que se repite *n* veces	$\mathbf{RM \times S_3 \longrightarrow RM_R}$
$\mathbf{S_3}$: $\mathbf{S_R}$ y $\mathbf{C_R}$	
$\mathbf{RM_R}$: ___2___ x ___34___	
V: Escritura de un producto en forma vertical.	

<table>
<tr><td>RM$_R$: 2 x 34</td><td rowspan="2">V X RM$_R$ −→ V$_R$</td></tr>
<tr><td>V$_R$: 34
x 2</td></tr>
<tr><td>A: Algoritmo de la multiplicación</td><td rowspan="3">A X V$_R$ −→ A$_F$</td></tr>
<tr><td>V$_R$: 34
x 2</td></tr>
<tr><td>A$_F$: 68</td></tr>
<tr><td>R: Relación entre la situación propuesta y un producto.</td><td rowspan="3">R X T −→ T$_F$</td></tr>
<tr><td>T: Resolver una situación: En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?</td></tr>
<tr><td>T$_F$: En treinta y cuatro cajas hay sesenta y ocho zapatos</td></tr>
</table>

En consecuencia el ciclo cognitivo es:

$T \times R \longrightarrow S_1$; $P \times S_1 \longrightarrow S_2$; $S_2 \times E \longrightarrow$ SI; **$SP \times SI \longrightarrow S$; S X $SI \longrightarrow S_R$; C X $SI \longrightarrow C_R$;**

RM X $S_3 \longrightarrow RM_R$; V X $RM_R \longrightarrow V_R$; A X $V_R \longrightarrow A_F$; R X $T \longrightarrow T_F$

Conceptos y Teoremas En Acto

Conceptos:

- Concepto de multiplicación
- Relación entre suma iterada y multiplicación.
- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma
- Propiedad Conmutativa del producto.

Teoremas en acto:

- Algoritmo para resolver una multiplicación
- *f(n.1) = n f(1)*

***Sistemas de representación*:**

- Escritura de un producto en forma vertical.
- Representación de una suma iterada como un producto

4.6 ANÁLISIS EPISODIO 3

4.6.1 Dimensión Epistemológica: La Obra Matemática

La situación propuesta encierra dos intenciones: 1. La interpretación de una situación en términos de un modelo matemático que permita a los estudiantes alcanzar la respuesta a una pregunta asociada con el esquema multiplicativo y 2. Aplicar el algoritmo de la multiplicación.

Se espera que los estudiantes:

Identifiquen que para tener éxito en la solución de la situación, deben establecer una relación entre esta y el concepto de multiplicación.

Existen dos formas de concebir la solución del problema:

	Cajas	Zapatos	
	1	2	
$\times 34$			$\times 34$
	34	x	

En este caso $\times 34$ es un operador sin dimensión, es decir un escalar.

La otra solución, que es equivalente:

Cajas Zapatos

$\times$2 zapatos/caja

$1 \longrightarrow 2$

$34 \longrightarrow x$

$\times$2 zapatos/caja

Aquí $\times$2 es una función que transforma una cantidad (cajas) en otra cantidad (zapatos)

El primero es más abstracto: encapsula el proceso de la suma en el «*procepto*»[18] 2$\times$34 que indica el proceso de sumar 2 treinta y cuatro veces y el concepto de multiplicación como suma iterada (David Tall, 1995, p. 30)

7. Resuelvan la operación 2 x 34 según el esquema de multiplicación como suma iterada adoptado por la profesora.

Esta operación podría resolverse de diferentes maneras:

1. Activando y coordinando el esquema multiplicativo que transforma una suma iterada en un producto.

$$a + a + a + \ldots + a = a \times b$$

b veces

[18] Por otro lado, en aritmética y álgebra los símbolos se diseñan para el cálculo y manipulación y derivan su gran poder del hecho que ellos no sólo evocan un proceso, como la suma, 2+3, sino también un concepto, la suma 2+3 es 5. Este uso de un símbolo para evocar el concepto o procesos se llama un procepto (Gray & Tall, 1991, 1994). Los proceptos tienen poder porque ellos evocan procesos para hacer matemática y conceptos para pensar sobre matemática. En el diagrama yo he usado los términos "numérico" y "simbólico" para simbolizar la sofisticación creciente de los proceptos numéricos en aritmética, los proceptos simbólicos del álgebra y la, aún mayor, generalidad de las funciones simbólicas (Tall, 1995, p.30)

Y realizando una suma iterada: $\underbrace{2 + 2 + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots + 2}_{34\ \text{veces}}$

2. Estableciendo relaciones 1 a 1:

Cajas	# Zapatos
1	2

lo que nos lleva a aplicar la siguiente propiedad:

$$f\,(n.\,a) = n\,f\,(a);\ \ a\text{: Constante}\ \ n \in N.$$

3. Aplicando una técnica (algoritmo) para resolver la multiplicación 2 x 34:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Sin embargo esta propiedad no ha sido abordada por la profesora.

4.6.2 Dimensión Cognitiva

No todos los estudiantes tuvieron éxito en la solución de la situación, pues se escucharon algunas respuestas que no se esperaban, tal es el caso en el que la profesora plantea la situación:

Profesora. *En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja*……Interrumpe el enunciado para preguntar: *¿Cuánto es un par de zapatos?*

Niños. “ *Dos”*

Profesora. La pregunta es: ¿C*uántos zapatos hay en 34 cajas?*

Niños. “Dos”.

Lo anterior podría explicarse porque cuando se obtiene una respuesta exitosa y a continuación se hace una nueva pregunta, existe la tendencia de decir la respuesta que ya se conoce.

Más adelante la profesora vuelve a plantear la situación:

Profesora. En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos…. ¿Un par de zapatos son cuántos zapatos?

Niños. dos

Profesora. Cada par de zapatos en una caja. En una caja hay dos zapatos. La pregunta es ¿cuántos zapatos hay en 34 cajas?

Niños. “140”, “34”, “50”.

Como es claro que las respuestas son producto del funcionamiento de los esquemas que activa el niño, cuando la profesora pregunta a los niños *“¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?”* la respuesta “*34*” posiblemente se deba a que el esquema activo del niño es el que determina el × de cajas en el problema. La actividad de este esquema inhibe al esquema relacionado con el número de zapatos en las 34 cajas. No se puede inferir aquí razones a las respuestas “140” y “50”.

Respecto a la solución de la multiplicación

$$\begin{array}{r} 34 \\ \underline{\times\ 2} \end{array}$$

No se tiene elementos para establecer si los estudiantes dominan o no la técnica para resolver el algoritmo, pues la profesora cuestiona a los estudiantes sobre la solución a esta operación y Ella misma responde dichas preguntas sin permitir a sus estudiantes el mostrar si tienen o no dominio de la técnica. La respuesta de Luisa indica que ella posee una comprensión, por lo menos "práctica", del teorema en acto que caracteriza el algoritmo de la multiplicación, que se explica en términos de las propiedades de la estructura algebraica (aquí la del *dominio de integridad* de los números enteros).

De otro lado, parece ser que no está clara para todos los niños la relación que existe entre el producto obtenido y el enunciado de la situación, lo cual se refleja en los siguientes apartes:

Profesora: “….. Muy bien, leo la pregunta y levanta la mano el niño que me la quiera responder: *¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?”*

Niños.¡2!, ¡3!

Lo niños asimilan la pregunta al esquema (activado cuando se preguntó por el significado de “par de zapatos”) que calcula el número de zapatos en una caja, lo que explica que la respuesta sea dos: porque en una caja hay dos zapatos. La respuesta de

*¡3!*se explica en términos de la atención mental. Posiblemente la atención del niño permanece enganchada al proceso anterior en el que el dos (de los pares de zapatos) multiplican al tres de las decenas (de las cajas de zapatos).

Otro momento que hace pensar que existen dificultades en la interpretación de la situación y en el establecimiento de la relación entre el enunciado y el producto es el siguiente:

Dana levanta la mano y dice “En la caja hay…” la profesora la hace pasar al frente

***Dana*:** En la caja hay…

Profesora: En la caja no, En cuántas cajas.

Niños: ¡34!

Dana: En 34 cajas hay 68

Profesora: ¿68 qué?

Dana: zapatos,

Niño: Pares de zapatos.

4.6.3 Dimensión Didáctica: Respecto ala Obra Didáctica

Es indudable que el presente episodio constituye un *momento de evaluación* en el que la profesora espera, mediante el planteamiento de una situación, verificar qué tanto han aprendido sus estudiantes y por ello Estos deben comprenderla situación, aplicar ciertas técnicas, y plantear soluciones a partir del concepto de multiplicación. Igualmente, se puede hablar de algunos *momentos de Institucionalización* en los que la profesora aprovecha la revisión de un ejercicio para puntualizar algunos procedimientos. Podría afirmarse que en algunos momentos se presenta una ruptura de contrato didáctico[19], pues

---

[19]Brousseau define contrato didáctico como:

“Es el conjunto de las obligaciones recíprocas y de las «sanciones» que cada socio de la *situación didáctica* la Profesora no logra captar la atención de todos los estudiantes, algunos de Ellos se muestran distraídos y ajenos a los planeamientos que Ella hace.

La profesora asume que cuando los estudiantes dan una respuesta que no es la correcta están "adivinando", lo cual podría reflejar de alguna manera su concepción de la enseñanza de las matemáticas, no tiene en cuenta que sus estudiantes podrían proponer respuesta incorrectas, pero estas pueden "ocultar" razonamientos válidos frente a la aplicación de la multiplicación o a la aplicación del algoritmo para resolver dicha operación. Lo anterior llevaría a pensar: ¿Cuál es el propósito de esta clase? ¿Revisar si sus estudiantes logran interpretar y resolver situaciones multiplicativas? O acaso ¿Saber si sus estudiantes pueden resolver correctamente multiplicaciones?

La profesora decide pasar adelante sólo al estudiante que tiene la respuesta correcta como es el caso de Luisa, a quien se le pide mostrar la solución al grupo. Su preocupación se centra en "mostrar la solución correcta" y parece no escuchar a los demás niños. Tener en cuenta las otras respuestas y discutirlas con todos los estudiantes puede ayudar a que la profesora tenga una mayor comprensión de los niveles de entendimiento de sus estudiantes y así podría hacer devoluciones adecuadas para ayudar a sus estudiantes a construir los esquemas que se propone.

En el planteamiento propuesto para dar respuesta a la situación, la profesora se apoya en un lenguaje constituido por signos matemáticos y una organización (sintaxis) de estos signos de multiplicando, multiplicador y producto para ejecutar un algoritmo. Parece ser que Ella inicialmente quiere constatar la razón de la escritura de uno de los factores (34). La respuesta que se esperaría de la profesora a la pregunta *¿Por qué el 34?* podría

---

impone o cree imponer, explícita o implícitamente, a los otrosy aquéllas que se le imponen o que cree que se le impone, con respecto al conocimiento en cuestión. El contrato didáctico es el resultado de una «negociación» a menudo implícita de las modalidades de establecimiento de las relaciones entre un alumno o un grupo de alumnos, un determinado medio y un sistema educativo. Se puede considerar que las obligaciones del profesor frente a la sociedad que le delega su legitimidad didáctica son también una parte determinante del «contrato didáctico»." Brousseau, 2003, pp. 5-6) ser "*Porque son 34 cajas y para obtener el número total de zapatos habría que multiplicar el 34 por el contenido de cada una de las cajas";* sin embargo, parece ser que la atención de la profesora es atraída hacia el aspecto figurativo (la imagen que se expresa externamente en la escritura de los numerales y la posición de los factores y la raya que indica el resultado del proceso de multiplicar que se escribe debajo de ella), lo cual nos permite establecer que se presenta un deslizamiento metacognitivo[20]. Se puede establecer también, que en su afán de explicar a los niños la manera de resolver la operación la profesora incurre en el efecto topazze.

Vale la pena resaltar que la profesora muestra interés en que los niños comprendan la situación y la relacionen con la multiplicación; de igual manera se interesa en que la respuesta se corresponda con el enunciado.

4.7 ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA

Cómo llegó a ser profesora.

Existen ciertos factores que influyeron en la decisión de ser maestra; desde pequeña fue matriculada en una institución para formación de maestros y esto puede haber tenido sus raíces en que algunos familiares se habían desempeñado como maestros. Realmente, a la profesora le gusta enseñar y aunque no se considera buena para las matemáticas, -pues en algunos grados de su bachillerato reprobó esta área-, piensa que las entiende bien hasta ciertos niveles de primaria (3° y 4°) en los que siente que domina el área y que es idónea para enseñarla.

Conviene mencionar que la formación recibida en un programa de Licenciatura en Educación básica recoge elementos generales de todas las áreas del conocimiento que uno maestro debe abordar con los estudiantes de básica primaria y que específicamente, en el campo de las matemáticas no se hace una construcción formal como la que se considera en el plan de estudios de un licenciado en matemáticas. Otro elemento a tener

---

[20]« El *deslizamiento metacognitivo* es la sustitución de un conocimiento por uno de sus modelos o por una descripción en metalenguaje.» (Brousseau, 2003, p. 7)

en cuenta es que realizó estudios en una modalidad a distancia, lo cual, por manejo del tiempo limita mucho la presentación de los contenidos y el cubrimiento total de los mismos.

Cómo enseña matemáticas.

Reconoce la importancia de la *actividad* y la *motivación* del niño, pero no menciona nada que indique una regulación consciente y sistemática de dicha actividad en torno al conocimiento matemático que es objeto de la enseñanza y del aprendizaje. Sin embargo, la profesora indica que se apoya en material didáctico y que toma en cuenta los conocimientos de los alumnos.

La profesora considera para sus prácticas de aula el contexto en el que viven los niños, e identifica situaciones que implican resolver ejercicios de composición y descomposición, sumas y multiplicaciones, pero no establece una relación entre estas actividades y las estructuras matemáticas que subyacen a estos conceptos y que podrían retomarse para enriquecer las prácticas y permitir a los niños construir sólidamente conceptos y procesos relacionados con la multiplicación, tales como el uso de las propiedades en la construcción del algoritmo para resolver un producto.

Las actividades parecen ser un fin para motivar a los niños y mantenerlos activos y “despiertos”; para que participen en clase, pero no son un medio para construir algunos conceptos y desarrollar destrezas.

Cómo aprenden los niños

Rechaza la explicación magistral como punto de partida y destaca la motivación centrada en el juego lúdico (CF. Brousseau, 1986, p.32).

[No pone en relación la estructura del juego con la estructura de la tarea (los procesos cognitivos involucrados con el conocimiento objeto de aprendizaje].

Acerca de la organización escolar.

La profesora considera que es en la primaria que se construyen las bases del conocimiento y que por esto es muy importante; reconoce la incidencia de factores sociales externos que se relacionan con el desarrollo de los niños en esta etapa y que inciden en su desempeño en la escuela, tales como una buena alimentación y un acompañamiento permanente en casa. No es muy crítica frente a la estructuración de la escuela, ni a los procesos institucionales, pero siente que tiene que asumir las restricciones que el medio le impone, - regulación de la noosfera- como por ejemplo seguir un programa, insuficiencia de materiales didácticos para trabajar y la cantidad de estudiantes que debe manejar un docente por grado, lo que de alguna manera entorpece su labor a pesar de que tiene una premisa frente al desempeño de sus estudiantes: “cada uno tiene su ritmo de aprendizaje”.

Lo anterior permite inferir que Ella tiene claro su rol y se reconoce como agente educativo en el proceso de transposición didáctica (*Objeto a enseñar* $\rightarrow$ *Objeto de enseñanza)* y piensa que debe hacerse una revisión permanente de los contenidos que se desarrollan en el aula, pero afirma que deben seleccionarse solamente los más pertinentes.

Los textos escolares

Frente a la selección de los documentos de trabajo y textos escolares, da mucha importancia a materiales que tengan buenas actividades, e ilustraciones para motivar el trabajo de los estudiantes.

Ella afirma que los maestros que orientarán cada nivel de estudios dentro de la Institución se reúnen a revisar los textos que las editoriales ofrecen a poblaciones como las que se atienden allí, y que en conjunto definen qué texto pedir a los estudiantes. Cabe anotar, que las editoriales oferentes, presentan un material simplificado a estas poblaciones, ya que los costos de los textos completos son muy altos, razón por la que no se puede comercializar allí dichos materiales. De todas maneras, no hay una selección consciente en términos de la *obra matemática* y de su implementación, la *obra didáctica*, los maestros se inclinan por seleccionar aquellos que tengan muchas y variadas actividades y que sus ilustraciones motiven a los estudiantes a desarrollar los ejercicios propuestos.

Se percibe una actitud incoherente de la maestra frente a la elección de texto guía, pues cuando se le preguntó sobre el texto para orientar el curso, manifestó que Ella no utiliza uno solo sino que realiza actividades sugeridas en varios textos y que simplemente de acuerdo al tema que trabaja busca la actividad que le parezca más apropiada. Aunque Institucionalmente se solicitó a los padres el texto guía de Editorial Santillana, Ella utiliza más el texto de matemáticas de Editorial Norma y afirma que ambos textos tienen el mismo enfoque al presentar la multiplicación lo cual no es cierto, pues como se mencionó en el análisis de la presentación de los contenidos de los textos utilizados, el enfoque de ambos textos es diferente pero la profesora no se ha percatado de ello lo que indica que no los ha estudiado con detenimiento.

La profesora afirma que para sus clases le gusta más el texto de editorial Norma y es el que ha orientado más su trabajo. Cuando se le interroga sobre los inconvenientes que pueda representar para sus estudiantes hacer la presentación en el aula siguiendo el texto de Norma y proponer ejercicios para la casa basados en el texto de Santillana, Ella afirma que no hay dificultades, porque Ella orienta a los estudiantes y revisa la actividad que deja como ejercicio para la casa, pero finalmente se justifica en el hecho de que solo dos o tres estudiantes consiguieron el texto recomendado por la Institución, o sea que esto no representa ningún inconveniente.

La obra matemática.

Para la profesora, la multiplicación es una suma abreviada, así lo aprendió Ella y así lo ha encontrado al consultar diferentes materiales referentes a este tema.

La concepción del esquema multiplicativo es para Ella mucho más simplificada de la que plantea Steffe[21] (1994), y piensa que la multiplicación se construye a partir de una suma iterada: Una expresión de la forma *a* x *b* significa que *a* se suma las veces que indica

Cuando en la entrevista se le preguntó sobre lo que entendía por la tabla del tres escribió lo siguiente:

---

[21] Para que una situación se constituya como multiplicativa, es necesario coordinar al menos dos unidades compuestas en tal forma que una de las unidades compuestas se distribuya sobre los elementos de la otra unidad compuesta. (Steffe, 1994, p. 19)

3 x 1 →

3 x 2 → 2 + 2 + 2 Tres por dos, tres veces el dos

3 x 3 → 3 + 3 + 3 tres por tres, tres veces el tres.

3 x 4 → 3 + 3 + 3 + 3 tres por cuatro, cuatro veces el tres

3 x 5 → 3 + 3 + 3 + 3 + 3 tres por cinco, cinco veces el tres

Si no se consideraran los dos primeros casos, podría afirmarse que la tabla de un natural n se construye a partir de las veces que n se repite, así:

n x 1 = n

n x 2 = n + n

n x 3 = n + n + n

n x 4 = n + n + n + n

n x 5 = n + n + n + n + n

n x 6 = n + n + n + n + n + n

n x 7 = n + n + n + n + n + n + n

n x 8 = n + n + n + n + n + n + n + n

n x 9 = n + n + n + n + n + n + n + n + n

Obsérvese que el primer factor define la cantidad que se itera y la tabla en mención.

Sin embargo, la profesora no siempre es coherente con el uso de esta representación; en el episodio 1 presentó la tabla del cuatro de la siguiente manera

7. Completa con la suma. Observa el ejemplo

0 x 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0

1 x 4 =

2 x 4 =

3 x 4 =

4 x 4 =

5 x 4 =

6 x 4 =

7 x 4 =

8 x 4 =

9 x 4 =

10 x 4 =

Parece ser que hay una ruptura entre el paso de la suma iterada a la multiplicación y la presentación de las tablas de multiplicar, es claro aquí que la profesora no ha analizado el paso de la suma iterada a la multiplicación teniendo en cuenta el análisis dimensional de las situaciones multiplicativas como lo plantea Vergnaud (1994):

"La multiplicación simple implicada en el cálculo del precio de cinco coches en miniatura a un costo de 4 dólares cada uno, levanta preguntas cruciales.

3. El resultado se da en dólares no en coches miniatura. ¿Por qué?
4. Uno puede entender la multiplicación 4 x 5 como la iteración de pagar 4 dólares, 5 veces; pero sería imposible explicar a niños de 7 8 años que la multiplicación 5 x 4 es 4 iteraciones de 5: uno no puede añadir coches en miniatura y encontrar dólares, y no hay ninguna razón de iterar 5, puesto que sólo han sido comprados 5 coches en miniatura."

La afirmación anterior podría soportarse además cuando la profesora manifiesta que si un estudiante le dice que *a* x *b* es lo mismo que *b* x *a* esto no está mal, pues el estudiante está haciendo uso de la propiedad conmutativa y afirma: *"*Cambió el orden de los factores, el resultado es el mismo*"*.

El análisis previo podría llevarnos a pensar que la profesora tiene una concepción instrumental de las matemáticas, pues en el caso de la multiplicación deja a un lado la concepción del esquema multiplicativo en el que se consideran las magnitudes y las unidades, y solamente considera los numerales y, al referirse al estudiante que resuelve productos como 243 x 26, afirma que "lo más importante es que El se sepa el proceso" desconociendo que el algoritmo para resolver un producto es el resultado de un encapsulamiento de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Al presentársele la suma $a + a + a + a + a + a$ (seis veces *a),* la profesora deduce que esto es igual a a x 6 y guarda coherencia con la relación establecida entre suma iterada y multiplicación, pero no es capaz de efectuar la generalización, pues frente a la pregunta "Si quisiéramos representar la suma de *a, n* veces, usando la multiplicación cómo la escribirías? Ella respondió $a^{n \text{ veces}}$.

Su respuesta podría entenderse si se considera que cuando se emplean letras que representan números naturales (a+a+a..$\underline{^{n \text{ veces}}}$....+$a$), la profesora activa el esquema de la potenciación (a×a×a..$\underline{^{n \text{ veces}}}$....×$a$ = a^n) representando a+a+a..$\underline{^{n \text{ veces}}}$....+$a$ = a^n). Esto indica que la profesora no ha generalizado el esquema multiplicativo y por ello al percibir una situación que se asemeja (por su forma de representación) a la representación de la definición de una potencia el esquema que aplica para el resultado lo representa con a^n.

La obra didáctica.

La profesora considera que al desarrollar una obra didáctica deben combinarse algunos de los momentos que propone Chevallard (El primer encuentro, exploración, trabajo de la técnica, tecnológico teórico, de institucionalización y evaluación). Pero, siempre, a lo largo de la entrevista resalta la importancia del primer encuentro, y es reiterativa en señalar la necesidad de que los estudiantes puedan ser motivados hacia el aprendizaje a través de actividades lúdicas. Considera además que debe dedicarse buen tiempo a la aplicación de la técnica y en esto hace énfasis, pues considera que debe trabajarse en el aprendizaje de las tablas y desarrollar muchos ejercicios de resolución de multiplicaciones a través del algoritmo.

La profesora aprovecha las actividades que propone en clase como momentos de Institucionalización y, por sus afirmaciones respecto a presentar a los niños un ejemplo y tener la certeza de que "Ellos lo realizan solitos", podría afirmarse que piensa que el niño deberá comprender imitando lo que Ella hace y aceptando como cierto lo que Ella dice.

Al centrarse en la explicación (efecto Topazze), limita los espacios de exploración a sus estudiantes y no da la oportunidad de construir un proceso que se pueda encapsular en un algoritmo y ser explicado por las propiedades de la multiplicación. Lo anterior permite reafirmar los análisis efectuados en los tres episodios analizados.

En el caso de la evaluación, considera que debe hacerse porque además de saber cómo van los niños en su proceso de aprendizaje también le da herramientas a ella misma como docente para saber si está haciendo bien su trabajo o no, y al mismo tiempo reorientar sus acciones.

A través de la entrevista se reveló también que falta coherencia en la aplicación de la técnica y esto se refleja en las interpretaciones que hace la profesora frente al significado de *a x b* pero esto se debe, sin lugar a dudas a la falta de conocimiento de la obra matemática.

Un elemento que conviene resaltar, y que surgió en el análisis de los episodios, es que en la interactividad que establece la profesora con sus estudiantes Ella no trabaja en función del error; es decir no aprovecha las respuestas erróneas de los alumnos para propiciar aprendizajes[22], y, en cierta manera esto se refleja en la entrevista cuando Ella afirma que "Entonces, uno ya pasa a explicarles….".

Aunque en la entrevista también manifestó que debe prestarse atención a cada niño y preguntarle el por qué de sus respuestas, parece ser que se conforma con conocer la causa que genera la respuesta, -como cuando se le interrogó por el ejercicio propuesto en el episodio tres y frente a las respuestas de los niños afirma que estos dan esas respuestas porque esas son las cantidades que los niños escucharon en el enunciado-, pero no menciona que esto se puede utilizar como herramienta para construir la respuesta correcta utilizando adecuadamente elementos conceptuales.

---

[22] Acerca del papel del error en el aprendizaje, Popper y Bachellard sostienen:

La solución reside en comprender que todos nosotros podemos errar, y que con frecuencia erramos, individual y colectivamente, pero que la idea misma del error y la falibilidad humana supone otra idea, la de *verdad objetiva:* e1 patrón al que podemos no lograr ajustarnos. Así, la doctrina de la falibilidad no debe ser considerada como parte de una epistemología pesimista. Esta doctrina implica que podemos buscar la verdad, 1a verdad objetiva, aunque por lo común podamos equivocarnos por amplio margen. También implica que, si respetamos la verdad, debemos aspirar a ella eliminando persistentemente nuestros errores: mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica. (Popper, 1972, p 37).

Para iniciar el proceso de estudio de la multiplicación, la profesora sugiere partir de situaciones cotidianas para el niño; es consciente de la necesidad de contextualizar las ideas abstractas pero sus conocimientos insuficientes, respecto a la obra matemática la limitan. Una vez propuestas estas situaciones que puedan representarse utilizando sumas, trabaja situaciones relacionadas con sumas iteradas, -puede utilizarse también la composición o descomposición de algunas cantidades-, y luego expresar estas sumas como multiplicaciones. Una vez superada esta etapa, recomienda iniciar el estudio de las tablas, dedicando tiempo suficiente para que los niños las construyan, pero sin necesidad de que estas sean memorizadas, pues si bien para ella aprendérselas es importante, porque le ayudan a simplificar su trabajo y “ahorran tiempo”, piensa que este proceso es lento. Propone a continuación resolver situaciones multiplicativas efectuando análisis de la información presentada y, por supuesto la solución de multiplicaciones mediante la aplicación de las tablas y el algoritmo.

Piensa que las propiedades son importantes y que también se pueden abordar en 2° grado, pero no es muy explícita en este punto, afirma que pueden explicárseles a los niños para que ellos las identifiquen cuando “aparezcan” (en contraposición a lo que plantea Cobb sobre la visión representacional de la mente)[23] pero no las percibe como herramientas para construir el concepto de multiplicación y el algoritmo para resolver una multiplicación, sino como elementos puntuales que adicionalmente pueden considerarse en el proceso.

[23] Esta línea de investigación rechaza la opinión según la cual el significado matemático es inherente a las representaciones externas y en cambio propone como un principio básico que los significados matemáticos dados a estas representaciones son el producto de la actividad interpretativa de los estudiantes. Consecuentemente, estos investigadores, argumentan que un recurso matemático tal como “un gráfico en una pantalla......se vuelve «representación» solamente cuando un estudiante lo usa para expresar una concepción” (Confrey, 1990a, p.36) (citado por Cobb, 1992, p. 2)

5. CONCLUSIONES

Respecto a los objetivos específicos.

- Identificar los conocimientos que tienen los maestros acerca del concepto de multiplicación al interior de una institución educativa oficial.

Respecto a la OM desarrollada por la profesora, conviene mencionar que para introducir la relación entre una suma iterada y la multiplicación se presentó a los estudiantes el siguiente esquema de multiplicación:

$$a + a + a + \underline{\overset{b\ \text{veces}}{\quad ..+}}\ a = a \text{ x } b,$$

pero, en las observaciones de aula se evidenció, a lo largo de los tres episodios una falta de coherencia en la definición del esquema adoptado ya que en forma reiterada, y sin haber trabajado con sus estudiantes la propiedad conmutativa de la multiplicación se usó también el esquema :

$$a + a + a + \underline{\overset{b\ \text{veces}}{\quad ..+}}\ a = b \text{ x } a$$

La falta de diferenciación entre estos dos esquemas permite afirmar que la profesora no ha abordado el concepto de la multiplicación desde el análisis de las dimensiones implicadas en el planteamiento de situaciones, lo que sin duda genera confusión en sus estudiantes.

De otro lado, aunque la profesora conoce las propiedades de la multiplicación, no tiene clara la relación entre estas y la construcción del concepto de multiplicación, de hecho, desconoce que el algoritmo para resolver un producto es el resultado de un encapsulamiento de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Lo anterior refleja una falta de conocimiento de la naturaleza del objeto a enseñar por parte de la profesora, y , esto se reafirma cuando, a la pregunta ¿Cómo se representa en forma de producto la expresión $a + a + a + \underline{\overset{n\ \text{veces}}{\quad ..}}+ a$?, la profesora escribe la expresión "a^n".

- Caracterizar la interactividad que los docentes de básica primaria establecen con sus estudiantes en la enseñanza del concepto de multiplicación.

En las observaciones de aula se pudo establecer que el esquema multiplicativo no se aplicó adecuadamente en algunos casos y la profesora no toma en cuenta las acciones erróneas de los alumnos, que están directamente relacionadas con el objeto de enseñanza, para producir devoluciones del problema que perturben el conocimiento que origina el error y ayudar a una posible toma de conciencia que dé lugar a una mejor adaptación del esquema. Es decir, se priva de la oportunidad de *construir* Zonas de Desarrollo Próximo con base en la interactividad.

En algunas ocasiones no se pudo establecer si los estudiantes dominan o no las técnicas para resolver multiplicaciones, pues la profesora pregunta a sus estudiantes sobre la manera como llegaron a la solución propuesta, pero Ella misma las responde incurriendo en el efecto *Topazze.* Al proponer situaciones problema a sus estudiantes y recibir de Ellos respuestas que no son las correctas piensa que están "adivinando" y su preocupación se centra en "mostrar la solución correcta" para lo cual decide pasar adelante sólo al estudiante que tiene la respuesta correcta. Lo anterior podría reflejar su concepción *instrumental* de la enseñanza de las matemáticas, que como lo mencionó en la entrevista requiere de "enseñar a resolver operaciones correctamente ya que las matemáticas son una herramienta que ayudan en la vida". Por otra parte, estas actuaciones de la profesora, reflejan una confianza desmedida en la explicación y una subestimación de las causas y la función del error en la comprensión y la construcción del conocimiento.

En resumen, *las acciones de la profesora no logran articularse con las que realizan los estudiantes,* en función de los propósitos que se plantean en diferentes momentos didácticos, porque predomina una concepción centrada en los aspectos visibles de la actividad matemática que descuida los procesos de transformación internos del alumno sobre los objetos de la actividad. Los mecanismos que hacen posibles tales transformaciones sólo se manifiestan al ojo del docente que puede interpretar los resultados de la acción en términos del funcionamiento cognitivo del alumno en relación con la situación planteada y el momento didáctico que orienta las acciones de los participantes en la actividad.

- Caracterizar las prácticas de los maestros al construir el concepto de multiplicación a partir de los planteamientos de la Teoría antropológica de la didáctica.

La OD, por su parte propicia la participación activa de los estudiantes en las actividades propuestas tanto en el aula como en las tareas y talleres sugeridos en los textos guía, se combinan permanentemente el *momento exploratorio* con el momento de *aplicación de la técnica,* cuando los estudiantes tratan de expresar mediante sumas y multiplicaciones los arreglos de diferentes cantidades de objetos para construir las tablas de multiplicar y cuando se resuelven multiplicaciones utilizando el algoritmo de la multiplicación. De igual manera, se cuenta también con momentos de *evaluación* e *institucionalización*, pues la profesora aprovecha las respuestas de sus estudiantes para verificar el manejo que Ellos hacen de la *aplicación de la técnica* y para puntualizar algunos aspectos relacionados con el uso de símbolos y la expresión de la multiplicación en forma vertical. Pero, aunque se combinan estos momentos, el análisis de los tres episodios pone en evidencia el predominio de momentos de aplicación de la técnica, lo que permitiría afirmar que en parte se validó la hipótesis de que la enseñanza de la multiplicación se reduce a la aplicación de técnicas y algoritmos y se privilegia poco la estructuración del pensamiento en el niño. Esto es consecuencia de la ausencia de una visón institucional de la obra matemática que oriente las acciones de la profesora y le permita confrontar con la que ella ha construido.

En el plano de las *restricciones impuestas por la institución educativa* Gabriel García Márquez, la revisión de los documentos institucionales reveló que el PEI no logra reflejar los Lineamientos curriculares del MEN los cuales se interpretan más como contenidos y objetivos[24] que como un plan sistemático que promueva el desarrollo de competencias multiplicativas; como consecuencia, el PEI se centra en la enunciación de actividades generales sin discriminar los elementos estructurales de la OM ni su relación con la OD. En resumen, no se ha desarrollado una Obra matemática bien estructurada es decir, no se tiene definido un tipo de tareas para proponer a los estudiantes, las técnicas utilizadas para el paso de la suma a la multiplicación atienden a lo que cada profesor conoce o considera pertinente presentar; por ende no existe una tecnología institucional que soporte el uso o aplicación de dichas técnicas, y, en consecuencia se carece de una

[24] Ver sección 3.2.4. tabla “Plan de Trabajo Área de Matemáticas”

teoría para orientar las acciones de los maestros en la enseñanza de la multiplicación. Como consecuencia de la ausencia de una Obra matemática y una obra didáctica, las prácticas de los profesores se revelan *ingenuas* y esto se evidencia en la selección del texto guía solicitado a los estudiantes. La profesora es proclive a desarrollar clases activas pero no logra desplegar una actividad *sistemática* ni construir una *praxeología* –matemática y didáctica– *coherente* en torno a la introducción de la multiplicación.

Respecto al Objetivo General.

- Identificar elementos que contribuyan a fundamentar una estrategia de formación de maestros para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas de la Educación básica primaria en una Institución Educativa oficial.

1. Es necesario construir la Obra Matemática escolar en torno al concepto de multiplicación de números naturales teniendo en cuenta el análisis dimensional sugerido por Vergnaud en el paso de la suma iterada a la multiplicación. El análisis de los esquemas, teoremas, proposiciones y representaciones utilizadas debe ser ampliamente estudiado en relación con las OM y OD propuestas.
2. Se sugiere incluir espacios institucionales en los que los profesores reflexionen sobre sus prácticas de aula para que tomen conciencia de sus concepciones y creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y de la forma como esas concepciones influyen en la manera en que enseñan y en que creen que aprenden sus estudiantes, buscando reorientar la acción del profesor hacia el conocimiento que movilice a sus estudiantes cuando interactúa con situaciones matemáticas en función de una Obra matemática que consulta las intenciones institucionales propias del profesor.
3. La obra Didáctica debe ser construida a partir del conocimiento profundo de la Obra matemática y esta debe reflejarse en los de textos de apoyo seleccionados en la Institución Educativa y en el diseño de secuencias didácticas a llevar a cabo en el aula. Lo anterior sugiere un análisis profundo de los textos que se ofrecen y en el análisis de las prácticas que se proponen.

4. Focalizar la mirada en los observables y coordinaciones de los sujetos que participan en una actividad permite revelar en detalle las rupturas comunicativas que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje.
5. El diseño de una propuesta de formación para maestros debe incluir espacios de construcción colectiva tomando como base los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. El entendimiento e identificación de los elementos que soportan la propuesta para el trabajo en cada área de conocimiento es fundamental. Lo anterior, permitirá que a nivel Institucional pueda construirse un plan de estudios coherente y articulado a los diferentes contextos de aprendizaje y enseñanza y que pueda construirse una praxeología Institucional propia que garantice la definición de unas tareas, unas técnicas, tecnologías y teorías que permitan guiar la labor de los docentes. Parece ser que en la Institución estudiada se ha delegado a los textos escolares esta misión y se omite el estudio de la fundamentación del área.

Conviene resaltar, a manera de cierre, que un aporte metodológico valioso del presente trabajo de investigación lo constituye sin duda la articulación de unidades de análisis de la interactividad en el aula, lo que permitió estudiar en detalle las relaciones entre la Obra Matemática y su despliegue en la obra Didáctica, así como las rupturas comunicativas que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

Andrews, P. & Hatch, G. A (2000). Comparison of Hungarian and English Teachers' Conceptions of Mathematics and Its Teaching. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 43, No. 1 (2000), pp. 31-64 Published by: Springer*. En: http://www.jstor.org/stable/3483233

Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113).Santander. SEIEM.

Brian A. y Lars L. (2004) The impact of teacher training on student achivievement: quasi-experimental evidence from school reform efforts in Chicago. *The Journal of Human Resources vol 39, No. 1*, 50-79.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*.En: http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf. Traducción al castellano: *Glosario de algunos conceptos de la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas.*César Delgado, G. *Universidad del Valle*, 2003. Cali, Colombia.

Castro, Heublyn y otros (2005). *Multisaberes 2*. Bogotá: grupo Editorial NORMA.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional (2006).*Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* Bogotá

Chevallard Y, Bosch M y Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. I.C.E. Horsori. Universidad de Barcelona.*

Chevallard, Y. (1991).*La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.*Aique. Argentina. Título original: *La transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. Grenoble (1985).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropoligique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, nº 2, pp. 221-266.Traducción al castellano: Barroso, R. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Disponible en: http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/practica_marcosteoricos3/Chevallard_Teoria_Antropologica.pdf

Chevallard, Y. (2001, Abril). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del seminario interuniversitario de Investigación en Didáctica de las matemáticas,* Huesca, España.

Chevallard, Y. (2007). Readjusting Didactics to a Changing Epistemology *European Educational Research Journal*. **6** (2), pp. 131-134. Traducción al castellano: Reajustando la didáctica a una epistemología cambiante. César Delgado, G.. Documento de uso académico. *Universidad del Valle*,2008.Cali. Colombia.

Coll, C. et al. (1995). Actividad Conjunta y Habla. En Fernández B. & Melero Z. M. (compiladores), *La interacción social en contextos educativos*. Siglo XXI. Madrid, pp. 193-326.

Delgado, C. (1998). *Estudio Microgenético de Esquemas Conceptuales Asociados a Definiciones de Límite y Continuidad en Universitarios de Primer Curso.* Tesis Doctoral. Publicaciones Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España.

Delgado, C. (2010). Bases epistemológicas y didácticas para la enseñanza de conceptos matemáticos. En M. Trujillo, N. Castro, & C. Delgado (Eds.), *El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de calculadoras graficadoras* (pp.11-71).Bogotá, Colombia: Ediciones Unilasalle.

Delgado, C. (2010). Enseñanza, actividad y aprendizaje. En M. Trujillo, N. Castro, & C. Delgado (Eds.),*El concepto de función y la teoría de situaciones. Bases epistemológicas y didácticas en la enseñanza del concepto de función con la ayuda de cálculadoras graficadoras* (pp.73-106). Bogotá, Colombia: Ediciones Unilasalle.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics, in Ernest, P. Ed. *Mathematics Teaching: The State of the Art,* London, Falmer Press, 1989: 249-254. Disponible en: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Espinoza, L. & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, 18 (3), 355-368.

Flores, P. (1998). *Concepciones y Creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza* Granada: Editorial COMARES.

Joya, A. (2007). G*uía de Matemáticas 2.*Editorial Santillana. Bogotá.

Inhelder, B.(1978). Las estrategias cognitivas: aproximación a los estudios de resolución de problemas. *Anuario de psicología*. 18, 4-20.

Lezama, J. (2008) Docencia en matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología. En P, Leston Ed. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol 21 pp 889-900.Clame A.C. México.

Moreira, M. (2002) La Teoría de lo campos conceptuales de Vergnaud, la Enseeñanza De las Ciencias y la Investigación en el Área. *Enseñanza de Las Ciencias, 7(1) 2002.* http://22ir.ufrgs.br/ienci:.

Orozco, M. (1996) *Estudio micro genético y procesual de la construcción de la operación multiplicativa*. Tesis doctoral.Universitat de Barcelona. Barcelona. España.

Orozco, M. (2003). Formación de docentes de primaria en la comprensión del sistema de notación en base diez, *EMA Vol. 8*, *No. 1*, 3-29

Piaget, J. & García, R (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI. México Título original: *Psicogenèsis et histoire des sciences.* Flamarion. París.Traducción al castellano: (1982)

Piaget, J. (1969).*Biología y conocimiento: ensayo sobre las relaciones entre las regulaciones orgánicas y los procesos cognoscitivos*. 12ª. Edición, Siglo XXI; México D.F., Título original: *Biologie et connaissance: essai sur les relations entre les régulations organiques et les processus cognitifs* . Gallimard. Paris (1967).

Piaget, J. (1973). *Remarques sur l'Éducation Mathématique* . Match Ecole, 58, 1-7. Traducción al Castellano en: J. Piaget, G. Choquet, J. Dieudonne y Otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas*., p.p. 219-227, "*Observaciones sobre la educación matemática".* Hernández, J. (Comp). Alianza Universidad. Madrid. (Edición consultada 1986).

Piaget, J., (1990) La Equilibración de las Estructuras Cognitivas: problema central del desarrollo. Siglo XXI, Madrid. Original L'équilibration des structures cognitives : problème central du développement (1975).Paris: Presses univ. de France. (EEG 33)

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Growus (Edit), *Handbook of research on Mathematics Teaching and learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company.New York., 127-146. Traducción al castellano, Creencias y concepciones de los profesores: Una síntesis de la investigación. César Delgado, G. Documento de uso académico. *Universidad del Valle*, 2009. Cali. Colombia.

Vergnaud G. (1990). La théorie des Champs Conceptuales*. Recherches en Didactique de Mathématiques*, Vol. 10, 2 -3, pp. 133 - 170. Traducción al castellano en *Didáctica de las matemáticas Escuela francesa,*CINVESTAV-IPN México, 1993.

Vergnaud, G. (1981) El Niño, las matemáticas y la realidad, Trillas, México D F. 1991.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum pp.39-59.

Vergnaud, G. (1990) "La théorie des Champs Conceptuales" Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol. 10, 2 -3, pp. 133 - 170. 1990. Traducción al castellano: *Universidad del Valle- Programa de Maestría en Educación matemática.*

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and Why? En *The Development of multiplicative Reasoning in the learning of mathematics.* Ed. Guerson Harel & Jere Confrey. State Universite of New York. 1994. Pp. 41-59. Traducción al castellano, Campo conceptual multiplicativo ¿Qué? Y ¿Para qué? César Delgado, G. Documento de uso académico. *Universidad del Valle*, 2008. Cali. Colombia.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and Why? En *The Development of multiplicative Reasoning in the learning of mathematics.* Ed. Guerson Harel & Jere Confrey. State Universite of New York. 1994. Pp. 41-59. Traducción al castellano, Delgado C., *Campo conceptual multiplicativo¿Qué? Y ¿Para qué?.* Universidad del Valle. Documento interno (2008). Cali, Colombia.

Vergnaud. G. (2007). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede Ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? Ponencia presentada por Gèrard Vergnaud, Publicada en francés en las *Actas del V Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo,* celebrado en Madrid, 11-15 septiembre de *2006.* Traducida por Concesa Caballero, en: *Investigações em Ensino de Ciências*, Vol. 12(2), pp.285-302.

Vygotski, L. (1996).*El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores,* Editorial Crítica, Barcelona. Título original: *Mind in Society. The Development of Higher Psichological Processes.*Harvard University Press, Cambridge, Mass (1978).

Vygotski, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje.*Ediciones Paidos. Barcelona. Título original: *Thought and Language.* The Massachusetts Institute of Technology (1986).

ANEXOS

Anexo 1. Transcripción Entrevista Docente

En el contexto de la investigación que se está haciendo sobre la interactividad, en la enseñanza de la multiplicación vamos a hacer algunas preguntas a la profesora María Ofelia Díaz que tienen que ver con el desarrollo de la investigación. Entonces, primero vamos a empezar por la Dimensión personal

- Empecemos primero por tu formación, ¿Qué has estudiado profesora? ¿Cuál es tu formación académica?

P/ Bueno, Yo soy graduada de la Normal Nacional de Señoritas; en el año 1989 me gradué como bachiller pedagógico y como a los 5 o 6 años empecé ya la Universidad; soy licenciada en educación básica.

- Y ¿Donde estudiaste la licenciatura?

P/ Estudié en la universidad Antonio Nariño. Era la que quedaba en Pance. Primero fue la sede en el barrio la Selva, no me acuerdo el nombre, pero allí estaba la sede y después nos trasladaron a Pance.

- Y era modalidad a distancia o presencial?

P/ No, Era los sábados, a distancia.

- Cuándo terminaste tus estudios de licenciatura?

P/ Yo terminé en el año 2002.

- Y ¿cómo eras para matemáticas profesora?

P/ Pues haber, yo en primaria que me acuerde, en primaria, - me devuelvo a la primaria-, se me dificultaba mucho la división, hacer cálculos, yo cada que colocaban pues así, como sumas largas o tenía que para hacer cálculos se me dificultaba. La división, todo lo que tenía que ver con decimales, ya en bachillerato, lo que tenía que ver con las fórmulas. O sea La matemática no ha sido pues la materia de mi agrado, pero, pues pasaba, con dificultad, pasaba. En bachillerato, de pronto me tocaba habilitar, pero pues igual no era así como muy de mi agrado.

P/ Pero te acuerdas de algunos buenos profesores de matemáticas que hayas tenido?

Si, de la primaria pues algunos, pues algunos, eran muy pacientes, que le dan a uno confianza, que salga al tablero, no gritan, de la primaria algunos, aunque anteriormente era todo como muy memorizado y la relación tradicional. En bachillerato. Si, si me costó habían profesores a los que no los entendía; muchas veces eran los compañeros me explicaban y que bueno, ellos le dan oportunidades al final y al final pasaba, dejaban talleres, en grupo y de esa manera era como pasaba.

- Pero finalmente te han gustado las matemáticas.

P/ Si, pues yo estoy en primaria, yo enseño primaria, y yo la matemática de primaria es fácil, o sea, y me gusta porque yo observo que a los niños como que les gusta más la matemática, participan más porque si uno les pone actividades manuales y a Ellos les gusta que les coloquen ejercicios así que uno les coloque, que tengan que ver con lo cotidiano, resolución de problemas y a ellos les gusta, y si les llevo material real les agrada más. Tiene mucho que ver la motivación que uno tiene y uno con ellos.

- Y ¿por qué decidiste ser profesora?

P/ Desde pequeña me gustó, pues en mi familia hay docentes, tías y primas, que son docentes, de pronto como que hay herencia por ese lado. Mi mamá también quería, mi mamá con mucho esfuerzo logró que yo quedara en la Normal; yo presenté la entrevista, los exámenes y quedé. Perdí 1° de bachillerato por inglés, ni por matemática fue sino por inglés y resulta que allá si uno perdía el año no lo recibían, pero pues revisaron mi comportamiento y seguí, y la verdad me gustó mucho todo el tiempo que estudié en la normal, me siguió guastando. A mí me gusta mucho enseñar. Hablando de la enseñanza cuéntame cómo enseñas matemáticas ahora en primaria, cómo defines lo que enseñas y cómo lo haces.

P/Pues a ver, a mi matemáticas, yo diría que … Estoy en grado 1°; he estado hasta el grado 3°, por eso no me gusta en grado 4 ° o 5°, porque es como más complejo, los temas de matemáticas son más complejos. En los grados primerito y segundito me gusta por lo que le dije ahora, los niños participan mucho, ellos participan más. Utilizo material, siempre que voy a empezar un tema o clase de tema nuevo, pues uno tiene en cuenta los conocimientos previos de los niños, lo que ellos saben. Luego…allí sigo y el material real es indispensable, actividades en clase, las salidas al tablero, ejercicios de competencias, a ellos les gusta mucho competir y están pues afanados porque el compañero que sale allá lo haga bien, si lo hizo mal entonces miran allá como. O si lo están haciendo allá, ellos también están haciendo en el puesto la operación, mirando la forma de cómo soplarle al compañero que lo está haciendo allá para que les vaya bien.

O sea, los ejercicios de competencias me gusta utilizarlos para enseñar la matemática. Utilizamos mucho material real, la motivación es importante, es como para que ellos se motiven, se interesen, que les agrade. Pero entonces, para ti eso tiene que ver mucho con la manera de ellos aprenden, ¿qué piensas sobre cómo aprenden los niños?

P/ Claro, si yo voy simplemente a una clase a dictar un tema, a escribir en el tablero y simplemente decirles copiemos sin llevarlos a una explicación, sin trabajar primero pues haciendo pues de una forma lúdica, algo que yo vea, o sea si veo que están interesados, se motivan, pues uno…. O sea, no una clase magistral. Diferente a que si usted ya ha empezado un tema, al otro día qué hacemos, cómo vamos a reforzar ese tema,… igual, les presento talleres o trabajamos en el tablero, empezamos la actividad con un juego, hacemos actividades lúdicas y después empezamos la clase. A ellos les gusta, les llama la atención, y que las actividades que yo les pongo sean ilustradas no, a Ellos les gusta, que hayan dibujitos…. y la verdad que sí, o sea que me ha dado buenos resultados.

- ¿Cuánto llevas trabajando en primaria?

P/ Pues yo trabajé 11 años en Fe y Alegría, empecé con 2°. Me gradué y al mes siguiente empecé a trabajar. De allí en adelante preescolar, 1°. En Fe y Alegría trabajé hasta 4° pero sólo un año. Aquí en la I. E. Gabriel García Márquez empecé con 2°, hasta 3°. Llevo 22 años trabajando en primaria.

- ¿Qué piensas de la primaria, ya tantos años trabajando allí?

P/ A mí me gusta mucho trabajar con niños. Hasta 3° de pronto, me gusta, ya de ahí en adelante, pues las edades…. Yo soy como pasiva, no se pues tengo autoridad con los niños, se cómo llevarlos para que no molesten, Pero ya las edades de los más grandes me da como miedo. Y primaria es fundamental no?, son las bases.

- ¿Qué piensas de la manera como está estructurada la primaria allí donde trabajas?, aparte de las edades de los niños ¿qué piensas del sistema educativo, y cómo ha sido este proceso, sobre todo en primaria que es donde te has desempeñado tantos años?

P/ La primaria, no sé, es donde ellos tienen que tener las bases fundamentales para el bachillerato, hay muchos factores que intervienen: sociales, la familia, la alimentación, los trastornos que los niños han tenido en el vientre de su madres, influyen muchas cosas, pero que le digo, cuando trabajé en fe y alegría con primaria pues diferente al trabajo que hago ahora aquí.

- ¿Por qué?

P/ Pues qué le digo, en ese tiempo como que no habían tantas dificultades, no era tan marcada la dificultad en el aprendizaje; ya, cuando pasé al distrito de agua blanca, sí, porque el medio no es el mismo; ahora Fe y Alegría que es una institución privada también tiene las mismas dificultades, la sociedad ha cambiado más en el sector privado, pero igual también hay niños muy brillantes aquí en primaria, que viven aquí en este sector más todavía, pero igual hay niños que tienen habilidades para una cosa para otras no.

- Pero entonces esto tiene que ver con la manera en que Ellos aprenden?

Si yo voy simplemente a enseñar un tema haciendo en una forma lúdica, si uno ve que ellos están interesados…. O sea no una clase magistral, diferente de que ustedes---- a ellos les gusta, y que los talleres sean como ilustrados.

Bueno, y ¿qué piensas de la Institución donde trabajas, la Institución Gabriel García Márquez?

P/ Pues esta Institución ha tenido muchos cambios. Cuando yo llegué cambió de ser una Institución privada a oficial; empezamos con una rectora encargada, que era Ana Gladys Filigrana; con Ella funcionó muy bien, al menos cuando estaba la primaria, bien porque Ella era una persona muy pilosa, sabe mucho y estudiaba, ya después cambiamos de Rector, llegó Omar como encargado, también funcionó la Institución y ya ahora, estamos con el Rector nombrado en propiedad, el Sr. Fernando Gómez. Qué le digo, la Institución tiene potencial, hay un número bueno de estudiantes y hay un grupo de profesores que son buenos, a los que les gusta estudiar; a mí personalmente mucha gente me dice que por qué no me cambio, que puedo irme a una escuela cercana a mi casa, que estoy muy lejos, pero a mí me gusta trabajar ahí, porque los niños lo necesitan a uno…. Que hay unos casos que se salen de las manos, que uno ve que ahí no se puede hacer nada, pero hay otros que dan frutos, que hay cambios, que el PEI, que constantemente hay que estarlo revisando…… hay que estarlo reforzando, pues tiene que ir que con la ley, pero ahora estamos trabajando bien, y estamos haciendo un plan de estudios, y esa es una herramienta fundamental que debe tener una institución y, se ha avanzado mucho en eso.

- Bueno profesora Ma. Ofelia; vámonos metiendo ya un poco más en el área. ¿Cómo ves el plan de estudios de matemáticas?

P/ Si, pues yo estoy en el área de primaria, los temas que hemos visto, los temas que se han visto igual están bien seleccionados; igual hemos tenido muchas reuniones, pero yo lo que veo es que los temas están muy bien seleccionados, es que la idea no es llenarnos de contenidos y contenidos, temas que sean esenciales.

- Y los contenidos de segundo grado, ¿cómo los ves?

P/ Como le digo, lo que yo he observado, están bien seleccionados, yo ahora estoy en primero, y están bien seleccionados, siguen como el hilo del tema.

- Ahora estabas hablando de que hay otros factores sociales, que pueden intervenir en los procesos de desempeño de tu trabajo y del aprendizaje de los muchachos; no me quedó muy claro qué factores son, o qué factores tienen incidencia allí.

P/ Claro, uno en la clase, la idea es que todos los niños aprendan, pero cada uno tiene su ritmo de aprendizaje, por qué? Porque intervienen muchos factores, hay niños que…..a ver, el nivel familiar: hay niños que solo viven con la mamá, cabeza de familia, entonces la mamá trabaja y dejan al niño solo, cómo hay casos en que la mamá trabaja y así se quede el niño con su hermanita, él solito hace sus tareas…. Pero hay otros niños a los que eso les afecta, porque no tienen la mamá que está allí ayudándoles. La alimentación, la salud influye: hay niños que llegan al salón con dolor de cabeza, se desmayan, tienen pereza, así es muy difícil que rindan, así sean muy inteligentes. Hay niños, yo tuve el año pasado un niño que era desnutrido, se veía blanco, yo sabía cómo era la situación, pero era un niño brillante en matemáticas, o sea, hay a unos a los que les afecta demasiado y hay otros a los que no. Los social, pues estamos en una sociedad con los niños se quedan hasta tarde viendo una novela, al otro día ellos se cuentan la novela, y los mensajes que ellos reciben de los medios, todo eso influye, para mí sí, todo eso influye mucho. Que hayan tenido trastornos cuando hayan estado en el vientre también; si la mamá ha tenido problemas, bueno si el embarazo no ha sido bueno, el niño puede nacer con problemas…. Yo tengo un niño en este momento, Oscar, que tiene problemas de hiperactividad, ya le hicieron el diagnóstico, pues se mandó a la sicóloga; y yo, hablando con la mamá, la mamá me decía:

-No profesora, yo tuve muchos problemas en el embarazo de este niño, a uno le da mucha pena preguntar más, pero la señora me dijo "yo sufrí mucho en el embarazo"….; entonces, todo eso influye, Oscar es muy inteligente, pero tiene muchas dificultades para leer y escribir, conoce las letras, las trabaja una por una, pero no escribe ni una palabra. Matemáticas lo mismo, le dicto un número y lo escribe, pero ya para escribir la secuencia, 1, 2, y él no sabe qué sigue, se le olvidan los números, no se acuerda... en eso influyó en gran parte el problema que tuvo la mamá.

- Y a nivel de materiales, no sé, como materiales que tenga uno para trabajar en la escuela…

P/ Recursos también, los recursos didácticos también son indispensables, pues hoy en día utilizamos que el portátil y todo eso, pero allá no…. Qué se ha adelantado mucho con el televisor, es un medio audiovisual que les llama mucho la atención a Ellos, y los niños aprenden porque están viendo. Eh… material didáctico, si, hace mucha falta, los carteles, lotería, juegos para trabajar con ellos allí en clase, uno colabora y uno lleva, pero igual uno tiene que estar buscando, porque el niño ya se cansa del mismo juego, pero el profesor no puede estar sacando de su bolsillo, y uno les lleva juegos, pero pues ya están cansados de ese juego y entonces no juegan; a Ellos se les piden, pero, unos llevan y otros no. Alguien va a venderles lotería y ellos se emocionan, al otro día la mamá les da la plata, y para eso si, llegan y compran, pero eso es estar innovando no, cambiando para que ellos vayan conociendo cosas nuevas. Es como con las películas que uno les presente, todas esas películas ya me las vi… ya la vi, entonces uno tiene que buscar la manera de conseguir cosas nuevas; Si, el material didáctico es muy indispensable para el aprendizaje.

- Metámonos un poco más en el tema central que es la Multiplicación, ya me habías pasado por escrito, lo que para ti significa la multiplicación. Habías dicho que la multiplicación es…

P/ Una suma abreviada…., así es, es lo que nos enseñaron toda la vida, es una suma abreviada, y así, pues en el grado segundo que es donde se trabaja la multiplicación, así la empiezo yo, hacemos la suma de sumandos iguales, y ya después, pues se le explica a los niños, empezamos con la suma de sumandos iguales, y después, para no hacer esa suma tan larga, hago algo más corto, entonces ya empezamos a meter el signo de la multiplicación, el "por", para que Ellos vayan… Ellos ahorita en primero están diciendo "Ya se me las tablas", pero porque en sus cuadernos traen las tablas, pero ellos no se imaginan, todavía no saben cómo se les va a dar el proceso de la multiplicación, no saben cuando empezamos ese tema, pero yo en segundo siempre la he enseñado así, como una suma abreviada.

- Y entonces, para Ti ¿Qué significa tres por cuatro?

P/ Tres por cuatro, es cuatro veces el tres, sumo cuatro veces el tres.

- ¿Y siempre es así, en la presentación de los materiales que usas?, o has visto diferencias en la interpretación de la multiplicación.

P/ No, yo siempre, pues igual, como yo no me baso solamente en un texto, yo me documento, el texto guía que tenemos es el de Santillana, y busco, yo tengo otros textos, y busco, me documento y siempre veo el tema así, siempre lo veo así.

- O sea, el segundo número que se está multiplicando, indica; si es tres por cuatro, entonces indica las veces

P/ si,

- ¿Y el primer número indica el número que se repite?, ¿el número que se suma?

P/ si, el número que se suma.

- Bueno, entonces ¿cómo ves las tablas?, por ejemplo, la tabla del cuatro.

P/ A ver, pues igual, antes de empezar las tablas, por ejemplo cuatro por uno, el cuatro por dos, sumo el cuatro dos veces, cuatro más cuatro. No, yo empiezo, cuando estaba en segundo, cómo empiezo yo, con la formación. Diga usted yo tengo en mente que voy a enseñar la tabla del cuatro, entonces yo empiezo a sumar, a sumar, ya después yo empiezo ya con el proceso de multiplicación; vamos a hacer cuatro más cuatro, pues ellos lo hacen rápido, pero les digo vamos a hacerlo más corto, para no sumar dos veces…, o sea, así sigo hasta la del nueve, si ya se pasan…, o sea, lo de las tablas si… es un proceso largo, no es tan fácil, si van a hacer un problema, un ejercicio donde él tenga que hacer la operación, diga Usted 243 por 26, pues, si el niño no se sabe las tablas, es que las tablas es un proceso largo, a mí me costó trabajo, yo ni me acuerdo cómo me enseñaron, entonces que, libro abierto, lo más importante es que él se sepa el proceso, allí está trabajando la tabla del seis y la tabla del dos. Lo que yo evaluaría, lo importante para mí es que el maneje el proceso de multiplicación, cuando uno está haciendo una operación. La tabla del dos solita, entonces sí, para no sumar cuatro más cuatro más cuatro, simplemente digo cuatro por tres.

- O sea que cuatro por tres, yo digo cuatro más cuatro, más cuatro, y después doce.

P/ si, doce.

- Yo observé cómo introducías las tablas; por ejemplo la tabla del cuatro, los pones a que hagan grupos de a cuatro cierto?

P/ Exacto, sí.

- O sea el cuatro una vez, después sigues así, hasta llegar a cuatro nueve veces o…?

P/ si, exacto, uno lo puede hacer en forma gráfica o simplemente con sumas, o sea uno les da el ejemplo, la idea es que da el ejemplo y que ya los niños, ellos solitos lo hacen, ya ellos salen al tablero, o lo representan con dibujos, e Ellos les gusta mucho el dibujo, y ellos salen al tablero, o cargan material y ellos lo usan.

- Por ejemplo, volviendo a lo de las tablas, ¿cómo lo expresarías,-si quieres toma papel-. Por ejemplo, la tabla del tres, cómo la escribes tres por uno, tres por dos,…?

P/ Pues aquí seria, dos más dos, más dos y va diciendo a medida que escribe:

3 x 1 →

3 x 2 → 2 + 2 + 2 Tres por dos, tres veces el dos

3 x 3 → 3 + 3 + 3 tres por tres, tres veces el tres.

3 x 4 → 3 + 3 + 3 + 3 tres por cuatro, cuatro veces el tres

3 x 5 → 3 + 3 + 3 + 3 + 3 tres por cinco, cinco veces el tresA, entonces para ti la tabla del tres es decir….

P/ Si, igual si un niño me sale con que él haga al contrario, que él lo haga diferente…. que sume cinco veces el tres es el mismo resultado, y ahí estamos utilizando una operación, igual el niño sabe, uno dice ¡Ah, usted está haciendo la operación…. Cómo es, la primera, la conmutativa!, no importa el orden, uno hace así, sumando el primer número las veces que me piden, uno lo hace así, pero en caso de que el niño lo haga al contrario, uno le dice que está bien. Está bien porque el resultado es el mismo. Y porque, El ahí está aplicando la propiedad conmutativa. Cambió el orden de los factores, el resultado es el mismo.

- Bueno, y yo te pedí que me dijeras cómo resuelves 342 por 2.

P/ Pues yo lo hago mentalmente…

- Ah bueno, pero yo quiero que no lo hagas mentalmente, ¿cómo haría el niño?..

P/ Ah, trescientos cuarenta y dos por dos y lo escribe. Pues el niño sumaría dos veces trescientos cuarenta y dos, si yo le pongo al niño vamos a sumar, entonces El hace 342 + 342.

- Pero vos cómo lo haces si lo pones en otro sentido, sin pensar en suma y sin hacerlo mentalmente, ¿cómo lo haría normalmente?

P/ Ah, pues haría la multiplicación y escribe

342

X 2

Y haría dos por dos cuatro, así estoy utilizando la tabla del dos, dos por cuatro ocho y dos por tres seis, así

342

X 2

684

O sea, ese sería el proceso, en forma vertical y aplicando la tabla.

- Bueno, ahora, mirémoslo con letras; cuando por ejemplo yo te digo $a + a + a + a + a + a$ seis veces *a* ¿Cómo pasarías esa suma en forma de multiplicación?, es que con la otra pregunta que me pasaste por escrito te lo hice con *n* veces...

P/ Si, allí era a la *n*. Aquí se está repitiendo la *a* seis veces, o sea, sería

$$a \text{ x } 6.$$

- A bueno, si porque quería aclarar…

P/ Si porque aquí, en las preguntas que contesté por escrito fue a la *b*- veces

- A bueno, y si fuera *a,n* veces, como *n* veces no se puede especificar, entonces se usaron puntos suspensivos…, cómo la escribirías?

P/ A, ¿cómo está aquí? (refiriéndose a una pregunta que ya había contestado por escrito). Aquí sería *a* a la *n* veces y escribió:

$$a^{n \text{ veces}}$$

- Si, yo quería aclarar…

P/ De lo que me acuerdo yo no?... Está bien, bueno, pasando a la otra pregunta que habías presentado por escrito…

P/ hablamos de multiplicar por 3….

- A, si; estamos hablando de la relación que existe entre suma iterada y lo que quiere decir “multiplicar por tres un número es hacer tres veces más grande ese número”, que en tus clases aparecía…

P/ Qué relación había?, pues, que en la suma iterada se presenta una suma, y qué estamos haciendo aquí, [lee] “ al multiplicar por tres un número…” ahí estamos haciendo una suma…

- No, no me queda claro, escríbelo a ver si así lo entiendo mejor.

P/ Aquí dice que multiplicar por tres un número, como 4 x 3. Aquí dice que multiplicar por tres un número es hacerlo tres veces más grande, pues si lo sumo, me da la cantidad mayor que sería 12; y qué relación hay con una suma iterada, pues que aquí estoy repitiendo la suma (y señala 4 + 4 + 4) si?.

- Listo, ya entendí, ya me quedó claro… bueno, ¿cómo haces para escoger el texto guía que trabajas con tus estudiantes en la clase?

P/ A, pues si la institución escoge un texto, pues los profesores miramos, si están bien ilustrados, si las actividades son entendibles para los niños, si están de acuerdo a la edad, entonces, si se pide, listo…. Trabajo con el texto guía, y los niños que los tengan, les explico, se tiene una actividad general y acá, terminó este niño y este niño tiene libro, explico, les explico y el niño trabaja en su libro. Tengo otros textos guías en el salón de clase los mantengo ahí, yo me mantengo leyendo, para mantener en el salón porque me gusta dejar muchas actividades, saco copias, les escribo en el tablero les pongo muchas actividades de cálculo, que complete, y ya…, a los niños les gusta mucho. El libro, el libro que tenemos ahora, (se refiere al del grado 1°) el libro de matemáticas de verdad no tiene actividades buenas, trabajo con otro libro, con otros libros, porque a mí las actividades no me gustan. A mí en español si, y veo que me dan resultado porque los niños entienden. Yo les explico una vez y ya ellos solitos, me llegan al resultado y lo hacen bien, entonces, textos guías tengo muchos, o sea, trabajo con el que tienen, si yo veo que son actividades buenas lo utilizo.

- Y qué criterios utiliza el colegio, cuando dices que "el que pide el colegio" para decidir el texto?

P/ Pues lo que yo le decía, por ejemplo a mí en primero, como nos reunimos por niveles para ver el texto, cada uno lo mira y después se discute a nivel de primero, que sean bien ilustrados, que tengan buenas actividades que el niño entienda, que hayan también actividades que lo pongan como a pensar y a analizar, pero al mismo tiempo que estén como de acuerdo a la edad, no? Porque primero el niño tiene que leer, a medida que uno va avanzando *-en la lectura, el niño, El ya solito…, por ejemplo ahora, ya los niños el libro, uno mira, y si el niño puede leer, usted sabe, lo pongo a leer y le digo, bueno, entonces usted qué tiene que hacer… eso sí, los textos que sean ilustrados, que tengan buenas actividades, que el niño los entienda, y que si, también los ponga a pensar… es que hay algunos libros que son muy complejos, por ejemplo el que tenemos ahora, el de matemáticas no me gusta, porque tiene mucha cosa que el niño… tendría yo que ponerme con cada niño, pero la verdad es que no, son, son, utilizan palabras, pero son ejercicios muy, muy complicados para ellos. No se no?, se confunden.

- O sea que en ese caso, el texto no está ayudando nada?

P/ Pues el texto de matemáticas de 1° de este año, yo poco lo utilizo.

- Y cuando estabas trabajando en 2°, utilizabas mucho dos textos no?

P/ Si, utilizaba el de Santillana y el Triáreas que me gusta mucho, tiene muy buenas actividades, porque el niño lo.., o sea, está de acuerdo a la edad.

- Y, había relación entre ellos?, se planteaban los mismos temas en ambos textos? O sea, los temas y la secuencia?

P/ no, algunos no. De pronto en el tema de la multiplicación si se manejaba, o sea, si se manejaba igual, pero que pasa, me gustaban más las actividades del libro triáreas eran como, o sea las trata de explicar mejor, eran como más, uhmmmm, como se dice… si, los niños las entendían más y eran muchas actividades, eran variadas.

- Y también combinabas en tus clases muchas cosas no? Pero entonces yo veía que enseñabas y escribías al final muchas cosas del texto de triáreas de Norma, y los niños tenían el texto guía de Santillana, identificaste que los textos tenían la misma presentación, no habían dificultades en los niños por eso? Los niños no se enredaban?

P/ No, no, y además en segundo me acuerdo que muy pocos niños trabajaban con el libro, si yo veía, si los que tenían la actividad, pues igual la podían trabajar porque se podía trabajar porque era el tema y no se iban a confundir, pues, pero en 2° si eran pocos los que tenían el libro.

- Entonces no había mucha dificultad en este sentido…

P/ Si, se hacían actividades generales, si tenían, yo miraba si la actividad y le decía qué actividad podían realizar a los niños.

- A mí me llamó la atención un problema que le pusiste a los niños, que decía que en una fábrica se empaca cada par de zapatos en una caja, y al final preguntaba ¿cuántos zapatos hay en 34 cajas? Ese problema yo lo encontré en Santillana, y al final decía cuántos zapatos hay en 134 cajas, me imagino que lo amoldaste para los niños, entonces, yo quería como escudriñar un poquito para saber qué métodos crees que el niño utiliza para resolverlo, para encontrar esa respuesta que se pide.

P/ Yo lo leí? Si, cierto? Yo les leo los problemas a los niños, o como los niños ya leen yo se los escribo en el tablero. Qué es la idea, qué el entienda que estoy pensando, primero que entienda de qué estoy hablando, bueno, de qué estamos hablando, de una fábrica, qué pasa en esa fábrica, de qué más estamos hablando…. Ah, que en esa fábrica hacen zapatos, bueno, y qué es lo que nos están diciendo de esos zapatos, de ese calzado o de esa fábrica, no, pues que se empacan zapatos en cajas, bueno, cuántos, entonces Ellos van diciendo oralmente, ya, bueno, decimos qué vamos a hacer, representemos eso en el tablero, eso que ustedes me están diciendo representémoslo con números, no sé si lo harían así, qué (y lee el enunciado en voz alta). Bueno, entonces qué les digo, tenemos en cuenta que en una caja se empacan un par, será que podemos saber, me pueden decir, en 34 cajas cuantos…, pues claro, Ellos se asustan porque esa cantidad no la pueden manejar, entonces vamos a representarlo, cómo haríamos para representarlo… no me acuerdo si algún niño lo hizo, entonces cómo haríamos, entonces empiezo, en 34 cajas, haríamos la multiplicación, 34 por 2, por qué, porque no vamos a sumar 2, 34 veces, o podemos sumar el 34 dos veces, a ver, estoy enredada… no yo me acuerdo que hice el problema para inducirlos a multiplicar el 34 por 2 para no utilizar la suma.

¿Pero qué posibilidades crees que pudieron pasar por la cabeza de los niños para responderlo? porque habían unos que te decían ¡34!, ¡2!,

P/ Si, Ellos ahí solo están escuchando el número 2 y el número 34, sólo están escuchando esos dos números, entonces ellos van a hacer 34 más 2 o 34. Ya pasando al tablero, ya lo piensan y deja de ser mecánico, pero ellos, ellos, claro, uno les menciona 2 y 34 y ellos suman 2 más 34 o 34 , entonces uno ya pasa a explicarles que para no hacer esa suma tan larga, y a ponerse a contar toda esa cosa tan larga, entonces simplemente utilizamos la multiplicación, que nos sirve y allí estamos hablando de tabla del 2.

- Y puede haber alguno que lo haga sumando…., pero qué crees que haya utilizado para sumar, dos, más dos, más dos…. Treinta y cuatro veces?

P/ si, ¡No!, no creo.

- No?, no crees que hayan hecho así? Porque en ese caso qué nos daría?, qué estaríamos sumando….

P/ Allí estaríamos sumando 2 veces el treinta y cuatro…

- Porque allí hay varias posibilidades, lo que me decías ahora, decir 34 más 34 o decir 2 más 2 más 2…

P/ La profesora lee "Cuántos zapatos hay en treinta y cuatro cajas… si se empaca cada par en una caja, ¿cuántos zapatos hay en 34 cajas? "Si, de pronto el niño pero entonces si hace 34 + 34 le daría 68, lo mismo, ahí solamente sumó 34 dos veces. Yo la verdad no me acuerdo como lo….

- Pero no, pensándolo no lo que pasó ese día en la clase sino lo que pasaría de acuerdo a tu experiencia.

P/ Pues si estamos en el grado 2°, si yo plantee este problema es porque ya habíamos empezado a plantear lo del tema de la multiplicación, sí, yo creo que Ellos sumarían 34 más 34.Pero entonces qué se le explica o en qué se interviene, uno le dice, pero ese 34 si lo quiero abreviar, uno cómo, o esa suma la quiero hacer más cortica qué hago? Entonces que utilizo, ah!, pues utilizo….; de pronto un niño, pero es que si ya hemos visto el tema entonces el niño dice ah!, pues utilizo la tabla, la tabla del 2 porque se está repitiendo dos veces el treinta y cuatro, pienso yo que eso haría.

- Bueno, y volviendo al tema de las propiedades, ahora estabas hablando de la conmutatividad, ¿qué cosas fundamentales se deben enseñar al introducir la multiplicación y en qué orden?

P/ ¿De las propiedades?

- O de todos los temas, cuál sería la secuencia en los temas para presentar la multiplicación. Ahora me dijiste que empiezas con la suma abreviada.

P/ Si, yo siempre empiezo con la suma, presentando material, con dibujitos, empiezo con la suma abreviada. Eh… también, con la descomposición y composición de números.

- Y qué relación hay entre composición y descomposición de números, eso yo lo quisiera tener claro.

P/ Pues a ver, yo, como para entrar en…., aquí mirando los episodios, pues yo entré por ejemplo colocando el número 18, vamos a descomponer el número 18. Qué les digo yo a ellos antes, antes de descomponer ellos deben saber lo que significa descomponer…. A Usted, cuando se cae y se le daña un brazo, que resulta que se fractura, qué le pasa… no, pues que el brazo como que se voltea, como que se le parte en varias partes. Bueno, entonces también se puede decir bueno, que se descompone el brazo. También los números los podemos descomponer, cómo los podemos descomponer. Hay niños que bueno ... .vamos a descomponer este número 18, para no decirle la palabra, y manejar términos que son…..de la matemática, vamos a decir “partir”, no, vamos a descomponer este número. El 18, entonces uno dirá uno más ocho. Si ya estamos como que ellos ya manejan conceptos como, a, que cuántas unidades ah, que 8 y cuántas decenas? Ah que una, este uno qué me indica, si y tengo un uno aquí cuánto vale? Ah que diez, y este ocho pues que ocho, pues entonces serían 10 y 8, entonces cuánto me da 10 más 8? A pues 18, o sea sí, el número que me dan lo descompuse; cómo lo descompuse, haciendo la suma.

- ¿Y el uso que le das a componer y a descomponer en relación con la multiplicación?

P/ Allí, por ejemplo el 18, sería cómo más puedo descomponer ese número, de muchas formas, por ejemplo 10 más 8, habrá niños que dirán variedad de sumas, por ejemplo 12 más 6, pero entonces como ya entrando, sería o bueno, yo les preguntaría… vamos a sumar el mismo número para que nos de 18. Entonces ya El diría 9 más 9, o el dos, nueve veces el dos, pero entonces sería más corto el 9 más 9. Ah, 9 más 9 me da 18, ¡muy bien! Como son sumandos iguales, ¿cómo haría yo para hacer esa suma cortica? Abreviada, según lo que estamos trabajando? Sería 9 por 2, 9 por 2 18, igual para el 2, sería 2 por 9.

- También se podría con el 6 o con el 3.

P/ Si, pues así pienso yo que empezaría. Y… lo que usted me preguntaba qué era?

- Era lo de la secuencia de los temas. Me decías que primero la suma abreviada, y ahí íbamos, la secuencia para enseñar todo el tema de la multiplicación.

P/ Primero la suma abreviada y ya después el proceso de las tablas, pero pues las tablas uno sabe que eso es un proceso largo, como hay niños que rapidito se las aprenden, y cada que… bueno, las tablas. Cuando ya la multiplicación se hace más compleja, o sea que ya hay números más grandes, que ya tiene que multiplicar por dos cifras, uno les dice… bueno, la que Usted me colocó ahorita, por ejemplo uno aquí está, 143 por 26. Uno les coloca el dos pero dice bueno, cómo vamos a hacer esta multiplicación. Ellos se asustan, bueno, pero cómo la vamos a hacer. No nos vamos a poner a sumar 143 26 veces, porque nos vamos a demorar. Entonces, vamos a hacerlo más corto, vamos a abreviar la suma, entonces empezamos a explicar el proceso, entonces ya bueno…. Vamos a utilizar la tabla del dos y la tabla del 6, pero si el niño todavía tiene dificultad, pero si El ya se sabe las tablas, pues listo, sino, pues libro abierto, cuaderno abierto, saque su cuaderno y mire las tablas, lo que importa es el proceso.

Que usted se debe aprender las tablas, según el nivel, que ¿por qué?, porque es una forma muy rápida de hacer una operación. Usted la hace rapidito porque Usted se sabe las tablas, pero usted tiene que hacer el proceso, es indispensable. Y de ahí, o sea el proceso, la resolución de problemas, que analice, que haga análisis del problema que se le está presentando, lo cotidiano; Ellos van a la tienda. Un niño, por ejemplo en 1°, estamos en el número 200. Ah, usted sabe cuál es el número 200? ¿Dónde lo ha visto? Ah, que en las monedas. Usted sabe cuánto vale una moneda de 200? Ah, que sí. ¿Si Usted compra una banana de 100, a usted le sobra? Ah! Sí, ¿cuánto le sobra? 100. Ellos de pronto si, lo manejan y saben cuánto es, pero a lo escrito, cuando ya tienen que hacer un escrito, a Ellos se les dificulta, pero entonces hay como que meternos con lo cotidiano, con lo que ellos manejan y ya se les hace más fácil.

- Y la introducción de las propiedades? Porque me decías, la suma, luego la multiplicación, después enseñarles cómo hacer la operación.

P/ Las propiedades, pues en 2°, si, por ejemplo la propiedad conmutativa como le dije, si da eso de que el niño presente la suma de otra forma, o sea, invierta el orden de los sumandos. Ahí es donde yo le voy a explicar la, la… entro a explicar de una vez, aquí el resultado es igual, no importa que Usted haya cambiado los sumandos, aquí estamos aplicando la propiedad de la multiplicación, que se llama la propiedad conmutativa. Que uno se, pues no sé, ya para la asociativa o la propiedad neutra, que yo, la verdad… dónde está. Yo coloqué por acá…

- Si, El multiplicar por uno profe, lo escribiste allí.

P/ Si, yo la confundía con la modulativa, como es el uno entonces… eh, no sé, a nivel de segundo si se estudian las propiedades, pero entonces ya entrar como a hacer actividades. Vamos a estudiar una propiedad, por ejemplo la asociativa, vamos a hacer esta multiplicación. Qué van a observar Ellos? Que el resultado es el mismo, les da igual, entonces, pues ahí entra uno como a explicar el concepto no?. Aquí está, por ejemplo la asociativa, que cuando estamos multiplicando tres números o más sin importar cómo se ubiquen los factores, pues aquí el resultado va a ser igual, aquí yo tengo que empezar a hacer el ejercicio, las propiedades es hacer el ejercicio, que Ellos observen pues, las ven y uno les dice que estas son las propiedades, que a medida que hacen ejercicios pues van a entender que allí se está aplicando una propiedad. Y la del elemento neutro, pues si lo tienen que tener muy claro. En el elemento neutro, por ejemplo ellos van a observar en las tablas, ellos van a ver que cuando multiplico por 1 les va a dar el mismo número o, empezamos por cero, si multiplicamos un número por cero nos va a dar cero y, si multiplicamos por uno, ellos siempre van a observar que si multiplicamos por cero siempre les va a dar cero o si empezamos por, pues siempre… pues ahí les entra uno a explicar el concepto.

- Bueno, y yo tenía una pregunta que tenía que ver como con las clases que hiciste, y era qué haces cuando un niño te dice, por ejemplo, escribimos el 3 4 veces como sumas, el 3 sumándose 4 veces y da 15 y El escribe 4 x 3 = 15.

P/ Pues a ver, lo que decíamos ahora…..

- Qué le dices al niño, mejor dicho.

P/ El niño allí, claro, El está… dijimos…

- Tres más tres, más tres más tres le dio quince.

P/ Ahí la multiplicación está bien, o sea está bien, ahí repitió 4 veces el tres, El hizo la suma, salió al tablero, hace la suma, hizo esta suma y le dio 15; sumó mal, y pásela a multiplicación. Hagamos esta suma en forma abreviada, era la más cortica, vamos a hacerla con la multiplicación. La hizo, o sea la multiplicación la hizo bien, pero la suma no, entonces qué pasa con el niño, pues está sumando mal, hay que corregir, volver a ver qué pasó allí, no decirle de totazo, el niño sale al tablero, No, eso le quedó mal, vaya siéntese y que lo haga otro, no. No, vamos a ver, le pregunta uno a todos los niños está bien? No, le quedó mala. Bueno, entonces vamos a ver por qué, vamos a volver a sumar. Qué pasó? Entonces, que el niño vuelva y sume. El lo que hizo mal fue la suma, pero la multiplicación la hizo bien.

- Por último profesora, qué momentos privilegias más en tu clase?, o sea, yo he visto que primero les haces actividades como de motivación, que siempre les inventas un juego, después pasan a escribir al tablero, pero ¿qué momentos privilegias?, la manera como les evalúas, o la presentación inicial, o la motivación, o el enseñar una técnica, cómo lo ves.

P/ Todos estos momentos que están aquí son necesarios, son básicos, por ejemplo la motivación es esencial para iniciar cualquier tipo de aprendizaje de un concepto; el niño hay que motivarlo y tratar de que Él se interese por un tema, no una clase magistral como hacíamos anteriormente, que pues, solo transmitir y que el niño copie y ya; hay que buscar es que el niño se interese por lo que uno trata como de explicar. Ehh!, que es muy importante que los conceptos, que los construya porque así se va apropiando del conocimiento matemático o sea que uno los vaya como encaminando en el concepto, y manejar procesos, o sea procesos en cuanto a…. me imagino que el proceso como El realiza las operaciones, paso a paso, también hay que tener en cuenta en la multiplicación, el proceso, cuando uno ya está haciendo multiplicaciones muy concretas, es lo más importante. Los ejercicios de aplicación, que los vayan a realizar uhmm! , que pues, esos si son a largo plazo, como le decía yo. Lo de las tablas, necesita mucho, mucho reforzamiento en clase. Yo trabajo un tema, doy un tema, un concepto, y al otro día que hago, el primer día, el primer día trabajo, hago ejercicios, en el tablero. Al otro día que hago, hago una actividad de reforzamiento, sólo reforzar, y a mí me ha dado resultado porque el niño, uno le pone talleres y el niño si práctica lo aprendido. Y la evaluación también, porque uno se tiene que estar evaluando lo que tiene, uno se evalúa también y yo la hago no solamente escrita, sino cuando salen al tablero, en un taller, en forma oral, ahí me doy cuenta si la mayoría, como le dije yo antes, están llevando a cabo un aprendizaje, pero uno se da cuenta, si yo tengo un grupo de 40 y a mi más de 20 me pierden, o sea, pasa algo, porque, casi en todos los grupos son 5 o 6, que si ya se pasa de 5 o 6, de pronto es que ya hay niños que tienen demasiada dificultad, pero uno sabe que tienen un problema ya, en cuanto a salud, no tienen cómo aprender. O sea, todos esos momentos son, son indispensables. Todos los tenemos que usar, y como le digo, la motivación, el niño se motiva mucho con los talleres ilustrados, con los dibujos, con los juegos, uno ve que el niño trabaja, y que va y le muestra y que hay unos que acaban volando y quieren es que uno les ponga más.

Los que acaban así, que uno ve que van súper rápido, qué hace uno ahí, pues uno les pide un cuaderno de español por ejemplo y les dice, bueno, coloquen la fecha, les pongo el título mientras los otros van acabando, porque a los que acabaron hay que ponerlos a hacer algo. Esos que acabaron que hacen, es tanta la gana de seguir que dicen: Profesora, ya puse el título, y uno le dice: espérate un momentico, y con los niños que uno ve que no, que no hacen nada, esos son los niños que uno sabe que no, que no atienden, que distraídos, son los mismos de siempre, porque los otros mismos de siempre son los que trabajan y están interesados, y uno pues, uno ahí está haciendo la evaluación no?.

- Profesora, muchas gracias, ya terminamos.

Anexo 2. Respuestas de la Docente Entregadas por Escrito.

1. ¿Qué es para Usted la multiplicación?

P/ Siempre la he entendido como una suma abreviada de sumandos iguales.

2. ¿Qué símbolos se utilizan para representarla?

P/ Los símbolos son (x) (**.**).

3. ¿Cuáles son las propiedades de la multiplicación?

P/ Propiedad Conmutativa: Cuando se multiplican dos números el producto es el mismo sin importar el orden de los factores.

Propiedad Asociativa: Cuando se multiplican tres números o más el producto es el mismo sin importar cómo se agrupan los factores.

Propiedad Distributiva: La suma de dos números por un tercero es igual a la suma de cada sumando por el tercer número.

Elemento neutro: Todo número multiplicada por uno dará el mismo número.

4. ¿Cómo se resuelve una multiplicación?

P/ Se suma o se repite un número según las veces que se pide o utilizo las tablas.

5. Resuelva las siguientes multiplicaciones describiendo cada paso seguido:

b. 342 x 2 =   b. 364 x 5 =   c. 143 x 26 =

a. 342 x 2 = 684 Cálculo mental utilizando la tabla del 2.

b. 364 x 5 = 1825 Cálculo mental utilizando la tabla del 5.

c. 143 Realizo el proceso de multiplicación utilizando tablas del 2 y 6.

x 26

858

286

3618

6. ¿Cómo representa en forma de producto la siguiente expresión?

$$a + a + a + a + . . . + a$$

(b veces).

P/ $a + a + a + a + . . . + a = a^{n \text{ veces}\}}$

7. Señale cuáles son las posibles formas de resolver la situación que se propone adelante y explique la diferencia entre estas formas:

"En una fábrica de calzado se empaca cada par de zapatos en una caja. ¿Cuántos zapatos hay en 34 cajas?"

P/ 34 + 34 = 68 Sumo dos veces el mismo número.

34 x 2 = 68 Abrevio la suma utilizando la tabla del 2.

8. Cuáles son las posibles formas de resolver la situación

9. Qué relación existe entre los procesos de composición y descomposición de un numeral en sumandos iguales y el concepto de multiplicación?

P/ Los procesos de composición y descomposición de un numeral se realizan a partir de una suma y se relacionan con la multiplicación por que la multiplicación es una suma abreviada.

10. ¿Cuál considera Usted que debe ser la secuencia para enseñar la multiplicación en los grados iniciales? ¿En qué momento incluir las propiedades, los algoritmos, las tablas? ¿Por qué?.

P/ Primero que todo trabajar sumas sencillas y complejas. Después la resolución de problemas sencillos donde se apliquen sumas de sumandos iguales. Las tablas se deben incluir cuando el niño entienda la forma de abreviar la suma, las cuales deben trabajarse y memorizar a largo plazo. Cuando se inicie con las tablas se puede incluir las propiedades.

11. ¿Qué significa para Usted la tabla del ocho?

    P/ Sumar el ocho las veces que se pide.

12. ¿Qué significa tres por ocho?

P/ Sumar ocho veces el tres.

13. ¿Cómo se nota, matemáticamente, lo que tú me respondiste?

P/ En la respuesta utilizo términos que me indican numeración, operaciones, cantidades

14. Qué relación existe entre los procesos de composición y descomposición de un numeral en sumandos iguales y el concepto de multiplicación?