ANÁLISIS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN LA OBRA LA GEOMETRÍA DE RENÉ DESCARTES

YULIETH MUÑOZ ORTIZ

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Educación Matemática
Santiago de Cali
2015

ANÁLISIS HISTÓRICO–EPISTEMOLÓGICO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN EN LA OBRA LA GEOMETRÍA DE RENÉ DESCARTES

YULIETH MUÑOZ ORTIZ
Código: 0343316

Informe final de trabajo de grado para optar al título de:
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Educación Matemática.

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Santiago de Cali
2015

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	Análisis histórico Epistemológico de la noción de función en la obra la geometría de Rene Descartes.
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	Mónica Andrea Aponte Marín
1er Evaluador:	John Alexander Giraldo
2do Evaluador:	
Fecha y Hora	Año: 2015 Mes: 02 Día: 20 Hora: 4:20

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Yulieth Muñoz Ortiz	0343316	3469

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

Mónica Andrea Aponte		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Análisis histórico Epistemológico de la noción de función en la obra "La geometría" René D.

Autores:

Nombre: Yuliette Muñoz Ortiz Firma: Yuliette Muñoz Ortiz.
C.C. 67'027175

Nombre: Firma:
C.C.

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha: 27-02-2015.

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE ILUSTRACIONES

INDICE DE TABLAS

RESUMEN

En el marco de la formación como docente de Matemáticas y especialmente en la práctica pedagógica se tiene la oportunidad de analizar desde diferentes perspectivas, un objeto de conocimiento; en este caso se pretende realizar un recorrido histórico–epistemológico de la noción de función, para observar la incidencia en el proceso de apropiación, de los obstáculos que dentro de la evolución de las concepciones de función se ha presentado, principalmente en la época del s. XVII con el autor René Descartes, en su obra La Geometría.

PALABRAS CLAVE:
Análisis histórico – epistemológico, curva, ecuación, educación matemática, función, historia de las matemáticas.

Introducción

En el marco de la formación de docente, en las líneas de formación de docentes y en especial en docente de matemáticas, es importante que los estudiantes de pregrado se inscriban en proyectos de investigación o estudios donde se busca adoptar al individuo de herramientas, para la planeación y organización de su qué hacer pedagógico. En este sentido el programa de Educación Matemáticas proponen estudios en distintas líneas de investigación, en este caso la línea en que se inscribe este estudio es la línea de Historia de las Matemáticas en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, en el programa académico de la Licenciatura en Educación Básica en énfasis en Matemáticas.

En este documento se recoge un recorrido histórico – epistemológico, acerca del concepto de función, además se realiza una síntesis y caracterización de la obra *La Geometrie*, del autor Rene Descartes. Se cuenta con cuatro capítulos distribuidos de la siguiente manera, el primer capítulo habla acerca del estudio monográfico, el planteamiento de la problemática, los objetivos y los referentes teóricos que sustentaron el estudio.

El segundo capítulo se desarrolla una caracterización de la obra de Descartes *La Geometrie, y el planteamiento* de sus aportes que permitieron dar un paso entre la geometría euclidea a la geometría analítica. El tercer capítulo se realizó un recorrido histórico y epistemológico acerca del concepto de función, donde se visualizó la evolución de la construcción de los conceptos los distintos aportes de matemáticos de distintas épocas, además se presentó una identificación de los obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función. Finalmente el capítulo cuarto se presenta las conclusiones de los hallazgos del estudio históricos – epistemológicos y la relación con las practicas pedagógicos.

CAPITULO I

1. CONTEXTUALIZACION A EL ESTUDIO MONOGRAFICO

El presente documento se realiza como requisito para optar al título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas; este trabajo se inscribe en la línea investigación de Historia y Epistemología de las Matemáticas y con él se pretende realizar un análisis histórico epistemológico de la noción de función en la obra de *La Gèomètrie* de Rene Descartes. A continuación se realiza la presentación de la problemática que impulsa este trabajo monográfico.

1.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Siguiendo la secuencia planteada por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas encontramos el concepto de función inmerso en los currículos correspondientes a los últimos años de la educación básica de nuestro país, y que a su vez permite el anclaje al manejo de nociones trabajadas en los últimos años de escolaridad en área como el Cálculo y nociones relacionadas con la Física. Por otro lado, es de suma importancia debido que se vuelve a evidenciar al inicio de programas académicos a nivel universitario.

Recientes estudios a nivel didácticos como también históricos-epistemológicos entre ellos las investigaciones de Ruiz (1998) y Azcárate & Deulofeu (1989) muestran cómo se realizan análisis epistemológicos y didácticos respecto a la noción de función, estudios que se consideran relevantes como fuente de soporte teórico para este trabajo. Se hace referencia también a la investigación de De la Rosa (2003) donde se trabaja esencialmente: las ideas y concepciones presentes en el docente durante el proceso de enseñanza del concepto de función en la escuela secundaria.

Por otro lado están las investigaciones que se han desarrollado a partir de los análisis de los resultados de las pruebas estándares implementadas en este país que pretenden medir el nivel de competencia en matemáticas, los cuales revelan dificultades a nivel de cambios de registros de representación, es decir, presentan dificultades en el planteamiento y resolución de problemas donde se ven obligados a pasar de una representación algebraica a una representación geométrica. Esta última representación empieza a aparecer en el tratamiento de la ubicación de los números reales en el plano cartesiano.

La asignación de un par ordenado a un punto determinado implica para el estudiante de Educación Básica, un tratamiento de conceptos de distinta naturaleza, es decir un par ordenado de naturaleza numérica y el punto de naturaleza geométrica, factor que en un estado inicial es complejo debido a la falta de coordinación de las unidades significantes de un registro a otro (números vs. puntos). La complejidad aumenta cuando se trata de representar una ecuación presentada de forma algebraica en un plano cartesiano de forma geométrica. Esta dificultad hace parte de un conjunto de problemas encontrados en el análisis de diferentes pruebas censales realizadas en el país.

Cabe resaltar que tanto la representación analítica (ecuaciones, funciones) como la geométrica (las curvas) son elementos que aún se utilizan en la enseñanza de otros objetos matemáticos. Esta valiosa interpretación fue establecida por el matemático del siglo XVII René Descartes, donde plantea una relación entre las ecuaciones y las curvas, es decir, que a cada ecuación le corresponde una curva, siempre ya cuando se parta de un sistema referencial, explícita o implícitamente.

Este aporte permite desarrollar las teorías matemáticas, anteriores a Descartes, en las cuales había sido imposible avanzar debido a diferentes percepciones de las matemáticas y por obstáculos como la homogeneidad en los objetos que intervienen en las operaciones, la inconmensurabilidad, entre otros.

Descartes logra dar un salto en la historia de las matemáticas y da la pauta para el paso de una incipiente álgebra (renacentista), en la cual las operaciones están supeditadas al significado de los objetos en las cuales intervienen, respecto a una geometría analítica como tal, en la que se introducen conceptos como los anteriormente mencionados. Esta nueva perspectiva de las matemáticas a su vez permite esbozar los inicios de la consolidación de la noción de función.

Por otro lado, actualmente en las prácticas pedagógicas se emplean las herramientas teóricas, que son variaciones de aquellas planteadas por Descartes desde hace más de cinco siglos atrás. Por tanto, el trasfondo cartesiano aún es patente. Es por eso que teniendo en cuenta los argumentos anteriormente mencionados desde diferentes campos de estudios (didácticos, históricos y epistemológicos) se planteó la inquietud que direcciono este trabajo:

¿Cuáles fueron los aportes de Descartes en la emergencia del concepto de función?

1.2 JUSTIFICACIÓN

Seguidamente se identifican algunos aspectos que se tendrán en cuenta en este trabajo el cual se inscribe en una perspectiva histórica y epistemológica, en la medida que pretende determinar los elementos históricos, epistemológicos, y los aportes de la historia de las matemáticas en la construcción y evolución teórica del concepto de función, específicamente en la obra de Descartes *La Gèomètrie*.

Es de gran beneficio la interpretación que se da a la noción primitiva de función, en la época de Descartes, pues en *La Gèomètrie* se empieza a vislumbrar algunas aproximaciones del concepto de función; además, porque aún es vigente su interpretación de líneas curvas.

El presente trabajo se considera de interés desde dos frentes desde lo histórico y desde lo epistemológico: en primer lugar, porque la noción de función es de suma importancia tanto en las matemáticas como en la escuela; en segundo lugar, porque los estudios histórico-epistemológicos son de gran importancia para la Educación Matemática.

1.2.1 Importancia del estudio del concepto de función

El concepto de función se reconoce como uno de los más importantes, por no decir el más importante, en todas las matemáticas. Por ejemplo, autores como Spivak (1975, p.47) afirman que "el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función: en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones". Lo anterior se puede corroborar cuando apreciamos que en diferentes dominios matemáticos como la teoría de conjuntos, el cálculo, la teoría de números, el análisis, la topología, la teoría de probabilidades, el álgebra, entre otros, uno de los objetos centrales mediante el cual se rige cada una de estas teorías, lo constituye la noción de función. Quizá son la geometría y la lógica los dominios donde la noción de función sea ajena; sin embargo, la geometría transformacional y los desarrollos modernos en teoría de la demostración, han intentado construir estos dominios a partir de la noción de función. Así pues, se puede considerar al concepto de función como el pilar más importante de las matemáticas modernas, pues a partir del tratamiento de este concepto se determinan investigaciones acerca del comportamiento y operaciones que se pueden realizar con las funciones, incluso los aportes de los matemáticos del siglo XVII a las matemáticas en general permiten desarrollar una nueva ciencia como lo es el Análisis, ciencia que no tendría sentido sin el concepto de función pues es el estudio de la función el motor u objeto de investigación de esta disciplina. Al respecto, Aleksandrov (1985 VOL. 1 p. 95-96) menciona que:

> Los matemáticos del siglo XVII se fueron percatando gradualmente de que una gran parte de los problemas que surgían de distintos tipos de movimiento (con la consiguiente dependencia de unas variables respecto a otras), así como de problemas geométricos que no se habían podido abordar con los métodos usuales, podían reducirse a dos tipos. Ejemplos sencillos de problemas del primer tipo son: hallar la velocidad en cualquier instante de un movimiento no uniforme (o, en general, encontrar la velocidad de variación de una magnitud dada), y trazar una tangente a una curva dada. Estos problemas condujeron a una rama del análisis que recibió el nombre de 'cálculo diferencial'. Ejemplos muy sencillos del segundo tipo de problemas son: encontrar el área de una figura curvilínea (el problema de la cuadratura), o la distancia recorrida en un movimiento no uniforme, o, en general, el efecto total de la acción de una magnitud continuamente variable. Este grupo de problemas condujo a otra rama del análisis, el 'cálculo integral'. El problema del análisis es el estudio de las funciones, esto es, de la dependencia de una variable respecto de otra.

Así pues, es innegable el valor epistemológico que tiene la noción de función en las matemáticas, puesto que se puede considerar como una noción fundacionista (es decir, constituye uno de los fundamentos de diferentes teorías matemáticas) y, por otro lado, como una de las herramientas más importantes dentro de cada teoría.

1.2.2 Importancia de los estudios históricos en la Educación Matemática

Actualmente, se han adelantado investigaciones (Anacona, 2003) que dan cuenta acerca de la importancia de la historia de las matemáticas en la Educación Matemática, partiendo de la tesis que "«las matemáticas son una construcción humana» y como tal están asociadas a un contexto social y cultural donde se generan", La historia ha intervenido en la medida que da cuenta de qué manera han influido las circunstancias en que se construye un concepto determinado y en la evolución del mismo; además, es necesario considerar que la Educación Matemática es un campo interdisciplinar (Vasco, 1994), donde no se debe obviar ninguna de las disciplinas en el tratamiento de una situación matemática determinada. Así pues se tiene que la historia de las matemáticas aporta de forma dinámica en dos sentidos: En el aprendizaje de las matemáticas y en la formación del docente de matemáticas.

El estudio de la historia de las matemáticas aporta al docente herramientas de tipo metodológico, conceptuales, y epistemológicos que pueden tenerlos en cuenta en sus planeaciones y sus prácticas pedagógicas. A continuación se menciona de forma superficial algunos:

- ✓ La historia de las matemáticas como indicador de dificultades para la comprensión, este aporte permite que el docente tome conciencia de la complejidad de la aprehensión de un concepto por parte de un estudiante que al igual fue de difícil comprensión para la humanidad durante varios años.
- ✓ Como elemento en la elaboración de un currículo; tomando en cuenta el paralelismo existente entre la evolución de un concepto matemático y la que los jóvenes enfrenta al apropiarse de dicho concepto.

- ✓ Como herramienta para diseños de actividades didácticas, resulta atractivo para los estudiantes la presentación de los problemas planteados por los antiguos matemáticos y más aún la forma de llegar a su solución, genera en ellos cierto interés y sorpresa al observar el ingenio de nuestros antepasados para resolver problemas matemáticos, se remonta a la época y tratan de implementar las estrategias utilizados por ellos y se ubican frente al problema dentro de un contexto cultural determinado, y pueden llegar a entender en esencia cómo y por qué emerge y evoluciona un concepto en el transcurso de la historia que satisfacen necesidades dentro de las mismas matemáticas o incluso necesidades culturales.
- ✓ Como agente que interviene en la reflexión de la naturaleza de las matemáticas en este aspecto pretende que el profesor tenga en cuenta que de la manera que el asume la naturaleza de las matemáticas a si mismo realiza el tratamiento de los conceptos matemáticos en su quehacer pedagógico (Anacona, 2003).

De la misma forma la historia de las matemáticas aporta aspectos importantes en el aprendizaje de las matemáticas, a continuación se presenta algunos aportes y su incidencia:

- ✓ La historia de las matemáticas en la relación entre matemáticas y experiencia; este aporte permite que el aprendiz adopte frente al conocimiento una participación analítica, crítica y creativa, distinta a la que obtendría si se presenta los conceptos de forma estática y acabada.
- ✓ Como fuente de problemas y actividades lúdicas; en el estudio de la historia de las matemáticas se pueden encontrar un banco de actividades, problemas, acertijos, etc. Los cuales sirven como apoyo o ayuda didáctica en la planeación de la intervención en el aula.

- ✓ Los estudios histórico-epistemológicos como vehículos de conocimiento; este aporte es importante en la medida que los estudios histórico-epistemológicos permiten observar la génesis, evolución y consolidación de los conceptos en el marco de unas condiciones socioculturales, formando en el docente, como en el estudiante, una visión profunda de las matemáticas y su finalidad, utilidad y sus relaciones con el entorno.
- ✓ Como puente de comunicación entre las matemáticas y la cultura; utilizar la historia de las matemáticas de esta forma permite un acercamiento más humano más cercano a las teorías matemáticas, pues encuentran vínculos con manifestaciones culturales de su entorno, tales como la música, la pintura, la literatura, la arquitectura o el arte en general.

Además, promueve un cambio de actitud hacia la matemática; ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos; incentiva la reflexión y una actitud crítica en el estudiante; y finalmente, se puede implementar como recurso integrador de las matemáticas con otras disciplinas, aumentando el interés y la motivación de los estudiantes hacia el conocimiento matemático.

Por último se menciona los aportes que son más pertinentes en este trabajo debido a su relación con los objetivos del mismo, se tomara en cuenta los aportes que haga referencia a los estudios epistemológicos y a sus incidencias tanto en el proceso de enseñanza como en el proceso de aprendizaje, bien sea para identificar los obstáculos en la construcción del concepto por parte de los estudiantes o, para la determinación de la semejanza de los procesos evolutivos de la constitución de un concepto en el estudiante como en la historia y seguidamente poder adoptar una visión más amplia de las matemáticas, este aporte en el sentido que se realiza un análisis histórico-epistemológico de un concepto determinado en una época determinada.

Se hace la aclaración que dentro de los parámetros establecidos en el presente trabajo no se hizo énfasis en aspectos como la elaboración de currículos, el diseño de actividades didácticas, intervenciones en el aula, reflexiones acerca de las prácticas de docentes entre otras, en consecuencia se puede decir que los procesos de investigación aquí planteados se centró en los aspectos netamente conceptuales, epistemológicos e históricos sin desconocer la importancia de los otros aportes de la historia de las matemáticas en la Educación Matemática.

En resumen se observa que existen argumentos de peso como los presentados anteriormente que justifican este trabajo monográfico desde los dos frentes mencionados al inicio.

1.2.3 Pertinencia del papel de la historia de las matemáticas en la construcción y evolución teórica del concepto de función

En este apartado se pretende dejar explicito el papel de los estudios epistemológicos e históricos para analizar cómo ha sido la evolución del concepto de función, permitiendo entender los obstáculos que la humanidad ha tenido que afrontar antes de llegar hasta la definición y concepción de función que en la actualidad circula en las comunidades científicas.

Lo anterior se desarrolló teniendo en cuenta los momentos más significativos de la evolución de concepto de función y sus diferentes aproximaciones a la definición actual, seguidamente se plantearon los obstáculos epistemológicos que subyacieron a cada época o definición dada para el concepto de función y posteriormente se mencionan los actos de comprensión que permiten superar aquellos obstáculos por parte del sujeto que accede al conocimiento. Para sustentar este apartado, se centró en el análisis de estudios realizados a nivel nacional e internacional referentes a la evolución del concepto de función y la resistencia de las incomprensiones de los estudiantes en la actualidad respecto a la movilización del concepto, se tomaron como soporte teórico los trabajos de. Sierpinska (1992), Delgado & Álvarez, (2001) y Porras, (2011).

Se inicia este recorrido enunciando que se va a entender como obstáculo o como error cognitivo, para esto se retomaron los planteamientos realizados por Bachelard y Piaget en estudios didácticos (citado por Kilpatrick, Gómez y Rico, 1998):

> El error y el fracaso no es solo efecto de la ignorancia o del azar, como se cree a partir de las teorías empiristas o conductista del aprendizaje, sino efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito; pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptados errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos por obstáculos: tanto el funcionamiento del maestro como en el alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido

En este sentido, para construir nuevos conocimientos el docente debe estar en la capacidad de generar un desacomodamiento el los conceptos previos de los estudiantes a partir de estrategias didácticas que permitan que al realizar dichas actividades y al revisar los resultados, el estudiante pueda evaluarlos, y así, se rechace o se acepte estas nuevas concepciones, generando un nuevo conocimiento.

Para estos autores es decisivo el papel que juega el error en la construcción de nuevos saberes pues al superar estos obstáculos es posible que los estudiantes puedan tener más éxito en el tratamiento de los conceptos.

De esta manera se plantea tres orígenes de los obstáculos cognitivos, que dan cuenta de la relación que existe entre los tres componentes del proceso de enseñanza–aprendizaje (estudiante-profesor y saber), se pueden distinguir entre ellos

- ✓ Obstáculo de origen epistemológico
- ✓ Obstáculo de origen ontogénico
- ✓ Obstáculo de origen didáctico.

Los obstáculos ontogenéticos son los referentes a las limitaciones que presenta el sujeto a nivel neurofisiológicos, u otras que se presenten en el desarrollo y evolución del estudiante; por otro lado están los obstáculos de origen Didáctico que están ligadas a la adecuada elección de estrategias pedagógicas o políticas educativas que permitan desarrollar conocimiento, este tipo de obstáculos se basan en la reflexión del que hacer del docente y finalmente los obstáculos donde el foco de estudio es la naturaleza de concepto mismo, aquellos que son propios de él y analiza las dificultades que se han presentado en la aceptación de nuevas concepciones, al evolucionar un determinado concepto en la historia. Citando a Brousseau (1986, p. 48-49) se evidencia que:

> El alumno aprender al adaptarse a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios. Ese saber, fruto de la adaptación del estudiante al medio, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba de aprendizaje.

A continuación se presentan las 4 principales aproximaciones al concepto de función que se circulan en la actualidad según Delgado (2010, p. 124)

1. Función en términos de la variable: una función es una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.
2. Función en términos de conjunto de parejas ordenadas: Una función es un conjunto de pares ordenados, no dos de los cuales tiene la misma primera componente.
3. Función en términos de regla de correspondencia: Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B.
4. Función en ambiente Logo: una función es un procedimiento P que tiene la propiedad de que cualesquiera dos apelaciones a P con las mismas entradas producen las mismas salidas.

Estas definiciones se obtienen después de un largo proceso de evolución en la historia de la concepción de función, y durante la historia también se puede observar como cada una de estas aproximaciones en principio no fueron aceptadas debido a los obstáculos epistemológicos que surgieron a raíz de nuevas concepciones, a continuación se relaciona en una tabla los obstáculos y sus actos de compresión que según Sierpinska (1992) encontró en sus investigaciones acerca del proceso de la noción de función.

Tabla 1: Obstáculos Epistemológicos y Actos de Comprensión

Obstáculo Epistemológico	Acto de Comprensión
• Las matemáticas como asuntos de problemas prácticos	• Identificación de cambios en el mundo circundante como un problema practico
• Diferenciar las leyes de la física y las funciones en matemáticas.	• La toma de conciencia del posible uso de las funciones en el modelado

	de relaciones entre magnitudes físicas entre otras.
• Observar los cambios como un fenómeno; tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia	• Identificación de los sujetos de cambio en el estudio de los cambios
• Pensar en términos de ecuaciones e incógnitas para hacer extracciones de ellas.	• Discriminación ente dos modos de pensamiento matemáticos; uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.
• Mirar el orden de las variables como irrelevante	• Discriminación entre las variables dependientes e independientes.
• Creencia fuerte en el poder de las operaciones formales sobre expresiones algebraicas	• Discrimina entre definición matemática y descripciones del objeto.
• La definición es una descripción de un objeto conocido de otra manera por percepción o discernimiento. La definición no determina el objeto; más bien el objeto determina la definición	• Discrimina entre concepto de función y concepto de relación
• Solo las relaciones descritas por as formulas analíticas son dignas del nombre de función.	• Síntesis del concepto general de función como objeto.
• La grafica de una función es un modelo geométrico de la relación funcional. Ella no es necesariamente fiel, puede contener puntos (*x*,*y*) tales que la función no está definida en *x*	• Discriminación entre diferentes formas de representar funciones y las funciones mismas.

En la tabla 1 se puede observar la pertinencia entre la historia de las matemáticas y la evolución de los conceptos matemáticos en particular el de función, pues a través de la historia se observa cómo se han modificado las concepciones y cómo también a través de la misma historia se logra identificar sus obstáculos al ser introducido una nuevo componente de la definición de función; hasta llegar a lo que hoy conocemos como función.

1.2.3 Algunas investigaciones a nivel epistemológico e histórico

En esta perspectiva se observa cómo las características de la época donde emergieron los conceptos y su evolución tratan de plantear los puntos críticos que dieron paso a la consolidación del concepto, como también las concepciones representativas que han permitido desarrollar el concepto de función, investigaciones como la realizada por Ruiz (1998) y Azcárate & Deulofeu (1989) en las cual se realizan análisis epistemológicos y didácticos respecto a la noción de función. Ambos trabajos son similares en su indagación epistemológica, la cual aparece como una sección de dichas obras: en esta sección realizan un recorrido histórico determinado etapas en la aparición de concepciones asociadas al concepto de función a saber:

Etapa de la Antigüedad: en esta época se llevan a cabo diversos estudios sobre la dependencia entre cantidades de diferentes magnitudes, aunque no se llega a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función, los grandes aportes los proporcionan los babilónicos y los griegos.

Etapa de la Edad Media: En este momento histórico los grandes ponentes en cuanto avances respecto a la evolución de la construcción del concepto de función fueron los árabes con la separación del álgebra y la trigonometría como dos campos de estudio distintos en esta etapa se preocupan por el estudio de lo real de lo observable y se empieza a relacionar la física y las matemáticas, la una busca el motivo o causas del cambio mientras que las matemáticas se centraban en las cantidades abstractas

Edad Moderna: en la etapa moderna se dispara los avances de la noción de función y de las matemáticas en general puesto que se incursiona en la geometría y se rompe con el paradigma de los griegos de la heterogeneidad de las dimensiones geométricas y de los órdenes de los polinomios.

Etapa del siglo XIX a la teoría de conjuntos: Después de dotar se todo una estructura algebraica en las operaciones básicas con los segmentos, y resolviendo problemas geométricos con ayuda de herramientas algebraicas, era necesario dotar de una teoría matemáticas las funciones, se desarrolla en si teorías matemáticas que permitan formalizar el concepto de función.

Estos dos estudios han sido sustentado en investigaciones previas como las realizadas por Youschkevitch (1976), Valiron (1976), Deasanti (1976), D'hombres et al. (1987), René de Cotret (1988) y Sierpinska (1989). Y por último una investigación realizada por Gonzáles (sf) donde el autor realiza un estudio crítico de la obra de Descartes, La Geometría. Para valorar la trascendencia de esta obra en la Historia de la Matemática, haremos una breve descripción de los métodos de la antigua Geometría griega, no sólo porque con la comparación podremos ponderar la eficiencia de los métodos cartesianos sino porque la motivación y el origen de la obra cartesiana arranca de su lectura por parte de Descartes y la crítica de sus limitaciones.

Se asume que las investigaciones mencionadas ayudan al análisis epistemológico que se pretende realizar, teniendo en cuenta que recogen aspectos a nivel de la descripción de las concepciones más representativas en el desarrollo histórico de la noción de función. Por otro lado se toma el trabajo realizado por Brousseu (1986) y de Sierpinska (1989). Estas investigaciones nos permiten tener una mirada más amplia acerca del recorrido histórico del concepto, y a su vez los obstáculos que presentan al ser adquirido por una sociedad científica.

1.3 DIMENSIÓN HISTORICA

La Gèomètrie de René Descartes será el punto de partida para analizar el surgimiento de la noción de función, supuestamente implícita en el trabajo que realiza el autor en el momento de la asignación de una ecuación general a un lugar geométrico con condiciones dadas. Es necesario apreciar si existen aportes explícitos o implícitos en la construcción de la noción de función o en, y por qué no, analizar las causas que impiden formalizar esta noción en su obra.

El nuevo modelo analítico permite resolver problemas matemáticos, en el momento en que se supone que dichos problemas ya estaban resueltos, y esta suposición a la vez conlleva considerar una estructura algebraica previa para las operaciones con segmentos, la cual se puede desarrollar por la inclusión de un elemento neutro para la multiplicación: "El segmento unidad", sin el cual sería imposible el planteamiento de las relaciones proporcionales para las *n*-líneas, estos nuevos planteamientos permiten dar respuesta a problemas planteados por autores como Pappus; al cual Descartes logra dar una ingeniosamente la respuesta. Por otro lado permiten realizar una clasificación de las curvas y cónicas, según la ecuación que las determine; para esto se apoya en el sistema algebraico que fundamenta y explica en su libro I de *La Gèomètrie*. Al encontrar la ecuación que expresa de dos maneras distintas una misma relación entre las líneas, él continúa resolviendo la ecuación teniendo en cuenta las condiciones de la solución.

Por último, en esta dimensión, se estudió el aporte de Descartes con su obra en la consolidación de los fundamentos del cálculo infinitesimal, teniendo presente el salto que logró dar de la geometría griega a la geometría analítica, en el momento que empieza a realizar un análisis crítico de la obra de Euclides, Apolonio, Vieta, etc., proponiendo la solución de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas.

1.4 DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

Dentro de esta dimensión se toma como punto de partida la incidencia de los aportes del autor, dentro de su época en pro de la consolidación de una nueva disciplina “ La geometría analítica” y la noción implícita de función en su obra debido que se presenta actualmente como obstáculos epistemológicos en la construcción del concepto de función por parte de los estudiantes; estos obstáculos son asociados a tres corrientes, al nivel de creencias y convicciones, a nivel de esquemas de pensamientos, a nivel de conocimiento técnico.

Por otro lado se hace un recorrido histórico de la evolución de las concepciones de la noción de función que se han mantenido y que actualmente serian una pequeña parte de una estructura teórica más elaborada y con mayor grado de generalidad, estos aspectos se recogen en trabajos realizados por Youschkevitch (1976), Valiron(1976), Deasanti (1976), D’hombres et al. (1987), René de Cotret (1988) y Sierpinska (1989)1. Dentro de los

[1] Youschkevitch, A. P. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19 th Century*. Valiron (1976) *Formación y evolución del concepto de función analítica de una variable*. Desanti (1976) *De Cauchy a*

momentos más significativos de la evolución de la noción de función se tiene inicialmente los fenómenos sujetos al cambio, el calor, la luz, la distancia, la velocidad, esta concepción se presenta desde la época prehelénica; la implementación de la proporción como una de las privilegiadas para poner en relación entre magnitudes, esta concepción perdura desde la época prehelénica hasta Oresme y Galileo.

Luego se observa el tratamiento de las relaciones de cambios utilizando el grafismo, esta concepción se gesta en la escuela de Oxford y en Paris en el s. XIV y tuvo su representante más significativo en Oresme; la concepción de curva (analítico–geométrica) tomando sucesivamente infinitas diversas cantidades para una línea *x*, encontraremos también infinitas para la otra línea *y*, así, se tiene una infinidad de diversos puntos por medio de los cuales se describe la curva solicitada, esta concepción surge a través de los trabajos de Descartes y Fermat y aún permanece en las Matemáticas.

Después de la aparición del álgebra se puede expresar la dependencia de las variables por expresiones analíticas, y así luego de poder expresar la dependencia de forma analítica se busca realizar un tratamiento de correspondencia más general, esta etapa de la evolución se presenta desde los últimos trabajos de Euler en el siglo. XVIII y en el XIX los trabajos de Fourier sobre series trigonométricas, Cauchy, Dedekind, Riemman, entre otros.

Finalmente se presenta la función como una terna $f = (F, X, Y)$ a finales del S. XIX y los inicio del S. XX a partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjunto.

Riemann o el nacimiento de la teoría o el nacimiento de la teoría de funciones de variables reales [en: Le Lionais (ed.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*]. D'Hombres *et al.* (1987) *Mathématiques au fil des âges.* René de Cotret (1988) *Un étude sur les représentations graphiques du mouvement*. Sierpinska (1989) *On 15-17 years old student's conceptions of functions, iterations of functions and atractive points*.

1.5 OBJETIVOS DEL TRABAJO

1.5.1 Objetivo general

Caracterizar los aportes de Descartes en la obra *La Gèomètrie* para la construcción y evolución teórica del concepto de función.

1.5.2 Objetivos específicos

- ✓ Realizar una descripción de *La Gèomètrie* de Descartes, especialmente en lo concerniente a la clasificación de las curvas y sus propiedades intrínsecas.
- ✓ Analizar la importancia de la clasificación de las curvas, por Descartes, en la emergencia de una noción de función.
- ✓ Realizar un análisis epistemológico de la construcción de la noción de función en Descartes, y relacionarlo con algunos obstáculos a nivel epistemológico en la consolidación de la noción de función.

1.6 METODOLOGÍA

La modalidad de trabajo de grado elegida es de Monografía la cual consiste en una actividad científico-técnica puede presentar diferentes niveles de profundidad y ser requisito para acceder a el título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Este trabajo se ejecutó en tres fases, las cuales se explicarán detalladamente a continuación:

Primera Fase

En esta fase se tuvieron en cuenta los momentos más significativos en la consolidación de la noción de función en la historia de las matemáticas, seguidamente, se realizó una descripción del libro *La Gèomètrie* de Descartes iniciando en el primer libro que hace referencia en un primer momento al álgebra simbólica como herramienta algorítmica básica, y continuando con la resolución del problema planteado por Pappus, dejando plasmado la potencia de los componentes del nuevo método analítico de resolución de problemas y especialmente los problemas matemáticos, a base de elaborar una excelente herramienta para enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos.

Descartes libera a *La Gèomètrie* de la dependencia a la estructura geométrica de las figuras e introduce una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del análisis mediante la intervención del álgebra.

Segunda Fase

En esta fase se efectuó en primera instancia una clasificación de las curvas según Descartes, esta clasificación se hizo teniendo en cuenta el tratamiento que se le da en el segundo libro de *La Gèomètrie*, Descartes realiza una nueva lectura de la geometría griega, superando sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas inexploradas previamente. En esta fase se realizó un análisis histórico-epistemológico de la noción de función en Descartes en su obra *La Gèomètrie*. El análisis histórico-epistemológico se dividió en dos planos, el primero que hace referencia al recorrido histórico de la evolución de las concepciones de la noción de función y la identificación de los momentos clímax de este proceso, el segundo plano se interesó por los obstáculos epistemológicos ligados al desarrollo histórico de la noción de función. Las fuentes bibliográficas primarias para la fundamentación de esta fase fueron Descartes (1637) y Ruiz (1998).

Tercera Fase.

Finalmente se realizaron unas recomendaciones de orden didáctico para que futuras investigaciones logren tener como referente este trabajo. Estas se efectuaron teniendo en cuenta los requerimientos establecidos en los lineamientos curriculares y en los estándares de competencias en matemáticas del MEN y siendo estas a su vez la fuente primaria acompañada del trabajo realizado por el Vásquez el al (2005).

CAPITULO II

2. APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

2.1 INTRODUCCIÓN

Seguidamente se mostrara una aproximación a la obra de Descartes *La Gèomètrie*, se inicia con la influencia del El discurso del Método, en la obra en cuestión y en sus siguientes obras; este aspecto es importante mencionarlo para poder entender, como el autor en este caso Descartes se acercaba al conocimiento matemático y a su vez como crea una estrategia para poder romper con los paradigmas antiguos que habían encapsulado las matemáticas, como lo fue el problema de la homogeneidad, la carencia de una álgebra de operaciones o tratamiento de unidades de distinta dimensión en un mismo problema geométrico.

2.2 LA EPISTEMOLOGÍA CARTESIANA EN EL DISCURSO DEL METODO EN DESCARTES Y SU INFLUENCIA EN SUS DEMAS OBRAS

En este apartado se propone como objetivo, dejar explicito la relación que existe entre la filosofía cartesiana y método que Descartes implementa para realizar sus demostraciones y en general de acercarse al conocimiento matemático y al tratamiento que se le da a los problemas geométricos irresolubles hasta su época, este método que propone él en sus obras El Discurso del Método y de las Reglas para la dirección del. Su obra está dividida en seis partes, y se hace énfasis en el capítulo dos, donde plantea las cuatro leyes de su método:

1. No admitir como verdad alguna cosa
2. Dividir cada cosa en sus dificultades.
3. Conducir ordenadamente mis pensamientos.
4. Hacer recuentos y divisiones generales no omitir nada.

En los otros cuatro de su obra se ocupa en la caracterización de la manera como fundamento y desarrollo su método. Es importante que se haga este tipo de análisis debido a que la Geometría Analítica como su nombre los menciona hace alusión al método sintético - analítico de los griegos y que después Descartes lo reduciría a las 4 leyes de su método, invirtiendo los procesos planteados desde sus ancestros los griegos.

Es decir, mediante el Análisis se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta afirmación hasta llegar a algo que forma parte de los principios o alcanzar un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces se invierte la secuencia de los pasos anteriores se obtiene una demostración del teorema que había que probar. Así pues, el Análisis viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir «condiciones necesarias» para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la Síntesis se muestra que estas condiciones son también suficientes, se obtiene una demostración correcta de la proposición.

Es por esta razón que Descartes logra romper con muchos paradigmas que hasta ahora se habían creado y logra dar un paso a la geometría analítica; que además de tener herencias de los métodos griegos estaba impregnado de los avances en el álgebra que Vietè estaba desarrollando, con su tratamiento algebraico en su *logística speciosa*, Descartes finalmente da una lectura algebraica a la geometría, Vietè, crea un sistema de algebra simbólica basado en operaciones y en la homogeneidad, y que elimina la consideración acerca de la ontología de sus elementos, pues, permitió ir más allá de la dimensión tres.

Es así como Descartes inicia dotando de una estructura algebraica a los segmentos, y proponiendo que los problemas geométricos se pueden construir si se conoce la longitud de alguna de las líneas rectas:

> << (…) todos los problemas de geometría pueden reducirse fácilmente a términos, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlo>> (Descartes, 1947 p. 47)

En esta cita cabe resaltar que el autor reduce la resolución de problemas geométricos a la determinación de una expresión algebraica que se pueda escribir de dos formas; y esto solo era posible con la capacidad de traducir los problemas en ecuaciones, para después simplificarlas y resolverlas; poniendo en relación las magnitudes conocidas con las desconocidas, aspecto importante en esta indagación, pues se observa un concepto de función incipiente de variable, de dependencia o una variable en función de la otra.

Descartes considera un segmento de recta tanto como magnitud geométrica continua como una medida numérica, pero establece que la potencia de un segmento sigue siendo un segmento, de modo que cuadrado y cubo ya no son magnitudes planas o espaciales, sino la segunda o tercera potencia de un número. De este modo, las operaciones aritméticas quedan incluidas en un terreno estrictamente algebraico. Con ello Descartes elimina otra limitación, la euclídea de la homogeneidad. Se observa como en el siguiente apartado, Descartes explica la importancia de las ecuaciones en la resolución de problemas geométricos de ahí en adelante:

> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya resuelto, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra. (Descartes, 1947, p. 57)

Deja así expuesto su método de análisis y síntesis referido en líneas anteriores, Con una nueva metodología cartesiana Descartes logra dar respuesta a los problemas que se habían propuestos siglos atrás y que por falta de una herramienta como lo fue el álgebra simbólica y las pautas de su método para acercarse a los conocimientos nuevos no habían tenido respuesta, Descartes presenta las pautas de una metodología cartesiana que permitía transitar de la geometría al álgebra, estas se enumeran a continuación

1. Suponer el problema resuelto.
2. Dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios.

El propio análisis nos ayudará a determinar quiénes son éstos, tanto los conocidos (datos) como los desconocidos (incógnitas) sin considerar ninguna diferencia entre ellos.

Después de conseguir expresar un mismo segmento por medio de dos expresiones algebraicas diferentes, lo que permite realizar la Síntesis, es decir:

3. Determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas.

Finalmente para resolver de forma definitiva el problema quedan dos pasos:

4. Resolver la ecuación resultante.
5. Construir geométricamente la solución.

Al plantearse problemas geométricos en la Síntesis se han de obtener soluciones geométricas para cuya construcción el álgebra será el instrumento analítico esencial, pues suponer el problema resuelto; dar nombre a todos los segmentos que parecen necesarios para representar los datos del problema, tanto los conocidos como los desconocidos; determinar la ecuación entre las longitudes conocidas y las desconocidas; resolver la ecuación resultante; construir geométricamente la solución–. Se trata de un verdadero método de resolución de problemas geométricos donde se transita de forma reversible de la Geometría al Álgebra y del Álgebra a la Geometría.

2.3 CARACTERIZACIÓN DE LA OBRA DE DESCARTES

La Gèomètrie se compone de tres libros: en el primero, se desarrollan temáticas relacionadas con aquellos problemas que se resuelven utilizando únicamente círculos y líneas rectas, en este libro también presenta la estructura algebraica de las operaciones con segmentos (multiplicación, división, y la extracción de raíces).

En segundo libro hace referencia a la clasificación de las curvas a partir de las ecuaciones encontradas y la forma de resolver problemas en donde se involucran estas curvas, realiza un estudio de la naturaleza de las mismas, se centra en las de grado superior y en la determinación de la tangente y normales con sus respectivas propiedades a estas líneas, por otro lado se plantean los problemas planos, sólidos y lineales; los cuales a su vez se realiza su tratamiento a partir de ecuaciones de segundo, tercer, cuarto y hasta más grados, demuestra que los problemas planos se construyen con líneas y círculos, los problemas sólidos se construyen con secciones de cónicas y los problemas lineales se resuelven con líneas más complejas como lo son las líneas mecánicas o llamadas también líneas geométricas, finalmente se observa que para plantear las propiedades de cada uno de las tipologías de líneas es necesario establecer las relaciones que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, estos aspectos se abordaran con mayor profundidad posteriormente.

El libro tercero está dedicado al estudio de los problemas sólidos, supersólidos, y a la resolución de ecuaciones, y en particular a la discusión de sus raíces. Muestra que una ecuación tiene tantas soluciones como dimensiones tiene el grado, finalmente se dedica darle tratamiento a los problemas de tercer grado como lo son: La trisección del ángulo y duplicación del cubo y concluye que estos problemas pueden reducirse a los problemas de tercer grado.

2.4. LA ARITMETIZACIÓN DE LAS OPERACIONES BÁSICAS EN LA *“GEOMETRIE”*

En esta parte de la obra es de una gran importancia, porque en este apartado Descartes soslaya el problema de la inconmensurabilidad, al asignar longitudes a los segmentos, previa la adopción de un segmento unidad a discreción, tras lo cual construye de forma efectiva las operaciones aritméticas dándoles significado geométrico. De esta forma Descartes elimina la limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.

2.4.1 Del problema de la cerradura en las operaciones con segmentos

En el recorrido histórico de las matemáticas y especialmente de la geometría se evidencia momentos trascendentales que van dejando su legado, que sirven de punto de partida para nuevos avances científicos en el área de conocimiento, se inicia el recorrido con los aportes realizados por Euclides a la geometría en su libro los *Elementos* a *la Gèomètrie*.

Descartes inicia realizando un análisis de la obra realizada por Euclides y toma como referentes algunos aspectos del libro VI que estudia las proporciones entre líneas, para así empezar a dar cuerpo al engranaje teórico de operaciones aritméticas para los segmentos, engrama que sustenta su obra Descartes plantea soluciones a los problemas planteados de la época (trisección de ángulos, duplicación de cubos, y el conocido problema de Pappus), haciendo uso de la herencia euclidiana, donde se observa marcada la relación existente entre el álgebra y la geometría disciplinas, que hasta ahora tenían un método en particular y euclidiano de abordar los procesos para la resolución de dichos problemas; dentro de este método se presenta obstáculos relacionados con las naturaleza de los objetos geométricos y matemáticos estos obstáculos impiden pensar los procesos matemáticos sin el referente geométrico.

Descartes marca la pauta para el progreso de las matemáticas en general planteando previamente una estructura para las operaciones con segmentos que me permitiera evidenciar la propiedad de la cerradura que se cumple en los objetos de naturaleza aritmética, y así poder subsanar los obstáculos a nivel ontológicos de los objetos matemáticos en general, a continuación se presenta la manera como Descartes plantea cada una de las operaciones aritméticas en los segmentos y como estos (los segmentos) heredan las propiedades de los de las operaciones análogamente planteadas para los números.

Inicialmente no se hará referencia a la operación de adición debido que en esta operación no se encuentra dificultades, puesto que si aún segmento se le adiciona otro segmento el resultado sería otro segmento de mayor o menor magnitud según la naturaleza del segmento que se adicione y la operación que se establezca, entonces se centra la atención en la operación de multiplicación, en esta operación se establece la dificultad en el sentido perspectiva de heterogeneidad de las matemáticas hasta ese momento, debido a que si se multiplica un segmento (*que es una figura de una dimensión)* por otro, se obtiene como resultado una figura de dos dimensiones, una figura plana, seguidamente, si a una figura plana se la multiplica un segmento, el resultante es una figura de tres dimensiones, pero si se quisiera multiplicar un figura de tres dimensiones por una figura plana su resultante sería una figura de cinco dimensiones lo cual dentro del pensamiento geométrico de la época no era posible.

Descartes facilita la forma de proceder para resolver problemas geométricos que finalmente tuvieran estas limitaciones, definiendo un segmento unidad, y apoyándose en la teoría de la proporciones de Eudoxo empieza a definir las operaciones de multiplicación, división y la extracción de raíces que en este ámbito significaba cuadrar un rectángulo es decir, hallar el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo dado.

Así, la ***multiplicación*** se plantea en *La Gèomètrie* de la siguiente forma: sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

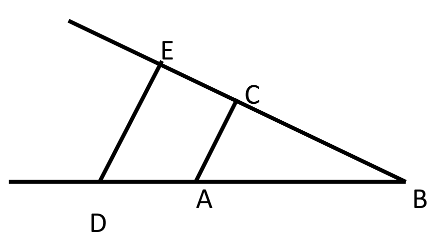

Ilustración 1: Multiplicación de segmentos

Se establece a partir de la semejanza de los triángulos Δ BAC y Δ BDE, la proporción términos de los segmentos relacionados es $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$, esta proporción demostrada asi, sea $\propto = BD$, $\beta = BC$ y $\mu = BA$ rescribiendo la proporción tenemos; $\frac{BE}{\propto} = \frac{\beta}{\mu}$, Como en muchos problemas de *La Gèomètrie*, Descartes aplica el Teorema de Tales (Euclides, VI.4) a la semejanza de triángulos, obtenemos $\beta \times \propto = BE \times \mu$, sabiendo que μ es el segmento unidad entonces finalmente se obtiene $\beta \times \propto = BE$ y reemplazando por los segmentos inicialmente mencionados en la proposición: *BD x BC = BE*.

Para la ***división*** utiliza un procedimiento análogo planteado así: si deben dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división. Nuevamente se plantea la conversión de la notación de los segmentos para un mejor entendimiento $\propto = BE$, $\beta = BD$ y $\mu = BA$ reescribiendo la proporción tenemos entonces, $\frac{\propto}{\beta} = \frac{BC}{\mu}$ utilizando el teorema de Tales (Euclides, VI.4) tenemos $\frac{\propto}{\beta} \times \mu = BC$, sabiendo que μ es el segmento unidad entonces finalmente se obtiene, $\frac{\propto}{\beta} = BC.$

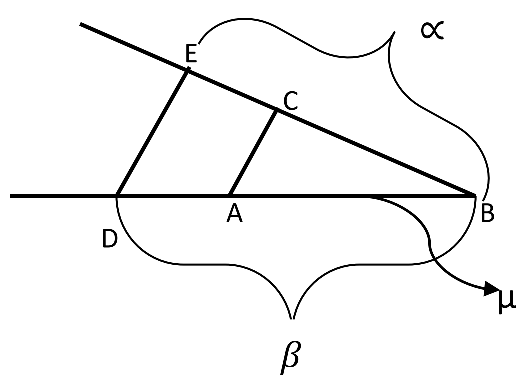

Ilustración 2: División de segmentos

Para la extracción de raíces se plantea el siguiente procedimiento O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré con más detalle más adelante. Descartes (1637), se desea hallar la raíz de GI entonces se utiliza la siguiente conversión FG = μ, GH = α, entonces, $\sqrt{GH} = \sqrt{\alpha}$, antes de plantear las proporciones que me determina las extracción de la raíz se plantea la demostración de la semejanza de los tres triángulos involucrados $\Delta IFG \approx \Delta GHI \approx \Delta FIH$ y los teoremas en los que Descartes se fundamenta para plantear las operación definida anteriormente.

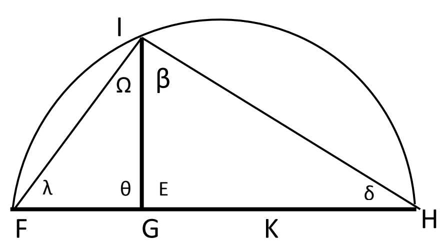

Ilustración 3: Extracción de raíces en segmentos

Se puede observar, que K es el punto medio entre FH, Thales anteriormente ya había probado que en una semicircunferencia el triángulo formado es rectángulo, por lo tanto Ω + β = 90º, y las medidas de los ángulos θ = E = 90º, por ser GI un segmento perpendicular a FH;

1. Para el ΔIFG se tiene entonces que Ω + λ + θ = 180º por la propiedad de ángulos internos de triángulos; como θ = 90º, se tiene que; Ω + λ = 90º.

2. Para ΔGHI se tiene δ + β+ E = 180º y como E = 90º, tenemos análogamente; δ + β = 90º.
3. Para el ≈ ΔFIH se tiene que **Ω** + β + δ + λ = 180º, como inicialmente se había planteado **Ω** + β = 90º, entonces δ + λ = 90º.
4. Despejando λ en uno (1.) **Ω** + λ = 90º. Se tiene que λ= 90º - **Ω** y despejando δ en dos (2.); δ + β = 90º. Tenemos δ = 90º - β.
5. Reemplazando δ y λ en tres (3.); primero se realiza el planteamiento para δ; se tiene δ + λ = 90º; 90º - β + λ = 90º; por propiedad uniforme de la igualdad se tiene que β = λ; ahora se realiza el reemplazo para λ y análogamente se llega a δ + λ = 90º ; δ + 90º - **Ω** = 90º, δ = **Ω**.

Por lo anterior se tiene demostrada la semejanza de los triángulos mencionados al inicio así: $\Delta IFG \approx \Delta GHI \approx \Delta FIH$. Después de demostrar la semejanza de los triángulos se puede plantear las relaciones proporcionales entre el ΔIFG y ΔGHI así:$\frac{GI}{FG} = \frac{GH}{GI}$ y recordando que FG = μ, GH= α, se tiene: $\frac{GI}{\mu} = \frac{\alpha}{GI}$, entonces; GI x GI = α x μ, es decir $(GI)^2$= α; entonces GI = $\sqrt{\alpha}$.

En conclusión se tiene que: El producto de entre dos segmentos es un segmento, la división de entre segmentos es un segmento y por último la resultante de la extracción de raíces es un segmento. Por lo anterior se puede afirmar que las operaciones de la multiplicación y división y la extracción de raíces en segmentos son cerradas y adoptan por tanto las propiedades de los números como tal.

Finalmente se puede observar, entonces la incidencia de este esbozo previo de la estructura algebraica de dichas operaciones para segmentos, permitiendo traspasar el obstáculo epistemológico a cerca de la ontología de los objetos matemáticos y los objetos geométricos, de este modo se podía operar con los segmentos como si fueran números.

Después de fundamentar las operaciones y propiedades algebraicas necesarias, Descartes introduce el simple criterio de divisibilidad sobre el término independiente de la ecuación polinómica (como condición necesaria aunque no suficiente) para obtención de raíces enteras y a partir de aquí ir reduciendo el grado de la ecuación mediante el algoritmo de la división. La existencia de una raíz entera permite caracterizar el problema geométrico inicial que conduce a la ecuación polinómica en cuestión como un problema plano, siempre y cuando la raíz sea adecuada para el problema geométrico.

Previamente se hace relación a la notación utilizada por Descartes y su incidencia en su obra, esta forma de escribir las matemáticas se empieza a vislumbrar en su obra *Regulae ad directionem ingenii* y *El Discours de la Méthode,* en estas obras el empieza hacer referencia de la necesidad de una escritura más breve y poco a poco va dando sentido a las ecuaciones encontradas y a la forma de interpretar las relaciones numéricas entre ellas.

2.5 DE LA FORMA DE ESCRIBIR LAS MATEMÁTICAS EN DESCARTES

Descartes presenta la necesidad de referenciar las líneas con ciertas letras y de allí plantear las operaciones entre ellas, anteriormente ya había mencionado en su obra Regulae ad directionem ingenii (Descartes, 1987).

> (…) mas, para mayor facilidad, utilizaremos las letras *a,b,c*, etc., para expresar las magnitudes ya conocidas, y las letras A,B,C, etc., para las incógnitas; las haremos preceder frecuentemente de los signos numéricos 1,2,3,4, etc., para expresar su multiplicidad, y les agregaremos también el número de sus relaciones que en ellas habrán de entenderse, así si escribo $2a^3$, será lo mismo que si dijera el duplo de la magnitud denotada por la letra a, que contiene tres relaciones. Con este artificio, no sólo resumiremos muchas palabras, sino que, mostraremos los términos de la dificultad tan puros y desnudos, que sin omitir nada útil, no se encuentre en ellos nada superfluo, que ocupe inútilmente la capacidad del espíritu, mientras la mente se vea obligada a abarcar a un tiempo muchas cosas. (Descartes 1989, p.455)

Sin embargo en *La Gèomètrie* el retoma nuevamente pero en esta ocasión lo que hace es aclarar que cuando se hable de a^2 , a^3se desligue del referente geométrico, es decir que no se piense en un cuadrado o en cubo respectivamente, por el contrario se piense en la segunda y tercera potencia de un número.

Aunque Descartes no asume la influencia del trabajo realizado por Vieta anterior a su teoría alguna manera se tenía que valer de sus planteamientos de implementación de letras para la asignación de incógnitas y otras letras para la asignación de parámetros, con el propósito de llegar a una forma general de las ecuaciones, ecuaciones que después el utilizaría para resolver problemas que hagan referencias a este tipo de ecuaciones, así ya no se habla de ecuaciones cúbicas, sino la ecuación cúbica, es decir, la ecuación general de tercer grado expresaba en una incógnita y cuatro parámetros.

2.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PLANOS

La Geometría de Descartes traslada de la Geometría al Álgebra la resolución de los problemas geométricos y además convierte al Álgebra en un magnífico instrumento de exploración e investigación geométrica. Por ejemplo, la realización de ciertos cálculos y en particular la resolución de algunas ecuaciones vinculadas a la expresión de la curva, permiten la obtención de los elementos geométricos notables de la misma, es decir, diámetros, ejes, asíntotas, centros, etc. Incluso Descartes habla de su aplicación «a la medida del espacio que abarcan», queriendo indicar, tal vez, las cuadraturas.

2.7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMA DE PAPUS

En este apartado se establece la asociación que realiza el autor entre la geometría y el análisis, asociación que va más allá de lo gramatical ya que vincula también las sintaxis del Álgebra y de la Geometría, es decir, las relaciones, vínculos y operaciones entre los elementos de ambas. Así pues, para hallar geométricamente la intersección de dos curvas $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ –***problema geométrico***– habría que resolver algebraicamente el sistema formado por ambas ecuaciones –***problema algebraico***–. Además, para cada curva $f(x,y)=0$, la Geometría Analítica establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x,y)=0$ y las propiedades geométricas de la curva asociada.

A continuación se realiza un seguimiento a un tratamiento exhaustivo del histórico Problema de Pappus donde Descartes introduce el primer sistema de coordenadas de La Geometría. Este problema fue un indicador fehaciente, ante el público científico coetáneo, de la novedad y de la inusitada potencialidad del método analítico cartesiano en Geometría en un asunto geométrico que desbordó a lo largo de los siglos las posibilidades del Análisis geométrico griego.

2.7.1 De la implementación de la clasificación de los tipos de ecuaciones para la resolución del problema de Pappus

No tendría ningún sentido si se habla de los nuevos aportes a la teoría matemática, sin mencionar los propósitos o funcionalidad de lo encontrado hasta el momento; el problema planteado por Pappus en una época previa a Descartes, despierta en él curiosidad debido al grado de complejidad presentado en el enunciado, además la nueva forma de interpretar las matemáticas permite dar respuesta a un problema que para la época era imposible concebir en sus mente, debido la limitada dimensionalidad de los griegos para manejar los objetos matemáticos, objetos que a su vez eran interpretados amarrado al referente geométrico.

En el problema planteado por Pappus, se busca encontrar el lugar geométrico de un punto donde se cumpla las condiciones dadas por las ecuaciones planteadas después de relacionar la líneas en cuestión, a continuación se presenta el enunciado y se desarrolla a partir de lo planteado por la técnica cartesiana. En la *Geometría* se menciona el problema así:

> Sean AB, AD, EF y GH, etc., varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual trazando otras líneas a las dadas, como CB, CD, CF y CH, de manera que los ángulos CBA, CDA, CFE y CHG, etc., sea dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema (1981, p. 65).

Su interpretación geométrica es la siguiente:

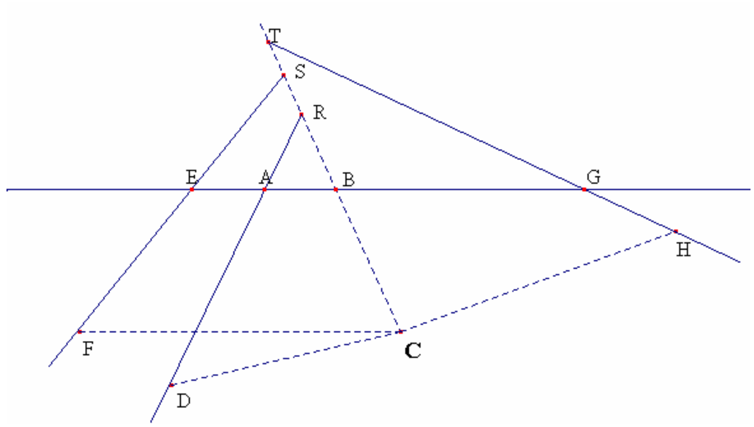

Ilustración 4: Problema de Pappus

Descartes aparte de dar respuesta al problema lo proyecta o lo generaliza a n- líneas, debido que Pappus había encontrado que para tres o cuatro líneas el lugar geométrico era una cónica bien sea un parábola, hipérbola o elipse de, pero para más de cuatro líneas no tendría sentido dentro del imaginario de la época, la presentación que hace Descartes es la siguiente:

> Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres; o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiere cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo comprendido por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada, o bien si hay seis que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres; o bien si hay siete que lo que se produce multiplicando cuatro la una por la otra, tenga la razón dada con lo que se produce con la multiplicación de las otras tres y además por otra línea dada; o si hay ocho, que el producto de la multiplicación de cuatro tenga la proporción dada con el producto de las otras cuatro. Y así este problema se puede extender a todo número de línea. (*La Gèomètrie*, p. 63)

…..Descartes en este sentido lo que pretende es encontrar un punto Cdonde se cumpla que:

(1) **CB x CH = CD x C**

La solución del problema incluye, de esta forma, encontrar todos los puntos (x, y)que constituyen la curva. Se empieza por determinar lo conocido como lo son los ángulos θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, se plantea los ángulos del triángulo **ABR,** con relación a los ángulos ya mencionados; así:

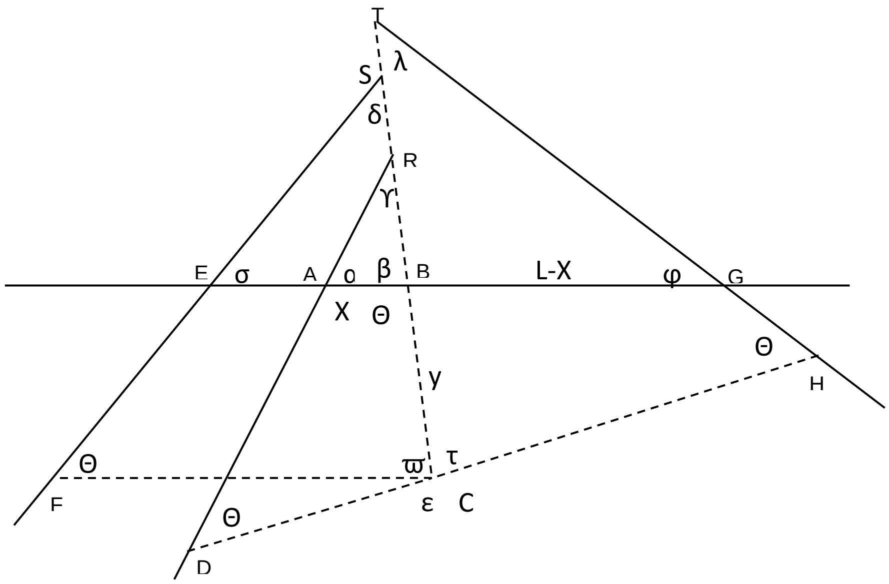

Ilustración 5 Representación de los datos conocidos y desconocidos en el problema de Pappus

La primera línea o longitud que se encuentra es la determinada entre el punto C y R, es decir, $\overrightarrow{\boldsymbol{CR}}$; β = 180 - Θ_1, y el ángulo α también se conoce debido a que se conoce las posiciones de las rectas AB y la recta AR, por consiguiente conozco ϒ

$$\boldsymbol{\Upsilon = (180 - (\alpha + \beta)).}$$

La proporción $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BR}}$ es dada por ley de seno (Álvarez C., Martínez J. R. p. 45.); así: $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BR}} = \frac{\boldsymbol{Sen\gamma}}{\boldsymbol{Sen\alpha}}$, luego se iguala la proporción de la siguiente forma **z** es a **b,** $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BR}} = \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{b}}$; dependiendo del valor que se le dé a **b** así mismo se comportará el valor de **z.** Como se muestra en la figura que al segmento AB se le asigna la variable ***x*** la nueva proporción queda así:

$$\frac{x}{BR} = \frac{z}{b}$$

$\boldsymbol{BR = \frac{bx}{z}}$ Despejando BR por otro lado tenemos

CR = y + BR; Reemplazando BR por lo encontrado, tenemos;

$$\mathbf{CR = y +} \frac{bx}{z}$$

El ángulo ε es dado debido a que se conoce ϒ + Θ_2, entonces se tiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon = [180 - (\Upsilon + \Theta 2)]}$$

Conociendo los ángulos del triángulo ahora relacionado **ΔCDR,** podemos plantear la proporción de la siguiente manera $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$ despejando CD, se tiene;

$$CD = \frac{c(y + \frac{bx}{z})}{z}$$

Realizando las operaciones indicadas en el numerador obtenemos: $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$,

$$\Lambda_2 = CD = \frac{cyz+bcx}{z^2}$$

Continuamos con la determinación de la longitud del segmento CS tomando como referencia el Δ**SEB** conocemos los ángulos del triángulo tenemos entonces que **σ** lo conocemos por saber las posiciones de las líneas, y conozco δ**,**

$$\delta = [180 - (\sigma + \beta)].$$

Se plantea la siguiente proporción $\frac{EB}{BS} = \frac{z}{d}$ despejando **BS,** se obtiene **BS =** $\frac{EBd}{z}$ **,** pero como **EB = EA + BA, y** si hacemos **EA= k** y como **AB = x** la nueva escritura del segmento **EB = k + x** , regresando a **BS =** $\frac{EBd}{z}$ **y** reemplazando **EB** por lo encontrado y realizando las operaciones indicadas en el numerador, se tiene: $BS = \frac{(k+x)d}{z} = \frac{kd+xd}{z}$.

Teniendo esto se puede entonces plantear la relación entre el segmento CS y los segmentos que lo conforman, así: **CS** = **CB** + **BS;** previamente se había determinado que **CB =** y entonces: **CS** = y + $\frac{kd+xd}{z}$ y operando se llega a: $CS = \frac{zy}{z} + \frac{kd+xd}{z}$**;** finalmente tenemos que

$$CS = \frac{zy + kd + xd}{z}.$$

Ahora bien, se conoce el valor de ϖ, pues, ϖ **= 180 – (**$\Theta_3 + \delta$**),** entonces se puede plantear la siguientes proporciones $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$ despejando **CF,** se obtiene, **CF =** $\frac{CSe}{z}$**,** reemplazando **CS**, en **CF,** se obtiene la siguiente expresión $CF = \frac{\left(\frac{zy+kd+xd}{z}\right)e}{z}$, Operando;

$$\Lambda_3 = CF = \frac{zye+kde+xde}{z^2}$$

Dado que AG = L y B = Θ_1 por ser opuestos por el vértice λ **= 180** – **(**B + Θ_1 **)** entonces se propone la siguiente proporción $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$**,** entonces BT = $\frac{BGf}{z}$**,** reemplazando **BG =**

$\frac{(L-X)f}{z}$, **BT** = $\frac{Lf-xf}{z}$**,** pero como **CT = Y + BT, CT = Y +** $\frac{Lf-xf}{z}$ **,** operando**;** tenemos **CT =** $\frac{zy+Lf-xf}{z}$**.** Después, sabiendo que τ =180- (Θ$_4$ + λ), se plantea la siguiente relación entre proporciones, $\frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}$**,** Así $\frac{CTg}{z}$ = CH; $CH = \frac{\left(\frac{zy+Lf-xf}{z}\right)g}{Z}$ obtenemos finalmente:

$$\Lambda_1 = CH = \frac{zyg+lfgx-fxg}{z^2},$$

Y siendo (**Λ$_4$**) = **CB = Y**, se obtiene las 4 líneas de forma:

(2)

$$\Lambda_1 = CH = \frac{zyg+lfgx-fxg}{z^2}$$

$$\Lambda_2 = CD = \frac{cyz+bcx}{z^2}$$

$$\Lambda_3 = CF = \frac{zye+kde+xde}{z^2}$$

$$\Lambda_4 = CB = y$$

Cada línea tiene una expresión de la forma **Λ$_i$** = $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$, en este punto se ve representada una línea recta en una ecuación de primer grado con dos incógnitas, el cual hace referencia a la longitud del segmento **Λ$_i$,** que va desde el punto C al punto de intersección de la línea L$_i$, no refiere a su posición en el plano, esta longitud esta denotada por longitudes *x* y *y* el cual evidencia el carácter de variabilidad, pues varían conforme varia la posición del punto C, y a su vez se estas magnitudes determinan las coordenadas de aquel punto.

Por otro lado las condiciones del problema están dadas bajo la hipótesis que el punto C satisface las condiciones, que el producto de dos de las líneas es igual al producto de las otras dos. Esta condición permite igualar las expresiones y obtener una ecuación de segundo grado. Obtenemos entonces la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\Lambda_2 \times \Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_4}$$

(3)

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y)\ (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) = y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)$$

Retomando los pasos establecidos para resolver un problema geométrico al inicio de este capítulo por el Autor (Descartes), después de encontrar la ecuación que involucrara las cantidades conocidas y las desconocidas (Paso 2), de relacionar una cantidad en términos de la otra,(Paso 3), y encontrar dos expresiones para una misma magnitud (Paso 4). Del problema podemos concluir que el último paso solo es posible si asumimos la condición del paso 1 (suponer que el punto C satisface el problema), para poder plantear la ecuación:

(3)

$$\boldsymbol{\Lambda_2 \times \Lambda_3 = \Lambda_1 \times \Lambda_4}$$

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y)\ (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) = y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)$$

Pero para desarrollar el paso 5 de este problema geométrico, se aclara que para Descartes después de determinada la ecuación de segundo grado en x y y en el paso 3, no se limita con encontrar el valor de alguna cantidad desconocida, para él es necesario establecer a partir de esta ecuación la relación entre las cantidades variables:

> (…) podemos tomar a discreción una de las dos cantidades desconocidas x ó y, buscando la otra por esta ecuación. (Gèomètre p. 54)[2]

[2] *La Gèomètrie*. Espasa- Calpe p. 53

Así, tomando a y como cantidad conocida se tiene una ecuación de segundo grado en x

$$x^2 = \pm ax \pm b^2 \qquad (4)$$

Descartes, señala que:

> Lo mismo, tomando sucesivamente infinitas diversas magnitudes para la líneas y, se encontraran también infinitas para la línea x ; y así se tendrán una infinidad de diversos puntos, análogos al punto C, por medio de los cuales se trazara la línea curva pedida. (Gèomètre p. 70).[3]

Es claro que para Descartes no el problema no era encontrar una cantidad, iba más allá, se centra en la dependencia del valor encontrado para x con el valor asignado para y. a su vez la infinidad de puntos C, que responden a las coordenadas de x y y, se establecen por la relación Funcional que en la ecuación de segundo grado en x y y planteada.

> Entonces para Descartes resolver este problema; además de encontrar un valor (desconocido) de una cantidad, es determinar el valor que pueda tomar en **función** del valor asignado a la otra cantidad (Alvarez C., Martinez J. R. 2000) [4]

A continuación se presenta la forma como Descartes construía sus demostraciones para el problema planteado de PAPPUS, es importante aclarar que esta ecuación es susceptible de ser construido con regla y compas. Además se especifica que entender la expresión "con regla y compás" se refiere poder encontrar los valores de x, determinados a través de esta ecuación a partir de los valores asignados a y, y no como se pensaba que la construcción hacía referencia a trazar la curva que determina el lugar geométrico de los puntos C.

[3] Ibid., p. 70
[4] Álvarez C., Martínez J. R. p (50).Siglo XX, 2000

Seguidamente Descartes se propone hacer la construcción geométrica de la ecuación planteada en el numeral (4); haciendo un tratamiento por separado, obteniendo las siguientes expresiones:

$$x^2 = ax + b^2 \tag{5}$$

$$x^2 = -ax + b^2 \tag{6}$$

$$x^2 = ax - b^2 \tag{7}$$

Para cada caso, siguiendo el algoritmo algebraico de resolución bien conocido, podríamos obtener el valor del segmento solución *x* expresado por las correspondientes operaciones con radicales, de donde se advierte que todas las operaciones que intervienen son resolubles, a partir de los segmentos dados, *a*, *b*, utilizando sólo la regla y el compás. No obstante, Descartes procede de forma geométrica construyendo para cada caso el segmento solución, por eso no puede considerar todos los tipos de ecuaciones cuadráticas (por ejemplo no estudia la ecuación $x^2 + ax + b^2 = 0$ porque no tiene raíces positivas), y de las que resuelve sólo tiene en cuenta las soluciones positivas que son las únicas construibles.

A continuación se muestra cómo Descartes hace el tratamiento de las ecuaciones por separado, y determina las raíces, para la primera de ellas construye un triángulo rectángulo **NLM** cuyos catetos están determinados por los coeficientes de la ecuación: **LM** = *b*, **LN** = $\frac{a}{2}$ y con centro en N traza una circunferencia de radio NL = a que es cortada por la prolongación de la hipotenusa **MN** en el punto **O**, resultando que el segmento **OM** es la recta buscada *x*. Como se muestra en la figura 6:

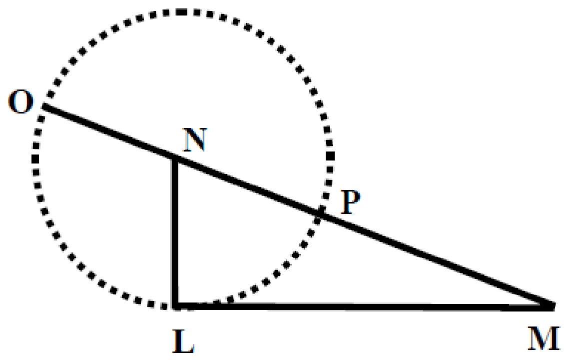

Ilustración 6: Extracción de raíz para la ecuación (5)

En efecto: **MO = MN + NO**. Entonces $MP = x - a$ y como el lado **LM** es media proporcional de los segmentos **MO y MP**, se obtiene $x\,(x - a) = b^2$, si el valor de x está dado por **MO** se tiene que:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt[2]{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

Para la segunda ecuación se utiliza la misma construcción de la figura 6 el valor de x por el segmento MP ya que por el mismo argumento $x\,(x + a) = b^2$, que es la ecuación (6) se obtiene entonces:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt[2]{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

Para la tercera ecuación la construcción geométrica está dada a partir de la siguiente configuración: se toman los segmentos NL y LM, así como la circunferencia con centro en N y radio NL = $\frac{a}{2}$, iguales al caso anterior, pero ahora la línea MQR se levanta perpendicular a LM.

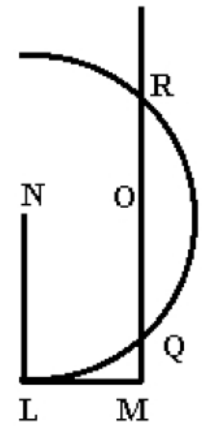

Ilustración 7: extracción de raíces para la ecuación (7)

Ahora cualquiera de los segmentos MQ o MR es un posible valor de x, ya que ahora al hacer MQ = x, se tiene:

$$x\,(a - x) = b^2,$$

Que es la ecuación (7), y también que:

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt[2]{\frac{a^2}{4} - b^2},$$

Si se hace MR = x, pero en este caso se tiene:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt[2]{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

De la figura es claro que el caso en que $b > \frac{a}{2}$ hace imposible encontrar las raíces de la ecuación por este método:

> Si el circulo que, teniendo su centro en el punto N y pasando por el punto L, no corta ni toca a la línea recta MQR, entonces no existe raíz alguna de la ecuación. En consecuencia, puede asegurarse que imposible la construcción del problema propuesto. (Ibid., p. 376)

2.8 DE LA CARACTERIZACIÓN DE LAS CURVAS

Se presenta en este apartado las causas que generan la clasificación de curvas por parte de Descartes, después de un tratamiento pertinente se resalta también la ausencia del cuarto caso:

$$(8)\ \ x^2 = -a - b^2.$$

Descartes ha vinculado íntimamente el Álgebra con la Geometría, hasta el punto de extraer conclusiones geométricas de un hecho estrictamente algebraico: si la ecuación no tiene solución el problema geométrico no se puede construir, porque «encontrar la solución» es «construir la línea». Los principios del método cartesiano aplicados a la Geometría inician los problemas geométricos por un proceso intermedio de escritura algebraica que revierte finalmente sobre la geometría del problema conduciendo a la construcción de la línea solución. Es esta intermediación del Álgebra lo que más se echa de menos en la Geometría griega, por eso después de la resolución constructiva de las ecuaciones, Descartes puede construir todos los problemas de la Geometría ordinaria con las escasas cuatro figuras que ha explicado, mientras que el abstruso orden de las complejas proposiciones de los voluminosos libros de la Geometría griega era una prueba palmaria de que los antiguos no disponían de método.

Seguidamente se puede concluir que Descartes toma de referencia esta clasificación para dar solución al problema de Pappus para cuatro líneas con el propósito de mostrar que una cónica puede sr considerada una curva de primer género es decir, descrita por una ecuación de segundo grado con dos incógnitas. Finalmente después de un tratamiento minucioso del problema de Pappus se obtiene que:

$$LC = \sqrt{(\beta^2 - \alpha)x^2 + (\gamma + 2\beta\delta)x + \delta^2}$$

De esta última ecuación encontrada por Descartes, le permite realizar la clasificación de curvas a partir del criterio del determinante:

Si $(\beta^2 - \alpha) = 0$ *la curva es una parábola*

Si $(\beta^2 - \alpha) > 0$ *la curva es una hipérbola*

Si $(\beta^2 - \alpha) < 0$ *la curva es una elipse.*

2.9 CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTO DE FUNCIÓN VARIABLE EN "LA GEOMETRIE"

De este tratamiento del problema de Pappus pasa por cuatro momentos cumbres el primero hace referencia a la construcción de la ecuación, que se apoye en la gráfica y en el supuesto que existe el punto *C* y que satisface las condiciones del problema.

El segundo es el momento donde se realiza un cambio ahora la deducción se avanza con base a la ecuación obtenida, en una primera instancia se reconoce la relación funcional que esta expresa entre las dos cantidades variables y en segundo lugar se establece las condiciones en las cuales la ecuación de segundo grado en una incógnita es resoluble.

El tercer momento es donde se determina la capacidad de expresar una de la variables en función de la otra (y se expresa en función de x); y en el cuarto momento el autor se remite nuevamente a la gráfica para reconocer a las magnitudes geométricas involucradas en la expresión algebraica, permitiendo la construcción del lugar geométrico.

En el siguiente apartado se desarrolla el recorrido histórico y epistemológico que pretende establecer el proceso de construcción del concepto y los puntos más álgidos del mismo, a fin de realizar un análisis que permita tener una mirada más amplia sobre los pilares más importantes que consolida el concepto de función, y los obstáculos epistemológicos que subyace a los distintos momentos históricos del concepto.

CAPITULO III.

3 DESARROLLO HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Se continúa con una descripción del proceso de evolución de concepto de función en el campo histórico y epistemológico con el objetivo de identificar las variables y factores condicionantes que han influido en distintos estados del desarrollo de esta noción.

En esta búsqueda se tendrán en cuenta las situaciones problémicas a las que la sociedad ha enfrentado y la cual ha desarrollado nuevas teorías para superar los obstáculos que se han ido presentando en la aprehensión de este concepto, por otro lado se analiza la representaciones simbólicas, las concepciones que históricamente han permitido el avance de la definición del concepto de función.

3.1. EVOLUCIÓN HISTORICA DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Para desarrollar un recorrido histórico se realiza una fragmentación de los periodos más representativos para la construcción de la noción, a continuación se inicia la descripción de cada una de las etapas con sus aportes al proceso de generalización y conceptualización.

3.1.1. Periodo de la antigüedad

En este periodo se revisaron los aportes de las cultura Babilónica y Griega, sus avances fueron importantes aunque en un grado intuitivo, por parte de la cultura babilónica se generan ciertas relaciones de dependencias entre dos cantidades de diferentes magnitudes en la determinación de cálculos, estos reposados en la tablillas sexagesimales de cuadrados y raíces cuadradas; respecto a la cultura griega empieza a desarrollar estudios en las ideas de nociones cambio y de cantidad después de afrontar los problemas suscitados a partir del estudio del movimiento.

3.1.1.1. Los aportes de la cultura babilónica a la construcción de la noción de función

De esta cultura se obtuvieron desde el año (2000 a.C. – 600 a. C) La tablillas de arcilla que contenían una gran información de los conocimientos matemáticos de estos pueblos.

Aunque los babilónicos estaban interesados por los cálculos astronómicos, por esta razón reunieron distintos registros de los avances de cálculos del sol, la luna y de los planetas. Estudiaron problemas de variaciones continuas tales como la luminosidad de la luna en intervalos iguales.

Trabajaban con tablas sexagesimales para las potencias y las raíces cuadradas que se pueden comparar con las tablas de logaritmos o de antilogaritmo como también se pueden analizar las tabulaciones de valores de $n^2 + n.$ Para valores naturales de *n.* Lo más interesante es que las tablas se disponían en dos columnas de forma análoga como se hace en la actualidad para determinar los valores de una función $f(x)$.

Aunque estos pueblos no expresan sus resultados es forma general. En las tablillas solo se registran casos concretos sin observar una formulación genérica.

> El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios. Si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo. (Boyer, 1986, p. 66).

Sin duda los avances de los babilónicos en el campo de las matemáticas se direccionaron a los métodos cuantitativos intentando aritmetizar observaciones difícilmente medibles, además de la interpolaciones y extrapolaciones de regularidades, esta búsqueda de regularidades es su más importante característica, aunque hay un gran distancia entre el instinto de funcionalidad y la noción de función.

3.1.1.2 Los aportes de la cultura griega en la construcción de la noción de función

Durante esta época se observa que no eran ajenas la noción de cambio y de cantidad variable al pensamiento griego, pues en los pensamientos de Heráclito y Zenón se plantea problemáticas relacionadas con el movimiento, la continuidad y el infinito. La noción de función está muy amarrada a la relación planteada entre cambio y magnitudes variables, Sin embargo estas características (Cambio y movimiento) aún sigue siendo muy distantes a las matemáticas, dado que desde Aristóteles se plantea que la física es contraria a la matemática pues la primera concierne a los objetos en movimiento y la segunda se refiera a una ciencia estrictamente teórica.

> Los objetos matemáticos no están sujetos al movimiento con la excepción de aquellos a los que se refiere a los que se refiere a la astronomía (Aristóteles, cap. VII, libro XI de Metafísica).

Por otro lado encontramos a Euclides y su obra los *Elementos*, que le daba un tratamiento a los objetos matemáticos y a sus relaciones de carácter estáticos; estudiando objetos y relaciones fijas, esta filosofía <<estática>> provoco que durante muchos tiempo se hablara de incógnitas y de indeterminadas y no de términos variables, pues la concepción de Variabilidad es atribuida esencialmente a las magnitudes físicas, de otro modo las relaciones proporcionales que se planteaba entre dichas magnitudes no eran correspondidas con las igualdades numéricas que eran objetos de estudio de las matemáticas.

Esta disociación claramente marca un obstáculo en la evolución de la construcción del concepto de función y perduro hasta los tiempos de Oresme, Galileo y Leibniz. Según el estudio realizado por Rene de Cotret (1985, p.35) unas de las ideas que generaron mayor conflicto en la construcción del término de función fueron asociados al pensamiento pitagórico en sus tratamientos de conceptos como "La proporcionalidad, La inconmensurabilidad y la disociación entre número y Magnitud".

En la escuela pitagórica se puede vislumbrar claramente la influencia del pensamiento babilónico donde se propone que "todo es número", por lo tanto a toda magnitud se le podía asociar un número, en esta escuela reinada el propósito de unificar el número y la magnitud, es así que pudieron entrelazar los números y las magnitudes a partir de las proporciones que representaban la razón numérica entre dos cantidades de la misma magnitud.

Esta forma de unificar los números y magnitud empezó a generar un obstáculo en la construcción del concepto de función pues bajo estas representaciones no se podía establecer relaciones entre magnitudes diferentes pues siempre trabajaban magnitudes de la misma naturaleza, por ejemplo las áreas de los círculos y el volumen de las esferas se relacionaban con los cuadrados y cubos de sus radios respectivamente, era imposible entonces admitir bajo este pensamiento que se plantearan una proporcione entre los radios solamente pues eran de magnitud diferente (longitud). De esta manera para ellos no podía plantearse relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes y así lograr aproximar a considerar relaciones funcionales.

La razón por la cual los griegos planteaban de forma homogénea sus proporciones se explica en el significado que tienen para ellos las variables y sus aplicaciones, entendían que una variable se le atribuía a la longitud de un segmento, que el producto de dos variables, al área de un rectángulo, el producto de tres variables era el volumen de un paralelepípedo, es así que como consecuencia tenemos que los griegos siempre comparaban magnitudes de la misma naturaleza, longitudes con longitudes, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes etc., plantear relaciones entre magnitudes de distinta naturaleza carecía de sentido para ellos.

Esta homogeneidad de ver las relaciones de magnitudes de la misma naturaleza se convierte en un obstáculo al desarrollo de la noción de función, pues se impide plantear relaciones de pendencia entre variables de dos magnitudes de distinta naturaleza, germen de toda relación funcional.

Seguidamente se desarrolla el segundo componente que generó conflicto en la construcción del concepto de función en la matemáticas griegas "*La inconmensurabilidad*" concepto que estaba en contra de la idea que para los pitagóricos existía una unidad y que el mundo estaba compuesto por una muchas de esas unidades invisibles es decir que una unidad muy pequeña era generadora de otras magnitudes. Este pensamiento se ve contrariado por los planteamientos en las paradojas de Zenón, pues logra mostrar casos donde no era posible expresar la razón de dos magnitudes por medio de números enteros.

> Se abre un auténtico cisma entre números y magnitudes….. Desde este momento los números dejan de ser considerados como entes continuos, y las magnitudes dejan de ser asociadas a los números; a partir de ahora y, hasta la aparición de números irracionales, los números son discretos, y todo los que es continuo deja de ser numérico. Así pues, es imposible tener variables numéricas que representen magnitudes, pues los mismos números son discretos y las magnitudes son continuas. (René de Cotret, 1985, p. 44)

En este planteamiento se genera un obstáculo a la noción de función pues discretizan los números e impiden que se establezcan relaciones numéricas generales entre magnitudes, pues los números se consideran enteros y discretos, sin embargo, las magnitudes son continuas, en tanto los números no sean considerados continuos persistirá el problema para la construcción de la noción de función puesto que considerándose así los números, solo se podrá tener una visión discretizada de los fenómenos de la naturaleza ocultando las continuidad de los mismos.

Se puede observar entonces que los aportes de la filosofía griega a la construcción del concepto de función fueron fundamentales pues aunque hubo grandes avances en lo que respeta al tratamiento de los entes geométricos y el posicionamiento de las proposiciones como representaciones de las relaciones entre magnitudes, la homogeneidad generó obstáculos, que durante tiempos oscureció una visión más amplia de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes de diferente naturaleza, además que los obstáculos subyacentes a la discretización de los números que representaran a los fenómenos naturales los cuales son continuos como lo son las magnitudes, esta brecha hace que se disocien dos disciplinas que desde Aristóteles estaban divorciadas "la física y las matemáticas", hace que aparezcan nuevos obstáculos para la evolución de la noción de función. Estos obstáculos son aquellos relacionados con la homogeneidad que solo permitía que se relacionaran magnitudes de la misma naturaleza y esto hacia que no se pudiera observar las dependencia entre variables de diferentes magnitudes. A saber:

- Obstáculos a nivel de creencias y convicciones.
- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamientos.
- Obstáculos a nivel de conocimiento técnico.

La búsqueda de la superación de estos obstáculos permitió que en la época siguiente se desarrollaran preguntas acerca de los fenómenos naturales y generan a su vez avances en el área de la física, trigonometría y álgebra para que se diera la caracterización de cada una de estas.

3.1.2. La edad media y las representaciones de la cinemática y la geometría de las relaciones funcionales

Aunque en las culturas árabes no se hayan aportes significativos a la noción de funcionalidad se puede rescatar dos episodios que tuvieron su lugar dentro de la evolución de la matemáticas en sí: "la separación del álgebra y la trigonometría y la clasificación de todo tipo de ecuaciones" respecto a estos acontecimientos se puede observar que se crearon las bases de la formalización de la teoría general de las ecuaciones y en trigonometría se empieza a estudiar los triángulos planos y esféricos.

En el continente europeo se continúa con el obstáculo de la disociación del número y la magnitud que traerá sus consecuencias en la visión cualitativa y cuantitativa, utilizan a las matemáticas como la ciencia racional para explicar los fenómenos, pues se guiaban con el planteamiento de Platón donde se planteaban que los sentidos eran engañosos que solo con la razón lograrían alcanzar la verdad.

Es así que uno de los intereses de la Edad Media era el estudio de los fenómenos relacionados con el movimiento y el cambio, a continuación se desarrolla la idea de cambio y de los fenómenos naturales como por ejemplo porqué los planetas brillan, porqué el viento sopla, porqué la lluvia cae mientras el fuego sube entre otros fenómenos que se interrogaban en aquella época y el tratamiento que se le dio a estos componentes tan importantes para la evolución de la noción de función.

Aunque los filósofos Aristóteles y Platón diferían las ciencias como la física y matemáticas, pues para Platón las matemáticas se implementaban para definir las causas; para Aristóteles eran dos disciplinas completamente distintas, pues las matemáticas eran la ciencias de las cantidades abstractas, y la causas del cambio se deberían buscar en las cosas materiales, dicha diferenciación seguía reinando hasta la época, la comprensión que en la unificación de estas dos disciplinas se encontraban las bases del concepto de función, desenvuelve una serie de avances y aportes tanto en matemáticas como en la física.

> Durante casi cuatro siglos, a partir del comienzo del s. XIII, la cuestión que dirigía la investigación científica fue descubrir lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el cambiante de la experiencia sensible, bien fuera esta realidad algo cualitativo según se concibió (Crombie, 1979, p. 56).

En el siglo XIII se empieza a vislumbrar convergencias entre las matemáticas y la física con estudios adelantados en la escuela de filosofía de Oxfod y Paris con exponentes como Grosseteste y Bacon que aseguraban que la matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales, se plantea interrogantes de como sucede y porque aquellos fenómenos sujetos al cambios como por ejemplo, el calor, la luz, la densidad, la distancia, la velocidad.

> En el siglo XIII fueron principalmente las disputas filosóficas las que determinaron los términos de la discusión del movimiento, y esto dio lugar en el siglo XIV a una mayor atención a la formulación matemáticas y cuantitativa de las leyes del movimiento. Comenzó a dirigirse la atención del por qué al cómo (Crombie, 1979, p. 58).

La actividad a nivel del estudio del movimiento (cinemática) se basa en observar los cambios continuos entre limites determinados, Así, una *forma* era cualquier cantidad o cualidad variable, la *intensidad* de una forma era el valor que había que asignarle en relación con la otra forma invariable que se llamaba *extensión* (la distancia, el tiempo o la cantidad de la materia). En esta orden de ideas se tiene que la cinemática y la teoría de la *intensidad de las formas* las desarrolla los autores ingleses como Heytesbury y Swineshead, los cuales relacionaron los avances en este campo como importante pues se vincula nuevamente la cinemática con la aritmética, mientras por otro lado se estaba asociando la cinemática con la geometría como lo intentaba Oresme en Francia.

Es pertinente para el desarrollo de la evolución de la noción de función que se tome en cuenta los aportes de Oresme, pues es el primer autor que pretende graficar las relaciones de dependencia o funcionales en un plano con coordenadas rectilíneas. El propósito de Oresme era poder plasmar la variabilidad en un gráfico, representado una cantidad continua con un segmento rectilíneo.

Este tratamiento que se le otorga a la *noción* incipiente de *función* se convierte en una punto de partida para la interpretación de la manera como representar las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud, teniendo en cuenta que:

> Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de la cantidad continua (Youschevitch, 1976, p. 18).

Para Oresme existía tres tipos de graficas que emergían de las interpretaciones de lo observando los cambios de las intensidades de las cualidades que se exponen en estudio frente a las magnitudes que eran una dependiente de la otra. Es por esta razón que se encuentran tres tipos de graficas las cuales se denominan a saber:

1. Uniformemente uniformes,

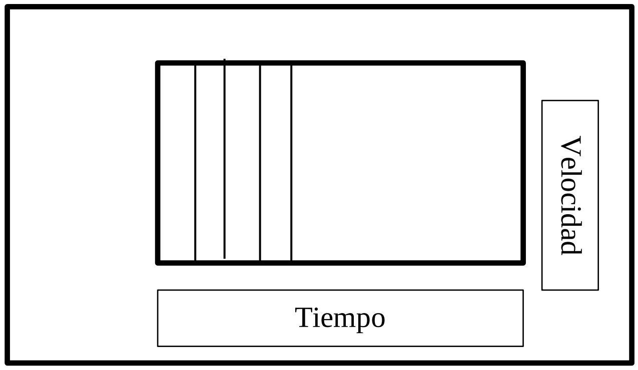

Ilustración 8: representación de una variación uniformemente uniforme (8)

2. Uniformemente deformes,

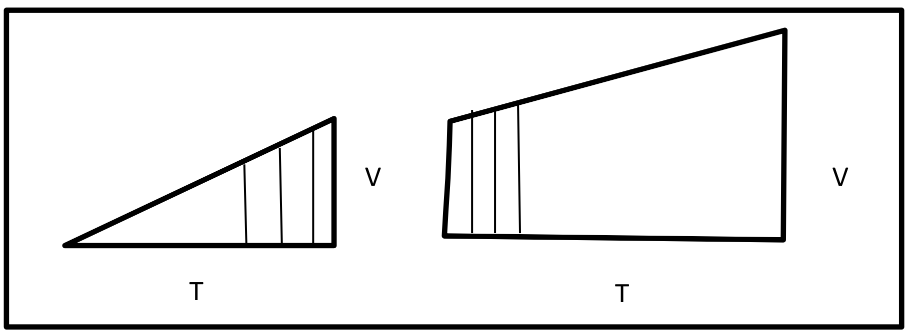

Ilustración 9: representación de una variación uniformemente deforme (9)

3. Deformemente deformes

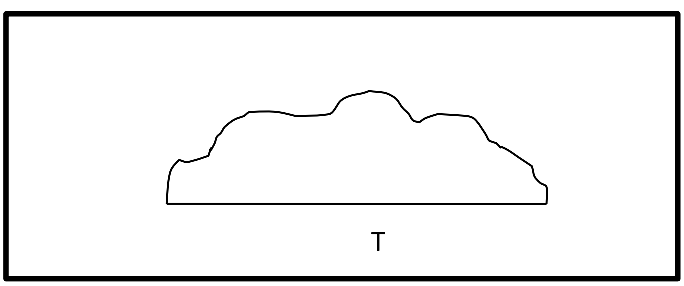

Ilustración 10: representación de una variación deformemente deforme (10).

Las anteriores ilustraciones son las posibilidades que para Oresme se clasificaba los gráficos, de la variabilidad de la velocidad y el tiempo, en este caso las magnitudes asignadas, se podía graficar teniendo en cuenta la relación entre la velocidad que es constante a lo largo de un tiempo determinado (**uniformemente uniforme**), la variabilidad de la misma (Velocidad) en un intervalo de tiempo (**Uniformemente deformes**) y cuando las aceleraciones de la velocidad no son constantes (**Deformemente deformes**).

Aunque incipientes los gráficos de Oresme se pueden identificar algunos elementos que empiezan a marcar la diferencia, entre lo trabajado hasta ahora en cuestión de relaciones de dependencia, puesto el fenómeno representa de manera intuitiva la variabilidad de la velocidad a partir de un tiempo determinado, Oresme representa de forma cualitativa más que cuantitativa, pero es importante señalar que aunque no es en sentido de dependencia que se maneja en la actualidad podría interpretarse la línea superior de la gráfica o la de *intensidades*, como la derivada o por así decirlo la variabilidad, pero al mirar con los lentes del autor y situándose en la época se puede observar como Oresme elabora la representación de tal forma que solo se interpreta en su totalidad y teniendo en cuenta tanto la línea superior como la superficie que queda debajo de la curva.

Lamentablemente, no se continúa avanzando en el desarrollo de la consolidación del concepto de función, pues aún no se lograba que las relaciones funcionales reposaran en una expresión analítica y que se pudiera hacer ese tránsito de una representación a otra. Esto hacia que las representaciones no fueran la mejor herramienta para representar los fenómenos físicos pues no eran de mucha fiabilidad. Pero es importante mencionar que Oresme deja trazado el camino por donde autores como Descartes y Galileo continúen con la labor de construir las bases teóricas y las herramientas matemáticas que les permitirán poder dar un tratamiento óptimo a los desarrollos ya existentes.

A continuación seguirá una etapa donde se podrá observar que los avances en disciplinas como lo fue el álgebra y la trigonometría aportaron al proceso de construcción del concepto de función.

3.1.3. Siglo XV y XVI: Desarrollo de la notación algebraica

Durante este periodo lo aportes más notorios fueron los avances en el perfeccionamiento de la simbolización y los avances en el área de trigonometría, pues a su vez se convierten en una herramienta para determinar la diferencia entre variable en una función e incógnita en una y avanzar en el tratamiento de las funciones trigonométricas.

En cuanto los avances de la notación algebraica encontramos <<al padre del álgebra>> Diofanto (250 d.C.) con sus notaciones sincopadas y a Brahmapugta (589 d.C.); y en lo relacionado con los avances en trigonometría encontramos que los griegos con su astronomía heredan gran para de las bases que hoy conocemos como trigonometría, estos avances se atenúan cuando el hombre empieza su época de revolución Industrial y el renacimiento, pues se inicia la búsqueda de nuevos horizontes; las navegaciones exigían conocimiento a nivel de astronomía y cálculos matemáticos, los viajes a África (1492) y por alrededor del mundo (1519) despertaron una necesidad de desarrollar ciencia y suplir las necesidades de la época.

En 1461 definitivamente se separa la trigonometría de la astronomía con los estudios realizados por el matemático Regiomontano en su obra "*Cinco libro sobre triángulos de cualquier tipo"*, Además después él diseñó múltiples tablas de funciones trigonométricas; que más adelante fueron denominadas las tablas tangentes y cotangente. En estas tablas se podía observar que los matemáticos de la época tenían ideas iniciales de la continuidad de las funciones trigonométricas debido a que se podía observar las aproximaciones en los cálculos.

Otro gran exponente de la época fue Galileo con su insistencia en buscar los resultados y las relaciones que provienen de la experiencia más que las que provienen sólo de la abstracción, se ubica entonces en la experiencia pues ya cuenta con herramientas de medida que le permitía dotar de datos el proceso y a diferencia de Oresme deja de ser una interpretación menos intuitiva y además más cuantitativa; factor que fue una debilidad en el autor Oresme pues la fiabilidad de sus representaciones se limitaba a los instrumentos de medida que en la época existía, por otro lado que Oresme pensaba que con el tratamiento abstracto era suficiente, por eso sus representaciones son incipientes. En este momento de la historia se puede mencionar que las relaciones de causa y efecto ya se podían verificar y cuantificar.

Sus estudios se dedicaron a los fenómenos relacionados con el movimiento, es así que las magnitudes que se estudiara fueron la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida, con base a los métodos de observación y de experimentación, intento una y otra vez para garantizar la exactitud de los resultados, pero a la hora de plantear sus reglas, recurre al viejo método de las proporciones, esto obtuvo como consecuencia el manejo de la homogeneidad de las magnitudes relacionadas, y por esta razón se habla de velocidades constantes, la manera como Galileo realiza los tratamiento del estudio de los fenómenos naturales permitió un gran avance en la construcción del concepto de función pues deseo relacionar de forma funcional las causa y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de variable dependiente. (R. de Corret, 1988, p. 13).

Por otro lado se encuentra los autores Chuquet y Stiefel que define los algoritmos, mediante estos estudios se ira gestando ideas más modernas de función y de lo que respectan a la correspondencia de las variables dependientes e independientes.

3.1.4. Siglo XVI: Introducción de la representación analítica

Durante esta época se presentaron autores que propiciaron un gran avance en la evolución del concepto de función, puesto que realizaron aportes a la nueva disciplina que fue denominada geometría analítica, esta tenía como objetivo descubrir un método que le permitiera expresar las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y estudiar las propiedades de los objetos geométricos, implementando el método de coordenadas.

Descartes y Fermat introducen además de la nueva disciplina de la geometría analítica, la idea de variable algebraica, esencialmente Descartes se preocupan por traducir cualquier problema geométrico en un problema algebraico equivalente: *Este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de las matemáticas* (Diudonné, 1989, p. 79).

La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación *f(x,y)=0* y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto de un sistema de coordenadas. La posibilidad de poder expresar una línea, un círculo o una cónica del plano en una expresión algebraica de la forma $P\ (x, y) = 0$, donde P es un polinomio con coeficientes reales de primer o de segundo grado, esto permitió el estudio de las curvas con ecuaciones de este tipo.

De esta manera se plantean la idea que demostrar un teorema en geometría se trasforma en resolver un problema algebraico o analítico equivalente, o por otro lado o teniendo una interpretación más profunda, alcanzar los resultados analíticos o algebraicos puede conducir a los descubrimientos de resultados geométricos nuevos o inesperados.

> (…) así pues, para hallar geométricamente la intersección de dos curvas *f*(*x*,*y*)=0, *g*(*x*,*y*)=0 –problema geométrico– habría que resolver algebraicamente el sistema formado por ambas ecuaciones –problema algebraico–. Además, para cada curva *f*(*x*,*y*)=0, la Geometría Analítica establece también una correspondencia entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación *f*(*x*,*y*)=0 y las propiedades geométricas de la curva asociada (Gonzáles, 2013, p. 3)

A diferencia de Oresme que pretendió graficar una ley trazando el grafico de la función correspondiente, y la curva encontrada representaba geométricamente la relación de dependencia de las dos curvas entre dos variables, a Descartes no le interesa los lugares de los puntos que satisfacen la ecuación dada, él se preocupaba por la posibilidad de construir estos puntos.

Descartes logro sobrepasar la barrera impuesta por la cultura griega relativas a las dimensiones y al tratamiento de las operaciones con segmentos, él logra superar este obstáculo cuando el determina que x^2 no sugería el área de una superficie, si no el término cuarto de la proposición $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$, hacía uso de un segmento llamado segmento unidad, el cual le permitía representar cualquier potencia de una variable con un segmento y este segmento a su vez es construido con herramientas euclidianas; a continuación se presenta un gráfico que representa la manera la cual se obtenía los productos y el cociente en Descartes, más específicamente el plantea los procedimiento en su obra *La Gèomètrie*.

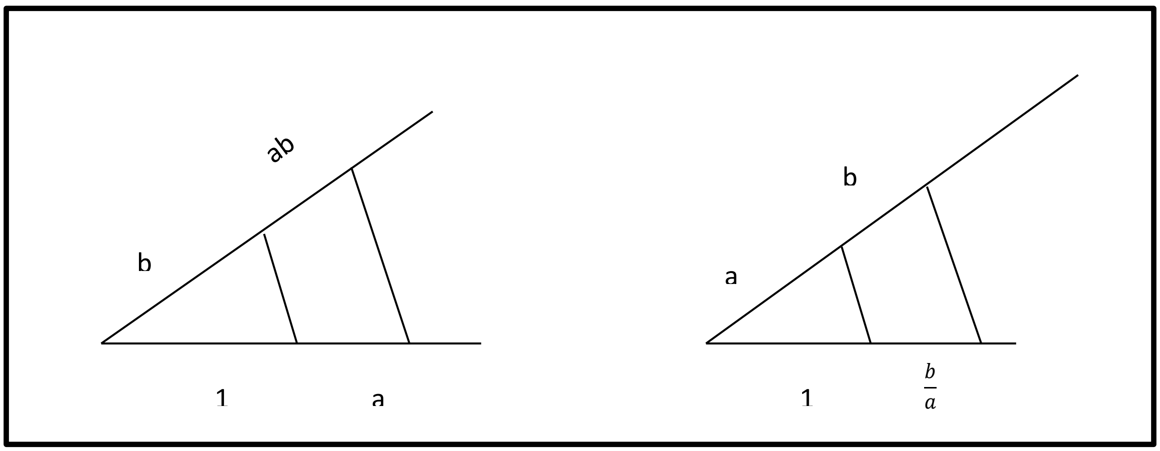

Ilustración 11: Determinación de productos y cocientes numéricos por medio de segmentos de recta (11).

Es de esta manera que se logra romper con el hito de las dimensiones y las potencia de un número, se propone una nueva herramienta que logra establecer un puente entre la geometría y el análisis, pues tomando sucesivamente infinita y diversas magnitudes para la línea x, encontraremos también infinitas para la línea y, y así se tiene una infinidad de puntos, por medio se describirá la curva solicitada.

En este momento de la historia de la evolución del concepto de función, se logra establecer claramente la idea de dependencia de dos variables, puesto que la introducción de dos ecuaciones en x e y, y la consecución los valores para una de la variables correspondan a los valores de la otra variable, posibilita relacionar las dos variables de manera analítica.

Como consecuencia la utilización de las expresiones analíticas y además el conjunto de reglas para operar con ellas otorgara al tratamiento de las funciones un nivel más abstracto y formal, poniendo en juego otros componentes que van construyendo de manera formal el concepto de función.

Por otro lado con la evolución de la notación simbólica y la resolución de ecuación se fue superando el obstáculo epistemológico de la diferenciación del número y la magnitud, pues cada vez se iba haciendo más difusa la relación entre magnitudes y proporciones y entre números e igualdades, cada vez esta teoría o percepción se estaba quedando sin argumentos.

En lo que respecta al avance del álgebra, se podría mencionar que aparte de las ventajas que trajo para las matemáticas y las comunidades matemáticas de la época trajo consigo otros obstáculos epistemológicos para el desarrollo de la idea de funcional que ya se había empezado a gestar con las relaciones de dependencias descritas anteriormente en el trabajo de Descartes.

> Lo principal de las matemáticas es proveerse de un cálculo poderoso, de un grupo de algoritmo que capaciten a los científicos para resolver sus problemas (Sierpinska, 1989, p.3).

En este sentido de ideas se entiende que aquel "*enamoramiento*" del algebra en la época abonó terreno para que un obstáculo se interpusiera en el desarrollo del concepto de función, pues solo estaban puestas la miradas en las relaciones que fueran capaz de expresarse algebraicamente o en ecuaciones y en la reglas para operar con aquellas expresiones.

Por otro lado, autores como Newton, Lagrange y Euler, realizan sus aportes en el área de la física y el estudio del movimiento, pero ahora con un nuevo componente, "la Dinámica", cuyo objetivo era estudiar las relaciones entre el movimiento curvilíneo y las fuerzas que intervienen, potencializándose así el análisis infinitesimal, además por otro lado, a su vez que iban avanzando en el proceso del estudio de la dinámica se fueron afianzando los instrumentos de medición, también propusieron otras metodologías que permitían tener un análisis más cuantitativo de los fenómenos naturales de cambio. Todo este avance significó el nacimiento del análisis de las variables o llamado de otra forma matemáticas de las variables.

Así, la unificación de los siguientes componentes: Los avances del álgebra, las matemáticas variables, el método de coordenadas, y la asimilación de los planteamientos de los autores como Arquímedes, se consolidaba en lo que ahora se llamada el análisis infinitesimal, que tenía como esencia matemática, la acumulación de teoría de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de series.

> Las causas que motivaron este proceso fueron los problemas de la mecánica, a astronomía y la física. Estas ciencias no solo planteaban a las matemáticas problemas, sino que enriquecían con sus representaciones de magnitudes continuas y movimientos continuos y, sobre todo, con la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboran métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas variables. (Ribnikov, 1974, p. 167)

Con este planteamiento de Ribnikov se fundamentó la teoría del cálculo infinitesimal, esta nueva disciplina serviría entonces para la resolución de problemas de mecánica y los problemas relacionados con geometría, esta nueva perspectiva tiene inicialmente dos ponentes fuertes como lo son Newton y Leibniz, que incursionaron este nuevo método de cálculo que facilitaba según Newton llegar a resultados más claros, inicialmente para él las matemáticas adopta un perfil instrumentalista, pues para este ponente las matemáticas solo servían para encerrar en formulas concisas, datos de los fenómenos que están estudiando, y así se convertían en datos más manejables, sin embargo se puede decir que Newton propone un método que lo denomino el método de fluxiones, en este método logra exponer la idea que las cantidades variables van tienen una velocidad de cambio y van cambiando en el transcurrir del tiempo (noción universal, de fluir es constantes), es decir que para Newton lo problemas mecánicos se convierte en "*interpretar las variables dependientes como cantidades que trascurren de forma continua y posee una velocidad de cambio, en su terminología, la función es una fluente, es decir, una cantidad que transcurre en el tiempo, la derivada es la velocidad o fluxión, sirve para estudiar las variaciones de la fluente"* (Ruiz, 1998, p. 123). Es notable como está implícito en este concepto, el concepto de variable dependiente, es decir, magnitud cuya variación es producida por la variación de otras en el tiempo.

Mientras que para Leibniz, que los avances en el cálculo infinitesimal le aporta a él las bases para realizar sus planteamientos en lo que se relaciona con el cálculo diferencial puesto que, describe la diferencial (dy) de una ordenada, de una curva cualquiera como un segmento cuya relación a (dx), es igual a la relación que existe entre la ordenada y la subtangente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{S_t}$$

Con Leibniz nace el concepto de función, por primera vez en sus manuscritos en 1673 (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*) , pero en un sentido distinto al que es implementado en la actualidad, pues para él este término era utilizado señalando la función que cierta objeto matemático cumplía en un determinado proceso pues, distinto al pensamiento actual que le término de función se utiliza para marcar la relación existentes entre la ordenada de un punto de una curva y la abscisa, pero la necesidad de implementar un término que designe o represente las cantidades que dependan de una variable hace que los autores Leibniz y Bernoulli empiecen a utilizar el término coma tal.

> Llamamos función de una magnitud variable o una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y constante (Bernoulli, cit. Por Boyer, 1986, p. 531)

Además el mismo autor propone la letra f para designar la característica de función y escribe incluso el argumento sin paréntesis fx. Aunque en sus manuscritos no se encuentra evidenciado de qué modo construían las funciones a partir de un término independiente, se piensa y los historiadores aseguran, que ya en esta época se implementaba el término como una expresión analítica.

Sería hasta Euler que se definiría formalmente el termino de función siguiendo la brecha propuesta por su maestro Bernoulli, en su primer capítulo de *Introductio in analysis infinitorum,* empieza con realizar las definiciones de elementos que después les dará cuerpo a la definición de función en general, se inicia con las cantidades constantes que son aquellas cantidades que toma siempre un solo y único valor, mientras que una variable puede tomar valores en jun conjunto de números complejos.

> Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o si se quiere, una cantidad universal, que comprende todos los valores determinados…. Una cantidad variables comprende todos los valores en ella misma, tanto positivos como negativos, los números enteros y fraccionarios, los racionales, trascendentes, e irracionales. No debemos excluir ni el cero ni los números irracionales (Euler, cit. Por D´ Hombres y col, 1987, p. 193)

La única variación que realiza Euler a la definición que su maestro presento para función, fue cambiar el término *cantidad* por el de *expresión analítica*. En resumen*:*

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o de cantidades constantes (Euler, cit. Por D´ Hombres y col, 1987, p. 194)

Cabe resaltar que el análisis infinitesimal la disciplina que en la época se encontraba en auge, y aunque estaba muy relacionada con la física, la geometría y la mecánica, cada vez adoptaba un estatus más formal y como consecuencia se convierte en una disciplina independiente, por lo tanto los avances son notorios, Euler es el primer autor en realizar la caracterización o clasificación de la funciones, después de plantear una definición de función, le da un toque de generalidad cuando él involucra campos numéricos como irracionales y las operaciones trascendentales.

Es entonces en ese momento de la época que el concepto de función se convierte en un objeto de estudio y acoge un estatuto matemático. (Delgado, 1997), pues se propone explícitamente una definición y una clasificación de las mismas siendo objeto de estudio.

Pero aunque el aporte fue fundamental, esta nueva percepción del concepto hace que se evoque solo a la manera de representar una función (a través de series de potencias enteras), y se deje a un lado la relación de variable dependiente y la relación biunívoca entre las variables dependiente e independiente.

> Sin embargo Euler restringía el concepto de función a las expresiones analíticas y creía que la manera más general y mejor de representarlas era a través de series de potencias enteras, los matemáticos de la época compartían esta creencia y pensaban que toda función podía expresarse de esta manera. Esto tuvo como consecuencia que los estudios se enfocaran en "las formas de representación más que en una relación entre variables en la cual la variable dependiente debe ser determinada unívocamente por la variable independiente. (Porras, 2011 p. 65, citando a Delgado, 2010, p. 191).

En lo que respecta a la notación de función Euler e el primero en introducir $f(x)$ y en general se debe a este autor, las notaciones matemáticas de nuestra época, pues además desarrollar una nueva teoría apoyado en los trabajos de Leibinz y la teoría de fluxiones de Newton, esta teoría tendría como nombre <<Análisis>> es decir el estudio de los procesos infinitos, estos aportes estaban consolidados en sus documento *Introductio in analysis infinitorum* que contenía dos volúmenes (1748). Es en este momento que el término de función se vuelve elemento central del análisis.

Por otro lado Lagrange desarrollo dos grandes tratados sobre la teoría de funciones *"Teoría de la funciones analíticas y lecciones sobre el cálculo de funciones"*, en estos tratados el pretendía reducir el estudio del cálculo a la disciplina del álgebra, pero cada vez se iba fundamentando más con los trabajos de los matemáticos de la época. La comunidad científica de la poca ponía en explicito la idea que toda función estaba asociada a una curva y pues análogamente toda curva estaba asociada a una función, pero en ese momento no toda curva estaba asociada una expresión analítica, por lo tanto según la definición de Euler no cumplía con los requerimientos que Euler planteaba para la definición de función, es decir que para la curva que no tuviera asociada la expresión analítica entonces no tendría asociada una función.

En este sentido Euler se ve en la necesidad de trabajar con las curvas mecánicas como funciones pues estas curvas son aquellas, cuyo gráfico da cuenta de la trayectoria que describe un punto en movimiento.

Euler continua haciendo sus procedimiento para sustentar las teorías que estaba desarrollando, analiza el fenómeno de la cuerda vibrante, esta consistía en analizar las infinitas vibraciones de una cuerda finita sostenida de sus dos extremos este problema tenía como objetivo encontrar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante, para este tipo de estudio tuvo que tener en cuenta expresiones más generales que las expresiones analíticas, como lo son las funciones con base en expresiones arbitrarias, puesto que algunas graficas obtenidas del experimento de la cuerda vibrante no coincidían con una expresión analítica si no con un gráfico obtenido a mano alzada.

> Función era cualquier expresión analítica, pero Euler se da cuenta que esa definición restringía las soluciones al problema de la cuerda vibrante (dejaba por fuera las curvas arbitrarias) y decide modificarla a fin de dar lugar a estas curvas y a funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica. (Porras, 2011 p. 66, citando Delgado, 2010, p. 206).

Desde este momento Euler desarrolla otra definición más formal y abstracta para la noción de función en la introducción de su trabajo denominado «*Institutiones calculi differentialis*» en 1755 (Delgado, 1992):

> Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces todas las otras variables que dependan de x no importa de qué manera, o que son determinadas por x, son llamadas funciones de x.

En este sentido Euler debe empezar a tener en cuenta funciones definidas, a trozos, y funciones cuyo grafico existía pero que no estaban establecidas por una expresión analítica, ahora bien, existían dos definiciones de función propuestas por Euler: la de la expresión analítica y las de correspondencia arbitraria, la relación de estas dos solo se podría ver explicitada a finales del siglo XIX.

3.1.5. La concepción de la continuidad en la evolución de la noción de función

En este momento de la época, pleno siglo XIX, se desarrolla estudios referentes a la continuidad, teniendo en cuenta lo idea de continuidad era muy intuitiva, y muy lejana de la definición actual de continuidad:

> *Continuidad en un punto: Decimos que una función f es* **continua en c** *si se satisface las condiciones siguientes.*
>
> ***1.*** $f(c)$ *está definida*
> ***2.*** $lim_{x \to c} f(x)$ *existe*
> ***3.*** $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ".(Larson,1999, p. 79)

Pues esta noción de continuidad estaba sujeta a la interpretación geométrica y gráfica, de lo que hasta ese entonces habían desarrollado como concepto de función, las funciones continuas para Euler eran aquellas que eran inmutable o invariantes respecto a la ley de la ecuación que determina en todo dominio de valores de la variable, y las funciones discontinuas son aquellas donde se presenta un cambio en la ley analítica, la existencia de leyes diferentes sobres dos intervalos, o más , de su dominio. En otras palabras, función continua para la época era, según Ruiz (p. 130):

> (…) aquellas funciones perfectamente determinadas, indefinidamente derivables, desarrollables por medio de una serie de Taylor, integrables y representables mediante una curva algebraica o trascendente.

La concepción de función discontinua se va quedando poco a poco sin argumentos frente al planteamiento de ejemplos de funciones que serían discontinuas en el sentido de Euler, pero podían expresarse por medio de una sola ecuación, así que serían continuas, por ejemplo: la función planteada por Cauchy en 1844;

$$f(x) = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x\ < 0\,. \end{cases}$$

Seria discontinua en el sentido que Euler, pero al mismo tiempo, también puede ser representada por una sola ecuación para todo $- x +$, de tal modo seria así continua. Al quedar sin argumentos las teorías planteadas por Euler, se van haciendo más fuertes los planteamientos a nivel de la trigonometría, pues se empieza a movilizar la idea que toda función mixta se podía definir bajo una serie trigonométrica, teoría que fue desarrollada por Fourier, pues se dedica a retomar el experimento de la cuerda vibrante, y determina que cualquier función $y = f\ (x)$ se puede representar con una serie trigonométrica que hoy en día llamamos serie de Fourier (Boyer, 1968, p. 686)

En este punto de la evolución del concepto de función, se podía vislumbrar con esta nueva idea de las series trigonométricas, una idea de representación de función más general. Ahora la preocupación era saber ¿En qué condiciones es convergente la serie trigonométrica asociada a una función dada?

Ahora era necesario establecer una definición donde fuera explicita la correspondencia funcional, definición que iría más allá de la reducción del concepto de función solo a la expresión analítica, en tanto que se debían desarrollar una teoría de análisis más consolidada que pudiera dar soporte a los nuevos hallazgos respecto al concepto de función, concepto que se fue convirtiendo en el eje central de todo estudio de análisis que se desarrolla en la época, es así que poco a poco se fueron creando las condiciones que fuesen necesarias para el manejo de las funciones como correspondencias de tipo más general, en esta búsqueda encontramos a Cauchy:

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos función de esta variable. (Cauchy citado por Youschkevitch, 1976, p. 58)

Por otro lado encontramos a Dirichlet que en 1837, propone igualmente ampliar y generalizar la definición de función aportando más herramientas de tratamiento y demostrando la correspondencia bien delimitada entre las variables y a su vez propone un ejemplo de una función de "mal comportamiento" para determinar el grado de generalidad de la definición de función, según Dirichlet:

> (…) si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manra que siempre se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. (Dirichlet citado por Boyer, 1986, p. 687).

Y la función de "mal comportamiento", que presenta es la siguiente:

> Sean c y d dos números reales distintos; cuando $\boldsymbol{x}$ sea racional sea $\boldsymbol{y} = c$, y cuando $\boldsymbol{x}$ sea irracional sea $\boldsymbol{y} = d$.

Teniendo así una función que sería discontinua para todos los valores de x. Esta a su vez Riemann (1858) con su aporte a la construcción de la definición de función:

> Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a $\boldsymbol{x}$ y a $\boldsymbol{y}$. (Riemann citado por Desanti, 1976, p. 192).

Es definitivo el despojo de la representación, de la función que se convertía de cierta forma en un obstáculo para continuar con los avances de la construcción del concepto como tal, pues ahora no era necesario que la función estuviera determinada forma, algebraica o trascendente, pues se podía establecer las propiedades de la función con toda generalidad y rigor sin evocar la forma en que se representa la función, si no la correspondencia o relación existente entre la variable. Por otro lado está superado también los obstáculo relacionados con el tratamiento de las curvas <<mecánicas>> (no geométricas o aquella que carecían de una expresión algebraica que las definiera, pero podría describir recurriendo a un movimiento). Se libera entonces el concepto de función de la intuición geométrica, que hasta ese entonces era exclusivo de esta disciplina.

Faltaba entonces todo el andamiaje del estudios realizados en el campo del análisis para definir con el mismo rigor la característica de continuidad de una función, es por eso que la comunidad científica se esfuerza por desarrollar una teoría de conjunto que diera soporte a los nuevos hallazgos a nivel del concepto de función.

Aunque para Cauchy no era ajena la idea de continuidad, y a su vez se caracteriza esta definición por que disocia la definición de la intuición geométrica, mirando desde otro punto de vista, el rigor aportado por el matemático Cauchy, que propone una nueva crisis en el desarrollo de esta nueva disciplina, pues desde este momento de la historia el análisis carece de nivel intuitivo geométrico y se debe definir desde sus propios fundamentos una teoría de conjuntos bien estructurada, que permitiera que el análisis adquiriera un estatus más formal; esta disciplina, con su nuevo aparataje se consolidaría una disciplina más estructurada y de esta crisis afloraría la teoría de conjunto.

Aparecen entonces autores como Cantor, que trabaja sobre los fundamentos de la aritmética, Dedekind, con su obra continuidad y números irracionales, todas estos trabajos en busca de un mismo objetivo, formular una teoría de número real. Se puede, mencionar que el desarrollo de la teoría de conjuntos permitiría también ejercer una influencia en los desarrollo de las nuevas teorías de funciones de variable real, a la topología, el álgebra, análisis funcional, etc.

3.1.6 Siglo XX: El concepto de función como terna

Es preciso pensar que para este siglo, el concepto de función se convierte en un concepto central de las matemáticas, y en todas sus disciplinas, y se presenta una nueva perspectiva, el concepto de función y el carácter de correspondencia univoca (aplicación), y se pone de manifiesto la idea de asignación entre variables, y para darle un toque más formal y de mayor rigurosidad, se introduce la noción de grafo (pares de elementos relacionados)

A continuación se presenta la definición de función como una terna así:

> Se llama función a la terna $f = (G, X, Y)$ en donde, *G*, *X*, *Y* que verifican las condiciones siguientes:
>
> 1. $G \subset XxY$
> 2. Para todo *x* ∈ *X* existe un *y* solo un *y* ∈ *Y,* tal *(x,y)* ∈ *G*, *G* es la gráfica de la función *f*. El único elemento de *y* de *Y (x,y)* ∈ *G* se llama valor de la función *f* en *x*, y se utiliza para designarlo *y* = *f(x)*. Es evidente entonces que la gráfica *G* es el conjunto de los pares de la forma *(x, f(x))* de donde *x* ∈ *X*, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.
>
> $A \subset X$ Se le denomina conjunto de partida de *f* y a *Y* conjunto de llegada de *f*. (Godement, 1971, p. 63-64)

Para esa definición es pertinente que tengamos en cuenta la opinión de Russell,

> La idea de función es tan importante, y tan a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas… Por muchísimas razones es conveniente identificar la función y la relación, es decir, si *y = f (x)* es equivalente *a xRy,* donde *R* es una relación, es conveniente hablar de *R* como una función…. Pero se debe recordar que la idea de funcionalidad es más importante que la de relación. (Russell, 1967, p. 306–307).

Finalmente se presenta una definición bien determinada, formal y con un nivel de abstracción alto, dela noción de función, en esta, ya no queda ni rastro de las interpretaciones que antecedieron está estructurada definición, estas definiciones que contaban con un carácter intuitivo y primitivo de la noción de función y que permitieron en su momento avanzar en la teoría matemática, ausente en las definiciones actuales, frente es fenómeno se pronuncia Freudenthal:

> Aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (Freudenthal, 1983, p. 497).

3.2. ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

3.2.1. De la teoría de los obstáculos epistemológicos o cognitivos

Actualmente se desarrolla investigaciones a nivel de didáctica de las matemáticas y en especialmente, estudios que tienen como propósitos desentrañar los motivos o razones del porqué de los frecuentes fracasos escolares en cuanto la adquisición o construcción de un nuevo concepto matemático.

Es evidente que desde esta perspectiva histórica-epistemológica, analizar estos fracasos llevaría a su vez a entender los procesos que se involucra en la enseñanza y aprendizaje de un concepto en particular en matemáticas cuyos objetos de estudios son de diferente naturaleza, que los objetos de otras disciplinas, el estudio en particular de un objeto de estudio, permite explorar el objeto desde diferentes perspectivas, pues se cree que los objetos matemáticos son construidos socialmente a partir de aportes de diferentes disciplinas, como la historia, psicología, pedagogía, por esa razón es necesario determinar las distintas variantes que a través de la historia, han intervenido en la construcción de un objeto o concepto en particular, para este trabajo es de interés el concepto de función a través de la historia y cuáles son los obstáculos subyacentes al proceso evolutivo de la construcción de este concepto.

A continuación se presenta una pequeña síntesis de la teoría de los obstáculos epistemológicos plantadas por Bachelard en (1884/1962) en su obra: *La formation du sprit scientifique:*

> Cuando buscamos las condiciones psicológicas de los procesos de la ciencia, llegamos pronto a la convicción de que es en términos de obstáculos como es preciso exponer el problema del conocimiento científico. (…) Se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superándolos **(**Bachelard, 1983, p. 173**).**

Por otro lado se pone de manifiesto los estudios de otro ponente de esta teoría aterrizada a las didácticas de las matemáticas, Brousseau,

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado”. De este modo, al mencionar obstáculo epistemológico, este autor no se refiere necesariamente a conocimientos erróneos; sino a tipos de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo. (Brousseau, 1983, p. 173).

Brousseau propone que el interés didáctico de un problema tiene que estar basado en el desempeño del estudiante, sus ensayos, experiencias, los rechazos que haga y las consecuencias de estos rechazos; también la frecuencia con que el estudiante está dispuesto a cometer errores y la importancia de estos errores. Desde esta perspectiva, los problemas más interesantes serán aquellos que permitan franquear un verdadero obstáculo.

Así, el autor propone una situación que debe inducir un problema, que cumpla el papel de franquear obstáculos, de modo que el estudiante pueda trabajar un problema y evite los obstáculos que se le presentan. Es indebido eliminar un obstáculo; el obstáculo no se elimina, porque usualmente es un conocimiento que sirve en otro dominio.

3.2.2 El papel de los obstáculos epistemológicos en la construcción del concepto de función

En el siguiente apartado se encuentra explicita la forma en que se realizará el abordaje del estudio epistemológico del concepto de función, se pretende realizar el estudio en dos etapas las cual serán en una primera instancia, la identificación de las concepciones que durante la historia y dependiendo de los avances matemáticos, que a través de la historia se fueron desarrollando alrededor del concepto de función, de estas concepciones se desarrolla caracterizaciones de la mismas, situaciones, invariantes y el momento histórico en que se presentaron las concepciones, y en segunda instancia se tiene la identificación de los obstáculos epistemológicos a la luz de la teoría de los obstáculos epistemológicos de Brousseau.

El estudio de la evolución del concepto de función a través de su historia nos proporciona una visión profunda sobre la diversidad de concepciones que han estado asociadas a este concepto a lo largo de su desarrollo. Ello facilitara las claves para la identificación de las diferentes concepciones que el mismo figure en los programas oficiales, en los manuales escolares o en apuntes de clase, así como de las que manifiesten los alumnos. También servirá de base para la determinación de los obstáculos de índole epistemológicos, esto es, los constitutivos del propio saber.

3.3 IDENTIFICACIÓN DE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y SUS RESPECTIVOS ACTOS DE COMPRENSIÓN ASOCIADOS AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

A continuación se plantea los obstáculos que afloraron en el desarrollo de la noción de función a través de la historia por esta razón se irán enunciando la etapa o época y se explicitara el obstáculo. En esta puesta en escena de los obstáculos es necesario aclarar que existen diferentes tipos de obstáculos a nivel epistemológico, en este concepto intervienen los siguientes tipos de obstáculos:

- Obstáculos a nivel de creencias y convicciones.
- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamientos.
- Obstáculos a nivel de conocimiento técnico.

Se presenta entonces una breve explicación de cómo se caracteriza cada uno de estos tipos de obstáculos. Por ejemplo cuando hablamos de obstáculo de nivel de creencia y convicciones, son aquellos obstáculos relacionados con la forma de concebir el mundo, cómo se comunica ideas que son aceptadas socialmente, que el mundo reconoce.

Cuando se habla de obstáculos a nivel de pensamiento se refiere a los relacionados con el momento de aproximarse a la resolución de un problema, estudia las situaciones y la puesta en juego de toda la carga conceptual que hasta el momento se ha dotado un individuo, en el transcurso de su interacción y educación. Y los obstáculos de nivel técnico son aquellos relacionados explícitamente con el concepto o los conocimientos, en ocasiones con los conocimientos que están asociados a otra profesión o disciplina, pero relacionada de forma directa con el conocimiento estudiado.

Según Sierpinska (1992), los obstáculos se relaciona de la siguiente manera: los enfoques técnicos con los que tratamos de dar solución a un problema, pueden explicarse por los conocimientos que tenemos a nivel de creencias o a nivel de esquema de pensamiento, y al contrario, nuestro conocimiento técnico, en un cierto momento, puede cambiar nuestras creencias e, incluso, nuestros esquemas de pensamiento (Luisa, 1998, p. 43).

> (…) si nuestras creencias, son falsa creencias, y nuestros esquemas de pensamiento son inconscientes, pueden, muy bien, funcionar como obstáculos para nuestro pensamiento en un nivel técnico (Sierpinska, 1992, p. 28)

3.3.1 Obstáculos a nivel de creencias y convicciones

Son aquellos obstáculos que hacen referencia a la visión del mundo que cada individuo, este tipo de conocimiento es explícito. Se puede comunicar a los demás, no exige ningún tipo de justificación pero son autorizadas por la tradición o el sentido común.

3.3.1.1. Obstáculos de la concepción estática

Aunque la noción de funcionalidad estaba ligada a las ideas de cambio y de relación entre magnitudes variables, las matemáticas Euclidiana concebía el conocimiento matemático estático, se diferenciaban las magnitudes físicas y las proporciones de las igualdades numéricas, relacionar la noción de variabilidad como característica de las magnitudes físicas, se convierte en un obstáculo epistemológico para la evolución de concepto de función pues no se observa con claridad la forma de relacionarse las variables que se ponen en juego.

Se estudiaba los cambios de las magnitudes físicas implementando las proporciones distinto a las igualdades que son estrictamente numéricas, esta noción de <<variabilidad>>

estaba asociada exclusivamente a las magnitudes físicas, se convertiría así, en un obstáculo para la evolución del concepto de función.

3.3.1.2 Obstáculo de la disociación de magnitudes y números

Para los antiguos griegos los números siempre eran discretos, mientras la magnitud continua, dos objetos de estudio diferentes, mientras que actualmente a una magnitud se le puede asociar una cierta medida numérica, sin ningún inconveniente, tener la capacidad de realizar esta actividad matemáticas, no ha sido gratuita puesto que esta disociación genera en este momento histórico, obstáculo epistemológico, pues subyace la dificultar al observar las leyes físicas como funciones numéricas.

3.3.2. Obstáculos a nivel de esquemas de pensamientos

Son aquellos obstáculos que hacen referencia con las distintas maneras que se aproxima un individua a la resolución de un problema, por la manera de interpretar situaciones, aquello que se ha aprendido en la práctica de la socialización y educación.

3.3.2.1. Obstáculo de la razón o proporción

Este obstáculo hace referencia al ocultamiento del aspecto funcional de la proporción, debido a la representación estrictamente escalar de la misma, además desde los griegos hasta el s. XV la proporción se escribía de forma discursiva y no como una igualdad en formas de fracciones, por esta razones se convierte en un obstáculo epistemológico para la construcción de la noción de variable, por tanto para el desarrollo de la noción de función.

3.3.2.2. Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones

La comparación o la relación entre magnitudes de la misma naturaleza hacia que no se pudiera identificar las relaciones de dependencia entre variables de diferentes magnitudes, y esta situación en una parte esencial en el desarrollo del concepto de función, pues esta relación entre variables de diferente magnitudes, es el germen de toda relación funcional.

3.3.2.3. Obstáculo de la concepción geométrica de las variables

Desde los griegos se concebía una estrecha relación entre las matemáticas y la geometría y esta estrecha relación se convertiría más adelante en u obstáculo pues se definieron los principios dela operaciones básicas a partir de elementos primarios del algebra geométrica como lo son los segmentos, *la suma* como adición de segmentos, *la diferencia* como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo. *La multiplicación* entre dos segmentos llevaba a la representación de un rectángulo de dimensiones a y b , y el producto de tres segmentos era un paralelepípedo, y si se presentaba una situación con más de tres factores no se podía resolver pues no existía representación geométrica para dimensiones mayores a tres; finalmente la división era representada solo si la dimensión de dividendo era mayor que la dimensión del divisor.

Este obstáculo era superado con los aportes de Descartes y Fermat, pues para Descartes el producto de dos o más cantidades, no era representado con áreas o volúmenes, plantea un isoformismo entre los segmentos y los números reales, Lo suma, diferencia, producto o cociente, de dos segmentos siempre era otro segmento. Con este nuevo parámetro se cambia la perspectiva de variable y se inicia el estudio de las relaciones de los puntos en una curva y las coordenadas de los mismos.

3.3.3. Obstáculo a nivel de conocimientos técnicos

Estos obstáculos son aquellos que hacen referencia a los conocimiento explicito, lógicamente justificados, necesario en diferentes profesiones.

3.3.3.1. Obstáculo de la concepción algebraica

La simbolización algebraica fue un aporte muy importante en el proceso de construcción del concepto de función, pues cuando se logra determinar una expresión algebraica a una curva dada (aporte desarrollado por Descartes), y por otro lado se definía en el s. XVIII función como: "*Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de alguna manera por esa cantidad variable y números o cantidades constante".*

En este sentido se pensaba que la únicas relaciones meritorias de estudio era aquellas que solo se podían representar en una expresión analítica y ecuaciones, esta fuerte dependencia entre expresión analítica y función deja por fuera otro tipo de relaciones que se no eran hasta esa época posible representar más que con un trazo a mano alzada, este obstáculo se supera cuando empieza a surgir la correspondencia arbitraria, pero esta a su vez era muy incipiente pues era carente de una teoría de conjuntos y un desarrollo formal y definitivo en los números reales.

3.3.3.2. Obstáculo de la concepción de mecánica de la curva

El concepto de función estaba amarrado al concepto de curva mecánica, (Trayectoria de puntos en movimiento), pero estas a su vez no eran consideradas como gráficos de una relación funcional, esta idea permanece en la mente de matemáticos como Galileo, Torricelli, Roberbal o Newton, pues hasta este momento las gráficas tenían una significación distinta a la de conjunto de puntos que satisface condiciones específicas dadas por una relación funcional.

4. CONCLUSIONES

Finalmente se puede mencionar que realizando un recorrido histórico y epistemológico del concepto de función, se encontró una secuencia de concepciones que fueron poco a poco gestando una noción clara de las relaciones funcionales entre dos objetos matemáticos de estudio, dejando así explicito también los obstáculos que durante la historia se han podido encontrar relacionados con la construcción del concepto de función; este tipo de investigación proveen al docente de herramientas y conocimientos que se tiene en cuenta en la planeación de sus intervenciones en el aula. pues es de vital importancia la claridad en las concepciones, obstáculos y definiciones del concepto que va hacer objeto de enseñanza, dado que puede proponer situaciones más significativas para el estudiante, y evitar saltos que puedan generar en los estudiantes confusiones u obstáculos en su proceso de construcción del concepto de función; por otro lado se observa que ser consciente de la evolución del concepto es fundamental para no repetir errores, para determinar los puntos más álgidos del proceso de evolución y la época en las que se desarrolla, pues esto facilitará el entender que hay factores a nivel social y cultural que intervienen la construcción de nuevas concepciones y a su vez necesidades que surgen a nivel conceptual que impulsan a las comunidades científicas especialmente matemáticos a generar nuevas teorías matemáticas que den respuestas a las expectativas planteadas por sus antecesores.

Analizar el documento *La Gèomètrie* escrito por Rene Descartes permite entender el paso de una manera de pensar desde la antigua Grecia, a una innovación de pensamiento moderno, post cartesiano, el mismo autor prepara a sus lectores con su obra "*El discurso del método*", entregando una serie de reglas para la resolución de problemas en matemáticas, pues en el desarrollo de conocimiento matemático se venía trabajando de modo diferente al planteado por el autor, entender que en la antigüedad un problema matemático se resolvía en la medida que pudiera plantear una demostración organizada y estructurada, que permitiera llegar a una solución, sin tener la certeza que existiera o no, mientras en Descartes Resolver un problema matemático implicaba dar por supuesto que la solución existe antes de empezar a construir el andamiaje teórico para dar respuesta al mismo; en Descartes se pretende; más que hallar la solución del problema, determinar las condiciones que debe cumplir aquella solución para que satisfaga las necesidades que del problema subyacen.

Esta nueva forma de pensarse las matemáticas hace que las comunidades post cartesianas, desarrollen otras teorías que permitieran el paso a nuevos conceptos, especialmente en el concepto de función, pues respecto a este objeto matemático se propone una conexión entre la geometría, la aritmética o el álgebra, con Vieta se propone una álgebra espaciosa, que corresponde al planteamiento de operaciones con las letras que hacían alusión a objetos geométricos, después, con Descartes se propone una operaciones básicas con segmentos a partir de las proporciones, con el planteamiento de la solución del problema de Pappus, el define las expresiones algebraicas.

> El Análisis Geométrico griego utilizaba un equivalente de las coordenadas pero sólo empleaba Álgebra Geométrica. El Arte Analítica de Vieta desarrolla el Álgebra simbólica pero no usa coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, coordenadas y Álgebra literal,
> Descartes alumbra la Geometría Analítica que establece un puente para transitar entre la geometría y el Álgebra, al permitir asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos, en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas.(Gonzales, 2013, p. 283)

En este sentido es importante resaltar la marcada diferencia de los planteamientos de Descartes frente a la filosofía griega o los aportes euclidianos que para ese entonces se estaban reevaluando, con investigaciones de la época como los trabajos de Fermat entre otros ya mencionados con anterioridad, se presenta las diferencias del método cartesiano y lo que se hacía llamar hasta entonces "matemática euclidiana", la primera, es la notable distancia que el autor logra adoptar desde el razonamiento hasta la figura, dicha distancia hace que se haga menos dependiente, y la segunda se trata que el procedimiento que se lleva acabo para la construcción de un problema se inicia con la hipótesis de que el problema ya esté resuelto.

Respecto a esta segunda característica se puede mencionar que suponer que el problema ésta resuelto, permite la traducción del problema en términos de una ecuación, Descartes aparte del interés que tenía por la construcción geométrica del problema, se sentía más inclinado por el tratamiento analítico es decir, en el establecimiento y resolución de la ecuación algebraica que lo traduce.

> Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, y la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. .(Gonzales, 2013, p. 283)

Por estas dos diferencia hacen que el aporte de Descartes sea innovador en la comunidad científica de la época, y en lo que respecta con el problema de Pappus se traduce a encontrar el punto o en otras palabras un lugar geométrico de los puntos, que satisfacen condiciones que determine un problema a partir de la relación que deben satisfacer las magnitudes geométricas involucradas. Las magnitudes son más adelante tratadas por Descartes de manera algebraica, y es en torno a ellas, se realiza una nueva lectura algebraica para la geometría.

El hallazgo de identificar los obstáculos epistemológicos cumple con uno de los objetivos planteados en el inicio en este documento, permiten que se planteen otras investigaciones que sean acordes con los objetivos de este trabajo de investigación, por ejemplo en campos de conocimiento como las didácticas, historia, matemáticas, pedagogía entre otros.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Alvarez, C., Martínez, J.R., (2000).*Descartes y la ciencia del siglo XVII.* Siglo XXI.

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M., et al., (1985). *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid Alianza Vol. 3.

Bachelard, G., (1983).*La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: siglo XXI. (Edición original, 1948).

De la Rosa, A., (2003). *Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización.* En: Mosaicos Matemáticos, N° 11.

Delgado, Trujillo & Cedeño, (2010) *El concepto de función y la teoría de situaciones.* Bogotá *:* Universidad de la Salle, cáp 3.

Descartes, R., (1947): *La Geometría*. Argentina. Versión en español de ed. Espasa-Calpe.

Descartes, R., (1987): *Discurso del método*; Madrid, traducción de Arnau Gras, H.; ed. Alhambra.

Gonzáles U., Pedro M. (s.f): *La Geometría de Descartes*. Recuperado de (http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf) EL 11 de Septiembre 2013.

Mesa, Y & Villa, A., (2007): *Elementos Históricos, Epistemológicos y Didácticos para la construcción del concepto de función Cuadrática*. En: Colombia Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, Vol.21, pp.1-18.

Ministerio de Eduación Nacional (1998*). Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Serie Lineamientos.

__________ (2006). *Estandares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional. Documento No. 3.

Porras, F., (2011). *El concepto de función en la transición bachillerato* Trabajo presentado para obtener el título de Maestría en Educación Matemática, :Universidad del Valle.

René de cotret,S. (1985).*Etude historique de la notion de fonction: analyse epistemologique et experimentation didactique.*Memoire de Maitrise en Mathématiques. Montreal: Université do Ouebec.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Moscú, Mir. (Edición original, 1974)

Ruiz Higueras, L. (1998): *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. España, publicaciones de la Universidad de Jaén.

Spivak, M., (1975).*Calculus*. Barcelona Reverté., Tomo 1.

Valiron, G., (1976).*Formación y evolución del concepto de función analítica de una variable* En: Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Eudeba.

Vázquez, M.; Marmolejo, G.; Torres, L.; Valoyes, L.; Malagón, R.; Garzón, D. (2005): *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la Escuela*. Santiago de Cali, editorial el Bando Creativo.

Youschkevitch, A., (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19 the Century*. Archive for History of Exact Sciences, Vol 16, p.37-85.