LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA ESCUELA:
DIFICULTADES Y TRATAMIENTO

LÍMBER OLIVERIO BENALCÁZAR CORTÉS
Código 200653747

UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

SEPTIEMBRE, 2012

LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA ESCUELA:

DIFICULTADES Y TRATAMIENTO

LÍMBER OLIVERIO BENALCÁZAR CORTÉS

Código 200653747

Asesora

Ligia Amparo Torres Rengifo

Profesora Área de Educación Matemática

UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

SEPTIEMBRE, 2012

AGRADECIMIENTOS

Quiero en esta oportunidad agradecer en primer lugar, al Dios todo poderoso que nos ha conservado con vida, con salud, nos ha dado inteligencia, nos ha guiado y cuidado hasta este día.

En segundo lugar agradezco, a mi Padre y hermanos queridos porque ustedes me dieron mucha fortaleza y valor para continuar por este arduo camino.

En tercer lugar, a Ustedes apreciados maestros, asesoras y evaluadoras que fueron destinados a ser parte de mi formación, a todos ellos quiero agradecerles de manera muy sentida, porque cual velita encendida se fueron consumiendo a si mismos para darnos su luz de su conocimiento, gracias por su paciencia, simpatía, y comprensión. Recuerden que lo que ustedes han sembrado, pronto dará sus más exquisitos frutos.

En cuarto lugar, quiero proporcionar mil gracias a cada uno de mis compañeros, por vuestra simpatía y amistad, por sus bromas que cada día le daban un matiz cálido a nuestra vida estudiantil, gracias universidad querida por abrazarme en tus aulas.

Para finalizar, procuro reconocer el favor inmenso que hicieron todos, por todo cuanto hicieron por mi.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra una prueba diagnóstica relacionada con las ecuaciones lineales, que haga posible identificar algunas dificultades que tienen los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya, del Municipio de Buenaventura. Para lograr indagar y determinar la existencia de algunas dificultades de tipo procedimental y conceptual, conformada por un cuestionario de diez preguntas que se realiza en una sola sesión: correspondiente a dos horas de clase (55 min cada hora). El cuestionario se enmarca en contenidos como: resolver ecuaciones, ecuaciones equivalentes y resolver problemas, es decir, problemas que se solucionan con ecuaciones lineales y que relaciona magnitudes; número, contenido de gramos de azúcar de un producto, cantidad de moneda y edad.

Entre los resultados en la prueba sobresale: la falta de significación que tienen los estudiantes de la ecuación como relación de equivalencia, el desconocimiento entorno a componentes que se relacionan con las ecuaciones, se observa como única salida la transposición de términos, también se encuentra la no validación de respuesta. Sin embargo hay aproximaciones y avances en cuanto a resolver problemas que impliquen trabajar únicamente con números libres de magnitudes.

Posteriormente, se diseña pero no se desarrolla en el aula una secuencia didáctica: Las ecuaciones de primer grado en la escuela: dificultades y tratamiento, conformada por situaciones, que a su vez tienen actividades encaminadas a disminuir las dificultades y a edificar elementos conceptuales, tal al de equivalencia inmerso en el marco de referencia conceptual redactado en el informe.

El propósito fundamental de este trabajo es brindar instrumentos didácticos, procedimentales y conceptuales a grupos de profesores sensibles con esta clase de dificultad. Para ello se parte de la aplicación de la prueba.

Términos claves: Resolución de ecuaciones lineales, equivalencia, secuencia didáctica, álgebra.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de investigación, requisito parcial para optar por el título como licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, es un resultado colectivo de investigadores en matemáticas y docentes en ejercicio, que de manera organizada, contribuyeron al planteó, aplicación y análisis de las pruebas que posteriormente sirvieron de base para la propuesta de una secuencia didáctica que contribuya a acercarse al concepto de ecuación de manera significativa.

En este sentido, el trabajo señala algunos aspectos relacionados con el álgebra, especialmente los contenidos que tienen vínculos con las ecuaciones lineales, de lo cual se encontró que hay algunos conflictos al momento de ser entendidos. El presente trabajo se estructura de cuatro capítulos que se describen a continuación:

El capítulo 1, presenta todo lo relacionado con el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos y el marco contextual. Los cuales son ejes centrales para el trabajo, que permiten ubicar el problema en un contexto concreto de trabajo, en este sentido se tomaron como referencia: Enfedaque (1990), Filloy & Rojano (1984), Lesh, Post & Behr (1987), y otros Soloway, Lochhead & Clement, (1982) y Tall (1988); que aportaron elementos procedimentales y conceptuales para el desarrollo de los puntos descritos anteriormente.

El capítulo 2, constituye un conjunto organizado de indagaciones entorno a tres perspectivas a saber: didáctica, curricular y matemática; las cuales al inter relacionarse brindan un soporte conceptual al desarrollo del trabajo. La primera perspectiva ofrece un aprendizaje programado de la ecuación. La curricular muestra una maya de contenidos y un conjunto de objetivos. Permitiendo unos criterios metodológicos y desarrollo de técnicas de evaluación que orientan la actividad académica (enseñanza y aprendizaje). Por último la matemática entrega el énfasis en la distinción entre conceptos como la equivalencia entre ecuaciones y proporciona estudios desde las relaciones de la igualdad. También proporciona y puntualiza la relación entre variable y parámetro.

En el capítulo 3, se describe la prueba diagnóstica, se muestran los resultados y el análisis de los mismos, caracterización de dificultades y sobre el diseño de la secuencia didáctica, objetivos de la secuencia y aspectos matemáticos involucrados en la secuencia. Estos temas son vitales y se consideran importantes por la fundamentación matemática, que se piensan deben tener los estudiantes y dan algunos elementos en la redirección que debe tomar la orientación, que sirva para mejorar el nivel de conocimiento en cuanto a los contenidos a desarrollar en la prueba.

Finalmente en el capítulo 4, se presentan algunas conclusiones generales respecto a la resolución de ecuaciones lineales, y su estudio permite introducir conceptos como: equivalencia, igualdad, ecuaciones condicionales, etc. En donde se facilitan algunas consideraciones acerca de la dinámica en clase que deben tener los docentes cuando abordan el concepto de ecuación lineal.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo muestra el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos y el marco contextual, los cuales son ejes centrales para el trabajo, dado que permiten ubicar el problema en un contexto específico de trabajo; en esta parte se reconoce, escribe y analiza el problema. ¿Cuál es la solución al problema que el trabajo pretende solucionar, dónde y quiénes están siendo afectados?, ¿En qué se evidencia el problema?, datos concretos que soportan causas y / o consecuencias identificadas en el mismo.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el transcurso de los últimos veinte años en el contexto de la Educación Matemática y en las investigaciones sobre esta disciplina, la enseñanza y aprendizaje del álgebra se ha fortalecido debido a la variedad de contribuciones hechas por autores tales como: Enfedaque (1990), Kieran,C.(1992), Filloy & Rojano (1984), Lesh, Post & Behr (1987) y Soloway, Lochhead & Clement,(1982), que proporcionan comprobaciones de estudios en la aritmética y en el álgebra y valoran la importancia del pensamiento algebraico y la infinidad de problemas presentes en el álgebra cuando son llevados al aula para posterior aprendizaje.

Debido a lo anterior, en la actualidad se acepta en la comunidad internacional en Educación Matemática un aspecto, que muestra de manera clara que realmente hay un problema alrededor de la construcción del pensamiento algebraico, el cual nunca carece de importancia, ni se produce por sí solo, no es conveniente y tampoco debe apartarse de otros pensamientos (numérico y variacional y sistemas algebraicos y analíticos), ni desarticular la generalidad hacia otros contextos. De lo anterior florece, un campo de problemas queda apertura a un número de interrogantes para mejorar e intentar conseguir pluralidad de métodos, que ayuden a disminuir las distintas maneras en que se manifiestan tanto las dificultades externas[1] como internas del aprendizaje del álgebra en la escuela.

[1] La dificultad externa quiere decir, la orientación que recibe el alumno por parte del profesor no contribuye a una correcta interpretación del concepto, y la dificultad interna quiere decir, el estudiante no aprende por causas como: la falta de atención en clase, pésima concentración, conflicto familiar entre otras.

En consecuencia en esta propuesta se presentan varios resultados que se han producido por las investigaciones que promueven el reconocimiento de algunas dificultades en la resolución de las distintas formas en que es presentada la ecuación lineal y también reconocen obstáculos que se hallan entorno a ellas, tales como:

- Incoherencias para expresar ejercicios verbales en términos algebraicos.
- No hay distinción entre la ecuación de primer grado y la identidad.

Las anteriores observaciones enmarcan errores en situaciones específicas como:

- El manejo inapropiado de operaciones con números enteros y otros tipos de conjuntos numéricos. En procesos donde existe complejidad en la enseñanza y en el aprendizaje para solucionar ecuaciones lineales, y que están asociadas a otros medios como la falta de trazar objetivos específicos durante el transcurso que logren insertar contenidos manipulados con anterioridad.

El paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico en la escuela es un área de dificultad usual en los estudiantes, cuando incursionan al estudio del álgebra, pues portan en sí mismo nociones y planteamientos pertinentes a la aritmética, los cuales en algunos casos son desarrolladas hasta el álgebra. No obstante, el álgebra no es sustituir únicamente letras por números o la combinación literal-número, tampoco lo es valorar letras, estudiar la disciplina va más allá de esto. Es así como en este sentido Kieran (1992) señala que:

“Aprender álgebra no es meramente hacer implícito lo que estaba explicito en la aritmética” De esta manera se ve que el estudio del álgebra elemental requiere el desarrollo gradual de sistemas de representaciones abstractas (lenguaje algebraico, diagramas, etc.).

En esta dirección, Enfedaque (1990), también plantea que:

> “La persistencia de los niños en contar con los dedos o en utilizar estrategias de contar con los dedos, y en usar solo números positivos a la hora de

> resolver elementales problemas aritméticos es, probablemente uno de los más claros síntomas de las dificultades que experimentan los alumnos cuando han de superar el paso a un sistema de representación más abstracto, en el que la potencia de los símbolos aumenta con respecto a la etapa anterior y en que el grado de abstracción es también más elevado".

Se puede anotar, que el sentido asignado por el autor a tal estrategia va más allá de la simple propuesta aritmética, puesto que comprende el uso de números positivos, también la noción del número negativo, además incluye el sentido que portan los números al momento de integrar términos semejantes de expresiones algebraicas, es así que en la operación aritmética $4 + 2$, el sentido que portan ambos números de izquierda a derecha (del pulgar hasta el anular y del meñique al índice) de esta forma obtiene $+6$ y en $3 - 1$,el sentido es de izquierda a derecha, para el número $+3$ y el sentido para -1 es inverso parando el conteo para el cálculo en el dedo índice, es decir, de esta forma obtiene $+2$. Sin embargo, en operaciones algebraicas como: $3a + 2a$ y $3x - x$ no logran hacer el respectivo pensamiento abstracto para cada una de la expresiones que es:$a + a + a + a + a = 5a$, ni para esta serie de operaciones $x + x + x + (-x) = 2x$. Observado lo anterior, no logran hacer la abstracción correcta para acertar en la parte numérica de la expresión.

Ahora bien, en cuanto a los reportes de investigación que tienen que ver con el reconocimiento de las dificultades en la resolución de ecuaciones de primer grado y sus tratamientos que presentan estudiantes de grado octavo, se evidencia según Filloy & Rojano (1984), que existe una ruptura con problemas, que se pueden modelar con ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$ y los modelados con ecuaciones menos complejas de la forma $ax + b = c$. Es así como los estudiantes no sólo deben comenzar a pensar en términos de operaciones hacia adelante, para efectos de modelar estos problemas con ecuaciones aritméticas, sino que deben contar con un método de resolución que opere sobre ambos lados de la ecuación, es decir de un método que opere sobre un objeto algebraico.

En esta dirección Lesh, Post & Behr (1987), han distinguido la solución de problemas algebraicos de la solución de problemas aritméticos haciendo notar, que en álgebra el problema requiere primero describir y luego calcular. Lo anterior, es posible para el primer problema y se muestra claramente en el siguiente problema, el cual supone se debe dar una elemental representación.

En este sentido Soloway, Lochhead & Clement, (1982), plantean el problema:

“Hay seis veces más estudiantes que profesores en esta universidad. Use E para el número de estudiantes y P para el número de profesores”.

Lo anterior, muestra tres aspectos: el planteamiento de una expresión, la ausencia del igual y la falta de operar en la expresión, sobre la cual recae principalmente describir y luego interpretar las relaciones letras y números, para lo cual se hace necesario representar el dato correspondiente a P, el correspondiente a E y determinar el carácter de la cantidad con los datos en la expresión, lo anterior permite representar el problema de la siguiente forma: $(6E + P)$.

Otra problemática que ayuda a la formación de pensamiento algebraico tiene que ver, con las estructuras mentales y la forma en que son desarrolladas estas por el aprendizaje bien dirigido, en el cual el papel del profesor y la habilidad en el desarrollo de estas es importante.

Respecto a lo anterior, Brunner, J (1966), sostiene en su tesis que:

“Un aprendizaje bien dirigido influye en la rapidez de aparición de estructuras mentales, de modo que cada una de estas surge en el niño antes de lo que lo haría espontáneamente sin auxilio del aprendizaje”.

De lo anterior, se entiende por aprendizaje bien dirigido, que algo se aclara cuando afirma que antes de atacar un concepto según la edad en que su utilización pueda automatizarse; siendo así, es necesario preparar en cursos anteriores (coherencia vertical) mediante actividades de aproximación, que el estudiante orientado en pequeñas actividades logre participar y realizar cada una de ellas.

Por todo lo anterior surge la siguiente pregunta:

¿Cómo abordar el concepto de ecuación en estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya a través de una secuencia didáctica, que articula actividades para el tratamiento de algunas dificultades sobre el tema, aspectos curriculares, matemáticos y didácticos?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 GENERAL

Proponer una secuencia didáctica que articula la caracterización de las dificultades sobre las ecuaciones lineales en la escuela.

1.2.2 ESPECÍFICOS

- Identificar algunas dificultades caracterizadas en estudiantes de 8º grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya del Municipio de Buenaventura articuladas a aspectos curriculares, matemáticos y didácticos sobre la resolución de ecuaciones de primer grado.

- Aportar elementos conceptuales y procedimentales en el tratamiento de las dificultades caracterizadas y vinculadas a una secuencia didáctica.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El estudio del álgebra elemental potencia el desarrollo global del pensamiento matemático de los estudiantes, ya que esta trata con temáticas que permite conocer estudios de otros contenidos (problemas con ecuaciones, desigualdades lineales, ecuaciones inconsistentes y sistemas de ecuaciones) y luego trasciende a estudios que parecieran ser ajenos a ella (ciencias como la física y matemáticas de orden superior), de igual forma, contribuye a la formación de su personalidad, es decir, logra que el estudiante sea distinguido, identificado y reconocido por su pluralidad de conocimientos, que logra poner en prácticas. Además es de gran utilidad al matematizar situaciones de la vida diaria, es decir, permite modelar problemas, fenómenos cotidianos, y también es un instrumento esencial en el desarrollo de la ciencia, de la cultura y en muchos aspectos de la actividad humana.

Bajo esta perspectiva, en esta propuesta de trabajo la formulación de una prueba diagnóstica tiene importancia porque además de ser una alternativa para detectar dificultades conceptuales de los estudiantes, sirve para proponer actividades para su superación. Conforme a esto, se considera que se avanza en el aprendizaje de las matemáticas, dado que, a partir de las limitaciones que tengan los estudiantes en ciertos conceptos, hay que crear recursos que contribuyan a la superación de estos.

De otro lado, teniendo en cuenta que la noción de equivalencia es un concepto fundamental en las matemáticas y principalmente en las ecuaciones lineales, se encuentra que muchos estudiantes pueden hablar de esta idea, pero empíricamente a partir de las actividades que realizan a diario. Es así como se hace importante este concepto teniendo en cuenta los distintos procesos de aprendizaje y se propone el diseño de una secuencia didáctica que aborde temáticas; como el concepto de ecuación de primer grado con una variable, y de igual forma su resolución. Esto es importante porque, da la posibilidad de explorar nuevos pasajes más complejos como el de situaciones problemas relacionadas con su entorno (cotidiano y escolar), además tiene en cuenta el contexto socio-cultural facilitando el aprendizaje de los estudiantes de grado octavo y permite dar elementos potenciales necesarios para la superación de algunas dificultades.

En este mismo sentido, la secuencia propone distintas situaciones y esto es importante porque se espera que mejore el desempeño académico de los estudiantes y ayude a movilizar los distintos pensamientos, formándolos competentes y comprometiéndolos con su proceso de aprendizaje; lo que significa que esto aporta algunos procesos para mejorar el desempeño de los estudiantes en las pruebas externas, y por ende mejorar nivel de educación básica en este grado especifico.

De otra parte, se hace importante, puesto que al intervenir en el salón de clase con situaciones problemas se requiere de la necesidad de un lenguaje algebraico, en el cual se hace presente el uso de ecuaciones lineales que modelen situaciones cotidianas y de variación pertenecientes al contexto de los estudiantes. Esto se dice porque, se moviliza el uso de propiedades aditivas y multiplicativas, y así mismo, se puede observar la utilidad de la ecuación en el pensamiento numérico, que potencie el desarrollo del pensamiento variacional direccionado por los Lineamientos Curriculares (1998).

Igualmente este trabajo es significativo, ya que aporta a las docentes interesados en esta problemática, propuestas de actividades matemática y didácticas partiendo del reconocimiento y el tratamiento de situaciones sobre pensamiento variacional, resolución de ecuaciones y solución de problemas en el tema de las ecuaciones lineales.

Además, la secuencia propuesta articula, estructura y no atomiza conceptos y procedimientos sobre la ecuación en su forma general: incógnita, variable, término independiente, operaciones básicas, igualdad (propiedades), etc. También, a través de ella el alumno logra arraigar en situaciones lo que es la variación y lo que permanece invariante por la manipulación operatoria de los modelos de cambio en situaciones que aglutine a ambos conceptos (cambio e invariante), superando así el problema de la variación en la escuela.

Ahora bien, desde el concepto de variable, se hace importante porque una de las directrices de la Educación Matemática de acuerdo con el MEN (2006), es que los estudiantes realicen actividades matemáticas que se logren modelar del contexto, y adquieran desempeños en el campo de situaciones de economía, de costo, de edades entre otros, donde relacionen lo que aprenden en la escuela con lo que se presenta en la vida cotidiana, y así consecuentemente realizar transformaciones de los objetos matemáticos implícitos en lo concreto, ¿Cuál es la representación matemática de una situación específica?. Estas transformaciones se ven reflejadas en la toma de decisiones que los estudiantes deben hacer en dichas situaciones.

Finalmente, se considera que en la medida en que se cambie la forma de enseñar en el aula, la manera en que se formulen las preguntas, escuchar las propuestas e inquietudes de cada uno de los estudiantes, así como poder observar el desarrollo gradual y cualidades, se pueden alcanzar los objetivos trazados y mejorar la formación académica de los estudiantes. Esto se logra a través de un material organizado que facilite el proceso de aprendizaje; en este caso la secuencia didáctica.

1.4 MARCO CONTEXTUAL

La Institución Educativa Pascual de Andagoya, sede central ubicada en el sector de la isla, en el barrio pueblo nuevo, atiende población de todos los estratos socio-económicos, provenientes mayoritariamente de las localidades aledañas como el Barrio Nayita, y Pueblo Nuevo, y minoritariamente de calles vecinas del sector de la isla y del continente.

El énfasis de la institución es Ciencias del Mar (en jornada matinal) y Sistemas (en jornada vespertina). En la actualidad se encuentran matriculados 170 estudiantes pertenecientes a grados octavos y novenos de las dos jornadas. En la tarde están dos grados: octavo y noveno con 61 estudiantes. De la población perteneciente a las dos jornadas se notó que no existen estudiantes con algún tipo de discapacidad moderada, pues la institución no esta facultada para atender este tipo de población.

Las edades están comprendidas entre 12 y 19 años en los grados octavos, y en los grados novenos entre 13 y 23. Todos ellos han recibido orientación para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales. El grado octavo uno el cual fue escogido para aplicar la prueba. A este grupo asisten regularmente a clase 19 alumnos de 25 matriculados.

El área de matemáticas está conformada por 5 docentes, quienes poseen formación de pregrado en educación; tres profesores en la jornada matinal y dos en la jornada vespertina.

A nivel de posgrado, 2 docentes de la jornada de la tarde tienen títulos de Especialización en Educación Matemáticas y dictan clases en los grados octavo y noveno.

Los planes de estudio del área de matemáticas están diseñados acorde con el documento Estándares Básicos de Competencia en Matemática, publicado por el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006). Para efectos del proyecto, se tuvo en cuenta que la institución tiene salones amplios y en buen estado cada uno dotado de sillas, tableros y escritorio.

A cada grupo se le han asignado 5 horas académicas semanales de trabajo para matemáticas, que permite el desarrollo del álgebra en 4 horas a la semana y 1 hora para geometría.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Este capítulo constituye un conjunto organizado de indagaciones entorno a tres perspectivas sobre las cuales gira el proyecto, a saber: la didáctica, la curricular y la matemática. A su vez estas tres perspectivas soportan el proyecto. Desde la postura didáctica, se ubica y expresa el aporte de distintos investigadores que han contribuido a la didáctica de la matemática, los cuales plantean que se hace indiscutible los cambios epistemológicos y didácticos a los cuales se enfrenta la enseñanza y aprendizaje de la ecuación lineal en el aula de clase y, por tanto, se hace oportuna la necesidad de organizar el conocimiento alrededor de este objeto matemático como estrategia de tratamiento. Seguidamente, en la postura curricular se pone de manifiesto la importancia que significa clasificar, escoger, seleccionar los contenidos poniéndolos en práctica a la luz de lo que plantea los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Por último en la postura matemática, se propone la necesidad de hacer énfasis en definición y distinción de conceptos matemáticos, que se hallan inmersos en los aspectos generales de la ecuación, en la breve reseña histórica de las ecuaciones lineales y en la noción de parámetro.

2.1 PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En el desarrollo de este apartado, se goza de un recuento de dos aspectos de infinito valor: la investigación en el álgebra sobre las ecuaciones de primer grado y las importancias de las secuencias didácticas; dado que estos aspectos, no solo se constituyen en compendios fundamentales de la enseñanza del álgebra, sino que también, desde la escuela es una fuente que contribuye a superar algunas dificultades en esta rama del saber.

En este sentido, como ya se ha venido afirmando anteriormente, se tienen en cuenta las investigaciones de autores como: Filloy & Kieran (1989), Kieran (1984), Tall (1989) y otros, que hacen evidente determinar y clasificar algunas dificultades relacionadas con la resolución de ecuaciones, por otro lado, las dificultades que surgen en la transición de la estructura numérica a la simbólica con la falta de métodos formales en estudiantes para abordar estos estudios simbólicos. De otra parte, al hablar sobre la secuencia didáctica y refiriéndonos a los contenidos que son introducidos en la escuela, se encuentra que solo adquieren funcionalidad cuando se prestan para soluciones y cuando son interpretados en situaciones que estén al alcance de los estudiantes, lo cual se considera que los contenidos enseñados en la escuela deben ser un aprendizaje graduado, institucionalizado y regulado, que se produce dentro de una institución que cuenta entre una de sus principales funciones, la de acercar al alumno a una serie de contenidos contextuales establecidos en forma oficial. “El aprendizaje debe ser guiado y controlado”.

2.1.1 La investigación en el álgebra y las ecuaciones de primer grado

En la construcción del concepto de ecuación de primer grado a través de la implementación de una secuencia didáctica para optimizar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de grado octavo. Es necesario decir, que el propósito de tal concepto constituye un importante lugar en el desarrollo de dicho pensamiento, concepto que no se produce solo, sino que se desarrolla articulado con otros conceptos como: incógnita, expresiones algebraicas, cálculo con expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones, los sistemas de ecuaciones etc.

Además, se hace importante agregar la aplicación de ecuaciones de primer grado situadas en el contexto de la comercialización de productos y extendida a otros, contribuye a potenciar las destrezas procedimentales, interpretativas y argumentativas en la solución de problemas; dado que las dificultades se presentan en los estudiantes al momento de ser objeto de estudio.

De otra parte, a partir de estudios realizados por algunos investigadores en esta temática como: Filloy & Kieran (1989), Kieran (1984), Tall (1989) y otros, han encontrado algunas dificultades en estudiantes, las cuales están asociadas con la resolución de ecuaciones y el paso de la estructura numérica la estructura simbólica de la ecuación y factorización. Al momento de resolver las ecuaciones, se espera que los estudiantes contemplen la necesidad de operar en los dos miembros de la ecuación, aplicando las propiedades aditivas y multiplicativas de los diferentes conjuntos de números. No obstante, estas investigaciones develan que los estudiantes para encontrar la solución de ecuaciones lineales o ecuaciones aritméticas como: $x + 13 = 17$ realizan procesos de probar números y que esto solo les ayuda a que se adiestren en el conteo $4 + 13 = 17$.

En esta dirección, Filloy & Kieran (1989), dan cuenta que:

> "Los enfoques empleados por los estudiantes a la hora de resolver ecuaciones, se caracterizan por ser intuitivos, realizar sustituciones informales y simplificar pasos no hacen uso de la cancelación de un número positivo con su opuesto (número negativo) y tampoco trasforman los números en condición de factores a través del recíproco, es decir, la constante de la incógnita no es reducida al uno".

En este mismo orden de ideas, Kieran & Filloy (1989), observan que:

> "El primer enfoque se hace notorio por estrategias de recuento a partir de la utilización de los dedos para completar el número precedido de la igualdad, lo cual se considera que son hechos cuantitativos en el que utilizan procesos aritméticos en ecuaciones de este tipo, en la que hay que poner un número para poder totalizar".

Realizando el respectivo bosquejo con base a la propuesta anterior, los estudiantes aprovechan procesos de ensayar con varios números, los cuales consisten en experimentar con varias cantidades (tanteo) hasta que el miembro izquierdo sea igual al miembro derecho.

En esta perspectiva, Filloy & Kieran (1989), también plantean que:

"Un método formal en donde reconocen que los estudiantes deben tener un claro conocimiento sobre lo que es la transposición de términos, así, cambiar de miembros es también cambiar de signos".

Ampliando un poco más esta idea, hace referencia al procedimiento en el cambio de signo sujeto a unas propiedades que de tienen que cumplir los conjuntos números.

En este sentido, Kieran, (1984), afirma que:

"En la mayoría de estudiantes se hace notorio el no reconocer que se oculta en las trasposiciones la propiedad para que coexista equilibrio, que es adicionar o multiplicar en los dos miembros de la ecuación un número específico".

De lo anterior, se puede decir que en la enseñanza es fundamental construir la transposición a través del reconocimiento, que un natural tiene su contradictorio en signo en los enteros.

Por otra parte, Tall, (1989) ha anotado que:

> "En el momento en que un estudiante es capaz de concebir una expresión algebraica como un objeto matemático y no sólo como un proceso aritmético, la manipulación simbólica puede representar, un fuerte conflicto. En otras palabras, los estudiantes deben darse cuenta pronto de que los objetos con los que están operando son expresiones algebraicas y no solamente números".

Las expresiones a la que se refiere Tall (1989) son expresiones con factor común y no el utilizar operaciones básicas $2(a + b)\ y\ (2a + 2b)$. Este caso es una factorización, que se perciben como dos procesos diferentes pero equivalentes. Cuyo procedimiento se inicia de la segunda expresión a la primera, que para operar sobre ella hay que describir para luego proceder.

Cabe también anotar, que las adaptaciones que los estudiantes deben hacer cuando comienzan el estudio de las expresiones algebraicas y de ecuaciones; no pueden seguir siendo interpretadas como operaciones aritméticas sobre algún número, sino más bien deben aprender muy rápidamente a verlas como objetos en sí mismos, sobre los cuales, se realizan procesos de cierto nivel (es decir, operaciones).

Es usual ver en la didáctica, abrir sus discursos acerca de cómo se transmiten conceptos mediante estrategias para la enseñanza. Y en el propósito de mejorar el principal problema del cual se ocupa esta ciencia, como el aprendizaje de un discurso formal, se debe tener un saber educativo, a través del cual, la enseñanza sea un objeto central de lo que ella elabora. De acuerdo a lo anterior, los problemas que aquí se refieren, sugieren estudiar tales estrategias cuya intensión permita acercamientos al aprendizaje de las matemáticas en estudiantes y por ende la aplicabilidad de esta rama al estudio de las ecuaciones lineales en ambientes escolares que no puede quedar por fuera del citado análisis.

En esta misma dirección, Bell, O'Brien & Shiu (1980), señalan que: los alumnos usan un método de recubrimiento para resolver el tipo de ecuación $2x + 9 = 5x$: dado que $2x + 9$ vale $5x$, el 9 es lo mismo que $3x$, porque $2x + 3x$, también es igual a $5x$; es así que x debe ser igual a 3.

De lo anterior, se puede decir que en la enseñanza busca incluir en las estrategias a todos los estudiantes en procesos formales y no informales, por eso el docente examina la manera de organizar el conocimiento de tal forma que todos los estudiantes puedan acceder a él.

Algo similar ocurre con Petitto referenciado por Filloy & Kieran (1989), señalando que:

> "Las técnicas intuitivas a menudo no se pueden generalizar a ecuaciones en las que aparecen números negativos, y observa que los estudiantes al usar una combinación de procesos formales e intuitivos tuvieron más éxito que los que usaron uno de estos".

De acuerdo a las anteriores investigaciones estudiadas se develan similitudes, en las dificultades que presentan los estudiantes en el acto de dar solución a ecuaciones en momentos diferentes, dado que en su mayoría se utiliza el método de tanteo como único recurso para dar solución a la situación planteada y no se hace uso de propiedades de equivalencia. Un ámbito general de estas problemáticas están en la transición desde lo que se considera como un modo informal [2]de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser complejo para muchos estudiantes que inician el estudio elemental del álgebra. De lo anterior, a lo mejor estos estudiantes aún siguen utilizando las estrategias que les funcionaban en la aritmética.

En esta dirección, Filloy & Kieran (1989) encontraron que:

> "En la transición de dichos pensamientos, se presenta una problemática relacionada con la forma de ver el signo igual, puesto que una de las mayores dificultades en esta problemática tiene que ver con la noción del signo igual como la necesidad de hacer algo, lo anterior quiere decir que ante la presencia del signo igual en una expresión, se busca dar solución encontrando un resultado que satisfaga la operación indicada, usualmente ubicada al lado izquierdo de la igualdad".

De lo anterior, se piensa que esta característica es la causante por la cual los estudiantes no vean el igual como un símbolo de equivalencia entre los lados derecho e izquierdo de la ecuación, sino como una orden para realizar una operación. Por ello, se presenta la dificultad de aceptar una proposición numérica y del tipo: $6 + 2 = 5 + 3$. Así, el pensar en la primera aproximación de los estudiantes ante el signo igual permite llevar a que $6 + 2 = 8$. Lo cual facilita el tratamiento de ecuaciones como $3x + 2 = 8$; pero de manera contraria la falta de interpretación como equivalencia no permite dotar de significado ecuaciones como: $3x + 2 = x + 6$.

En este sentido Filloy & Kieran (1989) plantean que:

> "El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado les lleva a violar las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad. Las cuales se consideran, son el énfasis interpretativo de la relación algebraica".

---

[2]El modo informal o método de tanteo, es ir sumando varios valores al número que esta en el mismo lado de la operación. Esta operación es realizada de acuerdo al otro número que esta del otro lado de la igualdad

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudiante debe ser consiente que al poner cantidades de un lado, también tiene que colocar números en el otro lado. También apropiarse del hecho que una cantidad puede ser representada de tres formas sin llegar a perder lo que significa así: $2z = z + z = 4z - 2z = 7z - 5z$, esto se dice ,pues los términos y expresiones son identidades entre si.

En esta perspectiva, Behr (1980) y Kieran (1981), también señalan que:

> "Usualmente, los estudiantes ven el signo igual en las ecuaciones lineales, no como una relación de equivalencia según la cual ambos términos de la ecuación representan el mismo objeto, sino como ya se había planteado anteriormente, como una señal de orden para realizar algo".

En esta dirección, Collis (1975), plantea que:

> "La prevalencia de la aritmética sobre el álgebra en lo que denomina aceptación de falta de clausura, por lo que las soluciones a un problema como $5p + q$ no son aceptadas por los estudiantes, que no asumen el que en un resultado haya una operación sin realizar y necesitan al estilo aritmético, que haya un único resultado".

Es así como en el citado modelo contestarían que $5pq$ o en $3b + 7c{:}10bc$.

En resumen, en el proceso de apropiación del concepto de ecuación y la resolución de ecuaciones lineales en la escuela se ha encontrado dificultades en relación con el paso de la aritmética al álgebra; la integración de términos, la abstracciones que implica y todas aquellas dificultades que yacen entorno a tal contenido, esto origina una serie de equívocos conceptuales, dado que al no interpretar los procesos en los que los números se escriben de forma general, ocasiona dificultades en el aprendizaje de este concepto.

Hay que mencionar además, que a pesar de los esfuerzos colectivos de distintos investigadores sobre la dificultad en el aprendizaje del algebra, específicamente en el concepto ecuación lineal, aún prevalecen estas dificultades. Por tal razón, la presente sección de este trabajo muestra una mirada frente a lo que se aborda: las distintas formas como los estudiantes conceptualizan las ecuaciones lineales reconociendo que la naturaleza del objeto matemático en cuestión, genera obstáculos en el campo didáctico al igual que en el campo matemático, además se presentará una secuencia didáctica como material organizado para superar algunas de las dificultades mencionadas con anterioridad.

De otro lado, el empleo de modelos como facilitador para comprender procesos de formulación de ecuaciones y la resolución de problemas, requiere por igual de una reflexión en torno a la naturaleza del pensamiento algebraico. De esta forma, con el propósito definir el pensamiento algebraico y por consiguiente el proceso evolutivo de su desarrollo.

En esta dirección, Mason, Burton & Stacey (1992), hacen la diferencia entre aritmética y álgebra, cuando afirman que:

"En la primera de estas disciplinas el trabajo se centra en manejar y operar números, en cuanto al álgebra el foco del trabajo se centra en las relaciones entre ellos".

Cabe anotar en lo anterior, que en la escuela usualmente los estudiantes cuando no poseen herramientas algebraicas, pretenden resolver los problemas algebraicos por procedimientos aritméticos o empleando métodos de deshacer de atrás hacia adelante, es decir, inversos.

En esta trayectoria Bell (1996) plantea que:

"Muchos de los problemas que se proponen para solucionar en el álgebra, son también solución por razonamiento aritmético".

Lo anterior permite decir, que se aprende a desarrollar el pensamiento algebraico incluyendo en las prácticas educativas problemas relacionados con el pensamiento aritmético (coherencia vertical), dado lo anterior, posibilitaría en el educando una comprensión global de la problemática que se esté tratando.

En este sentido, Filloy (1996), también plantea que:

Los problemas que pueden ser representados por ecuaciones como $x + a = b$; $ax + b = c$ pueden ser resueltas fácilmente por métodos aritméticos.

En este orden de ideas, realizando un paralelo entre Bell (1996) y Filloy (1996), se admite que se produce un rompimiento didáctico con los problemas representados por expresiones del tipo como $nx + b = cx$ +1i, por lo que los estudiantes normalmente no lo pueden solucionar por métodos aritméticos.

Ahora bien, ahondando un poco más en esta idea se cita a Carry, Lewis & Bernard, (1980) plantean que:

> "En los procesos de resolución de ecuaciones cuando hay varios pasos, el error más frecuente es el de *eliminació*n (simplificar $39x - 4$ como $35x$ o $2yz - 2y$ como z). Este tipo de errores no se restringe a los estudiantes novatos. El error se considera consecuencia de una sobre generalización".

De esta manera, se aprecia que los errores pueden ser el resultado del hecho que los estudiantes sigan considerando las letras como etiquetas de objetos concretos, lo que les induce a operar sobre ellas como se haría con números. También se evalúa una permanencia para realizar operaciones de letras no combinadas.

Otra temática de investigación es la conciencia de la sintaxis algebraica. En este sentido, Bell, Malon & Taylor, (1987), señalan que:

> "¿Por qué se puede considerar que $2a + a + 15$ es igual a $3a + 15$, en tanto que en esta operación $a + a + a * 2$, no es $3a * 2$? El estudiante tiene que aprender a colocar paréntesis. Por lo que normalmente los estudiantes leen de izquierda a derecha de manera que no ven la necesidad de utilizarlos".

En consecuencia con lo anterior, algunos estudios realizados por Filloy & Rojano (1984,1985), sobre la efectividad de modelos concretos en la enseñanza de los métodos formales de resolución de problemas, han encontrado que: los estudiantes a la hora de dar significado a las ecuaciones $ax - b = cx$ y $ax + b = cx - d$ y a las operaciones algebraicas que se requieren para resolver les causa gran dificultad poder dar una solución exceptuando en las ecuaciones que $a \neq 0$ y $c \neq 0$. Dado que, la aproximación a resolver correctamente la ecuación ha sido a través de la geometría. En el modelo geométrico se manejan historias acompañadas de dibujos.

En otra investigación Filloy & Rojano (1984 , 1985), señalan que: los niños podían resolver ecuaciones ejemplares como: $x + a = b$, también $ax - b = c$, $a \neq 0$, pero que no conocían las ecuaciones complejas, como $ax - b = cx$ y $ax + b = cx - d$.

Cabe señalar también, que en las entrevistas por Filloy & Rojano (1984, 1985), sobre modelos concretos (balanza y áreas) no aumenta de manera significativa la habilidad de los estudiantes para operar en nivel simbólico con ecuaciones que tienen dos ocurrencias de la incógnita.

En la anterior entrevista, se observa también el error de combinar constantes y coeficientes, en particular en el uso del modelo o geométrico, los estudiantes tienden a fijar la atención únicamente en el modelo y son incapaces de descubrir las relaciones con las expresiones algebraicas. Como resultado, los estudiantes dependen del modelo y lo utilizan aun cuando no les sirve o incluso cuando podrían utilizar algún método intuitivo.

En contraposición a lo propuesto en los resultados de los modelos concretos de Filloy & Rojano (1984, 1985). Duval (2004), plantea que:

“La coordinación entre los distintos registros de representación permite que el estudiante pueda transformar el conocimiento con las representaciones que se le presenten”.

De acuerdo a lo anterior, si los estudiantes dan soluciones a las distintas formas en que se presenta la ecuación, para luego llevar este conocimiento a otros campos se estaría hablando de una adecuada interpretación y resolución del concepto en cuestión.

2.1.2 Sobre la secuencia didáctica

La secuencia didáctica se constituye como el material organizado que diversifica los procesos de enseñanza de la didáctica, es el momento en que se pone en juego el éxito o el fracaso del proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por lo anterior que el didacta debe enseñar, instruir, demostrar sin ambigüedades los contenidos matemáticos que moviliza una secuencia, también presentar los objetivos que quiere que alcance el estudiante, formular y estructurar evaluaciones que haga del estudiante un ser reflexivo en cada una de las situaciones implementadas.

Un recurso que introduce el concepto de ecuación lineal y tiene lugar en el marco de consideraciones de la secuencia didáctica. Recurso que por su importancia es necesaria estudiar a cabalidad lo que significa para el trabajo. A continuación se describen estos aspectos: Sobre la secuencia didáctica.

Por secuencia didáctica, se entiende la organización del conocimiento con base en algunas consideraciones (evolución histórica de la noción, el estado actual de la noción, las concepciones de los alumnos sobre esas nociones y las modificaciones de estas concepciones al transitar por un conjunto de problemas, los modos de resolución, propiedades y nociones utilizadas “en acto” y tipos de representaciones que aparecen en la producción de los estudiantes), lo cual implica: organizar en el tiempo, jerarquizar, tomar el conjunto de aspectos que es necesario tratar para el contenido en cuestión, que alcance y profundice, se extienda y se trate de acuerdo a la necesidad del estudiante. El tratamiento de las relaciones entre esas nociones y otras del mismo curso y de cursos anteriores, implica organizar una secuencia de contenidos como los anteriores y una secuencia de actividades, en el cual es necesaria la intervención del profesor que posibilite la apropiación de esos contenidos en los estudiantes.

En este sentido, Chemello, (2001), plantea que:

“Aprender matemáticas es apropiarse de instrumentos de una cierta clase y proporcionara los alumnos los medios para dominar aquellas situaciones en las que la sola acción no da respuestas suficientes”.

Lo anterior recae y corresponde con la agenda actual de la didáctica la cual, se ocupa de organizar el conocimiento para ser enseñado y lleva a considerar el conocimiento como producción científica; es decir, se aprecia el desarrollo en instituciones sociales que incluyen no solamente instituciones educativas y lleva también a que el sujeto situado; social e históricamente construya a la vez significados propios, pueda a partir de lo conocido descubrir otras verdades, con añadiduras conceptuales.

En este sentido, Vergnaud, (1995), señala que:

"Los contenidos que la escuela enseña deberán "funcionar" en la resolución e interpretación de situaciones, para constituirse verdaderamente como conocimiento".

En este trabajo la secuencia didáctica se describe de forma simple como el diseño formativo, que media entre contextos sociales y cotidianos, se describe como representación de situaciones y como estrategia metodológica para implementar en el aula de clase, cuyo propósito general es, reconocer las variaciones, sus representaciones, y a partir de estos producir algunas ecuaciones lineales de tipo como: $x + a = c$, con $a\ y\ c$ números reales, $ax = b$, con $a\ y\ b$ reales y el número real $a \neq 0$ y $ax + b = c$, con $a, b\ y\ c$ reales, $a \neq 0$ entre otras. Cabe decir que en una secuencia didáctica que manipule la ecuación lineal dentro del pensamiento variacional, esta contribuye a la construcción de un modelo matemático haciendo análisis de la situación y establece la representación algebraica del modelo. Por lo anterior, es que se constituye en la base para la comprensión del concepto cambio, pues potencia y a partir de este se abordan nociones como las que requieren de interpretación, codificación y expresión de patrones y regularidades.

2.2 PERSPECTIVA CURRÍCULAR

El álgebra elemental es una parte importante del currículo de la educación básica que genera dificultades que se originan por los contenidos esenciales como son: las variables, las expresiones algebraicas, el cálculo con expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones, entre otros. Aquellos contenidos están asociados a unos métodos y reglas algebraicas específicas, que en parte derivan y en parte difieren notablemente de las reglas y métodos aritméticos aprendidos y utilizados por los estudiantes.

Bajo el marco de una propuesta práctica en la cual se enmarca el currículo, la matemática introducida en la escuela tiene la propiedad, que una vez articulada con varios contenidos se transforma en conocimiento glocal (un contenido especifico figura o permanece en otros contenidos jerárquicos de manera implícita o explícita), para de esta manera iniciar el proceso que haga del estudiante un ser competente, que ayude a desenvolverse en diferentes situaciones que propone la sociedad.

Esta trayectoria Filloy & Rojano (1985) plantean que:

> “Los primeros contenidos matemáticos elementales responden a la interacción que los niños tienen con el mundo exterior, es así como contenidos como partición, cantidad, reparto, ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos y muchas otras, se potencian en el estudiante a la hora de tener contacto con los objetos materiales”.

Es por lo anterior, que el currículo debe estar diseñado con propuestas que van de lo concreto a lo abstracto, permitiendo a los estudiantes tener acercamiento a los objetos materiales, que en algún momento se utilice toda clase de artificios matemáticos fijados en él por mucho tiempo en la escuela, que le ayudaran a la solución de problemas a los cuales se enfrente día a día.

Se hace necesario declarar a las matemáticas en la escuela, las que tienen carácter procedimental, que desarrolla habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida circundante, provee al individuo de un lenguaje simbólico entre otras cualidades.

Los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006), proponen la articulación del diseño curricular en tres aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y contexto.

- Procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas; la matematización o la modelación, la comunicación y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos que es donde centra el proyecto.

- Conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

En este trabajo la propuesta se ubica en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Por el cual, surge la necesidad de registrar ordenadamente la variación, que de la posibilidad de acuerdo a la problemática, la construcción de expresiones algebraicas, la construcción de fórmulas que de manera clara revelan la variación.

- El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

Los siguientes estándares en este trabajo se compenetran y por ende se relacionan con el contenido objeto de estudio de la ecuación lineal. Un propósito en esta parte del trabajo es ubicar los estándares de pensamiento variacional de los grados cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo, como referente y establecer la relación de este con otros estándares del mismo pensamiento y con estándares de otros pensamientos del mismo nivel. La intención de hacer esto es identificarlas relaciones entre estándares y tenerlas de referencia al momento de llevar una actividad[3] y pasar luego a una situación[4]. Es así como en esta misma actividad en el aula se pueden conjugar y movilizar desempeños y competencias que tienen que ver con varios estándares.

- De cuarto a quinto: Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos. Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales. Analizar y explicar relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales. Construir igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

- De sexto a séptimo: Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación).

- De octavo a noveno: Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

[3] La actividad, se entiende como el conjunto de acciones a desarrollar por unos procesos generales sobre el objeto, que da herramientas que proporciona solvencia y eficacia para: razonar, comunicar, modelar, ejercitar en procedimientos, entre otros aspectos.
[4] La situación, es el contexto en el cual la actividad que se aborda adquiere importancia, pues a través de ella se llega a mayores niveles de complejidad. La situación, por ser un campo da lugar a que el tratamiento aplicado sobre el objeto por la evaluación sea profunda.

Es por lo anterior, que se muestra el momento en que lo curricular (Lineamientos y Estándares) y este trabajo se articulan, debido a la organización sistémica de los contenidos.

2.3 PERSPECTIVA MATEMÁTICA

La matemática como disciplina que va más allá de ecuaciones y números, da cuenta de muchas de las abstracciones simbólicas, aplicaciones científicas y solución a problemas cotidianos de la humanidad. Dado que, muchas de las cosas que suceden a nuestro alrededor tienen relación directa e indirecta con el estudio las matemáticas.

Por tal razón en esta perspectiva, puntualizando en el pensamiento algebraico se aborda la noción de parámetro y la transformación que ha sufrido el concepto ecuación, específicamente la ecuación lineal, reportada a través de algunas investigaciones.

Bajo esta perspectiva, los principios que en estas se presentan serán evidentes en estudios similares, que tengan que ver con ecuaciones; ya que sin duda, el conocimiento matemático y el potencial de las ecuaciones ofrece elementos para la solución de situaciones problemas de la vida diaria.

2.3.1 Aspectos generales de la ecuación

El proceso de formación de conceptos matemáticos, ha constituido a lo largo de la historia un proceso complejo que ha estado en plena correspondencia con la naturaleza de los propios conceptos.

En este sentido, Thompson (1992), señala que:

> "Existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido".

Frente a esto se ve cómo el papel de las matemáticas cobra vida en las distintas situaciones problemas que se le presentan al hombre, donde este último hace uso de ellas para poder explicar y dar solución a problemas.

De otro lado, esta investigación se fundamentó en la resolución de ecuaciones, puntualmente en lo que tiene que ver con ecuaciones lineales con una incógnita[5] .

Bajo esta perspectiva Kline (2002) plantea en la teoría de ecuaciones que:

> "El tema, la solución de las ecuaciones polinómicas es fundamental en matemáticas y de igual manera el interés por obtener mejores métodos para resolver ecuaciones de cualquier grado, obteniendo mejores métodos para aproximar las raíces de ecuaciones, y el completar la teoría resultaba natural en particular, demostrando que cualquier ecuación polinómica de grado $n - \acute{e}simo$tiene n raíces".

En otras palabras Kline quiere decir que toda ecuación de grado n tiene n soluciones.

Inicialmente el matemático René Descartes defina la ecuación de la siguiente manera:

> "En una ecuación existen cantidades desconocidas (incógnitas), que en general se designan por letras minúsculas de la parte final del alfabeto: x, y, z y cantidades conocidas (coeficientes), que pueden designarse por letras minúsculas iníciales del alfabeto: a, b, c."

Actualmente Peterson (2005) afirma que una ecuación es un planteamiento algebraico tal que dos expresiones algebraicas son iguales.

Es así como a lo largo del trabajo se toman en consideración las dos definiciones mencionadas con anterioridad, sin embargo hemos hecho especial énfasis en

[5]Una incógnita, es un número que en principio no es conocido de antemano y que constituye una solución de un problema matemático al ser resuelta la ecuación, Spiegel & Moyer (2007).

considerar que la ecuación es un planteamiento de igualdad entre dos expresiones en las cuales aparecen letras como incógnitas o como parámetros (o constantes).

2.3.2 Breve reseña histórica de las ecuaciones lineales

Los primeros en tratar las ecuaciones de primer grado fueron los árabes, en un libro llamado *Tratado de la cosa*, y a la ciencia de hacerlo, Álgebra (del ár. algabru-walmuqābalah, reducción y cotejo).

La cosa era la incógnita. La primera traducción fue hecha al latín en España, y como la palabra árabe la cosa suena algo parecido a la x española medieval (que a veces ha dado j y otra x porque su sonido era intermedio, como en México / Méjico, Jiménez / Jiménes), los matemáticos españoles llamaron a la cosa x y así sigue.

Sin embargo, la definición actual de ecuación con $a, b \neq 0$ y $\{x, y \in \mathbb{R}\}$es planteada por Peterson (2005) como:

$$ax + yb = 0$$

Quedando claro lo anterior, se profundizará un poco más en lo que tiene que ver con la definición de la ecuación lineal con una solo incógnita definida, en general, de la siguiente manera:

$ax \ + b = cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ ó $c \neq 0$.

A continuación se muestran las diferentes formas en que pueden estar presentadas las ecuaciones lineales, siendo las ecuaciones (2) y (4) las de mayor complejidad de solución para los estudiantes según lo afirman Bell (1996) y Filloy (1996).

$$x + b = c \qquad (1)$$

$$(x + a)/(x + b) = c \qquad (2)$$

$$ax + b = c \ , a \neq 0 \qquad (3)$$

$$ax + b = c + dx \quad a, d \neq 0 \qquad (4)$$

La forma general de la solución de cada una de las ecuaciones que se han presentado con anterioridad está dada por:

- En (1), la solución es $x = c - b$.
- En (2), la solución es $x = (cb - a)/(1 - c)$, donde$1 - c \neq 0$.
- En (3), la solución en $x = (c - b)/a$, con $a \neq 0$.
- En (4), la solución en $x = (c - b)/(a - d)$, donde$a - d \neq 0$.

Hay que mencionar además que hay muchos conceptos inmersos en el tema como son: variable, incógnita, equivalencia, equilibrio e igualdad, así también se reconoce el uso de los distintos conjuntos numéricos ($\mathbb{Z}^+ \ y \ \mathbb{Z}^-$), donde $a, b, c \ y \ d \in \mathbb{R}$, en los axiomas y propiedades para cada tipo de ecuación lineal. Cada uno de los anteriores modelos de ecuaciones emplean al conjunto $\mathbb{Z}$ y no se limita únicamente al uso de este conjunto, sino que se extiende al conjunto de los reales valiéndose para el desarrollo de propiedades fundamentales sujetas a la igualdad.

Si se toma la ecuación lineal de corte aritmético $x + b = c$ (1), se aprecia por su naturaleza, que se utiliza para solucionar pocos principios por consiguiente se observan pocas ecuaciones equivalentes.

A continuación en la Tabla 1 se da una demostración del funcionamiento en relación con algunas cantidades y se muestra la incidencia de algunos axiomas:

1. $x + b - b = c - b$	se suma el opuesto de b que es $-b$
2. $x + 0 = c - b$	por la adición entre opuestos $b + (-b) = 0$
3. $x = c - b$	por el elemento neutro $x + 0 = x$

Tabla 1. Solución literal por el equilibrio de cantidades en la ecuación $\boldsymbol{x + b = c}$.

La ecuación línea $(x + a)/(x + b) = c$ (2), la cual para que se pueda solucionar requiere del uso de principios fundamentales e inicialmente introduce como paso preliminar el de racionalizar el denominador.

A continuación en la Tabla 2 se detalla el desarrollo para hallar la solución de la ecuación (2).

1. $(x+b)(x+a)/(x+b)$=$(x+b)(c)$	recíproco de $(x+b)$es:$1/(x+b)$con$x+b \neq 0$
2.$x+a=(x+b)(c\ )$.	por división de recíprocos que es: 1 ,$(x+b)/(x+b)=1$
3.$x+a=cx+bc$.	p. distributiva, porque:$c(x+b)=cx+cb$
4.$x+a-a=-a+cx+bc$.	por el opuesto de a que es:$-a$
5.$x+0=-a+cx+bc$.	por suma entre opuestos es:$a+(-a)=0$
6.$x=-a+cx+bc$.	por el modulo en la suma que es: 0 tal que $x+0=x$
7.$x-cx=-a+cx-cx+bc$.	elemento opuesto de, cx que es:$-cx$
8.$x-cx=-a+0+bc$.	porque $cx-cx\ =0$
9.$x-cx=-a+bc$.	por el módulo en la suma que es: 0 , $0-a=-a$
10.$x\ (1-c)=-a-bc$.	por factor común: $cx+x=x(1-c)$
11.$x\ (1-c)/(1-c)=(-a+bc)/(1-c\ )$.	recíproco de $(1-c)$ es : $1/(1-c)$, $1-c \neq 0$
12. $x=(-a+cb)/(1-c)$	división de recíprocos que es: 1 , $(1-c)/(1-c)=1$

Tabla 2. Solución literal por el equilibrio de cantidades en la ecuación$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})/(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}$.

Es importante notar que el tratamiento que se le da a la ecuación lineal (2) tiene mayor grado de abstracción que la ecuación (1), dado que exige una mayor cantidad de aplicación de propiedades para hallar la solución.

Posteriormente presentamos la manera como se puede obtener la solución de la ecuación $ax+b=c$ (3). Tal y como se ha evidenciado en las soluciones anteriores, un primer principio que se debe considerar consiste en efectuar una misma operación en un miembro de la ecuación. Este principio se ilustra a continuación en la Tabla 3.

1. $ax+(b-b)=c-b$	opuesto de b es: $-b$
2. $ax+0=c-b$	por suma entre opuestos es:$b+(-b)=0$
3. $ax=c-b$	por el modulo en la suma que es: 0, $ax+0=ax$
4. $(1/a)(ax)=(c-b)(1/a)$	porque el recíproco de a es: $1/(a)$ con $a \neq 0$ por división de recíprocos que es:1, $(a)/(a)=1$
5.$x=(c-b)/a$	por p.distributiva $(c-b)(a)=c/a-b/a$, $a \neq 0$

Tabla 3.Solución literal por el equilibrio de cantidades en la ecuación $\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

Para demostrar finalmente la solución y su complejidad (tanto de corte didáctico como matemático), que debe seguir este tipo de ecuación con ocurrencia de la incógnita en ambos miembros de la igualdad (4), este razonamiento permite el análisis a través de principios, admite visionar la constante relación binaria y se inscribe la importancia que tiene aquí la propiedad simétrica, pues a través de ella se introducen los distintos elementos que conforman a los distintos conjuntos numéricos como lo es para citar alguno, el conjunto de los números racionales y a los enteros.

Diremos en el análisis de la siguiente ecuación lineal, que la expresión en la demostración j) $\boldsymbol{a-b}$ corresponde a su inverso multiplicativo que pertenece a $\mathbb{Q}$.

A continuación se presenta en la Tabla 4 el proceso aplicado a la ecuación (4) permitiendo determinar la evaluación para $\boldsymbol{x}$.

a) $ax+b=c+dx$	
b) $ax+b-b=c+dx-b$	opuesto de b es: $-b$
c) $ax+b(1-1)=c+dx-b$	factor común de $b-b$ es: $b(1-1)$
d) $ax+b(0)=c+dx-b$	suma de opuesto $1-1=0$
e)$ax+0=c+dx-b$	por teorema1.1.2 $b \in z$ $b*0=0$
f) $ax-dx=c+dx-dx-b$	opuesto de dx es: $-dx$
g)$ax-dx=c+0-b$	suma de opuesto que es: $dx-dx=0$
h)$ax-dx=c-b$	p. modulativa $c+0=c$
i) $x(a-d)=c-b$	factor común de $ax-dx$es: $x(a-d), a-d \neq 0$
j) $x\ (a-d/1)(1/a-d)=(c-b)\ (1/a-d)$	recíprocos de$(a-d)$ es: $1/a-d$
k) $x=(c-b)/(a-d)$	por división de recíprocos que es:1$(a-d/1)(1/a-d)$

Tabla 4 Solución literal por el equilibrio de cantidades en la ecuación $\boldsymbol{ax+b=c+dx}$.

Se observa que en los anteriores procesos son muchas las razones (propiedades, principios, teoremas, axiomas) que se usan para demostrar las soluciones en $\boldsymbol{x}$ de las ecuaciones.

A continuación se presentan y se explican en la Figura 1 los conceptos de ecuación en la red conceptual con el propósito de ser reconocidos e identificados.

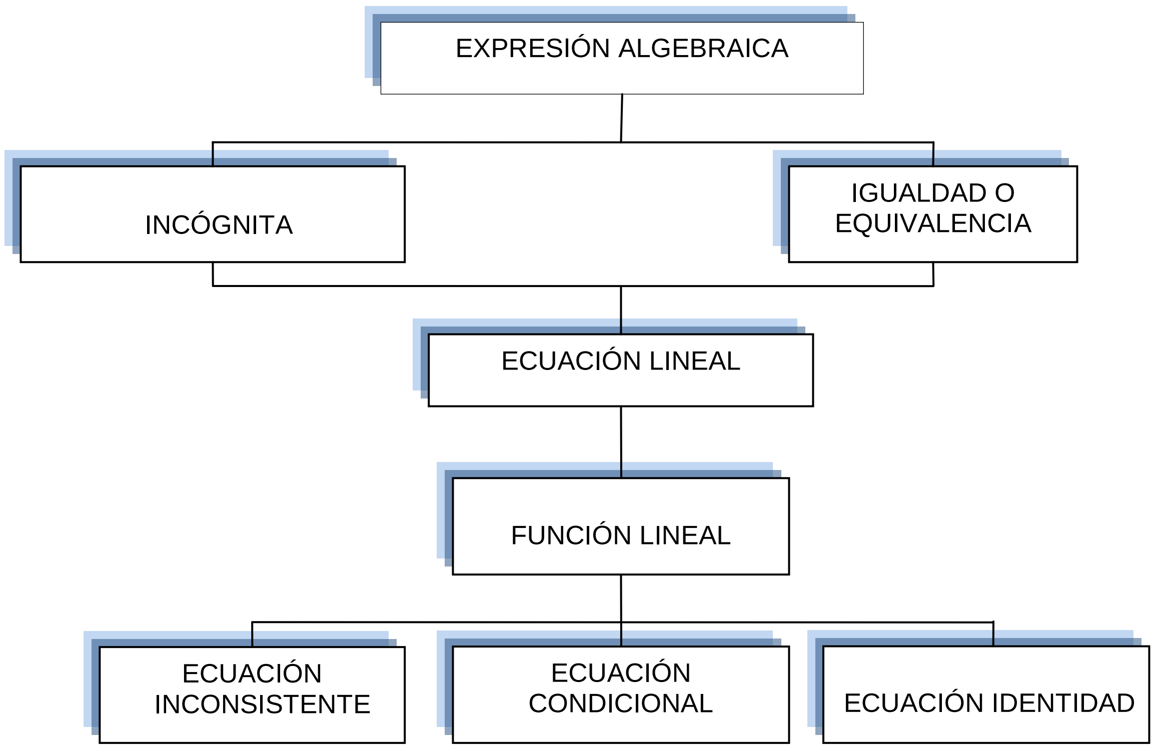


Figura1. Red conceptual del concepto de ecuación

Las distintas maneras en que puede ser abordado el concepto de ecuación lineal en el aula se puede lograr desde el estudio de las concepciones de la figura anterior yes importante tener en cuenta que las componentes y las definiciones juegan un papel significativo en el desarrollo de dicho concepto; por tal razón a continuación se presentarán algunas apreciaciones sobre la incidencia de estos.

Admitamos que una **expresión algebraica** es el resultado de aplicar un número finito de veces una o más de las cuatro operaciones fundamentales: adición, multiplicación, sustracción o división (excepto la división entre cero), a una colección de constantes y variables. Donde las constantes son símbolos que sólo pueden tomar un valor numérico, mientras que las *variables* son símbolos que pueden tomar más de un valor de un conjunto dado de valores permitidos.

Por otra parte, se sabe que una ecuación es un enunciado que afirma que dos expresiones algebraicas con iguales, por tal motivo hablaremos en primer lugar de la noción de igualdad y en segundo lugar de la definición de incógnita, dado que el significado de la letra en una expresión algebraica cambia cuando se iguala con otra, la letra deja ser una variable para transformarse en una incógnita.

Se sabe de la **igualdad** que es una relación binaria de expresiones que inicialmente carecen de valor y es a través de esta relación que se debe verificar las propiedades fundamentales que tienen los números reales en operaciones y que solo se prueba al establecer que ambos términos son iguales.

Por parte de la concepción de **incógnita** en álgebra son letras, que casi siempre corresponden a variables como (x, y, z), cuyo valor hay que encontrar y que por lo general es un valor numérico.

Con relación a lo anterior, el concepto de **equivalencia** se aborda como la representación de una relación de igualdad entre dos expresiones que se escriben en los dos lados de dicho signo de relación que permite adicionar o multiplicar cantidades en cada una de las expresiones.

Se dice a continuación de la noción central de nuestro trabajo la **ecuación lineal,** que es una ecuación la cual tiene una incógnita para el cual hay que encontrar un valor, en ella las expresiones que aparecen en ambos lados de la ecuación reciben el nombre de lados o miembros.

Relacionando a lo anterior, al concepto de **función lineal** esta es una función en el cual la variable toma muchos valores, pero que llega a consolidarse como ecuación lineal cuando la variable dentro de su conjunto como dominio llega a tomar un único y valido valor, luego por esta razón se estaría ablando de incógnita.

Teniendo en cuenta la red conceptual se pueden identificar tres tipos de ecuación clasificadas en: ecuación inconsistente, ecuación condicional y ecuación identidad.

Una **ecuación inconsistente** es una ecuación que no tiene solución para ningún valor que tome la incógnita, lo que se afirma que si son agregados todos valores a la incógnita nunca el resultado de la ecuación inconsistente es una ecuación, mucho menos una función.

Otro aspecto importante es la definición articulada a la de ecuación lineal, es el concepto de **ecuación condicional** que es definida como la ecuación, en el cual la incógnita de acuerdo al tipo de ecuación. Esta pone la condición para que la incógnita admita: un valor (lineal), dos valores (cuadrática), tres valores (cubica). Y a hasta más valores en otras.

Respecto a la **ecuación identidad**, esta se puntualiza como la igualdad entre expresiones algebraicas, en la que la incógnita toma infinitos valores que se prueba para todos los valores de la incógnita dando una identidad. Todo número permisible es una solución de una identidad.

2.3.3 Noción de Parámetro

En el ámbito que atañe a la matemática, los parámetros consisten en *variables***,** que permiten reconocer dentro de un conjunto de elementos a cada unidad por medio de su correspondiente valor numérico.

En este orden de ideas, una definición de ecuación como una función $f(x)$ y esta igualada a otra función $g(x)$, entonces son distintos los modelos matemáticos en donde el estudio de estos permite visionar la noción de variable. Pero antes de continuar con los modelos se da por sentado lo que es variable.

> “Una variable es un símbolo que representa un elemento o cosa no especificada de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado conjunto universal o referencial de la variable, universo o variar de la variable, y cada elemento del conjunto es un valor de la variable. Sea x una variable cuyo universo es el conjunto {1,3,5,7,9,11,13}; entonces x puede tener cualquiera de esos valores: 1,3,5,7,9,11,13”.Libro Tratado de la Cosa.

En otras palabras x puede reemplazarse por cualquier entero positivo impar menor que 14. Por esta razón, a menudo se dice que una variable es un reemplazo de cualquier elemento de su universo. En este sentido, Balcells i Junyent, Jos, (1994) señala que:

> "La noción de variable procede del lenguaje matemático y estadístico y así decimos que las proposiciones relacionan variables entre sí. Son varios los criterios de clasificación de las variables. Unas son dependientes y otras independientes (...); desde otro punto de vista las variables pueden ser cualitativas, cuantitativas (...); por su función en el desarrollo de la investigación sociológica las variables pueden ser: explicativas, controladas, perturbadoras y aleatorias o estocásticas

Interesa por ahora en esta parte del trabajo observar la variable como dependiente e independiente, como también las cuantitativas y cualitativas.

En este sentido, Larson & Hostetler (1989), también plantean que:

> "Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Cuando existe una relación entre variables x e y, donde $x \in A$ pero $y \in B$, y en la que cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y, diremos que dicha relación es una función".

Lo anterior quiere decir, que una función es una regla que permite asignar a cada elemento x de un conjunto "A" un único elemento y de un conjunto "B". Diré que y es la imagen de x por la función f. Así que $y = f(x)$.

A continuación se muestra en la Figura 2 el cambio en relación a x , como también se observa el cambio en y al cambiar x.

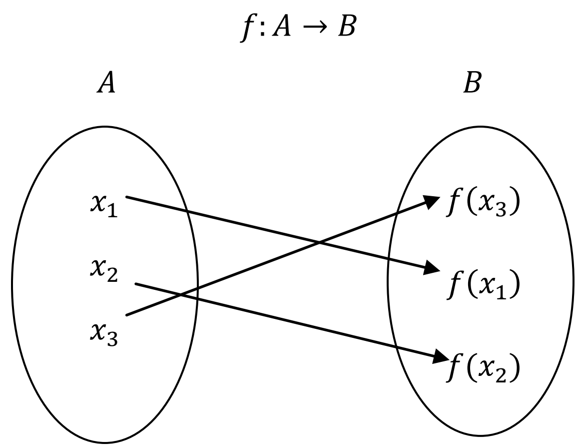


Figura 2. La producción de la variación en términos de $\boldsymbol{x}$.

En este sentido Lee (1996), cita a Posada, et al. (2007) plantea que:

“El álgebra y quizá todo lo que pertenece al mundo de las matemáticas, se centra en la generalización de patrones; generalizar es una de sus actividades fundamentales”.

Lo anterior quiere decir, que debido a la identificación de patrones dentro de situaciones que varían, es posible que el estudiante acceda a la comprensión de la matemática.

Cabe aclarar, que la perspectiva no se ubica en los cambios epistemológicos de la ecuación, sino que se sitúa en el marco del pensamiento numérico, para la solución en $\mathbb{R}$, el cual desarrolla el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etc.

Por todas las anteriores observaciones, se entiende que el diseño de una secuencia didáctica es articulada con la perspectiva matemática, debido a que la secuencia toma los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas como objetos de estudio, fundamentalmente en lo que tienen de especifico (un campo en particular).Y a partir del contexto no solo recree de manera ficticia un aspecto de la realidad exterior, sino que permita comprender la complejidad de los fenómenos, pero además, y principalmente, porque accede aprender los conceptos matemáticos que se le quieren enseñar.

CAPÍTULO 3

LAS ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA

CAPÍTULO 3: LAS ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA

Este capítulo trata sobre la descripción e implementación de la prueba diagnóstica aplicada a estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya. Muestra, además, los resultados y sus análisis, y la caracterización de dificultades encontradas en los estudiantes que la realizaron. Por último, trata sobre el diseño de una secuencia didáctica que se propone para superar algunas dificultades encontradas a través de la prueba diagnóstica.

3.1 Sobre la prueba diagnóstica

3.1.1 Descripción de la prueba

La prueba evalúa el procedimiento que permite transformar unas expresiones algebraicas dadas con un solo término y con dos términos. La reproducción de cuatro ecuaciones equivalentes teniendo como modelo dos ecuaciones. La sustitución de una solución para que sea valida para una de cuatro ecuaciones. La distribución de un número sobre una ecuación. El reconocimiento de una propiedad que conserva a la igualdad y el uso de expresiones algebraicas en algunos problemas escritos en lenguaje natural.

De acuerdo a los anteriores propósitos, ya en ejecución, se toma el acervo de resultados como señal que manifiesta el estado de conocimiento en que se encuentra el estudiante frente al contenido presentado.

La formulación de la prueba tuvo en cuenta algunos errores y dificultades arrojadas por investigaciones (Kieran (1992), Enfedaque (1990) y Filloy & Rojano (1984)) expuestos en los capítulos 1 y 2 de este trabajo, con la finalidad de corroborar estas teorías.

La prueba esta compuesta por diez preguntas, de las cuales 2 son de corte aritmético y el resto algebraicas; 2 de opción múltiple y 8 abiertas.

El campo de dominio numérico son los racionales. En las preguntas 1 y 2 el énfasis es usar el inverso multiplicativo y aditivo para transformar expresiones dadas. En la tercera, se pide generar cuatro ecuaciones equivalentes a partir de dos modelos de ecuación dada. La cuarta, presenta cuatro opciones y pide seleccionar una con la condición de que la solución sea $x = 5$. La pregunta 5, se solicita que el estudiante escriba los pasos necesarios para pasar de una ecuación dada a otra. Un procedimiento (formal) para solucionar la ecuación dada, se presenta en la sexta pregunta y solicita encontrar el error en uno de los pasos del procedimiento dado; situación que obliga al estudiante a revisar los pasos realizados y a explicar el porqué del error que hay en el paso.

De otro lado, las preguntas 7, 8, 9 y 10 conforman situaciones problemas relacionadas con ecuaciones lineales.

El propósito de la siguiente parte de este trabajo es discriminaren cada una de las preguntas qué se evalúa y el resultado que se espera, de los estudiantes.

3.1.2 La prueba diagnóstica

Esta prueba tiene como punto de partida los aspectos matemáticos detallados en el marco teórico (perspectiva matemática), y además se cualifican los aspectos que tienen que ver con el desempeño esperado, que todo joven debe saber hacer con lo aprendido en la prueba.

De otro lado, las preguntas 1 y 2 fueron pensadas por el autor de este trabajo, es necesario decir que las preguntas; 3, 4, 5 y 6 fueron tomadas de otra prueba realizada por Infante, L & Hurtado, C (2010). El resto de preguntas; 7, 8, 9 y 10 fueron tomadas de un libro de texto para octavo.

Las preguntas que a continuación se presentan en la prueba, se han estructurado siguiendo unos propósitos y unas expectativas de desempeño.

Pregunta 1:

Transforme las siguientes expresiones de tal manera que la incógnita tenga como coeficiente numérico el 1.

a) $2x$

b) $2/3\,x$

c) $-3x$

d) $-1/2\,x$

Propósito: Reconocer la división como operación inversa a la multiplicación y viceversa, en expresiones numéricas como también simbólicas (estructura multiplicativa).

Expectativas de desempeño: esta pregunta evalúa el dominio conceptual que debe tener un estudiante para cambiar cualquier número como coeficiente, en la unidad a través del número real correcto, como lo es el inverso multiplicativo.

Pregunta 2:

Transformar las siguientes expresiones de tal manera que el término independiente sea cero.

a) $x + 3$

b) $x - 10$

c) $x + 1/2$

d) $x - 2/3$

Propósito*:* Determinar en expresiones algebraicas la aplicabilidad del inverso aditivo específico que permita transformar a estas en expresiones del tipo ($x + 0$).

Expectativas de desempeño*:* con esta pregunta, se espera que el estudiante reconozca la cantidad necesaria para eliminar el sumando numérico utilizando correctamente el inverso aditivo.

Pregunta 3:

Escriba 4 ecuaciones diferentes que tengan la misma solución (ecuaciones equivalentes) que la ecuación dada.

$3x - 5 = 5x + 1$ $\qquad\qquad$ $12 - x = -5x$

Propósito: Producir ecuaciones lineales equivalentes a partir de dos modelos de ecuaciones dadas.

Expectativas de desempeño: la pregunta 3 evalúa el desempeño que los estudiantes tienen en relación a la producción de expresiones equivalentes a otras. Es decir, reconocer propiedades de la relación de igualdad para poder manipular transformaciones adicionando o multiplicando según el caso.

Pregunta 4:

Si $x = 5$ es solución de una de las siguientes ecuaciones. Marque la que considere correcta.

a) $-2x = 10$
b) $x - 2 = 7$
c) $3x - 5 = 10$
d) $(1)/(2x) + 2 = 5/2$

Propósito: Constatar la veracidad del valor resolviendo por métodos que conduzcan a solucionar la ecuación.

Expectativas de desempeño: la pregunta 4, evalúa la comprensión del significado de solución de una ecuación para lo cual, se espera que el estudiante remplace la solución en la ecuación que produce una igualdad u otro método.

Pregunta 5:

> Escriba los pasos intermedios que usa para pasar de la ecuación 1 a la ecuación 2.
>
> $$x + 3 = 7 \qquad (1)$$
> $$6 + 2x = 14 \qquad (2)$$

Propósito: Convertir una ecuación en otra equivalente por acción de las operaciones necesarias para ello.

Expectativas de desempeño: esta pregunta alude a evaluar el proceso, para producir ecuaciones equivalentes dadas una cualquiera, se debe transformar en otra para ello el estudiante debe recordar propiedades de la igualdad y propiedades de las operaciones.

Pregunta 6:

> A continuación se presenta una ecuación resuelta por un estudiante de noveno grado:
>
> Paso (0) $2x + 3 = 5 + x$
> Paso (1) $2x + 3 - 3 = 5 + x$
> Paso (2) $2x + 0 = 5 + x - \mathbf{3}$
> Paso (3) $2x - x = 5 + x - x - 3$
> Paso (4) $x = 5 + 0 - 3$
> Paso (5) $x = 2$
> En esta solución se presenta un error, determine en cual de los pasos esta el error y ¿Por qué?

Propósito: Caracterizar cada paso por el uso repetido de propiedades que garantice la equivalencia para cada ecuación.

Expectativas de desempeño: la pregunta indaga sobre el nivel de apropiación del estudiante sobre el proceso de solución de una ecuación, a través de la producción de ecuaciones equivalentes mediante la aplicación de propiedades de la igualdad, es decir, que al identificar el error en un procedimiento es porque se conoce el procedimiento.

Pregunta 7:

Si a un número le sumas su triple y la suma es 212 ¿Cuál es el número?

Pregunta 8:

Un frasco de jugo Tangelo dice que al producto se le disminuyo el 25% de azúcar, sí el producto tiene actualmente 16 gramos de azúcar.

a) ¿Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de azúcar actual?
b) ¿Cuántos gramos de azúcar tenia el producto antes de hacer el descuento?

Pregunta 9:

Carlos sabe que en su bolsillo tiene $\$2.100$ entre monedas de $\$50$ y $\$200$sabe que cuenta con $8monedas$ de $\$200$ pero no sabe la cantidad de monedas de $\$50$.

a) Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de monedas que tiene Carlos y el total de monedas que posee.
b) ¿Cuántas monedas de $\$50$ tiene Carlos?

Pregunta 10:

Una madre tiene $40\ años$ y su hijo 10 ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de la madre sea el triple de la edad de su hijo?

a) Plantee una ecuación que de cuenta de los años de la madre y del hijo.
b) ¿A cuántos años llega la madre y a cuántos llega el hijo?

Propósitos de las preguntas 7, 8, 9 y 10: Involucrar el uso de ecuaciones lineales que puedan resolver problemas sobre situaciones específicas.

Expectativas de desempeño: las preguntas 7, 8, 9 y 10 evalúan la habilidad del estudiante para proponer estrategias para pasar de enunciados verbales a expresiones algébricas y su solución. Para esto último, debe aplicar los métodos estudiados en la solución de ecuaciones lineales.

3.1.3 La implementación

La prueba se aplicó en una sesión en dos horas de clase de matemáticas con una duración de 55 minutos cada una y con descanso de 30 minutos. Esta aplicación se realizó en el mes de noviembre del 2011.

En el primer momento, el profesor orientador de la asignatura quien a la vez es director de grupo, hace la introducción y presentación correspondiente a los estudiantes de quién va a dirigir la aplicación de la prueba.

Posteriormente, el estudiante investigador da cuenta de la intención que lleva desarrollar tal prueba y la manera como se deben responder cada pregunta y guía el desarrollo del cuestionario de manera individual, manifestando que no se permite en la prueba, el uso de libros de matemáticas, la revisión de apuntes y la intervención del profesor y director de curso.

3.1.4 Resultados y análisis de resultados de la prueba diagnóstica

La prueba se aplicó el día viernes 25 de noviembre del 2011 a 19 estudiantes de 25 en jornada matinal, del grado octavo de la Institución Educativa Pascual de Andagoya, en el puerto marítimo de Buenaventura sobre la Costa Pacífica.

A continuación se presentan los resultados de cada pregunta en tablas que las tipifican con la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa. Después, aparece la descripción de los resultados expuestos en las tablas, su análisis y algunas ilustraciones en gráficos de las respuestas de los estudiantes.

Pregunta1:

Transforme las siguientes expresiones de tal manera que la incógnita tenga como coeficiente numérico el 1.

a) $2x$
b) $2/3\,x$
c) $-3x$
d) $-1/2\,x$

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 1 se presentan en la Tabla: 5

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia Relativa
Tipo1: Estudiantes que seleccionan una de las opciones de ejercicio y no realizan procesos para convertir el coeficiente numérico en el uno.	8	42%
Tipo2: Estudiantes que seleccionan una de las opciones de ejercicio convirtiéndolas en ecuaciones, muestran procesos para transformar las ecuaciones. $-3x = 3$ $x = 3/3$ $x = 1$	4	21%
$-3x = -3x = 3\ /{-3}$ $x\ =\ 1.$ No transforman al coeficiente en 1.		
Tipo3: Estudiantes que no seleccionan opciones e igualan las expresiones a 1 y agregan el -1. $2x = 1$ $x = 1$ $-3x = 1$	3	16%
$-1/2\,x = 1$ $2x - 1 = 1$ Sus métodos no le permiten transformar el coeficiente en 1.		
Tipo4: Estudiantes que no muestran procesos que los lleve a transformar los coeficientes numéricos de la letra en el uno.	4	21%

Tabla 5.Tipificación de las respuestas Pregunta1.

En la Tabla 5 se puede observar que el 42% de los estudiantes no siguen la indicación de la pregunta para transformar las expresiones de tal manera que el coeficiente de la variable sea 1, sino que toman como respuesta una de las opciones propuestas. Ante esto, se supone que este grupo de estudiantes no entendieron lo solicitado en la pregunta, en lugar de operar sobre la expresión se dejaron condicionar por el tipo de pregunta, que parecía de opción múltiple.

De otra parte, el 21% de los estudiantes toma una de las expresiones y construyen una ecuación igualando al coeficiente de la variable sin tener en cuenta el signo y despejan la x dándoles como resultado 1.

$$-3x = 3$$
$$x = 3/3$$
$$x = 1$$

Lo anterior parece indicar que los estudiantes tienen la idea de cómo se busca el neutro del producto pero confunden el valor del coeficiente con el valor de la incógnita. Además en las expresiones, tienen dificultad para operar con números negativos.

$$
\begin{aligned}
-3x &= -3 \\
x &= 3/-3 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

A continuación se muestran estos casos:

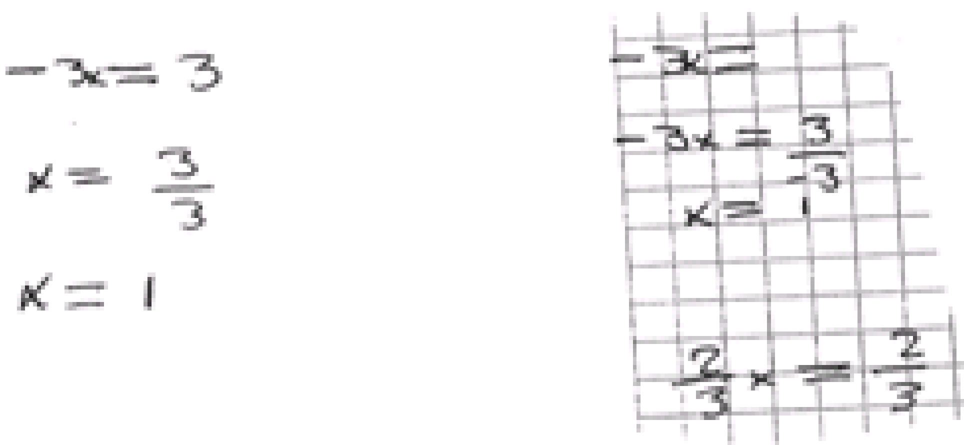


Figura 2. Pregunta 1, Tipo 2

Cabe señalar que el 16% de los estudiantes entienden que lo solicitado es traducir el enunciado agregando cantidades como +1 y -1 en calidad de término independiente e igualan a esos mismos valores.

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &= 1 \\
2x &= 1 \\
2/3\,x &= 1 \\
-3x &= 1 \\
-1/2\,x &= 1
\end{aligned}
$$

Finalmente, un 21% de los estudiantes no realizan un tipo de procedimiento que transforme el coeficiente de la variable.

Hasta aquí se supone que los estudiantes realizan planteamientos de ecuaciones innecesarias priorizando la solución de estas cuando se les presenta cualquier tipo de expresión algebraica. Dejan de lado la noción potente del inverso multiplicativo que se puede aplicar a un número independiente que este acompañado de una incógnita u otra expresión.

En conclusión, los estudiantes no entendieron el enunciado de la pregunta, pues la contestaron como pregunta de opción múltiple, tipo Pruebas Saber (enunciado con cuatro posibilidades de respuesta). Solo algunos estudiantes realizaron algoritmos en los cuales se rescata una señal de un procedimiento para la obtención del uno, como entidad a la cual se pretendía llegar. Sin embargo, en esa búsqueda del uno, ya sea como coeficiente de la incógnita o como solución de las ecuaciones que plantearon se presentaron problemas con la operatividad con números negativos y racionales, fundamentalmente.

Pregunta 2:

Transformar las siguientes expresiones de tal manera que el término independiente sea cero.

a) $x + 3$
b) $x - 10$
c) $x + 1/2$
d) $x - 2/3$

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 2 se presentan en la Tabla: 6

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que marcan una de las opciones de los ejercicios y plantean varios tipos de ecuaciones a partir de estas opciones. Operan sobre las ecuaciones como si se tratara de números obviando las incógnitas.	2	$10{,}5\%$
Ttipo2: Estudiantes que a partir de las expresiones dadas anulan el término independiente, luego lo justifican operativamente, para después dar un valor específico de la variable, todo esto lo hacen convirtiendo la expresión en una ecuación. $x = 0$ $x + 3 - 3 = 0$ $x = -3$	4	21%
Tipo3: Estudiantes que producen expresiones conjugadas a partir de las opciones de los ejercicios dados, las igualan o no y producen expresiones con la incógnita igual a cero. $x + 3 = x - 3 = 0$ $x + 3$ $x - 3$ $x = 0$	2	$10{,}5\%$
Tipo4: Estudiantes que no realizan algún proceso para transformar el término independiente en cero.	11	58%

Tabla 6Tipificación de las respuestas Pregunta 2.

En los resultados registrados en la tabla 6 se observa que el $10{,}5\%$ de los estudiantes seleccionan una de las opciones propuestas como ejercicios y las convierten en ecuaciones igualando a expresiones arbitrarias. En algunos de estos casos operan aparentemente como si fuesen fracciones de manera errada;

procedimiento 1:

$$x + 3 = 6x$$

$$x - 10 = -2x$$

procedimiento 2:

$$x + (1/2) = (2 \times 1 + 2 \times 2)/2 = (4 + 2 + 4 \times 4)/2 = (6 + 16)/2 = 22/2$$

En este sentido, pareciera que para estos estudiantes dos expresiones son equivalentes cuando estas presentan la misma letra en cada uno de los miembros y sus procedimientos muestran el uso de pasos que no se deriven lógicamente del anterior.

El 21% de los estudiantes muestran procedimientos para anular el término independiente pero antes deben convertir la expresión algébrica en una ecuación, lo que parece indicar que no aceptan la “falta de cerradura” de la expresión algebraica, en tanto esta solo tiene sentido cuando es una igualdad.

procedimiento 1:

$$x = 0$$

$$x + 3 - 3 = 0$$

$$x = -3$$

procedimiento 2:

$$x = 0$$

$$x - 10 + 10 = 0$$

$$x = 10$$

Además, estos procedimientos muestran la polivalencia de la incógnita, la cual asume dos valores diferentes en una ecuación lineal.

Un $10{,}5\%$ de los estudiantes utilizan el conjugado de las expresiones dadas para anular el término independiente, esto lo hacen igualando esta expresiones en una ecuación.

$$x + 3 = x - 3 = 0$$

$$x - 10 = x + 10$$

$$-10 + x - x$$

O simplemente escriben los conjugados sin igualar y obtienen el valor de la incógnita igual a cero.

$$x + 3$$

$$x - 3$$

$$x = 0$$

Estos estudiantes muestran alguna aproximación sobre cómo obtener al elemento neutro de la suma, sin embargo, desde la perspectiva algebraica tienen grandes dificultades en identificar en forma precisa los términos de una expresión algebraica, ya que toman a la variable como término independiente.

De otro lado, el 58% de los estudiantes no marcan opciones y no muestran un tipo de procedimiento que lleve a realizar las respectivas transformaciones.

De lo anterior, se infiere que los estudiantes invalidan los procesos de tipo algebraico reduciéndolos a procesos aritméticos, lo que permite decir, que la letra es poco usada según la naturaleza de la pregunta, pues se ignora o se reconoce su existencia pero no se le da un significado acorde a la pregunta, ni se opera con ella correctamente.

Así mismo se aprovecha una importante comparación para decir que, en las preguntas 1 y 2, en la cual no hubo acierto en las respuestas, en ambas la cualidad común es notoria al tomar la letra con cierto grado de manipulación, pero en ambas respuestas, la letra es ignorada. En los dos casos se observa que hay desconocimiento de las partes que integran las ecuaciones lineales como el coeficiente, la incógnita, el término independiente, los miembros, etc., y que estos elementos mantienen sus características en las expresiones dadas.

Más aun teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes en las preguntas 1 y 2, ellos asumen que el signo igual es vínculo necesario entre dos expresiones $(2/3\,x$ y $1)$ y en $(x+3-3$ y $0)$ de esta manera resultan dos ecuaciones condicionales:

$$2/3\,x = 1$$

$$x + 3 - 3 = 0$$

Además se puede inferir que los estudiantes tomaron el igual como una orden para hacer una operación en este caso realizaron la diferencia:

$$x - 10 + 10 = 0$$

Y en algunos casos como relación de equivalencia:

procedimiento 1:

$$x + 3 = x - 3 = 0$$

procedimiento 2:

$$-3x = 3$$
$$x = 3/3$$
$$x = 1$$

Es importante resaltar algunos estudiantes utilizan un dominio numérico que va más allá de los naturales, pero cometen errores procedimentales en su tratamiento.

Pregunta 3:

> Escriba 4 ecuaciones diferentes que tengan la misma solución (ecuaciones equivalentes)que la ecuación dada.
>
> $$3x - 5 = 5x + 1 \qquad 12 - x = -5x$$

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 3 se presentan en la Tabla: 7

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que resuelven la ecuación dada y dan como ejemplo de ecuación equivalente la que obtienen.	1	5%
Tipo2: Estudiantes que encuentran las supuestas ecuaciones equivalentes resolviendo la ecuación dada en forma incorrecta $3x-5=5x+1$ $8x^2=-4$	1	5%
Tipo3: Estudiantes que encuentran las ecuaciones equivalentes intercambiando los términos de la original pero operan en forma incorrecta (signos equivocados).	7	37%
Tipo4: Estudiantes que encuentran dos expresiones equivalentes correctas.	1	5%
Tipo5: Estudiantes que dan respuestas incorrectas y no hay justificación de estos procedimientos (no se sabe de donde sale la respuesta).	7	37%
Tipo6: Estudiantes que no contestan la pregunta.	2	11%

Tabla 7. Tipificación de las respuestas Pregunta 3.

Al observar los resultados de la pregunta 3 de la prueba diagnóstica se encuentra que solo el 5% (1de19) de los estudiantes que participaron de la prueba obtienen algunas ecuaciones equivalentes a $3x-5=5x+1$, así:

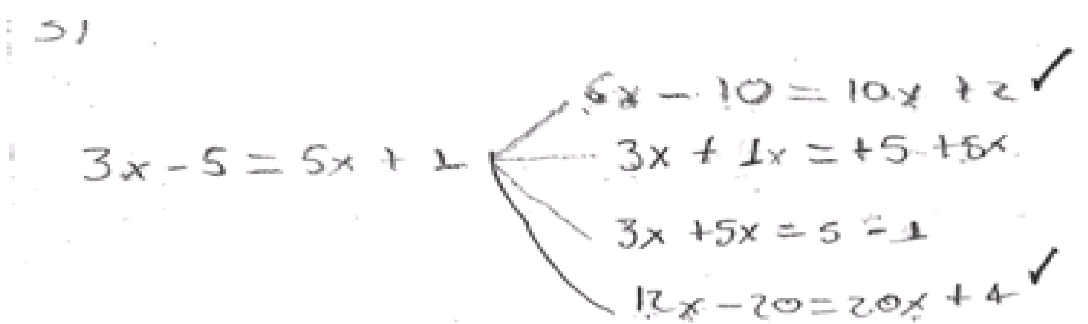


Figura 3. Pregunta3, Tipo 4

Además el 10%de los estudiantes resuelven la ecuación inicial para encontrar las ecuaciones equivalentes, de estos, algunos la encuentran y otros tienen dificultades en el proceso de solucionar la ecuación. También, se encuentran estudiantes que intercambian los términos de la ecuación dada para obtener equivalentes pero al operarlo hacen en forma incorrecta, manipulando los signos de forma deficiente. Es importante anotar que, la mayoría de los estudiantes (48%) o no responden la pregunta o dan respuestas incorrectas sin mostrar procedimientos.

Lo anterior permite afirmar que, de una parte, los estudiantes no tienen claro el concepto de ecuación equivalente y de otra, que aunque algunos estudiantes hacen procedimientos para encontrar las ecuaciones equivalentes al manipular los términos cometen errores en las operaciones básicas. Otro aspecto importante a tener en cuenta es que estas respuestas muestran que los estudiantes no aplican las propiedades de la igualdad para obtener la expresión buscada. Todo esto pone de manifiesto que el trabajo escolar con las ecuaciones se reduce a técnicas de transposición de términos y deja de lado conceptos y procedimientos fundamentales como: la igualdad como equivalencia, operatividad con enteros y racionales, el significado de las letras como incógnitas y como variables, entre otros.

Pregunta 4:

Si $x = 5$ es solución de una de las siguientes ecuaciones. Marque la que considere correcta.

a) $-2x = 10$

b) $x - 2 = 7$

c) $3x - 5 = 10$

d) $1/2\,x + 2 = 5/2$

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 4 se presentan en la Tabla: 8

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: a.$-2x = 10$	7	37%
Tipo2: b. $x - 2 = 7$	1	5 %
Tipo3: c.$3x - 5 = 10$	7	37%
Tipo4: d . $1/2\,x + 2 = 5/2$	1	5%
Tipo5: No marcan opciones.	3	16%

Tabla 8. Tipificación de las respuestas Pregunta 4.

La Tabla 8 muestra que el 37 % de los estudiantes escogen como respuesta correcta a $-2x = 10$. Es decir, que los estudiantes si reemplazaron el valor de $x = 5$ en la ecuación operaron de forma incorrecta y si resuelven la ecuación para tener la solución también lo hacen de forma deficiente. De igual forma se observa esto cuando marcan la opción b. A continuación se muestra un caso:

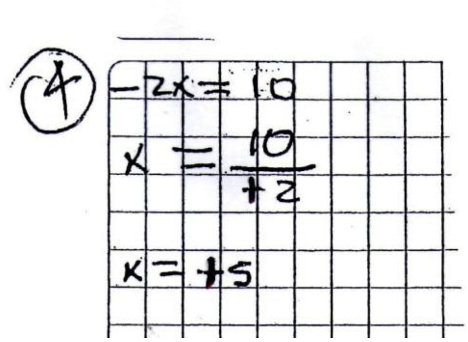


Figura 4. Pregunta 4, Tipo 1

Sin embargo, otro 37 % responde a la pregunta en forma correcta al reemplazar el valor en la ecuación, lo cual muestra que estos estudiantes tienen cierta apropiación del significado de la solución de una ecuación. Al reconocer que la solución de la ecuación satisface la igualdad, lo quiere decir que el valor numérico genera una igualdad. También, se observa el desarrollo del procedimiento en forma vertical, que deja ver que para ellos un paso es equivalente del anterior o mejor la ecuación que se genera de la primera, entre ellas son equivalentes.

De acuerdo a lo anterior, es posible afirmar que los estudiantes en la ecuación no asumen el signo igual como una relación de equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de la igualdad, lo cual los lleva a manifestar expresiones incorrectas como en:

$$3x - 5 = 10$$
$$3x = 5 - 10$$

Realizando lectura unidireccional de la equivalencia en el caso de la segunda ecuación.

Debido a las respuestas incorrectas obtenidas por los alumnos es probable pensar, que hay en muchos casos una forma común de razonar es: 1.) “Aparece la letra x entonces puede tratarse de una ecuación”, 2.) “La x esta en un lado de la igualdad y los números en su mayoría en el otro” y 3.) “Luego traigo a la memoria todas las reglas aprendidas con o sin sentido para resolver la ecuación”.

Otro aspecto relevante se aprecia cuando un solo estudiante elige la opción d, a lo mejor porque esta alude al manejo de los racionales, luego se puede pensar que no hay confianza en la operatividad de este tipo de números y ello influye en la poca elección.

Pregunta 5:

> Escriba los pasos intermedios que usa para pasar de la ecuación 1 a la ecuación 2.
>
> $$x + 3 = 7 \quad (1)$$
> $$6 + 2x = 14 \quad (2)$$

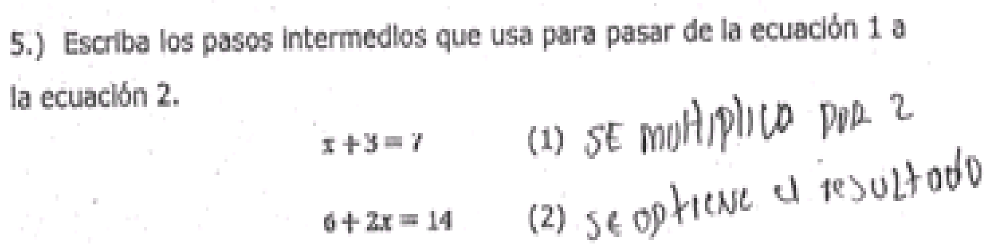
Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 5 se presentan en la Tabla: 9

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que aciertan al indicar que el 2 corresponde al número que produce la segunda ecuación, pero no muestran el procedimiento aplicado a la ecuación 1.	2	11%
Tipo2: Estudiantes que solo multiplican por 2, los términos independientes de la ecuación 1. $2 \times 3 = 6$ $2 \times 7 = 14$ Pero no integran este tratamiento para mostrar el paso ala ecuación 2.	1	5%
Tipo3: Estudiantes que no atienden a lo solicitado, dan valores a la incógnita de las ecuaciones $x + 3 = 7$ $1 + 3 = 7$ $6x + 2x - 14$ $6 + 4 = 14$	2	11%
Tipo4: Estudiantes que no responden a lo solicitado.	14	73%

Tabla 9.Tipificación de las respuestas Pregunta 5.

Como se puede apreciar en la Tabla anterior, la mayoría de los estudiantes (84%) no pudo determinar que el número dos lleva de la ecuación 1 a la ecuación 2.

Una minoría (16%) consideró al número dos como factor que produce la ecuación solicitada. De estos, el 11% lo indica pero no hace la transformación de la ecuación 1 a la 2, dejan de lado que el argumento (la operación) es una forma de presentar un razonamiento y que era necesaria presentar la operatoria y como requisito secundario cambiar el orden en que estaban dispuestos los términos. El 5% aplica este factor 2 a una parte de la ecuación, quizás debido a que operan término a término para pasar de la ecuación uno a la dos, lo que significa la relación intrínseca entre los términos de las ecuaciones y la igualdad, y las expresiones de la ecuación, es decir, los estudiantes dan mayor importancia a la forma misma de la ecuación que al hecho de existencia de relación de equivalencia entre los miembros izquierdo y derecho de la misma. En este sentido se puede afirmar que, los estudiantes ignoran el igual entre las expresiones y por tanto las propiedades de la igualdad, para las cuales es obligación que cualquier tipo de operación deben afectar a toda la ecuación. Lo cual somete al estudiante a que reconozca la ecuación como un todo y no a verla de forma fraccionada operando solo en un solo miembro de esta. A continuación se muestra un caso:



5.) Escriba los pasos intermedios que usa para pasar de la ecuación 1 a la ecuación 2.

$x + 3 = 7$ (1) se multiplico por 2

$6 + 2x = 14$ (2) se optiene el resultado

Figura 5. Pregunta 5, Tipo 3

De otro lado, para los estudiantes que no muestran procesos se puede arriesgar una hipótesis que esta falta de respuestas se debe al tipo de tarea que se le presenta en cuanto que para esta pregunta se deben realizar procedimientos intermedios para llegar de una ecuación a otra, para esto se requiere de la aplicación de ciertas propiedades en el conjunto de los números enteros y operaciones entre los mismos y la variable y el manejo correcto de los signos.

Lo anterior deja concluir que, de una parte este tipo de tareas parece que no es común en la enseñanza de las ecuaciones y de otra, que los conocimientos respecto al tratamiento de las ecuaciones es muy pobre en relación a su conceptualización en términos de transformaciones y manipulaciones operatorias.

Pregunta 6:

> A continuación se presenta una ecuación resuelta por un estudiante de noveno grado:
>
> Paso (0) $2x + 3 = 5 + x$
> Paso (1) $2x + 3 - 3 = 5 + x$
> Paso (2) $2x + 0 = 5 + x - \mathbf{3}$
> Paso (3) $2x - x = 5 + x - x - 3$
> Paso (4) $x = 5 + 0 - 3$
> Paso (5) $x = 2$
>
> En esta solución se presenta un error, determine en cual de los pasos esta el error y ¿Por qué?

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 6 se presentan en la Tabla: 10

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa	Explicación
Tipo1: Estudiantes que afirman que el error esta en el paso(0) al (1) de $2x+3=5+x$ $2x+3-3=5+x$	5	26%	1. Porque$2x+3-3=5+x$no es la ecuación correcta, debe ser$2x+3=5+x$.
			2. Porque si x es igual a 3 no se conserva la igualdad,$5+x$ da 8 y $2x+3-3$ da6.
			No se entiende la explicación.
Ttipo2: Estudiantes que afirman que el error esta en el paso del (1) al (2).	4	21%	No dan justificación.
Tipo3: Estudiantes que afirman que el error esta en pasar del paso (2) al (3).	6	32%	3. Porque hay muchas incógnitas.
			4. Porque $2x-x=5+x$ –es incorrecta porque el resultado 0 no esta aquí.
			5. Porque se ha colocado mal los signos menos con respecto a la ecuación original $2x+3=5+x$.
Tipo4: Estudiantes que afirman que el error esta en pasar del paso (3) al (4).	3	16%	No dan justificación.
Tipo5: Estudiantes que afirman que el error esta en pasar del paso (4) al (5).	1	5%	No se entiende la explicación.

Tabla 10Tipificación de las respuestas Pregunta 6.

En la Tabla anterior se puede apreciar que solo 5 de 19 estudiantes que participaron en la prueba afirman que el error se encuentra en el paso de la ecuación (0) a (1). Las justificaciones que dan al respecto tienen que ver con que en 1) la segunda ecuación no tiene la forma de la primera en todos sus términos, porque en 2) si el valor que tiene la incógnita es 3, al sumarlo con el 5 del segundo miembro de la ecuación da 8, resultado que no se obtiene en el primer miembro. Otros estudiantes no dan explicación a su escogencia.

De estos estudiantes que acertaron al elegir que el error se presentaba en el paso de (0) a (1), se puede decir, respecto a lo que justificaron, que se aproximan a una idea de equivalencia entre expresiones, puesto que proponen que la ecuación original no se debe alterar y se debe conservar el equilibrio en esta. Es decir, que aunque sus argumentos y explicaciones son de diferente nivel conceptual, la justificación en general supone que el error se debe a la falta de conservación de la igualdad. Esta idea de equivalencia esta determinada por casos particulares y no por la aplicación de propiedades de la igualdad.

Además, se puede observa de la tabla que 4 de 19 estudiantes atribuyen el error al paso de (1) a (2), pero no justifican, razón por la cual no se puede arriesgar alguna interpretación de su escogencia.

6 de 19 estudiantes escogen el paso de (2) a (3) como el que presenta el error. Las justificaciones que dan corresponden a que en 3) se han agregado incógnitas a la expresión original, cosa que no aceptan puesto que no tienen apropiadas las propiedades de la igualdad que determinan que se puede sumar a ambos miembros de la igualdad valores iguales independiente que sean números específicos o variables. Esto conlleva, también a no aceptar que se agreguen letras o números con signos contrarios a los originales, en uno y otro miembro de la ecuación, pues no hay una conceptualización de la suma algebraica como estructura aditiva (que incluye la adición y sustracción). Otro aspecto a tener en cuenta alude al hecho de dar como justificación que en 4) hay error en este paso porque no esta el cero que resulta de la adicción de dos números opuestos pero no lo reclaman cuando resulta de la relación entre letras; esto parece indicar que deben aparecer la operaciones y sus resultados en forma explicita en la ecuación y que el cero resulta únicamente entre operaciones entre números y no entre letras. A continuación se muestra uno de estos casos:

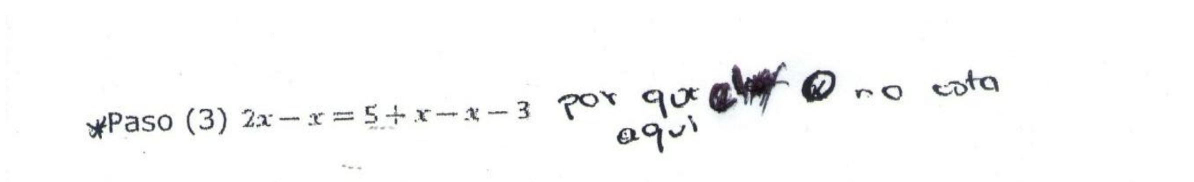


Figura6. Pregunta 6, Tipo 3

La tabla 10 muestra también que 3 de 19 estudiantes indican que el error está en el paso 4 pero no dan justificación alguna y que 1 de 19 dice que el error se encuentra en el paso 5pero no se entiende la explicación.

De las anteriores respuestas se infiere que la mayoría de los estudiantes evaluados no han apropiado un método para resolver ecuaciones que garantice que en cada paso se produzca una ecuación equivalente a la dada. Esta pregunta, particularmente, exigía que los estudiantes expresaran este conocimiento al reconocer un error de procedimiento. Esto parece indicar que el único método escolarizado en la resolución de ecuaciones corresponde al método de transposición de términos que no deja ver los procesos para obtener ecuaciones equivalentes sino que los oculta.

Además, ningún estudiante reconoce que la suma de $-3a$ un solo lado de la igualdad como el elemento que ha producido la alteración de esta. Esto ratifica lo dicho antes.

Para terminar este análisis se puede decir que, los estudiantes no dan cuenta de la aplicación de propiedades de la igualdad para la construcción de ecuaciones equivalentes, tal como se viene afirmando en repetidas ocasiones. Los estudiantes trabajan de manera mecánica ante la resolución de una ecuación.

Pregunta 7:

Si a un número le sumas su triple y la suma es 212 ¿Cuál es el número?

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 7 se presentan en la Tabla: 11

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que plantean el triple del número (x) como 3 y al hacer la suma $(x+3)$obtuvieron $4x$, por lo tanto la respuesta les da correcta $(x=53)$.No hacen ninguna prueba de verificación.	3	16%
Tipo2: Estudiantes, que plantean que el triple del número (x) corresponde a $3x$ pero al hacer la suma del número con su triple x, por lo tanto obtienen una respuesta incorrecta. No validan la solución del problema	2	10%
Tipo3: Estudiantes que plantean y resuelven el problema en forma correcta pero no validan la solución.	3	16%
Tipo4: Estudiantes que plantean que el triple del número corresponde a $3x$ pero al sumar el número con su triple ignoran el número y triplican el resultado $(3 \times 212 = 636)$.Luego operan con este resultado y por lo tanto obtienen una solución incorrecta. No validan la respuesta.	1	5%
Tipo5: Estudiantes que dan respuestas correctas o incorrectas pero no realizan ningún procedimiento.	3	16%
Tipo6: Estudiantes que no realizan el problema.	7	37%

Tabla 11. Tipificación de las respuestas Pregunta 7.

Como se puede apreciar en la Tabla 11 los estudiantes hacen diferentes procesos para obtener la solución del problema, sin embargo no hubo estudiante que valida la respuesta en las condiciones dadas por el problema. Esto parece indicar que no hay una conciencia que el proceso de verificación de la solución es parte de la estrategia de resolución de problemas.

El 16% de los estudiantes plantean el triple del número $\boldsymbol{x}$ como $\mathbf{3}$ yal sumarestos valores obtuvieron $\boldsymbol{4x}$, operan con estas expresiones y obtienen la respuesta correcta $(\boldsymbol{x=53})$. Sin embargo han asumido a $\mathbf{3}$ como $\boldsymbol{3x}$; parece ser que la incógnita es ignorada o aparece en forma indiscriminada cuando es necesario. Esto muestra la falta de significado que tienen las variables, incógnitas y letras, en general, que aparecen en las expresiones algebraicas.

Otro rasgo de la tabla corresponde al 10% de estudiantes que indican que el triple del número x es $3x$ pero al sumar estas expresiones obtienen x, por lo tanto una respuesta incorrecta, esto significa que presentan deficiencia al trabajar con términos semejantes. En este caso, se puede afirmar, que tampoco hay una significación para la suma de polinomios sencillos.

La tabla muestra que el 5% de los estudiantes al plantear que el triple del número corresponde a $3x$, al sumarlo con el número e ignorar a x y manipular el número del otro lado de la igualdad triplicándolo (3×212) tienen la idea que se debe aplicar a toda la expresión el triple y no solo al número solicitado. Esto deja ver la falta de comprensión del enunciado verbal y su expresión en forma algebraica.

Sobresale el 43% de los estudiantes que o dan respuestas correctas o incorrectas sin realizar algún procedimiento o no realizan el problema; lo que da cuenta de grandes dificultades en la resolución de problemas, aún con enunciados simples.

El 16% de los estudiantes resuelven el problema en forma correcta en tanto plantean la ecuación que modela la relación enunciada en el problema y dan su solución, sin embargo, esta solución resulta de resolver la ecuación mediante transposición de términos, tal como se muestra a continuación:

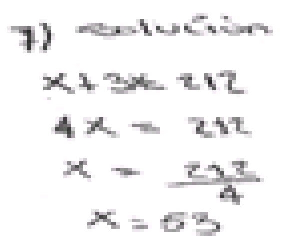


Figura 8 Pregunta 7, Tipo 3

Todo lo anterior deja ver el bajo desempeño de los estudiantes en relación a la resolución de un problema sencillo que requiere que la característica de un número se exprese en forma algebraica y de la manipulación operatoria de expresiones algebraicas. Elementos de la formación matemática que no han desarrollado estos estudiantes. No obstante algunos estudiantes muestran cierto avance en el primer desempeño y deficiencia en la operatoria.

Pregunta 8:

Un frasco de jugo Tangelo dice que al producto se le disminuyo el 25% de azúcar, sí el producto tiene actualmente 16 gramos de azúcar. a) ¿Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de azúcar actual? b) ¿Cuántos gramos de azúcar tenía el producto antes de hacer el descuento?

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 8 se presentan en la Tabla: 12

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que suman el valor del porcentaje de descuento de azúcar del jugo con el número de gramos que quedan de azúcar después del descuento $(25 + 16 = 41)$.Procedimiento incorrecto.	3	16%
Tipo2: Estudiantes que adicionan el porcentaje de azúcar con los gramos de azúcar, utilizan los números con las magnitudes para obtener la respuesta. Procedimiento incorrecto.	2	11%
Tipo3: Estudiantes que no hacen ningún procedimiento para encontrar la solución del problema.	14	73%

Tabla 12. Tipificación de las respuestas Pregunta 8.

Los registros de la pregunta 8 que se pueden leer en la Tabla 12, muestran que ningún estudiante resuelve correctamente el problema propuesto. Los que intentan hacerlo realizan procedimientos operando con las cantidades dadas, es decir utilizan los datos explícitos que de dan. Así, 3 estudiantes suman el valor del porcentaje de descuento de azúcar del jugo con el número de gramos que quedan de azúcar después del descuento, lo cual señala que ni determinan la incógnita del problema ni traducen la situación de descuento en una sustracción; 2 estudiantes suman el descuento del porcentaje de azúcar con los gramos de azúcar, operando con estas cantidades junto con sus magnitudes, tampoco reconocen y representan la cantidad desconocida y el descuento en relación con esta cantidad. Todos estos estudiantes forman una igualdad combinando los valores dados. Lo anterior deja ver la falta de apropiación conceptual y procedimental que tienen estos estudiantes relacionado con el álgebra y con las ecuaciones en particular. Esto se aprecia en toda su dimensión en 14 estudiantes de los 19 no hacen ningún procedimiento para encontrar la solución del problema.

Lo anterior permite afirmar que los estudiantes que resuelven el problema hacen interpretaciones del enunciado verbal ligadas a los datos sin traducir a un lenguaje algebraico y menos sin establecer las relaciones entre lo conocido y lo desconocido y tratando a las magnitudes que intervienen como si fuesen homogéneas. Esto deja apreciar que hay falencias relacionadas con el conocimiento algebraico y numérico y con el proceso matemático general de resolución de problemas.

Pregunta 9:

Carlos sabe que en su bolsillo tiene $\$2.100$ entre monedas de $\$50$ y $\$200$, sabe que cuenta con $8monedas$ de $\$200$ pero no sabe la cantidad de monedas de $\$50$.

a) Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de monedas que tiene Carlos y el total de monedas que posee.
b) ¿Cuántas monedas de $\$50$ tiene Carlos?

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 9 se presentan en la Tabla: 13

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Ttipo1: Estudiantes que encuentran el número de monedas de $50 solicitado utilizando procedimientos numéricos como $1.600 + 500 = 2100$ entonces hay 10 monedas de $50 y (200+…)+(50+50+…)=2.100.	3	16%
Tipo 2: Estudiantes que dan respuestas correctas sin procedimiento.	2	10%
Tipo3: Estudiantes que no resuelven el problema o escriben respuestas incorrectas sin procedimiento.	14	74%

Tabla 13. Tipificación de las respuestas Pregunta 9.

En la tabla anterior se puede observar que3 de 19 estudiantes (16%) encuentran el número de monedas correctamente mediante procedimientos numéricos. Uno obtiene el valor de las 8 monedas y así pueden calcular la cantidad de las de $\$50$mediante adición, completando lo que hace falta para obtener $\$2.100$, los otros utilizan la descomposición de los $\$1.600$ en 8 de $\$200$ y van colocando cantidades de 50 hasta completar el valor que hace falta para obtener los $\$2.100$. Tal como se muestra a continuación:

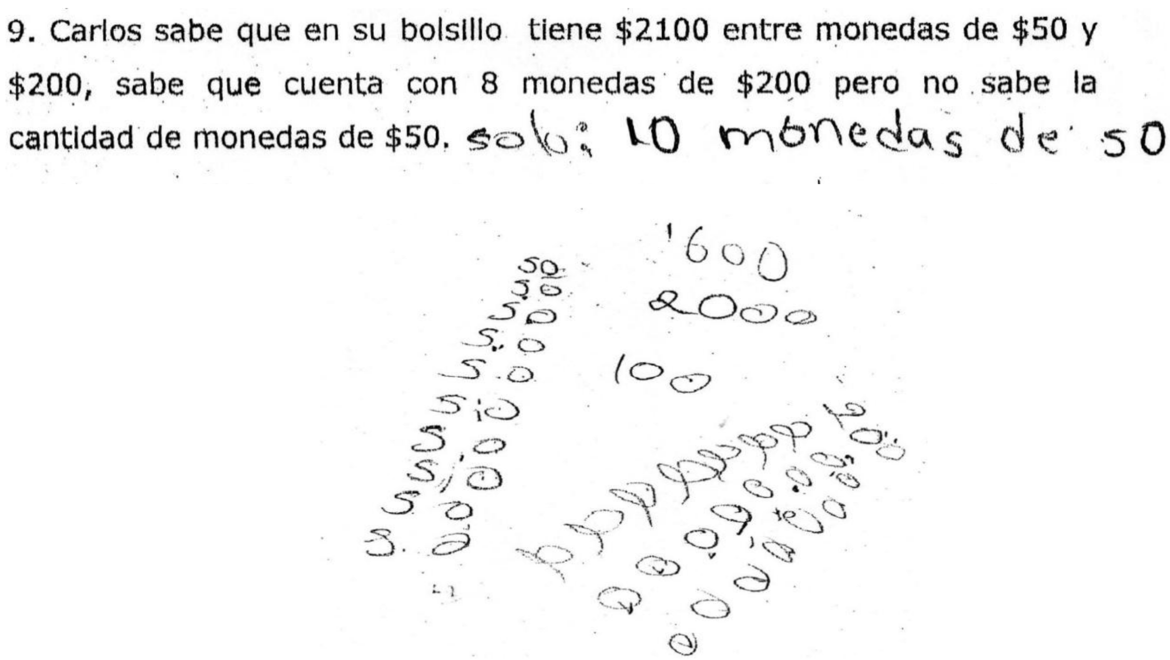


Figura 9.Pregunta 9, Tipo 1.

Dos estudiantes de los 19 (10%) también, dan la respuesta correcta pero no realizan procedimientos, parece que hacen los cálculos mentalmente dado lo sencillo de la operatoria. El resto de estudiantes, el 74% o dan respuestas incorrectas sin argumentos o no responden el problema.

De lo anterior se puede deducir que los estudiantes en su mayoría presentan dificultad frente a un problema que se podía abordar aritmética o algebraicamente mediante operaciones matemáticas que permiten dar solución a tal situación, esto se dice, puesto que en el proceso de interacción con ellos, se notó que recurrían a hacer el ejercicio práctico de experimentar y explorar con las monedas sin dar una ecuación que posibilitara hallar la solución a la pregunta planteada. Lo que quiere decir, tal como lo registran algunas investigaciones, que hay un fuerte apego a los procesos numéricos y a los referentes concretos en el paso del pensamiento numérico al algebraico.

Pregunta 10:

Una madre tiene $40\, años$ y su hijo 10 ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de la madre sea el triple de la edad de su hijo? a) Plantee una ecuación que de cuenta de los años de la madre y del hijo. b) ¿A cuántos años llega la madre y a cuántos llega el hijo?

Los resultados que se obtuvieron de la pregunta 10 se presentan en la siguiente Tabla: 14

Tipo de respuesta	Número de estudiantes	Frecuencia relativa
Tipo1: Estudiantes que triplican la edad actual de la madre $(40 \times 3 = 120)$ y del hijo $(10 \times 3 = 30)$ y asumen estas edades. No responden la pregunta.	2	11%
Tipo2: Estudiantes que plantean la expresión de la edad del hijo a futuro $(x + 10)$ y la edad de la madre a futuro pero se equivocan en el signo $(40 - x)$. No llegan a la ecuación que permita resolver el problema.	1	5%
Tipo3: Estudiantes que dan respuestas incorrectas al problema sin ningún procedimiento (madre 30años, hijo 10 años) (madre 60, hijo 20), pero conservan la propiedad de que la edad de la madre es tres veces la del hijo.	3	16%
Tipo4: Estudiantes que no resuelven el problema.	13	68%

Tabla 14. Tipificación de las respuestas Pregunta10.

Según los resultados presentados en la tabla 14, se puede observar quela mayoría de los estudiantes comprenden el significado del triple de la edad y logran expresarlo en forma numérica pero no algebraica. Muestran dificultad en expresar la relación del tiempo transcurrido. Esto se constata en cómo el 11% triplican la edad actual de la madre $(40 \times 3 = 120)$ y la del hijo $(10 \times 3 = 30)$ y operan con estos resultados sin caer en cuenta que una persona no vive esa cantidad de años, por lo menos hasta ahora y como el 5% de los estudiantes que plantean correcta la expresión de la edad del hijo a futuro$(x + 10)$ y la edad de la madre a futuro es $(40 - x)$, aunque se equivocan en el signo, no llegan a establecer una relación entre cada expresión que permita resolver el problema, además que falta el 3 como factor que exprese el triple.

Todo lo anterior da cuenta de la dificultad de asumir en la resolución de problemas varias relaciones pues se asume una u otra. Además de no poder establecer las conexiones entre las expresiones que representan esas relaciones dadas en el problema en una ecuación.

También se observa lo dicho antes en las respuestas del 16% de los estudiantes que a pesar de dar respuestas incorrectas al problema (madre 30años, hijo 10 años y madre 60 e hijo 20) conservan la propiedad de que la edad de la madre es tres veces la del hijo.

Finalmente, de la lectura de la tabla, sobresale que el 68% de los estudiantes no resuelven el problema.

Desde el punto de vista operatorio sobresale el hecho que algunos estudiantes acuden al uso del paréntesis pero deforma innecesaria, pues este es más necesario en la expresión que representa a la edad del hijo que en la expresión que representa a la edad de la madre.

Se nota en todos los planteos que no logran conectar las expresiones con el uso del igual.

Después de este análisis de las respuestas a la prueba planteada a los estudiantes se ve la necesidad de proponer estrategias y actividades a los estudiantes que permitan una apropiación del signo igual como equivalencia que garantice el significado del proceso de solución de una ecuación lineal y recurso que permitan, en general, disminuir las dificultades asociadas al aprendizaje del concepto ecuación lineal. Por lo tanto, en este trabajo, se propone una secuencia didáctica como alternativa de apoyo en los procesos de aprendizaje del mencionado concepto.

3.2 Caracterización de dificultades

Teniendo en cuenta el análisis de los resultados de la prueba podemos identificar y caracterizar las siguientes dificultades en la conceptualización y solución de ecuaciones de primer grado.

Los estudiantes evaluados no reconocen los coeficientes de la incógnita ni el termino independiente en expresiones algebraicas, es decir, no identifican los elementos de una expresión algebraica, en este caso con expresiones polinómicas de primer grado. Además, muy pocos estudiantes reconocen el inverso multiplicativo de un número racional y el opuesto de estos. Lo que significa que no pueden obtener el neutro tanto del producto (1) como de la suma (0) por esta carencia. En este sentido, hay dos deficiencias, una de tipo conceptual en la cual no se reconoce en una expresión algebraica sus componentes constantes y variables y otra, procedimental, pues cuando reconocen estos componentes no se puede operar sobre ellos para producir otro término.

Otro aspecto, que da cuenta la prueba, alude al tratamiento de las ecuaciones, cuando los estudiantes aplican el llamado método de transposición de términos para resolverla en forma equivocada (si un número o incógnita están como factor con signo negativo pasan a dividir pero con signo positivo y si el término suma o resta en la transposición que se aplica conservan el signo); así mismo, al dividir dos números negativos su resultado no corresponde lo correcto. Lo anterior expresa la manera mecánica como se aplica un procedimiento, lo que conlleva a no preguntarse por la naturaleza del resultado.

Sobresale, en los análisis de los procedimientos realizados por los estudiantes la falta de seguimiento a una consigna, puesto que mezclan procesos contrarios a lo solicitado. Por ejemplo, cuando se pide transformar un coeficiente mediante operaciones numéricas, ellos manipulan toda la expresión e intentan resolver la expresión dada convirtiéndola en una ecuación (hacen 1 el coeficiente de $2x$ y $2x = 1$). Esta dificultad indica que en la escolaridad las expresiones que se proponen son para ser resueltas y esto tensiona de tal manera que se ignora la consigna.

Otra dificultad tiene relación con la producción de expresiones equivalentes algebraicas, en este caso ecuaciones equivalentes a una dada. Los estudiantes no han asimilado el proceso de resolución de una ecuación condicional ya que, de un lado, no aplican las propiedades de la igualdad para producir ecuaciones equivalentes y de otro, no reconocen el signo igual como relación de equivalencia. Específicamente no comprenden el concepto de solución de una ecuación lineal. De aquí se testifica que pueden obtener dos soluciones para este tipo de ecuación y no se asimila esto como un error.

Se evidencia además problemas específicos en la manipulación operatoria de las expresiones algebraicas, por ejemplo la suma de dos variables iguales lineales puede dar una variable cuadrática ($3x - 5 = 5x + 1 \rightarrow 8x^2$= - 4). Lo anterior permite decir que algunos estudiantes se encuentran inmersos en dificultades relacionadas con la adición de monomios semejantes, pues de un lado suman correctamente los números pero la variable la tratan como el producto entre letras iguales.

Con relación a la resolución de problemas algebraicos de ecuaciones lineales los estudiantes tienen dificultad al convertir enunciados verbales a representaciones algebraicas en tanto:

a. No expresan numéricamente o algebraicamente estos enunciados (el triple de, disminuye el 25%, años transcurridos entre un hecho y otro etc.).

b. No establecen relaciones entre las cantidades desconocidas (datos) y las desconocidas (incógnitas).

c. No expresan de manera convencional los términos de una expresión algebraica escriben ($x3x = 4x$) en lugar de la convencional ($x + 3x$.)

d. El proceso de encontrar la cantidad que está en relación con otra es tortuoso.

e. No validan una solución.

3.3 Sobre el diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica se diseñó teniendo en cuenta algunas dificultades arrojadas en la prueba diagnóstica sobre ecuaciones lineales, las reportadas por las investigaciones estudiadas y los aspectos matemáticos y curriculares anotados en el marco teórico de referencia. Esta secuencia es una propuesta que se espera aporte a la superación de las dificultades reportadas en este trabajo.

3.3.1 Objetivos de la secuencia

A través de la implementación y medición: caracterización de las dificultades del docente en el trabajo propuesto en esta secuencia se espera que los estudiantes de grado octavo o noveno según se considere, logren:

- ✓ Caracterizar los términos de una ecuación lineal (el término independiente y los coeficientes de la incógnita como reales con sus propiedades, la incógnita, su grado y el campo de variación).

- ✓ Construir la noción de ecuación como expresiones equivalentes, y el proceso de resolución como búsqueda de expresiones equivalentes según propiedades de la igualdad.

- ✓ Manipular operaciones que involucren situaciones de cálculo.

- ✓ Mostrar el contexto de compra y venta como un campo que permite la modelación de situaciones matemáticas, permitiendo analizar, plantear y resolver actividades.

- ✓ Extender el concepto de ecuación lineal a procesos en los cuales la ecuación pueda ser entendida como herramienta soluble e indispensable en actos que realiza el hombre.

3.3.2 Estructura general de la secuencia

La secuencia didáctica diseñada se fundamentó en el proceso de comercialización; el de vender como el jugo Tangelo, la venta de las pacas de arroz y el negocio de un producto del mar; el pargo rojo en el municipio de Buenaventura, también se basó sobre procesos procedimentales que se deben seguir. Esta consta de 3 (tres) situaciones, 9 (nueve) actividades y 70 (setenta) enunciadas en su mayoría en forma de pregunta; cada situación está conformada por actividad y cada actividad por situaciones problemas. El propósito de cada situación era que los estudiantes a lo largo del desarrollo de la secuencia fueran transformándose en estudiantes recursivos que le permitiera argumentar sobre los procesos matemáticos que se presentan en cada actividad, siendo esta última, la fuente generadora de las preguntas que problematizaban cada situación problema, y así ir construyendo conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación lineal.

De otra parte, es necesario mencionar que la secuencia diseñada toma como referencia otra realizada por Bolaños, C. Mezú, L. & González , C. (2007). De esta se tuvo en cuenta los apartados para introducir el concepto de ecuación lineal como: Relaciones de dependencia entre variables, y representación de dependencias y covariaciones tabuladas, entre otras. Las situaciones que se modelan se sitúan en el contexto comercial ya descrito con anterioridad; se toman en cuenta otra panorámica incluida en la prueba diagnóstica como el inverso aditivo y multiplicativo, las actividades tienen mayor número de situaciones para precisar los conceptos relevantes.

3.3.3 Expectativas de desempeño

A través del diseño de la Secuencia Didáctica en el salón de clases de una Institución Educativa en grado 8°, se espera que mediante el desarrollo de cada una de las actividades, los estudiantes exterioricen algunos desempeños asociados a proceso de describir en términos algebraicos, resolución de problemas y uso de conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación lineal.

Se parte de creer que el contexto de las ventas genera facilidad para abordar ciertas actividades, ya que los estudiantes están familiarizados con los elementos que hacen parte de las situaciones problemas, elementos tales como: la venta de mariscos y sus precios, la comercialización del refrescos como: el Bon ice y Tangelo y productos afrodisíacos como: el Chontaduro y el Borojó. Además, en el uso de los conceptos allí utilizados, como; ganancia, pago, costos, ingresos entre otros.

De lo anterior, se espera encontrar dificultades relacionadas con la traducción de su lenguaje natural al simbólico, puesto que no es un secreto para la comunidad educativa que la enseñanza tradicional en muchas ocasiones trabaja con ejercicios rutinarios y el bajo nivel académico del escolar propician la ruptura en proceso de aprendizaje del concepto.

Se piensa en esta propuesta que uno de los mayores desafíos es que los estudiantes logren apropiarse de la ecuación lineal tanto conceptualmente como procedimental en situaciones.

3.3.4 Aspectos matemáticos involucrados en la secuencia

Dentro del desarrollo de la secuencia didáctica se abordarán algunos conceptos matemáticos que fundamentan el concepto de ecuación lineal, algunos de estos son: proporcionalidad directa, variable, equivalencia, incógnita, invariancia, expresiones algebraicas y sus respectivos cálculos, entre otras. Los elementos teóricos, a partir de la previa articulación; en el caso de variable e incógnita, variable e invariancia, y variable y expresiones algebraicas; en proporcionalidad directa y equivalencia; en cálculo de expresiones y equivalencia pueden contribuir aun aprendizaje significativo y funcional para los estudiantes.

A continuación se presenta la secuencia didáctica que se diseñó para estudiantes de octavo grado. Y se espera desde el marco de la perspectiva matemática, el cual propone la utilidad de todos los conjuntos inscritos en $\mathbb{R}$.

SECUENCIA DIDÁCTICA: LAS ECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA

Situación 1: La ecuación como equivalencia entre relaciones de magnitudes.

Logro: Reconocer los elementos que intervienen en la relación de equivalencia entre magnitudes

Actividad 1: Relaciones entre magnitudes y ecuaciones

En la galería de Pueblo Nuevo, en el Puerto Marítimo de Buenaventura, una platonera (comerciante de pescado) estableció que venderá cada libra de pargo rojo por el valor de $\$2.000$.

1. Si se desea que el ingreso de la platonera sea de $\$10.000$, ¿Cuántas libras de pargo rojo debe vender? , si se desea que sea de $\$128..000$, ¿Cuántas libras de pargo rojo debe vender?
2. ¿Cómo encontró los resultados anteriores?
3. Si x es el número de libras de pargo. Escriba una expresión que permita calcular el número de libras según el dinero que se tenga para comprar.
4. Un cliente compra $\$20.000$ en pargo rojo, si la comerciante de este alimento del mar ofrece un descuento de $\$500$ por cada libra que se compra. ¿Cuánto paga el cliente? y ¿Cuánto dinero ahorra el cliente?
5. Si a otro cliente le hacen el mismo descuento y pago $\$26.000$por las libras de pescado ¿Cuántas libras de pargo rojo no pagó, se ahorró?
6. Si Juan, un comprador de pescado le dice a la comerciante que le venda las siguientes cantidades10 lbs, 8 lbs, 7lbs y 3lbs de pargo, utilice la expresión del punto 3 para hacer estos cálculos.
7. La señora platonera vendió 15lbs de pargo y cobró $\$33.000$, ¿Cobró lo correcto? ¿Por qué?
8. Si Pedro tan solo tiene $\$1.000$ para comprar pescado, ¿Qué cantidad de pescado debe vender la señora?, ¿Por qué?
9. Si Pedro va a comprar $3/4$de libra de pargo ¿Cuánto le deben cobrar?, ¿Por qué?

10. Si Pedro, quiere comprar $4{,}5$ lbs de pargo, ¿Cuánto le debe cobrar la vendedora?

Actividad 2: La compra de arroz y el término independiente.

Una tienda ubicada en el barrio Pueblo Nuevo hace un pedido al almacén Éxito de una cantidad de$x$ pacas de arroz, por el hecho de hacer el pedido le cobran $\$5.000$ en transporte y una paca de arroz cuesta $\$30.000$.

1. Complete la siguiente tabla según los datos anteriores

Pacas de arroz	Costo de pacas	Transporte	Valor total
1	30.000	5.000	35.000
2		5.000	
3			
5			155.000
15			
50			
x		5.000	

Tabla 15. El importe de la constante en ecuaciones específicas.

2. Plantee una expresión que permita calcular el precio de x pacas de arroz, teniendo en cuenta el precio de una paca y el transporte.
3. Un estudiante de grado 8º de una Institución educativa A, planteo que la ecuación que da cuenta del precio de$x$ pacas es $30.000x + 5.000$ y otro dice que es así $30.000 - 5.000x$ ¿Cuál de los dos estudiantes tiene razón? ¿Por qué?
4. En la galería de Bellavista una paca de arroz cuesta $\$25.000$, y el mismo precio de transporte y el tendero hace un pedido, ¿Cuántas de arroz compró si pagó $\$155.000$?
5. Escriba la expresión que permita calcular el número de pacas que compró el tendero en Bellavista.
6. Encuentre el numero de pacas compradas por otro tendero, utilizando la expresión anterior, si pagó $\$455.000$.

7. Si la paca de arroz cuesta $\$28.000$ y el transporte es de $\$7.000$ y un tendero pagó $\$147.000$. La expresión que permite calcular la cantidad de pacas es $28.000x + 7.000$.
   a. ¿Cuál es la cantidad que varía?
   b. ¿Cuál es la cantidad constante (no varía)?
   c. ¿Cuántas pacas compró?

Actividad 3: La compra de arroz y el coeficiente de la incógnita.

En el almacén Éxito los tenderos; Luis, Tomás y Pablo pagaron la suma de $\$\,155.000$ por la compra de 5 pacas de arroz, incluido el transporte. Después de comprar ellos se interesaron en conocer el precio por unidad de pacas de arroz para lo cual cada uno en una tabla realizo el siguiente procedimiento:

Luis	Tomás	Pablo
$5x = 155.000 + 5.000x$ $x = 160.000/5$ $x = 32.000$	$5x + 5.000 = 155.000$ $5x + 5.000 - 5.000 = 155.000 - 5.000$ $5x/5 = 15.000/5$ $x = 15.000/5$ $x = \$30.000$	$5x - 5.000 = 155.000$ $5x = 155.000 + 5.000$ $5x = 160.000$ $x = 160.000/5$ $x = 32.000$

Tabla 16. La revisión de operaciones en ecuaciones.

1. Indique ¿Cuál de los tenderos hace el procedimiento correcto para calcular las pacas de arroz?
2. ¿Qué cantidades tuvo en cuenta el tendero Luis para conocer el costo de cada paca?
3. ¿Por qué el número de pacas encontradas por Pablo no son correctas?
4. ¿De qué depende el pago de las pacas de arroz enviadas y de qué depende el pago de pacas cuando no se paga transporte?
5. En la expresión usada por Tomás ($5x + 5.000 = 155.000$) para hallar el número de pacas. ¿Cómo anula el termino constante (termino independiente)?

Situación 2: La ecuación lineal y los fenómenos de la variación.

Logro: Observar la incógnita en eventos donde esté en permanente cambio.

Actividad1: La relación de dependencia y las ecuaciones. Proporcionalidad.

En una tienda del Barrio Pueblo Nuevo se vende el refresco Tangelo de diferentes cantidades de contenido. Tal como se muestra en la Tabla 17.

	Tangelo por tarro en mililitros	Precio por tarro($)
1	225	1.000
2	450	2.000
3	900	4.000

Tabla 17. El precio del jugo según su capacidad

1. ¿De qué depende el precio del jugo Tangelo? Explica tu respuesta.
2. Si un jugo Tangelo tiene 675 ml ¿Cuál es el precio?
3. ¿Cuál es la diferencia en ml? y ¿Cuál es la diferencia en precio?
4. Complete la Tabla 18 de acuerdo a los datos anteriores.

	1	2	3	4	5	6	7
Jugo en (ml)	225	450	675	900		3.600	3.825
Precio	1.000	2.000		4.000	8.000		

Tabla 18. Encontrando cantidades por el uso de la proporcionalidad.

a) ¿Cómo varía la cantidad de mililitros entre 2 y el 6?

b) ¿Cómo varía el precio entre el 4 y el 6?

5. Teniendo en cuenta los valores de la tabla 18 realice el cociente entre el precio y la cantidad de mililitros. ¿Qué observas? ¿Qué conclusión puedes sacar?

Ten en cuenta que el precio del frasco de jugo Tangelo es directamente proporcional al número de mililitros que contenga el jugo ¿Por qué?

6. Suponiendo que haya un jugo que vale $\$16.000$ ¿Cuántos mililitros tiene? ¿Cómo encuentras la respuesta?

7. Escriba una expresión (ecuación) que permita calcular la cantidad de mililitros según el precio.
8. Si el jugo cuesta $\$5.000$ ¿Cuántos ml tiene?
9. ¿Cuál es el precio de 1ml?
10. ¿Qué cantidad se debe considerar para que el precio sea $\$1$?

Actividad 2: Los procesos aritméticos y el equilibrio ecuacional.

A un vendedor de refrescos Tangelo se le ha establecido que por el solo hecho de salir a venderlos diariamente tendrá un estimulo de $\$2.000$ y que por cada refresco que venda ganará $\$100$.

1. ¿Cuánto ganará si vende 15 refrescos?
2. Si no vende refrescos ¿Qué sueldo obtendrá?
3. Si al final del día al vendedor le dieron $\$2.000$ ¿Cuántos refrescos vendió?
4. Si al final del día el vendedor obtuvo $\$5.000$¿Cuántos refrescos vendió?
5. Plantea una expresión que permita calcular el ingreso del vendedor.
6. Si la ecuación $3.000 + 100x = 25.000$ permite calcular el número de Tangelos vendidos cuándo el vendedor recibe $\$25.000$ de ingreso.
   a) ¿Cuál es el valor del incentivo?
   b) ¿Cuál es el valor que gana por cada Tangelo vendido?
   c) ¿Cómo anula el estimulo? (3.000) en la expresión.
   d) ¿Cómo deja el coeficiente de x en 1 ?

Actividad 3: La estructura de la ecuación y cantidades constantes y variables

La siguiente tabla muestra la relación entre el número de jugos Tangelos vendidos y el ingreso que tiene un vendedor cuando le dan un salario básico (fijo) de $\$2.500$ diarios y $\$200$ por cada jugo que venda.

Día	Venta por día	Salario básico (estimulo)	Valor por cada jugo vendido	Valor por cada jugos vendidos	Ingreso diario
1	5	2.500	200	5×200	3.500
2	7	2.500	200	7×200	3.900
3	10	2.500			4.500
4		2.500	200		6.300
5	8			8×200	
6	12			12×200	2.900
7		2.500	200	15×200	
8					

Tabla 19. Comprendiendo la venta de jugo.

1. Complete la Tabla 19.
2. Indica cuáles son cantidades constantes (no varían) y cuáles las que varían (variables) ¿Por qué?
3. Escriba una expresión que permita calcular el salario del vendedor para cualquier cantidad de jugos Tangelos vendidos (x).
4. ¿Qué valores puede tomar x en la expresión?
5. Escriba una situación que pueda describir la siguiente expresión (escribe un enunciado para cada caso).
   a) Ingreso = $2.000x$
   b) $2.000x = 10.00$
   c) $3x + 200$
   d) $3x + 200 = 920$
   e) $(1/2)\,(x) = 32$
6. Identifique las cantidades constantes de las expresiones b, c y e.
7. Indique las cantidades variables de las expresiones a y c.

En una ecuación de la forma $ax + b = c$ las cantidades $a, b,$ y c son constantes y la x es una incógnita.

8. De acuerdo a lo anterior indique los valores de a, b y c de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $3x + 2 = 11/3$ $a =$, $b =$, $c =$

b) $9 = x + 5$ $a =$, $b =$, $c =$

c) $x + 1/2 = 10$ $a =$, $b =$, $c =$

d) $7/3 = 2 + x$ $a =$, $b =$, $c =$

Situación 3: Operatividad y resolución de ecuaciones

Logro: Utilizar medios pertinentes a solucionar ecuaciones lineales.

Actividad 1: Transformación de coeficientes y términos independientes

Considera la siguiente ecuación que da cuenta de que un cliente de las empresas públicas de Buenaventura tiene un plan de servicio telefónico donde el cargo básico es de 300 minutos al mes con valor de $\$28.600$. En caso de que haya un consumo adicional a los 300 minutos el usuario paga $\$55$ por cada minuto.

1. En el mes de Enero el usuario pagó $28.600 + 55x = 29.700$.
   a) ¿Cuántos minutos adicionales pago el cliente?
   b) ¿Cuánto paga en Mayo que tuvo 35 minutos adicionales?
2. De la expresión dada ($28.000 + 55x = 29.700$) indica los términos constantes y las incógnitas.
3. Considera la ecuación $3x + 5 = 22$.
   a) Reemplaza$x = 2,\ x = 3,\ x = 1/2$ en la ecuación dada y saca una conclusión.
   b) ¿Para qué valor de $x 3x + 5$ es igual a cero ($3x + 5 = 0$)?
4. En la ecuación $2x = 3$.
   a) ¿Qué valor toma x para que se cumpla la igualdad?
   b) $2x = 3$ y $2x - 3 = 0$ tienen la misma solución ¿Por qué?
5. Si la ecuación es $(2/3)(x) = 1$.
   a) ¿Qué valor toma x para que se cumpla la igualdad? ¿Cómo lo encontró?
   b) ¿Qué pasa si $x = 0$, $x = 1$y $x = 3/2$?
6. Pedro y Juan estudiantes de grado 8° resuelven la siguiente ecuación en la tabla que a continuación se muestra.

$$(1/2)x + 3 = 5x - 2$$

Pedro	Juan
$(1/2)\,x + 3 - 3 = 5x - 2$ $(1/2)x = 5x - 2 + 3$ $(1/2)\,x\ = 5x + 1$ $1/2)x + 5x = 1$ $(11/2)\,x = 1$ $x = 2/11$	$(1/2)x + 3 = 5x - 2$ $(1/2)x + 3 - 3 = 5x - 2 - 3$ $(1/2)x + 0 = 5x - 5$ $(1/2)x - 1/2x + 5 = 5x - 1/2x - 5 + 5$ $0 + 5 = 5x - (1/2)x - 0$ $5 = (9/2)(x)$ $(2/9)5 = (9/2)(2/9)(x)$ $(2/9)5 = (1)(x)$ $10/9 = (x)$ $x = 10/9$

Tabla 20Tratando con ecuaciones en el salón de clase.

a) Indique cuál de los estudiantes realiza el procedimiento correcto ¿Por qué?

b) ¿$(1/2)x - 5x = -5$ es equivalente a la ecuación dada?

7. Transforme el coeficiente de la x de las siguientes expresiones para que sea 1.

   a) $1/2x$

   b) $-3x$

   c) $100x$

   d) ax

8. Transforme el coeficiente de x para que la expresiones sea 0 en los casos anteriores.

9. Transforme el término independiente en 0 de las siguientes expresiones.

   a) $2x - 3$

   b) $1/2 + x$

   c) $a + x$

   d) $x + 1/3$

10. Anule el coeficiente de la incógnita de las siguientes ecuaciones.

   a)$(1/2)x - 5x = 5$

   b) $-3x + 2 = 0$

Actividad 2: Ecuaciones equivalentes y solución de la ecuación lineal.

Recuerde que para encontrar la solución de una ecuación se deben producir ecuaciones equivalentes, es decir, ecuaciones que tomen valores en el mismo dominio y tengan la misma solución.

1. $x - 3 = 10$ y $x = 13$ son equivalentes ¿por qué?
2. Observa el siguiente procedimiento que realizó un estudiante de octavo para encontrar la solución de una ecuación.

$$2x + 5 = 8 + x$$
$$2x - x + 5 = 8 + x - x$$
$$x + 5 = 8$$
$$x + 5 - 5 = 8 - 5$$
$$x = 3$$

   a) ¿Por qué resta x en ambos lados de la ecuación?
   b) ¿Por qué resta 5 en ambos lados de la ecuación?

3. Dadas las siguientes ecuaciones observa si se obtuvo una ecuación equivalente explica ¿Qué transformación se aplicó a la primera ecuación para obtener la segunda?

a) $5x + 3 = 18$ $5x = 15$	b) $3x + 6 = 2x$ $x = -6$	c) $18 + 4x = 5$ $4x = -13$	d)$3x + 9 = 12$ $3(x + 3 - 4) = 0$

4. En $2x + 5 = 8 + x$.
   a) ¿Cuántos valores puede tomar la x para que se cumpla la igualdad?
   b) ¿Qué valor se debe reemplazar en la x, para que haya el equilibrio en la expresión?
   c) $2x + 5 = 8 + x$ es equivalente a $x + 5 = 8$ ¿Por qué?
   d) Un compañero al tratar de resolver la ecuación le queda de la siguiente forma $2x + 5 + (-5) = 8 + (-5) + x$.

   ¿Crees correcto el procedimiento que realizó el estudiante?

5. Si se considera la ecuación$(2/x) + 4 = (5/x) - 2$.
   a) ¿Qué valor debe tener x para que se cumpla la igualdad?
   b) Un estudiante plantea que tener $5/(x-2)$, es igual a tener $-5/(2-x)$,¿Crees valido lo que argumenta el estudiante? ¿Por qué?
6. El estudiante del caso anterior dice tener la razón por qué:

	$5/(x-2) = -5/(2-x)$
paso:1	$5(2-x) = -5(x-2)$
paso:2	$10 - 5x = 5x - 10$
paso:3	$-10x = -10$
paso:4	$x = -10/-10$
paso:5	$x = 1$

Tabla 21Argumentando procedimientos en ecuaciones.

   a) Consideras correcto este procedimiento ¿Por qué?
   b) Observa el paso 2 ¿Qué error comete el estudiante? ¿Por qué?
   c) ¿Qué valores puede tomar x en la ecuación dada? ¿por qué?
   d) ¿Qué pasa cuando $x = 2$ en la ecuación dada?
7. Una con una flecha las ecuaciones de la columna A que son equivalentes con ecuaciones de la columna B.

Columna A	Columna B
• $x = -2$ • $2x + 8 = x$ • $7(x-2) = (1/2)x$ • $x = 1/2$	• $7x - 14 = 1/2x$ • $2x = x + 1/2$ • $x + 1/2 = -3/2$ • $x = 28/13$ • $x = -8$

Actividad 3: Situaciones problemas y ecuaciones.

1. ¿La ecuación $x - 21 = x/4$ permite solucionar a uno de los siguientes problemas? Señale con cuál y ¿por qué?
   a) La cuarta parte del peso de una fruta de Borojó equivale al peso de la fruta aumentado en 21¿Cuál es el peso de la fruta?
   b) De Julián se sabe que es 21 años menor que su papá. Julián tiene un cuarto de la edad de su padre ¿Cuál es la edad de cada uno?

c) El número de rácimos de chontaduro excede en 21 al número de racimos de la competenciamenos 4. ¿Cuántos rácimos tienen cada uno si entre los dos tienen 31 rácimos?

d) Si la cuarta parte del recorrido en metros en ir de Buenaventura a Cali que hace un camión A cargado de marisco, equivale al doble del recorrido que hace en la misma dirección el camión B menos 21metros. ¿Cuántos metros recorre cada camión?

2. Si el doble de la edad del padre de Julián vendedor de marisco en Buenaventura más 36 es 134. ¿Cuál de las opciones es para ti la que representa el enunciado?

a) $x + 134 = 36$

b) $2x - 36 = 134$

c) $2x + 36 = 134$

d) $36 - 2x = 134$

3. En un quiosco aledaño al Puente del Piñal en Buenaventura el dueño recibe por la venta de camarón una ganancia de $\$4.000$ por cada 10 lbs de pescado que se vendió en una semana se recibieron $\$72.000$ de ganancia. ¿Cuál de las ecuaciones en la Tabla 22 le permite calcular al propietario el número de libras que se vendieron en la semana?

a) $L = \frac{\$72.000 \times 10lbs}{\$4.000}$	b) $L = \frac{\$72.000 \times 10lbs}{10lbs}$
c) $L = \frac{\$72.000 \times \$4.000}{10lbs}$	d) $L = \$72.000 \times \$4.000 \times 10lbs$

Tabla 22. El encuentro de una solución en la venta de camarón.

4. En la galería de Pueblo Nuevo del municipio de Buenaventura se vende Chontaduro, Borojó, Papa China entre otros productos. Una vendedora establece la cantidad de chontaduro que ella vende es igual a la que vende la hija aumentada en 5 racimos.

a) Plantea simbólicamente la cantidad que vende la señora.

b) Plantee simbólicamente la cantidad que vende la hija.

c) Relacione la cantidad que vende la hija con la cantidad que vende la señora.

d) Un compañero plantea que x, es la cantidad que vende la señora y$x+5$ la cantidad que vende la hija.Argumenta a favor o en contra sobre lo planteado.

5. En el municipio de Buenaventura al finalizar cada año se realiza el proceso de veda [6]en ella se espera que la cantidad en toneladas de camarón aumentada en 5 toneladas, sea el doble de la actual.

a) Plantee una expresión que dé cuenta de la situación teniendo en cuenta lo planteado.

b) Según lo anterior, ¿Qué cantidad de camarón hay después de la veda en Buenaventura?

c) ¿Cuál es la cantidad de camarón antes de la veda?

[6]La veda es la acción y efecto de vedar (prohibir algo por ley o mandato). El término también se utiliza para nombrar al espacio de tiempo en que están prohibidas, en el caso de Buenaventura por tener mar, como habitad de muchas especies marinas se prohíbe la depredación del recurso natural (el camarón de aguas someras y profundas), en todo el pacifico colombiano, para permitir la reproducción y, por lo tanto, la subsistencia de los animales. Para este año la veda va del 1 enero al 28 de febrero de 2012.Resolucion Nº 03063 del 17 de noviembre de 2011.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

En este capítulo se presentan algunas conclusiones generales respecto a la resolución de ecuaciones lineales, y su estudio permite introducir conceptos como: equivalencia, igualdad, identidad, ecuaciones condicionales, etc. Para ello se retoman las investigaciones en este campo y algunas conclusiones de los análisis de las respuestas de los estudiantes de octavo grado, las cuales fueron expuestas en el capítulo tres.

4.1 Conclusiones generales

De acuerdo a la respuesta de la pregunta central del trabajo. A partir de esta el concepto de ecuación lineal, se pudo abordar retomando aspectos importantes como: la experiencia procedimental que tenían los estudiantes frente a resolución, creando el ambiente óptimo que permita desarrollar capacidad para concentrarse en un procedimiento en lugar de la respuesta, describiendo la comprensión de relación existente entre las operaciones, caracterizando las diversas interpretaciones tanto implícita como explicita que tiene el igual en las ecuaciones, reconociendo el conocimiento de algunas propiedades de los números reales. De acuerdo a este plan se logró proponer una prueba diagnóstica, para trabajar desde los conceptos algebraicos relacionados con la resolución de ecuación lineal que lleven a magnificar al estudiante en el aprendizaje de mencionado concepto.

En la prueba se pudo observar que asumió los conceptos elementales como: la expresión monomio y binomio, el igual, la igualdad, la equivalencia y problemas algebraicos. Dio la oportunidad a los estudiantes de poner en juego sus propias conceptualizaciones y confrontarlas con sus estudios que ya habían realizado, permitió elaborar diversos procedimientos, propuso explicar argumentos para justificar, que los transportó a descubrir lagunas y contradicciones en sus conocimientos, brindó los elementos para detectar los propios errores, que en suma los obligaran a cuestionar y reformular sus ideas para aproximarse dúctilmente a la comprensión de la noción convencional de los conceptos.

Desde el objetivo específico se observaron las siguientes problemáticas en la prueba relacionadas, con la resolución de ecuación lineal.

Apropiar diferentes significados de la incógnita lineal, pues fue vista como letra y como signo de operación, estuvo escrita como ¡cuadrática! en la temática que se trabajó, estuvo relacionada operativamente con ella misma en condición de factor, el cual si se opera proporciona nuevamente la misma letra pero elevada nuevamente al cuadrado. De lo anterior se agrega que en la escritura es asignada como coeficiente del número, es decir, es escrita antes de la cantidad.

Los problemas concernientes con la transposición de la cantidad como factor, tuvo que ver con el método de la transposición para cantidades, que asumen el rol de ser positivas o negativas, la cual es extendida a la transposición de términos para factores. Pues bajo esta condición no aplica el decir, cambiar de miembro una cantidad significa, también cambio de signo en esta. De otra parte en las cantidades de signadas como positivas y negativas son transpuestas con el error en el cambio, conservando estas cantidades los signos.

Bajo este análisis realizado, que corresponde a la dificultad multiplicativa surgió el inconveniente de tipo multiplicativo. Ya que al prestar atención al dividir los números negativos con el procedimiento realizado resultó una cantidad que no correspondió con la convención.

Otra dificultad detectada tenía relación con la producción de expresiones equivalentes algebraicas, en este caso, ecuaciones equivalentes a una dada. Los estudiantes no asimilaron el proceso de resolución de una ecuación condicional, ya que de un parte, no aplicaron las propiedades de la igualdad para producir ecuaciones equivalentes y de otro, no reconocieron el signo igual como relación de equivalencia. Específicamente no comprendieron el concepto de solución de una ecuación lineal. De aquí se testificó que pudieron obtener dos soluciones para este tipo de ecuación y no se asimiló lo ocurrido como un error.

Un campo rico a explorar algunas dificultades, se hicieron evidentes en los problemas a través de los cuales, se buscó que los estudiantes mejoraran en la competencia propositiva. En consecuencia de los anteriores análisis de la prueba, no cabe duda que hubo deficiencias para realizar buena coordinación entre el lenguaje natural y el simbólico de representación.

En los procesos argumentativos se observó que los estudiantes en su mayoría al inicio del desarrollo de la prueba; preguntas relacionadas con la operatividad y en los problemas, daban respuestas sin presentar argumentos que sustentaran lo realizado, además, había una permanencia en el pensamiento numérico donde se evadió la letra en términos de que daba cuenta de una cantidad, más aún muchos discriminaron las magnitudes que hacían parte de los problemas.

De otro punto de vista, las preguntas que exigen argumentar o justificar de manera oral o escrita, deja ver la forma como los estudiantes están ideando lo que están desarrollando; en este orden de ideas se adecua la toma de correctivos cuando sea necesario respecto a las dificultades que presentan y errores que se cometan. También, es una de las vías a través de las cuales, el maestro dan cuenta de que tanto esta evolucionando el estudiante, es decir, si la noción con la que contaba la transformo en una definición.

La importancia para el trabajo de aportes del marco teórico gestiono que este alcanzara nueva dimensión. Siendo organizado en tres aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del concepto de Ecuación Lineal desde la perspectiva, didáctica, curricular y matemática para dar cuenta sobre la forma como se estaría orientando este concepto a nivel escolar en concordancia con lo que plantearon el MEN (1998), MEN (2006) y algunas investigaciones en didáctica de álgebra comoTall (1989) y Filloy & Kieran (1989), en la curricular con Filloy & Rojano (1985) y en matemáticas como: Thompson, A. (1992) y Kline (2002), entre otros.

En cuanto a la didáctica, se asumió como la que posibilitó organizar, estructurar el conocimiento para ser vinculado a fenómenos y problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos en un contexto particular o específico. Buscando mejorar la comprensión por parte de los estudiantes para acceder a un conocimiento, con el fin de ponerlo en juego en situaciones prácticas.

En este sentido, se pensó en el diseño de una Secuencia Didáctica que aunque no se desarrolló en clases, es y sigue siendo una herramienta que permitió incluir diferentes dificultades caracterizadas en la prueba y diferentes conceptos; mediante una serie de actividades organizadas, estructuradas y objetivos. En el caso de este trabajo se optó por incluir el concepto de Ecuación Lineal.

El desarrollo teórico de las distintas situaciones que fueron abordadas en esta investigación, se realizaron fundamentado en los documentos, ideas y planes educativos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, tales como: Estándares Básicos de Competencias (2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998); donde se evidencia el nivel de competencia y desarrollo que deben alcanzar los estudiantes en un determinado grado y la forma como se deben desarrollar los planes educativos.

En este sentido, se pudo apreciar que en algunas de las instituciones educativas de Buenaventura se diseñen los planes de estudio o propuestas curriculares(ver el marco contextual) con el propósito de potenciar el desarrollo del pensamiento matemático; para ello es necesario fortalecer las bases teóricas que se tienen en cuenta para direccionar la educación.

Y se piensa que esto se debe hacer a partir de los planes y proyectos propuestos por el currículo obedeciendo a unas necesidades sociales, culturales y disciplinares.

Lo anterior se evidencia en la estructuración del currículo según los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia; ésta se organiza a través de tres ejes o aspectos importantes: Procesos Generales, Conocimientos Básicos y El contexto.

Desde la perspectiva matemática, que da claro que esta disciplina es un constructo sociocultural, son una necesidad de todos los grupos humanos para poder explicar y darle sentido a todo aquello que les rodea. Pues, mediante esta el hombre da razones frente al comportamiento de un determinado fenómeno propio de las matemáticas o de otras ciencias.

De esta forma, el concepto ecuación, surge como necesario para que sea llevado al aula con la intensión que este represente de manera explícita o implícita un fenómeno, organizar fenómenos, situaciones paramétricas, y dependencia entre otros.
En lo personal la investigación contribuyó a que la formación fuera más integral, pues con el desarrollo de este trabajo y la información suministrada por los investigadores se muestra tanto a los docentes en ejercicio como a los maestros en formación otro horizonte acerca del desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en relación con el estudio de la resolución de las ecuaciones lineales y la equivalencia entre expresiones que tiene ella ,lo cual los puede llevar a tomar decisiones acerca de cómo actuar en el aula de clases y que estrategias tomar en relación con el buen uso y significado de ambos conceptos.

La secuencia didáctica a través de los estándares básicos de competencia en matemáticas articula las interacciones entre estudiantes y contextos en el tratamiento de las situaciones matemáticas, por tal motivo desde los aportes de este trabajo, se propone el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar sus afirmaciones con argumentos claros mediados por las nociones o conceptualizaciones, que han logrado definir con un objeto particular de estudio, como lo es el caso de la resolución de las ecuaciones lineales y su relación de equivalencia.

El contexto de las ventas, hubiera posibilitado conocer sobre el tema que se está trabajando, de esta forma, pudiera proponer situaciones nuevas de aprendizaje, diferentes a la que se estén abordando en clase, y así se lograria componer y descomponer la situación abordada en sus particularidades y generalidades. En este sentido, una Secuencia Didáctica permite que las ecuaciones para su estudio sea argumentada, sea justificada y sea contextualizadas a través de una serie de situaciones, actividades que modeladas matemáticamente, describen el comportamiento significativo de un tema particular que se desea abordar.

5. Referencias bibliográficas

Balcells, J. (1994). Retrieved, april12, 2011, from, http: //misc_ucm. pbworks. Com/w/ page/21456985 / variables +y+categorías.

Behr, M. (1980).*How children view the equal sign*. Mathematics teaching nº 92.

Bell, A. W. (1996). *Research on learning and teaching*. Windsor: NFER-Nelson.

Bell, A. Malon, J. A, & Taylor, P. C. (1987).*Algebra an exploratory teaching experiment.* Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.

Bell, A., O'Brien, D, & Shiu, C. (1980). Designing teaching in the light of research on understanding. *In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.Berkeley: University of California,* (119-125).

Bolaños, C. Mezú, L. & González, C. (2007). Las ecuaciones lineales desde una perspectiva funcional.

Brunner, J. (1966). *Informe delas IV jornada sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Santa Cruz de Tenerife.

Carry, L.R., Lewis, C., & Bernard, J. (1980). *Psychology of equation solving*: *An information processing studies (Final Technical Report)*.Austin: University of Texas at Austin, Department of Curriculum and Instruction.

Cogollo. (2006). *La variable: "cosa", "letra acompañante" o "número escondido*. Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle. Australia: University of Newcastle.

Chemello, G. (2001). La organización del conocimiento a enseñar en matemática: Un problema didáctico. *En la revista que hacer educativo nº 47, FUMTEP Montevideo.*

Duval, R. (2004).*Semiosis y pensamiento humano.* Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (Segunda Edición). Santiago de Cali, Colombia: Peter Lang S.A.

Enfadaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, (5, 23-31).

Filloy, E & Kieran, C. (1989).El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *En: enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, (229-240).

Filloy, E & Rojano, T. (1984).From an arithmetical to an algebraic thought*. In J. M. Moser (Ed.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME–NA. Madison: University of Wisconsin,* (51–56).

Filloy, E & Rojano, T. (1985).Obstructions to the adquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies.*Streefland*, (154-158).

Filloy, E. (1996).Proyecto innovación e investigación en el aula. *Aplicación de modelos en el planteamiento de ecuaciones*, (57-58).

Infante, L & Hurtado, C (2010).Significado del Signo Igual en la Resolución de Ecuaciones de Primer Grado.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol*. Educational studies in mathematics*. *Num. 12*, (317- 326).

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.* Grows, D.A. Ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learnig.Traducción al Español Luis Puig.

Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations*.Moser*, (83–91).

Kline, M. (2002). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Volumen II.Humanes, pp 790. Madrid: Alianza Editorial.

Larson, R & Hostetler, R. (1989). *Matemáticas McGraw-Hill.* (Segunda edición). Biblioteca, Banco de la República en Buenaventura. Latino Americana, S.A.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embod-iments in computer environments. *In IWirszup & R Streit (Eds.), Developments in school mathematics education around the world*. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*, (647-680).

Mason, J., Burton, L & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Peterson, J. (2005). *Matemáticas básicas*. Compañía Editorial Continental, S.A.

Posada, F., Gallo, O., Gutiérrez, J., Jaramillo, C., Monsalve, O., Múnera, J., Obando, G., Silva, G., & Vanegas, M. (2007). *Pensamiento variacional y razonamientos algebraico*. Secretaría de Educación para la cultura de Antioquia.

Spiegel, M & Moyer, R. (2007). *Álgebra superior* (Tercera edición).McGraw. Hill / Inter Americana Editores, S.A.

Soloway, E., Lochhead, J., & Clement, J. (1982). *Does computer programming enhance problem solving ability* .Some positive evidence on algebra word problems. In R. J. Seidel, R E. Anderson, &B.Hunter (Eds.), Computer literacy. New York, NY: Academic Press.

Tall, D. (1989).*Concept image, computers, and curriculum change*. Invited address presented at the research pre session of the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Orlando, FL.

Thompson, A. (1992). Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving.*In E.A. Silver, Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. Hillsdale, NJ: Erlbaum,* (281-294).

Vergnaud, G. (1995). Organizar el conocimiento matemático en el marco de la planificación por áreas integradas. *Entrevista realizada por María Emilia Quaranta y Cinthia Raischmir. En: revista novedades educativas*.

6. Anexos

Anexo1. Secuencia didáctica: Las ecuaciones lineales desde una perspectiva funcional.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LAS ECUACIONES LINEALES DESDE UNA PERSPECTIVA FUNCIONAL

PARTICIPANTES
CARLOS ALBERTO BOLAÑOS PÉREZ
INSTITUCION EDUCATIVA MONSEÑOR RAMON ARCILA
SEDE: RAUL SILVA HOLGUIN
LUZ MIRELLYMEZÚ
INSTITUCION EDUCATIVA CARLOS HOLGUINMALLARINO
SEDE: MIGUEL DE POMBO
CLAUDIA CECILIA GONZÁLEZ
INSTITUCION EDUCATIVA LAS AMERICAS

ASESORA
LIGIA AMPARO TORRES R.

Santiago de Cali, Mayo de 2007

INTRODUCCIÓN

Frecuentemente escuchamos en los estudiantes expresiones como: “No me gusta el álgebra, no entiendo esa materia, eso es el coco del bachillerato, ¿para qué me sirve?” etc., estas expresiones ponen de entrada una barrera en el proceso de enseñanza, haciéndola mas compleja no solo por los contenidos, sino por las limitaciones de tipo cognitivo y cultural que pueden experimentar los estudiantes en su formación desde la educación primaria.

Esta situación ha llevado a muchos docentes a estar en constante búsqueda de estrategias metodológicas que ayuden a fortalecer esquemas cognitivos que permitan a los alumnos una mayor comprensión de los conceptos para desarrollar un pensamiento matemático autentico; es decir, hacer unas matemáticas más asequibles, practicas y sobre todo con sentido. Conscientes de esta problemática y con el fin de fortalecer las bases de los principios matemáticos que sirvan de apoyo para hacer frente a las diferentes pruebas de estado (ICFES, SABER…) que se aplican a nivel nacional y desarrollar estrategias que le posibiliten a los estudiantes comprender mejor el mundo, es necesario entonces, introducir estrategias didácticas nuevas que puedan cambiar la enseñanza y aprendizaje del algebra, desde un enfoque del pensamiento variacional donde a través de situaciones problema se potencian los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, modelación y el desarrollo de procedimientos.

Por lo tanto, en este trabajo hemos tratado de desarrollar y apropiarnos de este enfoque para diseñar una secuencia didáctica acorde al entorno de los estudiantes y que permita enseñar las ecuaciones desde la perspectiva funcional para favorecer un acercamiento significativo al algebra y fortalecer la relación entre estudiantes y docentes.

1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Un alto porcentaje de los docentes de matemáticas han sido educados en los colegios y en la universidad con metodologías que encaminan a la adquisición del conocimiento en una forma mecánica y repetitiva de un proceso, que en ocasiones es inalterable. La educación ha venido evolucionando en la búsqueda de hacer que el estudio de las matemáticas sea más atractivo, éste acorde a las nuevas tecnologías y privilegie el pensamiento, además de la capacidad de análisis e interpretación en los niños y niñas.

Teniendo en cuenta el modelo de enseñanza que se esta aplicando, donde se enfatiza el manejo simbólico de resolución de ecuaciones, donde existe la concepción que entre mayor sea el número de ejercicios que se realicen, mejor quedarán cimentados los conceptos y procedimientos en los estudiantes, pero por el contrario, se esta lejos de su verdadero significado, el cual se debe usar ampliamente en las aplicaciones, tomando como referencia situaciones cotidianas, ya que por lo general, planteamos problemas lejos de su realidad o contexto.

Al abordarse las ecuaciones, en la escuela, se toma sólo la parte algebraica, desligándolas de los problemas de diferente naturaleza que permiten la aplicación de estos modelos matemáticos en otras disciplinas del conocimiento (Biología, Sociales, Educación Física etc.). Desde estas prácticas se generan muchas inquietudes en los estudiantes como ¿Para qué me sirve esto?, produciéndole también inseguridad y nerviosismo al presentar pruebas externas como las SABER, ya que no lograr asociar los temas vistos con las situaciones problemas planteadas en las mismas.

Teniendo en cuenta los últimos desarrollos de la didáctica de las matemáticas y las directrices del MEN a través de los Lineamientos curriculares y los Estándares básicos de la calidad, nos interesa contrarrestar esta manera tradicional de hacer algebra y de presentar el trabajo con las ecuaciones y por lo tanto, trataremos de contestar el siguiente interrogante a partir de diseño de una secuencia didáctica y su implementación.

¿Cómo facilitar a través de situaciones de diferente naturaleza la aprehensión del concepto de ecuación lineal en estudiantes los grados séptimo y octavo?

2. JUSTIFICICACIÓN.

Con este proyecto se pretende brindar herramientas pedagógicas a los estudiantes para un mejor desempeño académico que permita movilizar los diferentes pensamientos, haciéndolos más competentes y comprometidos con su proceso de aprendizaje, llevando esto a un mejor desempeño de los niños y niñas en las diferentes pruebas del estado y por consiguiente mejorando el nivel escolar de la institución.

Se considera que esto es posible puesto que la propuesta de intervención en el aula al integrar diferentes representaciones, moviliza conteo, cálculo numérico, representación geométrica, escalas, entre otros aspectos. Además, al integrar situaciones cotidianas del contexto de los estudiantes y el tipo de trabajo en el aula (individual, grupal y puesta en común) favorecen la autonomía y el compromiso con su propio proceso de formación. Teniendo en cuenta lo anterior, se espera que al desarrollar ciertas competencias algebraicas los estudiantes mejoren sus resultados en las pruebas internas y externas.

Por otro lado buscamos mejorar nuestro quehacer pedagógico desde el conocimiento y tratamiento de nuestras debilidades. Adquirir habilidades que nos permitan reeducarnos competentemente, además de presentar una propuesta didáctica que movilice el pensamiento variacional en el tema de las ecuaciones lineales por medio de situaciones del contexto que le permitan al estudiante la apropiación y relación de los conceptos aprehendidos con el mundo económico y/o laboral que le rodea.

Esto se logra a través de estudio matemático del concepto objeto de enseñanza (las ecuaciones lineales) en una red conceptual que articula conceptos y procedimientos, como también, el estudio de los lineamientos y estándares en lo correspondiente al desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes; esto permite reconocer el concepto y los procesos de pensamiento que se deben movilizar para desarrollar dicho concepto.

De otra parte, cambiar la forma de enseñanza requiere el cambio en la forma de abordar la intervención en el aula, la forma de preguntar, de reconocer las opiniones y desarrollo de los estudiantes etc.

Por lo tanto, este trabajo es importante para la institución, equipo de docentes y estudiantes involucrados en el.

3. OBJETIVOS

GENERAL

Minimizar las dificultades presentadas por los estudiantes de grado séptimo y octavo en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales a partir de situaciones del contexto.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Integrar todos los conceptos y procedimientos mencionados con el concepto de ecuación en una secuencia didáctica.

2. Significar y comprender, por parte de los estudiantes el concepto de ecuación a través de situaciones relacionadas con su contexto.

3. Reconocer y representar variaciones lineales, dotar de significados el concepto de ecuación.

4. METODOLOGÍA

Se propone una secuencia didáctica formada por cuatro situaciones, cada una de ellas con dos o más actividades.

Cada actividad la desarrollaremos en tres momentos.

En el primer momento el estudiante desarrolla de forma individual cada actividad, dándose la posibilidad de confrontar sus saberes, su competencia interpretativa y el nivel en que se encuentra su autonomía.

En el segundo momento en grupos de tres estudiantes, comparan sus trabajos, toman decisiones sobre las estrategias, argumentos y procedimientos más efectivos que emplearan llegando a acuerdos.

En el tercer momento realizamos puesta en común donde se construirán colectivamente los saberes involucrados en la secuencia.

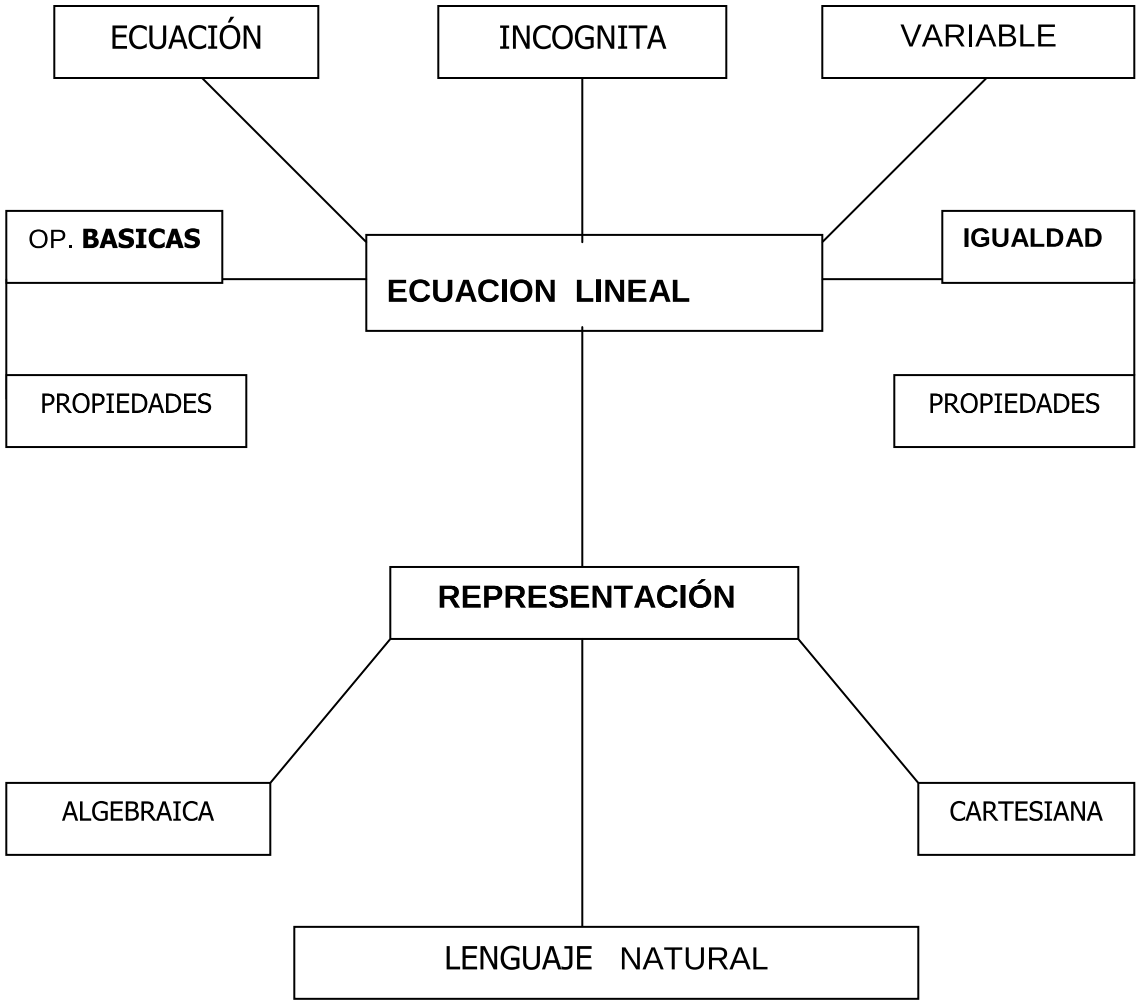
El papel del docente es decisivo en este momento ya que debe movilizar el pensamiento variacional a través de sus cuestionamientos.

5. ALGUNAS REFLEXIONES TEÓRICAS QUE GUÍAN LA SECUENCIA DIDÁCTICA

5.1 ASPECTOS MATEMÁTICOS

Los Lineamientos Curriculares, expedidos por el Ministerio de Educación Nacional, nos invitan a superar la enseñanza de contenidos fragmentados y compartí mentalizados; de allí que abordar la ecuación lineal requiera del dominio de un campo conceptual que permita desmenuzar, analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas de la actividad práctica del hombre, donde la ecuación lineal se encuentre presente.

Los conceptos que abordaremos a continuación son a nuestro juicio, después de una serie de lecturas, los que principalmente forman la red de este campo conceptual.



El manejo de igualdad en expresiones que representan el mismo valor, el uso de letras por el estudiante como incógnitas (un numero desconocido), diferenciando cuando estas letras son usadas como variables, es decir, como un numero que cambia, en importante en el trabajo con esta temática.

El concepto de ecuación dado como el de dos expresiones simbólicas unidas por un signo"=", que debe involucrar cálculos sobre números desconocidos. Dicha expresión simbólica llega a ser una ecuación (y es tratada algebraicamente), esta postura se construye sobre la base de los procesos mentales del que resuelve. Por otro lado si un "punto" o un par ordenado (x, y) pertenece a la línea $Y = mx + b$ o la satisface, entonces la expresión simbólica puede ser considerada como una ecuación, es decir, una ecuación con dos incógnitas. Sin embargo, la escuela no asume esta manera de ver las ecuaciones.

Situaciones que involucran ecuaciones se representan a través del lenguaje natural (que es el mas cercano al estudiante, mas de su cotidianidad), aquel que se escribe completamente con palabras del idioma usual sin el uso de símbolos especiales (e, g. T, x), son importantes a la hora de pasar a un lenguaje simbólico, a un lenguaje algebraico (modela el lenguaje natural) que no contiene palabras, con frecuencia solo letras y símbolos matemáticos junto con convenciones implícitas sobre las posiciones, el orden y la orientación y por tanto su forma algebraica es reconocible, esto es importante tenerlo en cuenta a la hora de los diseños de las situaciones de aula, pues estas conversiones no son obvias, se necesita mucho trabajo sobre cada registro para poder establecer los nexos y puentes posibles. De otra parte, con otros lenguajes como el lenguaje cartesiano (representa a través del punto en el plano la representación algebraica) constituye una forma de conocimiento (leer, interpretar y construir graficas cartesianas) y de transmisión de la información en nuestro mundo actual, en el cual se expresa dependencia entre dos variables, tiene el mismo tipo de dificultad al pasar al tabular, al natural y viceversa.

Finalmente resolver o solucionar una ecuación lineal es encontrar el valor que puede tomar la incógnita, para que la igualdad se cumpla ¿cómo abordar esto sin caer en procesos mecánicos y repetitivos? Esta es otra pregunta que debe ser objeto de reflexión cuando de ecuaciones se trata.

5.2 ESTÁNDARES Y ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA

En este trabajo, un punto de partida es ubicar los estándares de pensamiento variacional de los grados de sexto a séptimo y de octavo a noveno, como referente y establecer la relación de este con otros estándares del mismo pensamiento y con estándares de otros pensamientos del mismo nivel. El propósito de hacer esto, es identificar las relaciones entre estándares y tenerlas de referencia a la hora de los diseños, es decir, en una misma propuesta de aula se pueden conjugar y movilizar desempeños y competencias que tienen que ver con varios estándares. Sin embargo, es importante resaltar que con una secuencia didáctica no se puede pretender que se logren, todos los aspectos que involucran uno o varios estándares, los cuales están propuestos para varios años de escolaridad, pero si se puede a través de la secuencia movilizar aspectos importantes de estos.

ESTANDARES DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

GRADOS 6 a 9

- Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas , expresiones verbales generalizadas y tablas)
- Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación)
- Identificar relaciones entre propiedades de las graficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.

GRADOS 10 A 11

- **I**nterpretar el significado de los máximos y mínimos en situaciones de las ciencias humanas y sociales

ESTANDARES RELACIONADO CON EL MISMO PENSAMIENTO:

DE CUARTO A QUINTO

- Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o grafica.
- Representar y relacionar patrones numéricos contables y reglas verbales.
- Añadir y explicar relaciones d dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias.

- Construir ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre dato numérico.

ESTANDARES RELACIONADOS DEL MISMO NIVEL Y DE LOS PENSAMIENTOS NUMERICO, ESPACIAL Y METRICO

- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.
- Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.
- Generalizar procedimientos de cálculo validos parta encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.
- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

5.3 ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

- El objeto del desarrollo del pensamiento variacional es la variación entre cantidad y magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

- Este pensamiento requiere del pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también del pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal propósito es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios.

La modelación podemos esquematizarla en varios momentos, no necesariamente secuenciales:
Momento de captación de patrones de variación. Lo que cambia y lo que permanece.
Momento de creación de un modelo mental.

Momento de echar a andar el modelo.
Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.

- El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

CON EL PENSAMIENTO NUMÉRICO. Si se fija la atención en la manera como varían los números.
CON EL PENSAMIENTO ESPACIAL: O mejor espacio- temporal
CON EL PENSAMIENTO MÉTRICO: en cuanto a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de magnitudes, medición numérica, ordenación de cantidades y de magnitudes.
CON EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL TRADICIONAL: Se refiere a la covariación entre las magnitudes que se identifican como proporcionales.
CON LAS REPRESENTACIONES GESTUALES Por ejemplo: subir y bajar el dedo para el movimiento circular y el armónico simple, o la mano extendida para las derivadas y para el aumento o disminución de la pendiente.
CON LAS REPRESENTACIONES DE MAQUINAS Y CIRCUITOS.
CON REINTERPRETACIONES DINÁMICAD DE LAS REPRESENTACIONES GRAFICAS Y TABULARES: Aquí es muy poderosa la pantalla del computador o l calculadora graficadora.
CON LA ATENCION A LAS VARIACIONES IMPLICITAS EN EL PENSMIENTO ESPACIAL, O MEJOR, ESPACIO –TEMPORAL: Que es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, no en la forma estática de la geometría euclidiana tradicional.
CON LAS REPRESENTACIONES SAGITALES DE LA DESCREDITADA “MATEMATICAS MODERNA “: En las cuales se ve más claramente a donde van los puntos o números del dominio que en la representación cartesiana.
CON EL PAPEL CUADRICULADO, el milimetrado y el ajuste de curvas.
CON EL ESTUDIO DE LAS ESPLINAS CÚBICAS, que permiten ajustar no sólo el punto de empalme sino la primera derivada en ese punto, para producir graficas suaves a la vista.

O CON EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y LOGÍSTICAS: aquí también es clave el uso de la tecnología electrónica, para utilizar los potentes menús de ajuste de curvas

6. SECUENCIA DIDÁCTICA

6.1 SOBRE EL DISEÑO

La secuencia didáctica se diseñó teniendo en cuenta, el propósito formativo, contextos cotidianos, sistemas de representación y metodología de implementación en el aula.

- El propósito general de la secuencia es:

Que los estudiantes de los grados Séptimo y Octavo de las instituciones educativas Las Américas, Carlos Holguín Mallarino y Monseñor Ramón Arcila reconozcan variaciones lineales, sus representaciones y la igualdad de estos para producir ecuaciones de primer grado.

La secuencia toma en cuenta los lineamientos y estándares del MEN relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, en los aspectos de conocimientos básicos, contextos y procesos de pensamiento.

- Los contextos involucrados son:

Situaciones que se producen en una fotocopiadora, las situaciones que surgen en un recibo de pago de servicio telefónico y compra y venta de Bon – Ice.

- Los conocimientos y saberes que se movilizan aluden a:

Variaciones lineales y funcionales, ecuación lineal y sus representaciones.

- Las representaciones que se proponen para ser objeto de estudio son:

Tabulares, gráficos, numéricas, lenguaje natural y simbólico.

6.2 LA SECUENCIA

SECUENCIA DIDÁCTICA: ECUACIONES LINEALES DESDE UNA PERSPECTIVA FUNCIONAL

PROPOSITO GENERAL: Reconocer variaciones lineales, sus representaciones y la igualdad de estos para producir ecuaciones de primer grado.

SITUACION 1: LAS FOTOCOPIADORAS Y LA VARIACIÓN

En el colegio las américas tienen la necesidad de contratar un servicio de fotocopiadora y para ello luego de una licitación reciben dos ofertas:

*** Fotocopias Copimax**
Cobra un cargo fijo de $ 5.000 a la semana además de $ 40 por cada copia.

*** Fotocopias Puntocom**
No cobra cargo fijo pero cada fotocopia tiene un costo de $ 50

ACTIVIDAD 1

1. Calcule los ingresos en tres semanas continuas de la fotocopiadora **COPIMAX**. (Suponga cantidades diferentes para cada semana).

2. Calcule para la fotocopiadora **PUNTOCOM** los ingresos si: En la primera semana sacan 300 copias, en la segunda 550 copias y en la tercera 1.050 copias.

3. Organice los datos en una tabla, según el número de copias que se sacaron en cinco semanas consecutivas para la fotocopiadora **PUNTOCOM**. Haga lo mismo para la fotocopiadora **COPIMAX**.

4. A. ¿Cuáles son las cantidades que se deben tener en cuenta para calcular el costo en COPIMAX?
B. ¿Cuáles de esas cantidades son fijas y cuales de ellas varían?
C. ¿De qué depende el pago semanal de las copias en COPIMAX?
D. Describa de qué manera o como calcular el pago de las fotocopias sacadas.

5. A. ¿Cuáles son las cantidades que se deben tener en cuenta para calcular el costo en PUNTOCOM?

B. ¿Cuáles de esas cantidades son fijas y cuáles de ellas varían?

C. ¿De qué depende el pago semanal de las copias en PUNTOCOM?

D. Describa de que manera o como calcular el pago de las fotocopias sacadas.

6. En una semana por receso estudiantil, no se sacaron fotocopias. ¿Cuál es el ingreso en esa semana para COPIMAX y para PUNTOCOM?

7. Determine el ingreso mínimo y máximo que puede tener cada empresa a la semana.

8. Escriba una expresión que le permita calcular los ingresos en COPIMAX y PUNTOCOM, para cualquier número de copias.

SITUACIÓN 1: LAS FOTOCOPIADORAS Y LA VARIACIÓN

En el colegio las américas tienen la necesidad de contratar un servicio de fotocopiadora y para ello luego de una licitación reciben dos ofertas:

* **Fotocopias Copimax**

Cobra un cargo fijo de $ 5.000 a la semana además de $ 40 por cada copia.

* **Fotocopias Puntocom**

No cobra cargo fijo pero cada fotocopia tiene un costo de $ 50

ACTIVIDAD 2

1. Considerando la situación anterior, observe las siguientes tablas y escriba los datos que hagan falta haciendo uso de las expresiones obtenidas en la actividad uno.

Para Copimax (40x + 5.000)

SEMANA	NUMERO DE COPIAS	DINERO PAGADO	CARGO FIJO	PAGO SEMANAL
1	200			
2	350			
3		8.000	5.000	
4	1200			

Para Puntocom (50x)

SEMANA	NUMERO DE COPIAS	DINERO PAGADO	PAGO SEMANAL
1			
2			
3			
4			

2. ¿Cuántas copias saca la institución en Copimax en una semana con **$ 73.000?**

3. ¿Cuántas copias se sacan en Puntocom con la misma cantidad?

4. Iguale las dos expresiones que ha obtenido para calcular el ingreso para cualquier número de copias y encuentre el valor del término desconocido.

5. Calcule el número de fotocopias para el cual el ingreso de las dos empresas es igual.

6. Determine ¿ Cuál de las dos ofertas es mas conveniente para la institución y por qué?.

7. ¿Qué significa el valor encontrado en el contexto de las fotocopias y la igualdad de las expresiones?

SITUACIÓN 1: LAS FOTOCOPIADORAS Y LA VARIACIÓN

<table><tr><td>
En el colegio las américas tienen la necesidad de contratar un servicio de fotocopiadora y para ello luego de una licitación reciben dos ofertas:

* Fotocopias Copimax

Cobra un cargo fijo de $ 5.000 a la semana además de $ 40 por cada copia.

* Fotocopias Puntocom

No cobra cargo fijo pero cada fotocopia tiene un costo de $ 50
</td></tr></table>

ACTVIDAD 3

1. Utilice la expresión obtenida en la actividad uno para Copimax **(P= 5.000 + 40x**), para Puntocom (**P= 50X**) y calcule los ingresos según los siguientes datos. Número de copias: 15, 7, 205, 1.200, 3.302.

2. Calcule el número de copias que sacaría Puntocom según estos ingresos.

a) 28.820 b) 220.000 c) 7.500 d) 0 e) 50 f) 300.581

3. Calcule el número de copias que sacaría Copimax según estos ingresos.

a) 21.000 b) 210.000 c) 5.000 d) 7.400 e) 285.000

SITUACIÓN 2: DE LAS TABLAS A LAS GRÁFICAS Y A LOS ENUNCIADOS

Un cliente de las empresas públicas, considera dentro de los planes tarifarios que se ofrecen para el servicio telefónico en la ciudad, uno en el cual el cargo básico es de **200 minutos** al mes con un valor de **$ 18.600.** En caso de que haya un consumo adicional a los doscientos minutos el usuario pagaría a **$ 46,54** por cada minuto.

ACTIVIDAD 1

De acuerdo con lo anterior el usuario trata de plasmar en una tabla lo que seria el gasto telefónico mensual según este plan.

COSUMO BASICO	200	210	220			250			
MINUTOS ADICIONALES	0		20						
V/R MINUTOS ADICIONALES	0		930,8			2320,7			
V/R A PAGAR	18.600		19530,8						

1. Según el plan, establezca la diferencia entre el costo del minuto adicional y el costo del minuto dentro de los doscientos del cargo básico.

2. Indique los datos que se deben tener en cuenta para calcular el valor a pagar por el servicio telefónico.

3. Indique Cuáles son los datos constantes.

4. ¿Qué datos son variables y de qué depende esta variación?

5. Indique el pago que debe hacer el cliente al mes si su consumo es de 300 minutos.

6. ¿Cuánto pagará el cliente al mes si el consumo de minutos adicionales es de 185?

7. Describa de qué manera, o cómo calcular el valor a pagar por el cliente cuando:

   a. No consume minutos adicionales.

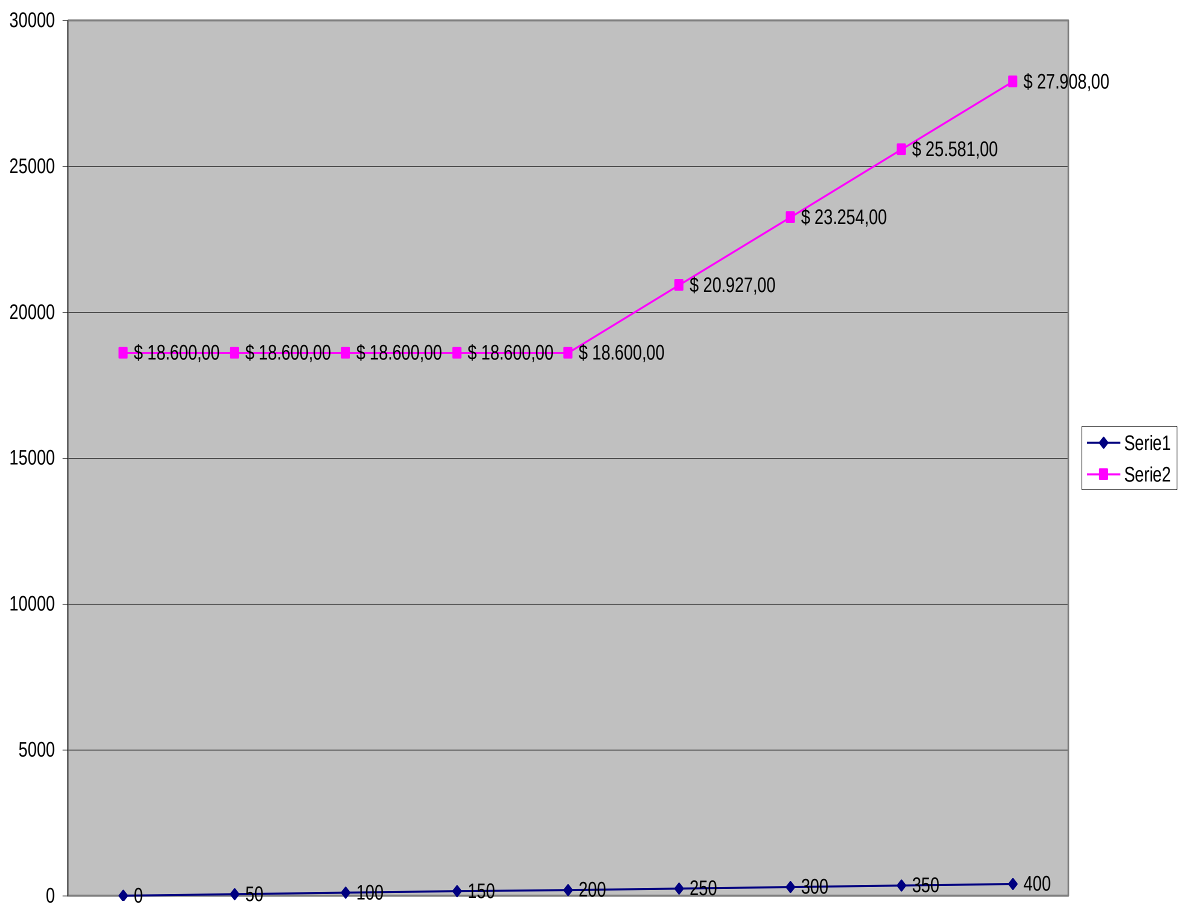
   b. Para cualquier cantidad de minutos adicionales.

SITUACIÓN 2: DE LAS TABLAS A LAS GRÁFICAS Y A LOS ENUNCIADOS

Un cliente de las empresas públicas, considera dentro de los planes tarifarios que se ofrecen para el servicio telefónico en la ciudad, uno en el cual el cargo básico es de **200 minutos** al mes con un valor de **$ 18.600.** En caso de que haya un consumo adicional a los doscientos minutos el usuario pagaría a **$ 46,54** por cada minuto.

ACTIVIDAD 2

Teniendo en cuenta la información que presenta el gráfico sobre un plan de servicio telefónico realice la siguiente actividad.



1. Indique el valor que paga el usuario si consume 100 minutos del cargo básico.

2. ¿Cuánto pagará el usuario que consume 75 minutos del cargo básico?

3. ¿Cuánto pagará el usuario que consume entre uno y 200 minutos del cargo básico?

4. Escriba la expresión algebraica que permita conocer el valor a pagar por el usuario al consumir 200 minutos. Explique su respuesta

5. ¿Cuánto pagaría el usuario que consume 250, 300 y 400 minutos?

6. Escriba la expresión algebraica que permita conocer el valor a pagar por el usuario al consumir 400 minutos.

7. Escriba la expresión algebraica que le permita conocer al usuario el valor a pagar cuando hay consumo de minutos adicionales.

SITUACIÓN 2: DE LAS TABLAS A LAS GRÁFICAS Y A LOS ENUNCIADOS

Un cliente de las empresas públicas, considera dentro de los planes tarifarios que se ofrecen para el servicio telefónico en la ciudad, uno en el cual el cargo básico es de **200 minutos** al mes con un valor de **$ 18.600.** En caso de que haya un consumo adicional a los doscientos minutos el usuario pagaría a **$ 46,54** por cada minuto.

ACTIVIDAD 3

1. Analiza la siguiente expresión que permite calcular el precio para cualquier cantidad de minutos adicionales que consume **P= 46,54. M** y Observa la siguiente expresión donde **(P)** es el precio total que paga un usuario para el plan telefónico y **(m)** es la cantidad de minutos adicionales que consume el usuario en un mes **P= 18.600 + 46,54. m**

a. Explique qué indica 46.54.m
b. Explique porqué 18.600 es una cantidad constante. ¿Cómo puede cambiar?
c. ¿Qué significado tiene esta suma en el contexto del plan **18.600 + 46.54.m = P**?
d. En la expresión 18.600 + 46.54.m= 20.927 ¿Qué indica 20.927?

2. Si el usuario paga $ 34.889 por el consumo de un mes.

a. ¿Cuántos minutos adicionales consumió? Escribe una expresión que permita visualizar este hecho.

b. Explica un procedimiento para encontrar el valor de **m** en esta expresión ¿Qué significa **m**?

18.600 + 46.54.m = P

3. Sin en un plan ideal solo cobran por el consumo (Sin cargo básico) y un usuario pago $ 20.700. ¿Cuántos minutos consumió?

46,54.m = 20.700

SITUACIÓN 3

Previo a la actividad se les pide a los estudiantes traer el recibo de los servicios públicos (acueducto y energía) de su casa.

ACTIVIDAD 1

1. Analizar en grupos de tres estudiantes los recibos traídos.

    a. ¿Qué información de la que encuentras en los recibos consideras es muy importante?

    b. Comparando los tres recibos, ¿Qué información coincide entre ellos? ¿Cuál no? Explique.

2. Centra tu atención en el referente **acueducto**.

    a. ¿Cuál es la unidad de medida usada para establecer el consumo de agua? ¿Qué significa?

    b. ¿Hay cargo fijo? ¿Cuál es el valor?

    c. ¿Cuál es la tarifa de acueducto por Metro cúbico?

3. ¿Cuál es el consumo del mes?

4. ¿Cuál fue el costo del servicio? ¿Cómo se calcula?

SITUACIÓN 3

Previo a la actividad se les pide a los estudiantes traer el recibo de los servicios públicos (acueducto y energía) de su casa.

ACTIVIDAD 2

1. Encuentra para los últimos seis consumos los costos del servicio. En una tabla representa tus respuestas.

2. ¿Cuáles son las cantidades que tuviste en cuenta para calcular el costo del servicio.

3. ¿Cuáles de esas cantidades son fijas y cuáles varían?

4. ¿De qué depende el costo del servicio?. Explica tu respuesta.

5. Escriba una fórmula que permita conocer el costo del servicio.

6. Si en un mes el costo fue de $24.155,12. ¿Cuántos metros cúbicos se consumieron.

7. ¿Cuál es el costo del servicio mínimo que se puede pagar?

Utilizando el componente de energía desarrolla una actividad para el grupo.

SITUACIÓN 4

Jaime y Viviana son dos niños de la institución educativa Monseñor Ramón Arcíla que se encuentran cursando los grados sexto y séptimo respectivamente.

Los dos debido a la falta de recursos económicos suficientes en su casa han decidido en sus ratos libres y los fines de semana dedicarse a vender **Bon Ice** en los semáforos y en Pance.

El distribuidor que les provee el refresco les entrega la unidad a $ 200 los cuales venden a $ 300 cuando los comercializan en los semáforos y a $ 400 cuando se trasladan a Pance.

Para de terminar las utilidades y establecerse metas los niños construye unas tablas de ventas semanales de acuerdo a sus posibilidades así:

JAIME

DIA	VENTA (META)	DINERO RECIBIDO	COSTO DE VENTA	UTILIDAD
LUNES	50	15.000		5.000
MARTES	50			
MIERCOLES	50			
JUEVES	50			
VIERNES	50			
SÁBADO	-----------			
DOMINGO	150			

VIVIANA

DIA	VENTA (META)	DINERO RECIBIDO	COSTO DE VENTA	UTILIDAD
LUNES	40	12000		4000
MARTES	40			
MIERCOLES	40			
JUEVES	40			
VIERNES	40			
SÁBADO	-----------			
DOMINGO	100			

ACTIVIDAD 1

1. Según la información de la actividad. ¿Qué magnitudes intervienen?

2. De los datos que me aportan las tablas. ¿Cuáles son constantes?

3. De los datos que me aportan las tablas. ¿Cuáles son variables?

4. Proponga su teoría respecto a la diferencia que se observa en las tablas hay entre Jaime y Viviana.

5. ¿Porqué cree usted los niños no trabajan los sábados?

6. Complete la información de las tablas.

7. ¿Cuál sería la utilidad semanal para Jaime?

8. ¿Cuál sería la utilidad semanal para Viviana?

9. ¿Cuántos Bon Ice tendría que vender Jaime el resto de la semana para sacar la utilidad del domingo?

10. ¿Cómo variaría cada una de las tablas en una semana con lunes festivo?

11. ¿Cómo variaría la tabla de cada uno en un domingo lluvioso?

12. Proponga una fórmula que permita conocer la utilidad diaria de cada niño con cualquier venta.

13. Proponga una fórmula que permita conocer la utilidad semanal de cada niño con cualquier venta.

6.4 ANÁLISIS DE ALGUNOS RESULTADOS

- **ACTIVIDAD 1**

POBLACIÓN: 55 Estudiantes de grado séptimo y octavo

PREGUNTAS 1 Y 2: Calcule los ingresos en tres semanas diferentes de la fotocopiadora COPIMAX. (Suponga cantidades diferentes para cada semana).
Calcule para la fotocopiadora PUNTOCOM los ingresos: Si en la primera semana sacan 300 copias, en la segunda 550 copias y en la tercera 1.050 copias.

RESPUESTAS	No de estudiantes	%
Tipo 1: Estudiantes que comprenden el enunciado y realizan cálculos para diferentes semanas en forma vertical u horizontal . Los resultados son correctos. (Algunos no manejan la igualdad como equivalencia)	**42**	**76**
Tipo 2: Estudiantes que interpretan que los ingresos de las semanas diferentes es el total de estos. Realizan los cálculos para cada caso en forma correcta, pero suman estos valores.	**5**	**10**
Tipo 3: Estudiantes que comprenden el enunciado pero no registran todas las operaciones para encontrar las respuestas.(omiten procedimientos). Sus respuestas son correctas	**8**	**14**

Con relación a estas preguntas se puede afirmar que los estudiantes comprenden el enunciado verbal y las relaciones entre los datos. Encuentran los cálculos de los ingresos para tres semanas diferentes en cada fotocopiadora. Sin embargo los registros de los procedimientos son diferentes y se notan algunas deficiencias en el manejo del signo igual (no se asume como equivalencia) y en el lenguaje sincopado (incluye registro numérico con verbal)

Suma 1: 200c x 40 = 8000 + cargo fijo = 13000

PREGUNTA No 3

Organice los datos enana tabla, según el número de copias que se sacaron en cinco semanas consecutivas para la fotocopiadora PUNTOCOM .Haga lo mismo para la fotocopiadora COPIMAX.

RESPUESTAS	**No de estudiantes**	**%**
Tipo 1: Estudiante que organiza la información en una tabla vertical con encabezado pero omite algún dato por lo tanto las respuestas no son correctas o están incompletas.	**36**	**65**
Tipo 2: Estudiantes que organizan la información en una tabla en una tabla vertical con encabezado pero incluyen procedimientos (100*40) dentro de la tabla, pero sus respuestas son correctas.	**5**	**10**
Tipo 3: Estudiantes que discriminan todos los datos y organizan la tabla en forma vertical u horizontal. Las respuestas son correctas.	**14**	**25**

La mayoría de los estudiantes pueden organizar la información en una tabla, es decir, tienen el conocimiento sobre qué y cómo se construye una tabla, sin embargo, los registros son diferentes, algunos OMITEN INFORMACIÓN.

PREGUNTAS 4 Y 5

RESPUESTAS	No de Estudiantes	%
Tipo 1: Identifican las cantidades constantes y variables pero no registran todo el procedimiento para calcular cualquier valor semanal (omiten cargo fijo).	**33**	**61**
Tipo 2: Identifican cantidades constantes y variables y expresan como calcular el valor de cualquier número de fotocopias .Respuesta correcta	**14**	**25**
Tipo 3: No identifican algunos de las clases de cantidades.	**8**	**14**

La mayoría de los estudiantes identifican que el cargo básico y el valor de las fotocopias son cantidades constantes y que varía el número de fotocopias. Sin embargo, no logran expresar que el precio total también es una cantidad variable.

Es de anotar que describen la manera de calcular el precio total para cualquier número de copias, algunos en forma correcta y otros omiten el precio fijo. Se nota dificultad en la forma de expresar verbalmente lo que el estudiante hace correctamente de manera numérica (no han omitido el cargo fijo)

PREGUNTAS 6 Y 7

RESPUESTAS	No de Estudiantes	%
Tipo 1: Estudiantes que asumen el mínimo de ingresos cuando no se sacan copias (copimax: cargo fijo , puntocom : cero) y el máximo de acuerdo a la realidad de la situación (depende de la capacidad ,del tiempo ,del número de copias)	**29**	**52**
Tipo 2: Estudiantes que asumen que el mínimo para ambos casos es cero aunque reconocen que si la fotocopiadora no se usa , se debe pagar $ 5000 en Copimax	**2**	**4**
Tipo 3: Estudiantes que asumen el mínimo de ingresos cuando no se sacan copias (copimax: cargo fijo , puntocom : cero) pero el máximo se asume matemáticamente(es infinito o X)	**7**	**13**
Tipo 4: Estudiantes que identifican algunos de los máximos y mínimos.	**17**	**31**

Se nota que algunos estudiantes asumen el mínimo como cero lo que parece indicar que no se ha construido la idea del cero relativo. Parece que no es una connotación del lenguaje natural “lo mínimo no es algo, es cero”. No hay descontextualización de algunos estudiantes a dejar los valores de la Tabla y pensar la situación por fuera de ésta, más general, y toman el máximo y el mínimo de los valores de la Tabla.

Lo anterior permite afirmar que para construir la idea de dominio y rango de una relación es necesario abarcar los valores particulares (de la tabla).

PREGUNTA 8

RESPUESTA	No de estudiantes	%
Tipo 1: Estudiantes que escriben una expresión algebraica para el cálculo del ingreso cuando se saca cualquier número de copias.	**12**	**22**
Tipo 2: Registran una manera de calcular los ingresos de las En forma sincopada .Por ejemplo P = 40Z y Z = N*40 + 5OOO	**20**	**36**
Tipo 3: No contestan o es no clara la respuesta.	**23**	**42**

Se observa que algunos estudiantes modelaron adecuadamente la situación mediante una expresión algebraica, para calcular el precio de cualquier número de fotocopias. Otro grupo de estudiantes utilizó un lenguaje sincopado y un número considerable no contestó o no es clara su respuesta. Lo que nos permite concluir que aún no hay suficientes elementos para que los estudiantes lleguen a la expresión algebraica

6.5 ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN

Es importante resaltar que todas las visitas de acompañamiento programadas se llevaron a cabo, a pesar de las grandes dificultades que se presentaron estos años lectivo escolar, los paros de administrativos y la situación de la educación pública en general. Sin embargo, no se alcanzó a implementar toda la secuencia didáctica, ni se analizaron todos los registros de los estudiantes. Lo anterior no obvia la importancia que este proceso ha significado para los estudiantes y los docentes involucrados en el proceso.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

NOMBRE Katharine Ceron Calao **GRADO 8:**___

ACTIVIDAD 1

En la Institución Las Américas tienen la necesidad de contratar un servicio de fotocopiadora y para ello luego de una licitación reciben dos ofertas:

* **Fotocopias Copimax**
Cobra un cargo fijo de $ 5.000 a la semana además de $ 40 por cada copia.
* **Fotocopias Puntocom**
No cobra cargo fijo pero cada fotocopia tiene un costo de $ 50

1. Calcule los ingresos en tres semanas diferentes de la fotocopiadora COPIMAX.(suponga cantidades diferentes para cada semana)

   5000 x 3 = 15.000
   1 Semana 250 x 40 = 10000
   2 Semana 50 x 40 = 2000
   3 Semana 800 x 40 = 32.000

   10.000 + 5.000 = 15.000
   2000 + 5.000 = 7.000
   32.000 + 5 = 37.000

2. Calcule para la fotocopiadora PUNTOCOM los ingresos : si en la primera semana sacan 300 copias, en la segunda 550 copias y en la tercera 1050 ?

   1 Semana 300 x 50 = 15.000,
   2 Semana 550 x 50 = 27.600,
   3 Semana 1050 x 50 = 52.500

3. Organice los datos en una tabla ,según el número de copias que se sacaron en cinco semanas consecutivas para la fotocopiadora PUNTOCOM . Haga lo mismo para la fotocopiadora COPIMAX

Empresa.	1 Semana	2 Semana	3 Semana	4 Semana	5 Semana
Copimax	10.000	2000	32000	3600	6000
Cantidad	40	40	40	40	40
Ventas	250	50	800	90	150
Cargo fijo	5000	5000	5000	5000	5000
Ingreso	15000	7000	37000	8600	11.000

Ingreso


08
23


19
25

CONCLUSIONES

- Los registros de los procedimientos realizados por los estudiantes permiten identificar maneras diferentes de encontrar respuesta y también las dificultades que presentan .Por ejemplo el manejo del signo igual, el diseño de tablas etc.

- Se reconoce que las situaciones ubicadas en contextos cotidianos, relacionados con experiencia de los alumnos permiten que estos signifiquen las relaciones, conceptos y saberes matemáticos que se pueden modelar a partir de ellas. Los estudiantes comprenden los enunciados, identifican con facilidad las magnitudes y cantidades, entre otros aspectos.

- Los estudiantes reconocen las relaciones variacionales entre magnitudes y cantidades que intervienen en una situación , pero al pasar del lenguaje verbal al simbólico presentan dificultades , por cual se hace necesario la intervención del docente , con preguntas , ejemplos , reconocimientos de unidades significativas para lograr lo propuesto .

- La representación tabular es potente a la hora de reconocer variaciones lineales discretas pero no facilita la comprensión de lo continuo. A su vez, las representaciones cartesianas permiten ver lo continuo pero esto puede ser obstáculo para reconocer puntos que representan variaciones que no se puedan unir dado que la situación está en un conjunto discreto.

- La mayoría de los procedimientos que utilizan los estudiantes son poco formales como el tanteo, ensayo o error y además se quedan en un mundo operacional, y de las cantidades conocidas (en el mundo de lo aritmético) . Lo que dificulta el paso a un mundo general de las relaciones como lo es el algebra.

En consecuencia podemos afirmar que:

A través de nuevas tecnologías (invirtiendo proceso tradicionales: concepto – aplicación), se logra una mejor comprensión y significación del concepto de ecuaciones lineales que potencian el pensamiento variacional, fortaleciendo un acercamiento de los estudiantes al algebra, pues esta se muestra más asequible y con sentido; presentándose una verdadera apropiación de elementos y procedimientos relacionados con los competencias académicas y el concepto de ecuación.

OTRAS CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LO DOCENTES

Se inicia un rompimiento del esquema tradicional en la manera como abordamos los conceptos del algebra presentando a nuestros estudiantes situaciones acordes a su realidad desde el cual se puede iniciar los estudios, lo que implica una constante preparación de los docentes y la creación y aplicación de nuevas propuestas educativas.

Anexo 2. Prueba diagnóstica: Las ecuaciones lineales en la escuela.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PASCUAL DE ANDAGOYA

PROYECTO:

LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA ESCUELA: DIFICULTADES Y TRATAMIENTO

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre: ________________________________Edad: ________

Grado: ___________

SESIÓN 1

Apreciado estudiante resuelva el siguiente cuestionario escribiendo paso a paso todos sus procedimientos, estrategias o métodos que le permitan llegar a la solución de cada una de las siguientes preguntas.

Pregunta 1:

Transforme las siguientes expresiones de tal manera que la incógnita tenga como coeficiente numérico el 1.

a) $2x$

b) $2/3\,x$

c) $-3x$

d) $-1/2\,x$

Pregunta 2:

Transformar las siguientes expresiones de tal manera que el término independiente sea cero.

a) $x + 3$
b) $x - 10$
c) $x + 1/2$
d) $x - 2/3$

Pregunta 3:

Escriba 4 ecuaciones diferentes que tengan la misma solución (ecuaciones equivalentes) que la ecuación dada.

$$3x - 5 = 5x + 1 \rightarrow 12 - x = -5x$$

Pregunta 4:

Si $x = 5$ es solución de una de las siguientes ecuaciones. Marque la que considere correcta.

a) $-2x = 10$
b) $x - 2 = 7$
c) $3x - 5 = 10$
d) $1/2\,x + 2 = 5/2$

Pregunta 5:

Escriba los pasos intermedios que usa para pasar de la ecuación 1 a la ecuación 2.

$$x + 3 = 7 \quad (1)$$
$$6 + 2x = 14 \quad (2)$$

Pregunta 6:

A continuación se presenta una ecuación resuelta por un estudiante de noveno grado:

Paso (0) $2x + 3 = 5 + x$
Paso (1) $2x + 3 - 3 = 5 + x$
Paso (2) $2x + 0 = 5 + x - \mathbf{3}$
Paso (3) $2x - x = 5 + x - x - 3$
Paso (4) $x = 5 + 0 - 3$
Paso (5) $x = 2$

En esta solución se presenta un error, determine en cuál de los pasos está el error y ¿Por qué?

Pregunta 7:

Si a un número le sumas su triple y la suma es 212 ¿Cuál es el número?

Pregunta 8:

Un frasco de jugo Tangelo dice que al producto se le disminuyo el 25% de azúcar, si el producto tiene actualmente 16 gramos de azúcar.

a) Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de azúcar actual.
b) ¿Cuántos gramos de azúcar tenía el producto antes de hacer el descuento?

Pregunta 9:

Carlos sabe que en su bolsillo tiene $\$2.100$ entre monedas de $\$50$ y $\$200$, sabe que cuenta con $8 monedas$ de $\$200$ pero no sabe la cantidad de monedas de $\$50$.

a) Plantee una expresión que de cuenta de la cantidad de monedas que tiene Carlos y el total de monedas que posee.
b) ¿Cuántas monedas de $\$50$ tiene Carlos?

Pregunta 10:

Una madre tiene $40\,años$ y su hijo 10 ¿Cuántos años ha de transcurrir para que la edad de la madre sea el triple de la edad de su hijo?

a) Plantee una ecuación que de cuenta de los años de la madre y del hijo.
b) ¿A cuántos años llega la madre y a cuántos llega el hijo?

Anexo 3. Imágenes de la prueba aplicada en una sesión.