UNA MIRADA SEMIÓTICA A LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE UNA INSTITUCIÓN RURAL EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN BAJO EL ESQUEMA DE ISOMORFISMO DE MEDIDA

Autor

VIVIANA ALEXANDRA MURCIA SEPULVEDA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2018

UNA MIRADA SEMIÓTICA A LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE UNA INSTITUCIÓN RURAL EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN BAJO EL ESQUEMA DE ISOMORFISMO DE MEDIDA

VIVIANA ALEXANDRA MURCIA SEPULVEDA (1429788)

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora:

Mg. JENNIFER SALGADO PIAMBA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2018

Resumen

En el presente trabajo se propuso realizar una descripción de los registros de representación utilizados por los estudiantes de grado sexto, los cuales, se obtuvieron a través de un experimento de enseñanza realizado por las investigadoras Ospina, M. & Salgado, J. (2016), en la Institución Educativa el Palmar – Dagua.

Dichos registros dieron cuenta del concepto de la operación multiplicación analizados a la luz de la teoría de los campos conceptuales, específicamente el campo conceptual de las estructuras multiplicativas bajo el esquema de isomorfismo de medida de Vergnaud (1991), y la teoría semiótico – cognitiva de Duval (2004), en los cuales se busco mirar el acercamiento que tuvieron los estudiantes al objeto matemático con las bases que obtuvieron en el experimento de enseñanza realizado por Ospina, M. & Salgado, J. (2016).

Palabras claves: Multiplicación, estructuras multiplicativas, isomorfismo de medidas, representaciones semióticas.

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Introducción

En el estudio de las matemáticas escolares, específicamente en el trabajo de la multiplicación se observa que desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos curriculares (MEN, 1998), el Ministerio de Educación Nacional (MEN) pretende que se abra la mirada a diferentes perspectivas de cómo se podría aprender significativamente este concepto, pues se observa que en muchas ocasiones el aprendizaje de dicho concepto se queda en la obtención de un primer acercamiento a tal conocimiento, que en este caso es la adición iterada, quedándose en el aprendizaje solo de un algoritmo o en aprender de memoria las tablas de multiplicar, sin poder potencializar otras miradas que de hecho son complementarias para poder asimilar el concepto de la multiplicación.

Este trabajo propone la teoría de los campos conceptuales, específicamente las estructuras multiplicativas[1] de Vergnaud (1991), como aquella que permite entender la multiplicación como relación cuaternaria, pues esta forma de trabajar es la introducción a la gran mayoría de problemas de tipo multiplicativo, asociados a los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad, función lineal, entre otros.

Por otro lado, es de interés analizar las producciones de los estudiantes de grado sexto de una escuela rural, en relación con algunos elementos de la teoría semiótica de Duval (2004), debido a que se constata que para que exista un desarrollo de la actividad matemática es

[1] Se entiende por estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren de una multiplicación o de una división o una combinación de tales operaciones. (Vergnaud, 1990, p. 141).

necesario que se haga uso de las representaciones semióticas, dado que los tratamientos matemáticos no se pueden efectuar de forma independiente a un sistema semiótico de representación. Así, el rastreo de los registros de representación producidos por parte de los estudiantes permite un acercamiento a las formas de aprehensión y comprensión de un objeto matemático dado.

Se pretende así un análisis de los registros semióticos usados por estudiantes de grado sexto de una institución rural, cuando estudian la multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida, los cuales se obtuvieron en un experimento de enseñanza realizado en la investigación de Ospina, M. & Salgado, J. (2016), titulada "La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva", dado que una de las líneas de indagación que dejó abierta este trabajo fue la posibilidad de hacer dicho análisis. Para esto se considera una metodología cualitativa, para observar las particularidades de cada individuo que se vio involucrado en dicho trabajo.

De manera puntual, la metodología se desarrolla en tres fases, las cuales procuran cumplir con los objetivos específicos planteados. En la primera fase se realiza un rastreo y condensación de elementos de la teoría de Vergnaud y Duval, que permitan ilustrar y analizar los diferentes tipos de representación en relación con los isomorfismos de medida[2], para la segunda fase se identifican los sistemas de representación presentes en las producciones presentados por los estudiantes; y para la tercera fase, se comparan los registros de los estudiantes con los elementos

[2] El isomorfismo de medidas es una relación que consiste en una proporción simple y directa entre dos espacios de medida.

teóricos rastreados en la primera fase y se analiza si son acordes los unos con los otros o si por el contrario se alejan de dichas teorías.

Este análisis mostró que a pesar de que los estudiantes no solucionaron los problemas de la misma manera que se propone en el capítulo II, si realizan un acercamiento y mejoramiento en todo el proceso cuando van adquiriendo nuevas estrategias para la solución de los problemas.

Para la presentación del trabajo realizado el documento se organizó en 4 capítulos. En el primero se realizó la descripción del problema, en el cual se esbozan los objetivos y la justificación al planteamiento del problema.

En el segundo capítulo se describen los elementos de las estructuras multiplicativas desde el punto de vista matemático, cognitivo y se hace un acercamiento a los sistemas de registros de representacion, y se plantea una metodología cognitiva, con todos estos elementos se pretendió realizar el análisis de las producciones de los estudiantes.

Para el tercer capítulo se realiza un análisis de las actividades propuestas en la experiencia de enseñanza propuesta por Ospina, M. & Salgado, J. (2016), desde una perspectiva cognitiva y semiótica; el cuatro, muestra los análisis de las producciones realizadas por los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa El Palmar, teniendo como base los análisis del capítilo anterior, y finalmenten en este capítulo, se exponen las conclusiones encontradas en el análisis.

CAPÍTULO I

1. DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Desde la Renovación Curricular colombiana del año 1975, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha mantenido el interés por que en las escuelas se desarrolle una formación adecuada a las necesidades sociales de los ciudadanos; en su más recientes propuestas se insiste en que los estudiantes avancen hacia la consolidación de su pensamiento matemático, aportando al incremento de la capacidad de conceptualizar la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias, todos estos que les ayuden afrontar los retos de la vida y el trabajo, MEN (1998).

De esta manera, se desarrolla en este trabajo una problemática concerniente a la conceptualización de las operaciones aritméticas, precisamente las operaciones multiplicativas, a las cuales se les dedican un buen tiempo en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, el aprendizaje de dicho concepto queda reducido a procesos algoritmicos, como se observa en diversas investigaciones (Obando, 2015; Botero, 2006) en las cuales se muestra que sigue habiendo una baja comprensión de la significación de dichas operaciones.

1.1.Planteamiento del Problema

En la escuela, generalmente se dedica gran tiempo al trabajo con las operaciones aritméticas básicas, en particular a las operaciones multiplicativas en los años de primaria y comienzos de bachillerato. Los Lineamientos Curriculares (1998) señalan que el trabajo escolar con la multiplicación puede favorecer además la solución de otros tipos de problemas asociados con este concepto. Pese a ello, se tiene que los estudiantes aprenden a multiplicar regularmente con la adición iterada, centrando la mirada en el tratamiento algorítmico el cual es un método para aprender a multiplicar que suministra de manera concreta ayuda para que los estudiantes puedan pensar la multiplicación (Botero, 2006).

Ahora bien, se expone en algunos estudios como los de Ospina & Salgado (2011) y Gómez & Valencia (2010) que dicho concepto se queda solo en dicho tratamiento algorítmico, en el cual se aprende a multiplicar por 1, 2, 3, … cifras o por 10, 100 o por 1000, etc. Para ser más específicos, el concepto de la operación multiplicación se queda en la memorización de las tablas de multiplicar, sin que esto se convierta en un aprendizaje significativo, pues este modelo proporciona una forma particular de pensar la multiplicación, siendo este el primer significado de dicho concepto, dejando de lado la relación con otros modelos que al trabajarlos muestran otros alcances y limitaciones.

Por tal motivo, es necesaria la exploración de diferentes modelos para que los estudiantes puedan construir el concepto de multiplicación y no lleguen a alguna generalización incorrecta de este concepto. Dicho de otra manera, como lo afirma el MEN (1998) “pensar la multiplicación como adición repetida puede conducir a generalizaciones incorrectas”, como por ejemplo que “la multiplicación siempre hace las cosas más grandes” (p. 52)

Como se menciona en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), el pensamiento multiplicativo se adquiere gradualmente, se va avanzando en la medida en que los alumnos tengan la oportunidad de pensar la multiplicación al usarla en contextos significativos (MEN, 1998), por este motivo se afirma que no solo el estudiante debe trabajar la adición iterada, sino también ocuparse de otros tipos de problemas asociados a la multiplicación como el factor multiplicante, la adición repetida, la razón y el producto cartesiano. En la escuela los estudiantes inician con las operaciones multiplicativas en grado tercero y sigue hasta grado quinto, aunque se debe señalar que la enseñanza de este concepto se extiende hasta finalizar la educación media (Obando, 2015).

El desarrollo de este concepto involucra aspectos relacionados con los pensamientos numérico, variacional y métrico, según la propuesta nacional. Los planes de estudio, en muchas ocasiones, se dan como un currículo fragmentado en el sentido de que no existe una relación notable entre los pensamientos nombrados en la forma tradicional de abordar la multiplicación en la escuela.

Aunque, se han desarrollado algunos trabajos que muestran la importancia de la transversalidad entre estos pensamientos como lo sugiere Obando (2015), Botero (2010) y el MEN (2006), aún es necesario profundizar en propuestas que permitan dilucidar de manera más clara elementos a considerar en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

A pesar de que se han realizado varios estudios y sugerencias teóricas sobre la necesidad e importancia de aprender la multiplicación desde diferentes perspectivas, existe una diferencia con los resultados obtenidos por los estudiantes en algunas pruebas realizadas en el país para medir el desempeño académico de los estudiantes en matemáticas: las pruebas SABER nacional y la evaluación TIMSS a nivel internacional.

Por un lado, los resultados de las pruebas realizadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) en la prueba SABER[3] muestran para los grados tercero y quinto, los puntajes oscilan entre 297 y 300 en el área de matemáticas, conociendo que los puntajes que se manejaron estaban en una escala entre 100 y 500 puntos, se puede percibir que los estudiantes estuvieron por debajo de dicha escala.

Además, en grado tercero el 24% de los estudiantes se encuentran con un desempeño sobresaliente o nivel avanzado; el 27% tiene un desempeño adecuado en las competencias exigidas para el área o nivel satisfactorio; un 29% de los estudiantes se encuentran en un desempeño mínimo exigibles para el área o nivel mínimo; y el 20% no supera las preguntas de menor complejidad o nivel insuficiente. En lo que se refiere al grado quinto, se tiene un promedio de 12% para el nivel avanzado; un 19.75% para el nivel satisfactorio; 30.25% para el nivel mínimo; y para el nivel insuficiente se tiene un 38%. (ICFES, 2016).

En particular, en la Institución Educativa El Palmar, los resultados obtenidos en estas pruebas a nivel nacional para grado quinto en el año 2014, fueron en su gran mayoría de puntajes por debajo del minimo, pocos estudiantes se hubicaron en los desempeños satisfactorio o avanzado, por otra parte en el mismo análisis de resultados de ese año se observo que las competencias en lo que consierne al pensamiento numérico no tuvo fortalezas, se mantuvo y no se avanzo en esta competencia Ospina, M. & Salgado, J. (2016).

[3] Informe de los resultados a nivel nacional (2009 – 2014), de la prueba SABER en los grados 3, 5 y 9, aplicados en las áreas de matemáticas.

Además, los estudiantes muestran mejores resultados en los algoritmos de la suma y la multiplicación, lo que no sucede cuando los estudiantes se ven enfrentados a la solución de problemas complejos; los anteriores resultados se podrían pensar que en la escuela se debería enfatizar en la solución de otro tipo de problemas complejos que no solo dependan de la suma y multiplicación de algoritmos.

En la evaluación TIMSS[4], se observan situaciones similares; por ejemplo, para grado cuarto Colombia obtuvo un promedio de 355 puntos, el promedio de la evaluación TIMSS fue de 500 puntos, comparando estos promedios se da cuenta de que las cifras son muy preocupantes, pues el 69% de los estudiantes colombianos mostró logros inferiores, el 22% se ubicó en el nivel bajo, el 7% en el nivel medio, 2% en el alto y ninguno en el avanzado; como se ha dicho casi dos terceras partes de los estudiantes colombianos muestran resultados inferiores, esto quiere decir, que según las pruebas TIMSS Colombia se encuentra con un conocimiento matemático inferior.

A pesar del gran tiempo que se le dedica a las operaciones multiplicativas en la escuela se observa, según lo presentado anteriormente en pruebas tanto nacionales como internacionales, que se necesita profundizar en dicho concepto, e incorporar algunas perspectivas que tal vez no se hayan tomado en cuenta; incluso algunas de estas ya están planteadas en los principales referentes que se proponen en MEN (1998, 2006), pues se observa que hay una diferencia entre lo planteado por el MEN y lo que realmente se aprende.

[4] El Estudio de las Tendencias en Matemáticas y ciencias (Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS), evaluación en la que participo Colombia en el año 2007.

Un trabajo potente que permite abordar la multiplicación desde otras perspectivas, y de acuerdo con las exigencias dadas por el MEN, es la de los Campos Conceptuales Multiplicativos de Vergnaud (1991), dado que esta tiene como propósito proporcionar un marco coherente y algunos principios base para el estudio del desarrollo y aprendizaje de competencias complejas de las ciencias y las técnicas, no solo reduciendo a una definición cada concepto, sino haciendo que adquiera sentido[5] a través de situaciones y problemas. De esta manera, los campos conceptuales multiplicativos brindan una amplia variedad de situaciones y problemas de tipo multiplicativo para abordar en la escuela.

Como lo considera Botero (2005), "es necesario generar diferentes formas de conceptualizar las estructuras multiplicativas que permitan desarrollarlas a partir de los modelos que involucren la covariación y la proporcionalidad" (p. 45). Con esto se quiere decir que la construcción de las estructuras multiplicativas se debe hacer teniendo en cuenta la relación entre dos o cuatro magnitudes, según sea una razón o proporción, respectivamente; y la dependencia entre dichas magnitudes, de manera que si una magnitud aumenta o disminuye la otra también aumenta o disminuye.

En vista de lo anterior, la propuesta en la que se quiere centrar este trabajo de grado es en la propuesta que expone Vergnaud, (1991, 1994), sobre la teoría de los campos conceptuales y en particular de las estructuras multiplicativas. Se considera el campo conceptual de las estructuras multiplicativas como un conjunto de situaciones cuya solución implica una o varias

[5] "A pesar de que son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, este sentido no está en ellas. Son los esquemas que una situación o un significante evoca en el individuo lo que constituye el sentido de esa situación o significante" Vergnaud (1991).

multiplicaciones o divisiones (Vergnaud, 1991); en la Insturución Educativa El Palmar, por lo general, se pueden trabajar con un grupo de conceptos y teoremas que permiten analizar dichas situaciones, como lo son las razones, proporciones, función lineal, entre otros.

Así, se considera la multiplicación no solo como una relación entre tres términos, sino que muestra la existencia de un cuarto término de forma concreta. Es decir, cuando existe un cuarto término, o la multiplicación es vista como relación cuaternaria, significa que la multiplicación se estudia bajo un esquema básico llamado isomorfismo de medida, el cual es una estructura que establece relaciones de covariación entre cuatro cantidades, llegando a la necesidad de revisar cómo varía una cantidad respecto a la otra (Ospina & Salgado, 2016); en otras palabras, cuando existe una relación cuaternaria se considera la relación de covariación entre cuatro cantidades, un caso particular de esta relación es la proporcionalidad directa.

Esta forma de ver la multiplicación muestra que es un concepto transversal, tanto en algunos pensamientos como en varios conceptos que se aprenden en la escuela, pero sin que se vea la relación que puede existir entre ellos, de aquí que para muchos estudiantes en ocasiones las matemáticas tengan poco sentido o sean poco significativas.

Con esta teoría de los campos conceptuales, en especial con las estructuras multiplicativas, se puede ayudar a que el concepto de la operación multiplicación sea más significativo y comprendido por los estudiantes, al ver la relación entre conceptos y conocimientos que responden a problemas prácticos y teóricos que se ha planteado la humanidad, esto da sentido y muestra que las matemáticas no estás desarticuladas, lo cual puede ayudar al estudiante a crear esquemas que le permitan resolver situaciones de una mayor complejidad.

En la teoría de Vergnaud (1991) se observa que el aprendizaje va a ser más consiente, es decir el estudiante va a adquirir la capacidad de identificar qué le están preguntando y qué debe responder en diferentes tareas, dado que, esta teoría ayuda a identificar y designar las relaciones, propiedades o teoremas que se usaran para el razonamiento, y así anticipar o planificar los pasos a seguir para hallar la solución más acertada, como lo afirma, Vergnaud:

> En la teoría de los campos conceptuales la función del lenguaje es triple, ayuda la designación y por tanto a la identificación de los invariantes: objetos, propiedades, relaciones, teoremas; ayuda en el razonamiento y la inferencia; ayuda a la anticipación de los efectos y de los fines, a la planificación, y al control de la acción. (p. 15)

En otras palabras, con la enseñanza de la estructura multiplicativa como isomorfismo de medida se establecen relaciones de covariación entre cuatro cantidades que combinan magnitudes diferentes, además es posible observar cómo se relacionan dichas magnitudes y cuál es la naturaleza de las cantidades que surgen a partir de la combinación de magnitudes. Esto sugiere un análisis de lo que entienden los estudiantes sobre la operación multiplicación, y sobre todo un análisis de los registros semióticos de representación que emplean y de los tratamientos posibles.

De esta manera se establece el mecanismo de análisis con base en las diferentes producciones escritas de las tareas desarrolladas por los estudiantes, pues por medio de estas es posible efectuar el rastreo de los diferentes registros semióticos de representación empleados cuando resuelven situaciones y problemas de tipo multiplicativo, y de esta forma se podrá ver cuál ha sido el conocimiento que el estudiante ha adquirido

Por consiguiente, interesa hacer un rastreo de las posibles respuestas encontradas en las producciones de los estudiantes a partir de la realización de diferentes tareas relacionadas con el aprendizaje de la multiplicación como isomorfismo de medida, considerando que, en el trabajo Ospina & Salgado (2016) se deja de manifiesto que se podría realizar un análisis de los registros semióticos de representación empleados por los estudiantes, pues este “contempla el despliegue de la actividad matemática a través de los registros escritos de representación y cómo estos contemplan la comprensión matemática de los estudiantes” (Ospina & Salgado, 2016, p. 148), dado que para que exista una comprensión del conocimiento es necesario de más de un sistema de representación.

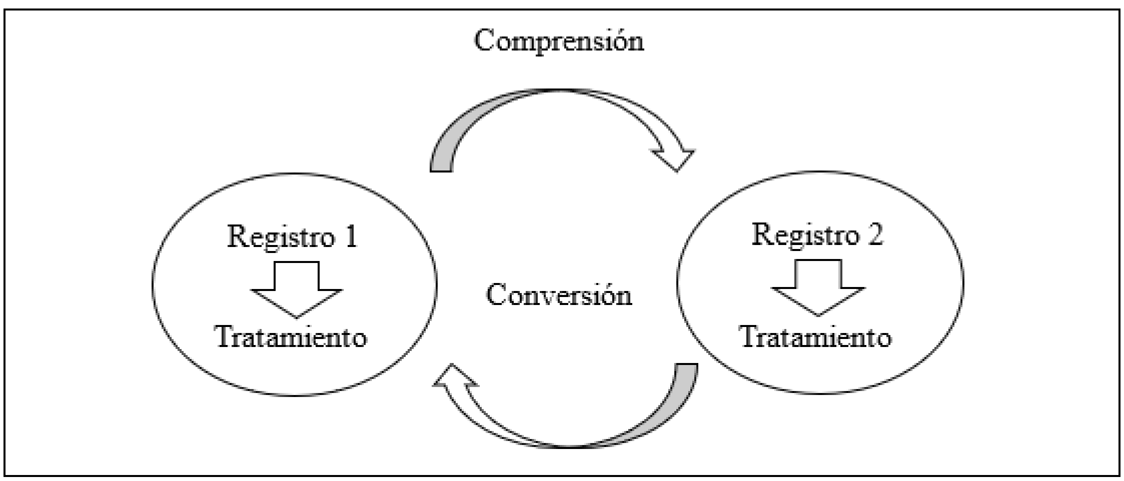


Figura 1: Relación de las actividades cognitivas de Duval (2004). Elaboración propia

Dado lo anterior, se analizarán los registros realizados por los estudiantes que participaron en la investigación ya nombrada, desarrollados en la Institución Educativa El Palmar del municipio de Dagua, institución rural que cuenta con un enfoque académico agropecuario, en el grado sexto de la educación básica secundaria.

Haciendo alusión a la anterior problemática, se quiere dar solución al siguiente interrogante:

¿De qué manera los registros semióticos de representación usados por estudiantes de grado sexto de una institución rural permiten acercase a la actividad matemática que realizan cuando resuelven tareas de multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

- Analizar los registros semióticos de representación usados por estudiantes de grado sexto de una institución rural, para conocer de qué manera permiten acercarse a la actividad matemática cuando resuelven tareas de multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Categorizar las formas de solución propuestas por los estudiantes, a la luz de las situaciones de tipo multiplicativo propuesto por Vergnaud, bajo el esquema de isomorfismo de medida.

- Examinar los tratamientos realizados por los estudiantes de grado sexto de una Institución rural bajo el esquema de isomorfismo de medida.

- Identificar las diferentes potencialidades de los registros de representación semiótica hallados bajo la luz de las situaciones de tipo multiplicativo propuesto por Vergnaud con los registros de representación semiótica mostrados por los estudiantes.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Teniendo en cuenta que la multiplicación es un tema transversal en el estudio de las matemáticas, y que es una operación básica en la enseñanza de las mismas pues potencia el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, se hace necesario presentar para efectos del trabajo tres aspectos referentes fundamentales: la postura curricular para la enseñanza de este concepto desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), también se consideran los análisis de algunas investigaciones sobre cómo es el tratamiento que se le da a la multiplicación en los libros de texto, y para finalizar se contempla el papel de los registros semióticos de representación en el aprendizaje de este concepto.

1.3.1. Aproximación Curricular

En la propuesta de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), se ha buscado trabajar hacia una estructura curricular en la escuela considerando los siguientes aspectos: las situaciones problema, los conocimientos básicos reflejados en los distintos pensamientos y sistemas matemáticos, los procesos generales como lo son la resolución y planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación y la modelación; por último, el contexto.

Ahora bien, entre los conocimientos básicos se centrará inicialmente la mirada en el pensamiento numérico y sistemas numéricos; este desarrolla el conocimiento matemático en los estudiantes cuando realizan y usan métodos de cálculo escrito y mental, estimación, y también en la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, y determinar si la solución es o no razonable. De esta manera se quiere trabajar en la comprensión del concepto de las operaciones, aludiendo a la multiplicación, dado que la multiplicación es una de las operaciones fundamentales que forma parte importante del currículo en la educación básica, pues una de las propuestas es que los estudiantes puedan reconocer el significado de la operación en diferentes situaciones (MEN, 1998, 2006).

Se tiene que en las directrices curriculares nacionales la comprensión de este concepto puede ser establecido en el estudiante desde diferentes modelos o interpretaciones existentes, según el MEN (1998) pueden ser: factor multiplicante, adición repetida, razón y producto cartesiano. Todos importantes pero en muchas ocasiones no se da la relevancia que requieren y se reduce la enseñanza de la multiplicación a un algoritmo o a la adiciona iterada, sin llegar a comprender el significado del concepto.

Dicho de otra manera, modelar la multiplicación como una adición iterada ayuda a los estudiantes a tener un primer acercamiento a la operación multiplicación, pero es importante no solo aprender la operación multiplicación como suma iterada, pues al explorar varios modelos se amplía la forma de ver dicho concepto y así observar las posibles fortalezas y dificultades de cada modelo.

A continuación, se observa un ejemplo de la adición repetida:

Juan compró 3 carritos cada día durante 4 días. ¿Cuántos carritos tiene en total?

$$\underbrace{3\ carritos + 3\ carritos + 3\ carritos + 3\ carritos}_{4\ días} = 12\ carritos$$

$$3\ x\ 4 = 12$$

Figura 2:Ejemplo de adición repetida, tomado de los Lineamientos Curriculares, Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 51

Ahora bien, el hecho de aprender el algoritmo de la multiplicación es también importante, pero como se dijo anteriormente es una parte para empezar a entender el significado de la operación multiplicación, además se debe aprender de manera consiente, pues se ha observado en algunas investigaciones (Castro, E. Rico, L & Castro, E. 1995) que se enseña el algoritmo, pero cuando se les pide a los estudiantes sustentarlo, en ocasiones, se les dificulta dar respuesta.

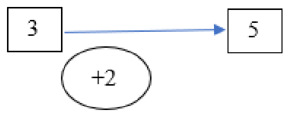
Además, es importante tener en cuenta los argumentos de Vergnaud cuando afirma que:

> El análisis de las estructuras multiplicativas es profundamente diferente de las estructuras aditivas. Las relaciones de base más simples no son ternarias sino cuaternarias, porque los problemas más simples de multiplicación y de división implican la proporción simple de dos variables una en relación a la otra (1991, p. 12).

Lo anterior se refiere que el tratamiento que requieren las estructuras multiplicativas es diferente al tratamiento que demandan las estructuras aditivas, esto significa que en las estructuras aditivas las situaciones consideran una relación entre los espacios de la misma medida, es decir, que se trabaja con las mismas magnitudes, en cambio las estructuras multiplicativas presentan diferentes tipos de problemas, en los cuales se relacionan cantidades que combinan magnitudes. En la siguiente ilustración se observa la diferencia:

Ejemplo de adición por comparación:

Juan tiene 3 carritos. María tiene 2 carritos más que Juan. ¿Cuántos carritos tiene maría?



En este caso las magnitudes que se utilizan son las mismas.

Ejemplo de multiplicación por producto cartesiano:

Un carrito de juguete se fabrica en 3 tamaños distintos y en cuatro colores diferentes. ¿Cuántos carritos distintos se pueden comprar?

	Color 1	Color 2	Color 3	Color 4
Tam 1	T1 C1	T1 C2	T1 C3	T1 C4
Tam 2	T2 C1	T2 C2	T2 C3	T2 C4
Tam 3	T3 C1	T3 C2	T3 C3	T3 C4

En este caso las magnitudes utilizadas son dos diferentes color y tamaño.

Figura 3: Ejemplos tomados de los Lineamientos Curriculares, Ministerio de Educaión Nacional(1998)

Por otra parte, es importante mencionar que para desarrollar el pensamiento multiplicativo se debe tener en cuenta también los pensamientos variacional y métrico, dado que para aprender es importante hacerlo de forma integral, estudiando los conceptos desde varias perspectivas.

En cuanto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, el MEN (1988) involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas, así que, se permite identificar algunos núcleos conceptuales, como lo son: continuo numérico, los números reales, los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad; la función como dependencia y modelos de función; las magnitudes; el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo; modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial sentido.

Acorde con lo anterior, este pensamiento involucra covariación cuando habla de funciones, proporciones, además incluye modelos de magnitudes y la relación entre ellas, esto muestra la importancia y trazabilidad que tiene con el pensamiento métrico, por ejemplo. Además, es importante observar que este pensamiento se relaciona en gran medida con las estructuras multiplicativas de Vergnaud, pues, cuando se quiere representar una función lineal en una tabla se asemeja a los esquemas de isomorfismos de medida, que se tratan en el desarrollo de situaciones en la teoría de los campos conceptuales.

Un ejemplo de lo dicho anteriormente se esboza en la siguiente ilustración:

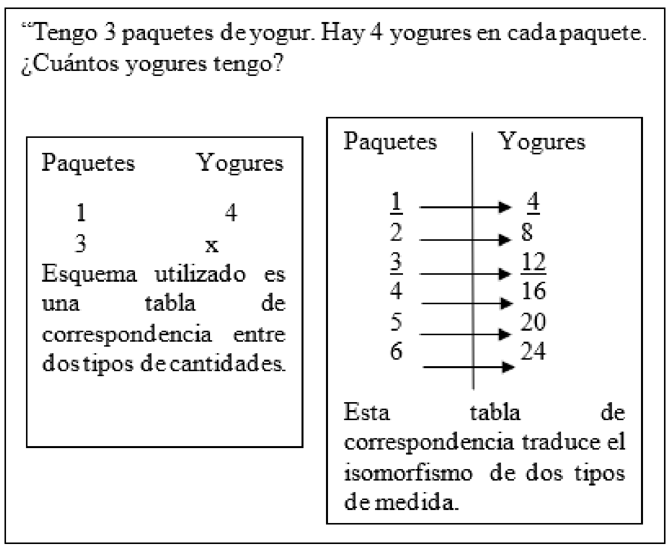


Figura 4: Ejemplo de isomorfismo de medida. Tomado de Vergnaud (1991)

Con respecto al pensamiento métrico y los sistemas de medidas, según el MEN (1998):

> Existe mucha desatención con el proceso de medir dejándose a la mera asignación numérica, por otro lado descuidando el desarrollo histórico de la medición, pasando por alto algunos procesos y conceptos que deben desarrollar los estudiantes, que se proponen para los sistemas métricos, los cuales son: la construcción de los conceptos de cada magnitud; la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes; la

> estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto"; la apreciación del rango de magnitudes; la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos; la diferencia entre la unidad y el patrón de medición; la asignación numérica; y el papel del trasfondo social de la medición. (p. 62)

De acuerdo con lo anterior, como lo puntualiza Vergnaud (citado por Ospina, M. A. & Salgado, J., 2016), "la multiplicación vista como un isomorfismo de medidas permite el reconocimiento de los espacios de medida, la variación inmersa en dichos espacios y las propiedades de linealidad que fundamentan las relaciones establecidas" (p. 21). En otras palabras, si se trabajara en la escuela una perspectiva como la de Vergnaud se podría mostrar que en la operación multiplicación existe, o se puede observar, la relación entre algunas temáticas como lo son contrastar y operar magnitudes, establecer covariaciones entre espacios de medida, entre otros, así que el aprendizaje podría ser más coherente.

Cabe recalcar la importancia de la articulación que se puede observar en las estructuras multiplicativas, pues el trabajo que propone Vergnaud desde el modelo de isomorfismo de medida muestra los alcances de este concepto, dejando claro que si se aprende desde los primeros años de escolaridad se observaría con más claridad la conexión entre la multiplicación con otros conceptos que se trabajaran en años superiores como lo son la proporcionalidad, la función lineal, y posiblemente otros temas de otras ciencias.

Dicho lo anterior, se tiene la necesidad de que el aprendizaje sea transversal para que se note mayor comprensión, y que los estudiantes adquieran estos conceptos de manera consciente en la primera etapa de escolaridad, para que sean una base sólida en los próximos años en los que se trabajan conceptos más abstractos pero los cuales necesitan del concepto de la multiplicación, por tal motivo, el conocimiento no se debe aprender de manera fragmentada.

Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) muestran que se exigen una coherencia vertical y horizontal, dada la complejidad conceptual y gradualidad del aprendizaje de las matemáticas (MEN, 2006), la primera tiene que ver con la relación que existe entre los estándares en diferentes grados de escolaridad,en un mismo pensamiento; la segunda se refiere a la relación que se observa entre los diferentes pensamientos en un ciclo de escolaridad.

Por el interés de este trabajo se listarán los estándares básicos de competencias para el grado sexto, mostrando la coherencia horizontal que hay entre los pensamientos numérico, métrico y variacional relativos al concepto de la multiplicación, así.

Tabla 1: Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, relativos a la multiplicación en el ciclo de 6° a 7°, con tres pensamientos.

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS			
	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	*Pensamiento métrico y sistemas de medidas*	*Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos*
Sexto a séptimo	• Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de igualdad, las de distintas formas de desigualdad y la de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. • Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa	• Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Nota: Tomado de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas,Ministerio de Educación Nacional, 2006.

1.3.2. Los Libros de Texto

Una preocupación es inminente cuando se observa que en los libros de texto se encuentran implícitos los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que son la propuesta mínima que se pide para la educación colombiana, ya que los textos se constituyen en referentesde importantes para los profesores, pues sirven de guía y ayuda para el trabajo en el aula (Arbeláez, Arce & Guacaneme. 1999).

Esto quiere decir que es de mucha importancia que se exponga explícitamente, o que el profesor muestre o pueda ser consciente, que en los libros de texto se vean reflejen los parámetros que se han dado en los documentos que el MEN ha proporcionado, para así alcanzar las metas propuestas, y poder obtener una mejor calidad de educación.

A pesar de los esfuerzos que hace el Ministerio de Educación por una mejora en la calidad de educación, algunas investigaciones (Ospina, M. & Salgado, J, 2011, Valencia, J. & Gómez, D. 2010) exponen que sobre los libros de texto el tratamiento que se le realiza a la multiplicación está a veces incompleto, pues en los libros de texto se observa que la multiplicación se aprende con la adición iterada; los tratamientos que tienen relación con el factor multiplicante, razón y producto cartesiano no se muestran explícitamente, quedándose solo con la adición repetida, que es importante, pero solo es el inicio para trabajar el concepto de la multiplicación.

Además, el trabajo de Ospina, M. & Salgado, J, (2011) da cuenta de la información encontrada en los libros de texto, mostrando que prevalece la enseñanza de la multiplicación a partir de algoritmos, trabajando problemas cuya estructura consiste la composición de dos espacios de medidas en un tercero, sin reflexionar en las cantidades y espacios de medida involucrados en la situación.

En el trabajo de grado de Valencia, J. & Gómez, D. (2010) se observa detalladamente el análisis de algunos libros de texto, explicando el modo de cómo fue abordada la multiplicación, la cual fue vista como una suma abreviada de sumandos iguales, dejando de lado las diferentes formas de interpretar dicho concepto como, por ejemplo, el producto de medidas e isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1991).

Es decir, solo se opera con números y se deja de lado la relación entre las magnitudes, a pesar de saber que puede resultar más fructífero trabajar la relación entre magnitudes, pues esté método potencializa en los estudiantes el desarrollo del razonamiento proporcional desde los primeros años de escolaridad. (Valencia, J & Gómez, D. 2010)

Las investigaciones mencionadas muestran que los libros de texto ponen de manifiesto que dicho conocimiento no tiene en cuenta las reflexiones alrededor del concepto de la multiplicación, además si el profesor tiene el libro de texto como referente principal, esto puede llevar a que el aprendizaje del concepto sea de una forma fragmentada, sin mostrar la relación que existe con otros conceptos.

1.3.3. Un acercamiento semiótico

Con respecto a la acción de comunicar los saberes, el aprendizaje de las matemáticas requiere del lenguaje natural, pero también y sobre todo de la utilización de sistemas de representación distintos.

Ahora bien, se podría pensar en dos tipos de representación, las mentales las cuales “permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible” Duval (2004, p. 36), con esto se puede decir que dichas representaciones son las ideas, las nociones o conceptos que refleja el objeto matemático.

Por otro lado, se tienen las representaciones semióticas que son las que “permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…)” Duval (2004, p. 35), estas al igual que las representaciones mentales evocan un objeto en su ausencia, a su vez, son representaciones que al ser exteriorizadas comunican conocimiento y cumplen con otras funciones cognitivas como objetivación y la función de tratamiento.

La función de objetivación corresponde al descubrimiento del conocimiento que hasta entonces no conocía de manera consciente[6], las cuales se pueden observar en las representaciones mentales y en las semióticas; función de tratamiento está ligada al uso de un sistema semiótico, es una transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema. Duval (2004, p. 44)

De esta manera, el análisis que se propuso está basado en las representaciones semióticas, dado que, "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma." (Duval, 2004, p.15), pues con estas representaciones el estudiante ilustra cómo aborda cada tarea[7] y comunica o expresa el conocimiento que ha aprendido, y así analizar su razonamiento.

Para dicho análisis, es imperativo tener en cuenta la aproximación de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas, como lo afirma Duval: "no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación." (2004, p. 25), dado que permite que los estudiantes puedan mostrar lo que han aprendido y cómo lo están comprendiendo.

Lo descrito acerca del planteamiento del problema, los modos de proceder vistos como objetivos que permitieron dar el paso a paso para realizar este trabajo, las orientaciones curriculares y semioticas, se constituyo en el sustento teorico, conceptal y metodológico para

[6] Las representaciones conscientes son aquellas que presentan un carácter intencional, visto desde el punto de vista cognitivo, pues permite tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. Duval (2004, p. 33)

[7] Tareas adaptadas, construidas y aplicadas en el experimento de enseñanza de la investigación: *La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva*. de Ospina, M. & Salgado, J, (2016).

analizar, entender y sustentar los resultados, dan pie para en el siguiente capítulo hacer una descripción mas detallada de estos componentes.

CAPÍTULO II

2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este apartado se exponen tres referentes que darán a conocer las posturas teóricas con las cuales será posible realizar el respectivo rastreo y comparación de las producciones escritas de los estudiantes, con los cuales se identifican las diferentes concepciones que tienen los estudiantes acerca del concepto de las operaciones multiplicativas.

2.1. Definiciones matemáticas con respecto a la multiplicación

La multiplicación es un concepto que se enmarca en la mayor parte de las actividades diarias de la humanidad, por ejemplo en la vida personal y profesional, requiere el uso de representaciones numéricas, simbólicas, figurales, etc.

Desde la perspectiva algebraica, la multiplicación es vista como una operación binaria de $R \; x \; R \; \rightarrow R$. Donde cualquier pareja $(a, b) \in R \; x \; R \; \exists \; c \; tal \; que \; c = a \; \cdot b, con \; c \; \in R$ (Grossman, S & Flores, J. 2012). Significa que, si se tiene cualquier par de números que pertenecen al conjunto de los números reales, su multiplicación dará como resultado otro número real. Pero esta es una definición que relaciona tres cantidades, y como se viene diciendo es importante implementar otra cantidad, para así poder abarcar relaciones multiplicativas que dan sentido y significado a la operación.

Ahora bien, las estructuras multiplicativas se clasifican según el tipo de relación, que puede ser estático o dinámico; o según el tipo de magnitud, las cuales pueden ser discretas o continuas; este trabajo se centra en las dinámicas y continuas, de la cuales se obtienen los isomorfismos de medida, la proporcionalidad compuesta y la proporcionalidad inversa; por lo que el interés está en los isomorfismos de medida, que trabajan tres conceptos los cuales son: multiplicación, división y proporcionalidad directa, que llevan a su vez a la función lineal, desarrollando la función lineal, con razones, proporciones o proporcionalidades. (Obando, 2015, p. 24)

De acuerdo con lo anterior, y encaminando el concepto de multiplicación, se analizaron las tareas, en las cuales se tendrán dos casos, el primero es cuando dan a conocer el valor de la unidad y, el segundo es en la proporcionalidad directa cuando no se conoce el valor de la unidad; de lo anterior se puede decir que centro la mirada en la perspectiva lineal, pues es la forma que relaciona mayor cantidad de conceptos, de aquí que se vea reflejada también mayor relación entre los pensamientos métrico, numérico y variacional.

A continuación, se ilustrará la multiplicación como relación lineal haciendo alusión a las propiedades de transformación lineal. Sean $E_1 \, y \, E_2$ espacios de medida, una transformación lineal en estos espacios es una función lineal que asigna a cada cantidad $x \in E_1$ una imagen única $f(x) \in E_2$, para cada $x \; e \; y \in E_1$ y cada escalar φ que pertenece a R, se cumple que:

i. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Homogeneidad con respecto a la suma

ii. $\omega f(x) = f(\omega x)$ Producto por escalar

En estas propiedades se tiene la operación multiplicación, como lo menciona Ospina, M & Salgado:

> Estas propiedades que caracterizan la transformación lineal están inmersas en el trabajo con la multiplicación, pues ésta involucra espacios de medida, la covariación entre los mismos, la identificación de cantidades de magnitud y por ende relaciones funcionales. La multiplicación asumida desde este enfoque permite establecer relaciones cuaternarias entre los dos espacios de medida involucrados, identificar el tipo de las cantidades y unidades de medida que se usan, relaciones y trabajo con otros conceptos relativos a la proporcionalidad. (2016, p. 46)

En este trabajo se realizó un análisis de las producciones de los estudiantes cuando trabajaron el concepto de la multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida de las estructuras multiplicativas de Vergnaud, con la relación cuaternaria en la multiplicación. Dichas relaciones que se presentan desde la teoría de Vergnaud sobre las estructuras multiplicativas se desarrollaron a continuación.

2.2. La multiplicación desde una perspectiva cognitiva

En este referente se presentan dos modelos explicativos, los problemas de tipo multiplicativo presentes en las estructuras multiplicativas de Vergnaud (1991), los cuales muestran la multiplicación como una operación en la cual intervienen cuatro cantidades, relación cuaternaria.

Por otro lado, se tendrá la clasificación de la naturaleza de cantidades propuestas por Schwartz (1998), que aparecen en la estructura de los problemas de tipo multiplicativo, dada la importancia que tienen las unidades de medida en el aprendizaje de este concepto.

2.2.1. Campos Conceptuales

Lo anterior conduce a fijarse en modelos que pretenden atender la necesidad de entender el concepto de la multiplicación, teniendo en cuenta la complejidad del concepto, sin dejar de lado la importancia de la conexión que existe entre este concepto con otros del currículo en matemáticas, por tal motivo el presente trabajo aborda la postura de Gérard Vergnaud sobre las estructuras multiplicativas, particularmente en el modelo de isomorfismo de medidas.

Ahora bien, la teoría de los campos conceptuales permite analizar la relación entre conceptos y conocimientos explícitos relacionados de tal forma que permitan llegar a un aprendizaje, Vergnaud piensa un concepto como una tripleta de tres conjuntos C (S, I, R), considerando a S como el conjunto de situaciones[8] que dan sentido[9] al concepto (la referencia), I es el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado), y R es el conjunto de representaciones simbólicas que pueden ser usadas para enfrentar esas invariantes (el significante). (Vergnaud, 1990, p.140)

Dicho de otra manera, los campos conceptuales son considerados como un conjunto de situaciones, para el caso de las estructuras multiplicativas, que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones que ayudaran a encontrar la solución a dicha situación, pero usando esquemas evocados del mismo estudiante, que ayudaran a dar sentido a dicha situación.

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones como se había dicho, y el conjunto de conceptos y teoremas que permitan analizar estas situaciones: proporción

[8] “El concepto de situación no tiene el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea”. (Vergnaud, 1990, p. 141).

[9] “El sentido es una relación del sujeto a las situaciones y a los significantes” (Vergnaud, 1990, p. 148) “Son los esquemas que una situación o un significante evoca en el individuo lo que constituye el sentido de esa situación o significante” (Vergnaud, 1990, p. 137).

simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, numera racional, múltiplo y divisor, etc. Vergnaud (1990, p. 142)

Por tanto, esta teoría puede dar cuenta de la transversalidad que se piden trabajar en los Lineamientos (1998) y Estándares (2006) propuestos por el MEN, en consecuencia, se propone hacer un análisis de lo que aprenden los estudiantes sobre la multiplicación, identificando las representaciones que el estudiante ha construido, de acuerdo con la experiencia que ha tenido en relación con este concepto. Estos aprendizajes se pueden reconocer por medio de los registros semióticos de representación.

Hay que mencionar, además que la multiplicación, en esta teoría, se estudia bajo dos esquemas básicos los isomorfismos de medida y el producto de medidas.

Los isomorfismos de medida se caracterizan por poner en juego cuatro cantidades; dos de las cuales son medidas de cierto tipo, y las otras dos cantidades son de otro tipo. En la siguiente lustración se muestran ejemplos de este esquema:

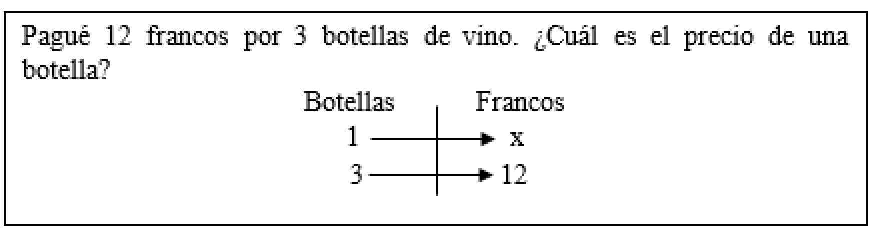


Figura 5: Relación cuaternaria, entre dos magnitudes francos y dos magnitudes botellas. Tomado de Vergnaud (1991).

Cuando se asume la multiplicación de esta forma se reconoce un proceso de covariación correspondiente a cada uno de los espacios de medida, en *este* sentido el isomorfismo de medida se puede asumir como una trasformación lineal, pues cumple con las propiedades de linealidad (homogeneidad con respecto a la suma, producto por escalar). En este caso particular la multiplicación como isomorfismo de medida, es considerado un caso de la proporcionalidad directa.

Ahora bien, esto indica que el isomorfismo de medida sirve como articulador para conceptos como variación, covariación, proporcionalidad, función lineal, entre otros; dado el tipo de relaciones que se establecen en este método, se pueden realizar diferentes tipos de análisis.

En el análisis escalar, se observa un cambio en el mismo espacio de medidas determinando que dicho cambio afecta al otro espacio de medadas, siendo así una variación simétrica entre los espacios. Para entender mejor este análisis escalar, se mirará en la siguiente ilustración:

$$\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \\ 1 & f(1) \\ \downarrow & \downarrow \\ n & f(n) \end{array}$$

$$De\ forma\ que: 1 \cdot n\ veces = n\ y\ f(1) \cdot n\ veces = f(n)$$

Figura 6: Esquema de análisis vertical. Vergnaud (1991).

El siguiente es el análisis funcional, que hace referencia al cambio que se observa de una cantidad de medida a otra entre parejas correspondientes, cumpliendo con:

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = \frac{f(3)}{3} = \cdots = \frac{f(n)}{n} = f(1),$$

$f(1)$, se podría llamar constante de proporcionalidad, por lo tanto,

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{f(n)}{n} \therefore n \cdot f(1) = f(n)$$

Tal como se muestra en la siguiente figura:

$$E_1 \qquad E_2$$

$$1 \longrightarrow f(1)$$

$$n \longrightarrow f(n)$$

$$f(n) = kn, donde\ k = f(1)$$

Figura 7: Esquema de análisis funcional. Vergnaud (1991).

La otra perspectiva o esquema que estudia la multiplicación es el producto de medidas, que se caracteriza por la relación entre tres cantidades, de las cuales una es producto de las otras dos

$$a \cdot b = c$$

Esta postura no se abordará, dado que en su tratamiento deja de lado la relación cuaternaria entre magnitudes.

En el siguiente apartado se esbozará otro referente que complementa el tratamiento de cantidades.

2.2.2. La naturaleza de las cantidades

Las investigaciones hechas por Shwartz (1988) sobre la multiplicación como relación cuaternaria, plantea el análisis de la naturaleza de las cantidades involucradas en situaciones, dado que conociendo la naturaleza de las cantidades se realizaría un tratamiento más consciente, de esta forma la solución va a gozar de sentido para los estudiantes y así será más significativo.

Así Shwartz (1988) plantea dos composiciones de cantidades, las primeras trabajan cantidades que tienen la misma unidad medida o la misma magnitud en este caso se encuentran las operaciones de suma y resta, para las segundas cantidades puede que se traten con igual o diferente unidad de medida en este caso se tienen las operaciones multiplicación y división, en esta última composición de cantidades, las cuales las cantidades se transforman, se obtienen dos tipos de cantidades llamadas *cantidades extensivas (E) y cantidades intensivas (I)*.

Se entiende por extensivas a las que tienen una sola dimensión o entidad, y por intensivas se refieren a una razón o relación que se establece entre dos cantidades. Ahora se esbozará la clasificación de tipos de problema entre dichas cantidades por Shwartz (1988), cuando se multiplica:

1. Cantidad Extensiva por Cantidad Intensiva:

Al multiplicar una cantidad extensiva por una intensiva se obtiene como resultado otra cantidad extensiva.

$$E \cdot I = E'$$

"Tres niños tienen cada uno cuatro litros de jugo de naranja. ¿Cuántos litros de jugo tienen todos?"

DATOS:

$$E = 3\,niños \qquad I = \frac{4\,litros}{1\,niño}$$

SOLUCIÓN

$$3\,niños \cdot \frac{4\,litros}{1\,niño} = \frac{12\,litros \cdot \cancel{niños}}{1\,\cancel{niño}} = 12\,litros$$

Se simplifican las unidades niños, se obtiene como resultado una cantidad extensiva $12\,litros$.

Figura 8: Ejemplo de multiplicación de Cantidad Extensiva por Cantidad Intensiva. Ospina & Salgado (2011).

2. Cantidad Extensiva por Cantidad Extensiva:

Al multiplicar una cantidad extensiva por otra cantidad extensiva se obtiene otra cantidad extensiva diferente a las anteriores.

$$E \cdot E' = E''$$

"¿Cuál es el área de un rectángulo de 6 metros de largo y 4 metros de ancho?"

DATOS:

$$E = 6\,metros\ de\ largo$$
$$E' = 4\,metros\ de\ ancho$$

SOLUCIÓN

$$6\,metros \cdot 4\,metros = 24\,metros^2$$

Se obtiene una cantidad Extensiva diferente igual a $24m^2 (metros\ al\ cuadrado)$, en este ejemplo se debe tener en cuenta que las dos cantidades tienen la misma unidad de medida, pero hacen referencia a dos magnitudes diferentes, una es metros de largo y la otra es metros de ancho.

Figura 9: Ejemplo de multiplicación de Cantidad Extensiva por Cantidad Extensiva. Ospina & Salgado (2011).

3. Cantidad Intensiva por Cantidad Intensiva:

Al multiplicar una cantidad intensiva por otra intensiva se obtiene como resultado otra cantidad intensiva diferente a las otras dos.

$$I \cdot I' = I''$$

"Un carro consume 6 litros de gasolina por Kilómetro, cuando circula a 120 km por hora viajando a esta velocidad. ¿Cuál será su consumo de gasolina en litros por hora?"

DATOS:

$$I = \frac{6\ litros\ de\ gasolina}{1\ kilometro} \qquad I' = \frac{120\ kilometros}{1\ hora}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{6\ litros\ de\ gasolina}{1\ kilometro} \cdot \frac{120\ kilometros}{1\ hora} = \frac{720\ litros\ \cdot \cancel{Km}}{1\ h\ \cdot \cancel{Km}} = \frac{720\ litros}{h}$$

La cantidad Intensiva obtenida es una cantidad diferente a las otras dos, pero guardan relación.

Figura 10: Ejemplo de multiplicación de Cantidad Intensiva por Cantidad Intensiva. Ospina & Salgado (2011).

De esta manera, se muestra que el aprendizaje de la operación multiplicación no debe ser vista solamente como adición iterada, dado que este método no podría potencializar dicha operación, en el sentido de ver la multiplicación como: razón, proporción, proporcionalidad, función lineal, etcétera. Además, se podría extender al campo de la geometría y la física, de ahí que no solo sería un concepto transversal en el campo de la matemática sino también en otras ciencias.

En otras palabras, Vergnaud (1990) afirma que: "Campo conceptual es un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes, pero íntimamente relacionados" (p. 10), es decir, para solucionar una situación no solo se debe trabajar con el concepto como tal, sino también hacer uso de otros conceptos que estén relacionados con el anterior.

A continuación, se presentarán elementos semióticos que ayudarán en el análisis de los tratamientos realizados por los estudiantes.

2.3. En relación con la teoría semiótica

En lo que corresponde a este referente, se especifica en la importancia del papel que desempeñan las representaciones semióticas en la obtención del conocimiento matemático, a partir de la teoría de semiótica – cognitiva de Duval (2004), dado que a parir de esta se pretende establecer una relación entre los diferentes registros de representación que se pueden utilizar los estudiantes para resolver diferentes situaciones que involucren el concepto de la multiplicación, aprendido desde el esquema isomorfismo de medida.

2.3.1. Representaciones semióticas

Desde las primeras investigaciones acerca de los registros y sistemas de representación se ha consolidado la importancia de estas en el aprendizaje, pues para que exista un aprendizaje en matemáticas, es necesario que el estudiante sea consciente del objeto matemático y pueda representar dicho conocimiento, con esto se quiere decir que para que exista comprensión en matemáticas es necesario poder diferenciar el objeto matemático de su representación.

Además, para un mismo objeto matemático existen diversas representaciones semióticas, como por ejemplo las figuras, los esquemas, los gráficos, las expresiones simbólicas, las expresiones lingüísticas, entre otras. Duval (2004, p. 35), cada una con un sistema de reglas que las caracteriza.

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior para un concepto matemático se pueden encontrar diferentes representaciones, por ejemplo la multiplicación se puede representar en una expresión en lenguaje natural, con un esquema de isomorfismo de medida, por una expresión algebraica, entre otros, también se puede observar para el concepto de la función lineal, el cual se puede representar como una gráfica, como una tabla de valores, como una expresión en lenguaje natural o algebraico, por tal motivo la importancia de los sistemas no solo radican en poder representar un objeto matemático, sino también en la posibilidad de poner en correspondencia dichos sistemas.

Tabla 2: Diferentes registros de representaciones semióticas de un ejemplo de multiplicación. Tomado de Vergnaud (1991).

"Mi mamá quiere comprar una tela que cuesta 24.80 francos el metro para hacerse un traje sastre. Necesita 3.50 metros de tela. ¿Cuánto deberá pagar?"	Lenguaje natural
$\begin{array}{c\|c} \text{Metros} & \text{Francos} \\ 1 \longrightarrow & 24.80 \\ 3.50 \longrightarrow & x \end{array}$	Esquema de isomorfismo de medida
$\begin{array}{c} \text{Metros} \qquad \text{Francos} \\ \boxed{x\ 24.80\ francos/metro} \\ \begin{array}{c\|c} 1 \longrightarrow & 24.80 \\ 3.50 \longrightarrow & x \end{array} \end{array}$	Análisis funcional (horizontal)
$3.50\ \cancel{metros} \cdot 24.80 \dfrac{francos}{\cancel{metro}} = 86.80\ francos$	Expresión algebraica

Nota: Elaboración propia.

Las anteriores representaciones son un ejemplo de la diversidad de formas para representar un ejercicio de multiplicación, en las cuales se efectúan la función fundamental e irreductible de los tratamientos intencionales, aquellos que para ser efectuados toman al menos el tiempo de un control consciente y se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados. Duval (2004, p. 41).

Ahora bien, los sistemas semióticos cumplen con las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, las cuales son formación, tratamiento y conversión. Los sistemas semióticos que cumplen con estas tres actividades reciben el nombre de registros de representación semiótica.

A continuación, se detallan las actividades cognitivas propias de los registros de representación semiótica.

2.3.2. Actividades cognitivas

Estas tres actividades se describen a continuación, la primera, la *formación* de representaciones es propia a un sistema semiótico, bien sea para expresar un pensamiento o realizar una representación externa de dicho pensamiento, las otras dos están ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones, que hace alusión a el cambio parcial o total del registro inicial, o parte de su contenido a otro de un mismo objeto. Ahora, esta transformación puede hacerse de dos formas diferentes; se llamará *tratamiento* cuando se realice la trasformación en el interior del mismo registro; y *conversión* cuando se hace un cambio de un registro a otro registro diferente.

2.3.2.1. Formación

La formación de una representación semiótica se da cuando se intenta actualizar la mirada o al sustituir la visión que se tiene de un objeto, favoreciendo la creación de representaciones usando y combinando diferentes signos que pertenezcan a un mismo sistema de representación con la condición de respetar las reglas de conformidad, las cuales definen un sistema de representación.

Las reglas de conformidad, como lo afirma Duval (2004), permiten el reconocimiento de las representaciones como representaciones en un registro determinado, como se ha dicho, las reglas de conformidad se refieren a la escogencia de las unidades elementales de cada sistema de representación; como por ejemplo: símbolos, vocabulario, entre otros. Otro papel que cumplen las reglas de conformidad es la combinación necesaria de las unidades elementales para formar unidades de nivel superior; y cumple también una función de identifican de sentido para el cual fue formada la representación, pero sin implicar que el conocimiento de las reglas den cuenta de la comprensión y exploración de las representaciones.

De acuerdo con cada registro de representación semiótica se tienen diferentes reglas de conformidad, por tal motivo se presentan las reglas de conformidad para la actividad de formación para los registros de lengua natural, escritura algebraica, esquema sagital y tabla de valores, los cuales brindan elementos para el análisis que se realiza en este trabajo.

2.3.2.2. Tratamiento

Un tratamiento es la transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema, o sea que ocurre dentro del mismo registro, según las reglas propias del sistema; por ejemplo, cuando se resuelve una ecuación o sistemas de ecuaciones, completando una figura, etc. (Duval, 2004). Esta transformación es posible bajo las reglas de expansión, cuya aplicación da una representación del mismo registro que la representación de partida.

Existen diferentes tipos de reglas de expansión; por ejemplo, las reglas de derivación que son comunes para todos los razonamientos de tipo deductivo; las reglas de producción definidas en el marco de la inteligencia artificial; las reglas de coherencia temática para la expansión discursiva en el registro de las lenguas naturales; y por último, las reglas asociativas de contigüidad y de similitud que comandan de manera más global lo que llaman “asociación de ideas”, todas estas reglas de tratamiento no le pertenecen específicamente a un registro de representación, salvo las dos últimas que son inherentes a la práctica común de la lengua natural (Duval, 2004).

Tabla 3: Ejemplos de la actividad cognitiva de tratamiento de las representaciones. Tomado de Peñafiel (2017).

Lenguaje Natural: Cuando se tiene un registro en lenguaje natural solo basta con realizar la transformación usando las reglas propias de este registro para obtener un tratamiento. La idea es cambiar la escritura del registro sin cambiar la intención y el sentido del enunciado, para evitar el oscultamiento de información.	“Cada 25 segundos la rueda de un molino da 3 vueltas. ¿Cuántas vueltas da en 20 minutos y 11 segundos?” “Cada 25 segundos, da 3 vueltas la rueda de un molino. ¿Si se demora 20 minutos y 11 segundos, cuantas vueltas da?”
Esquema: El tratamiento que se efectúa en este registro es mediante un análisis funcional propio del isomorfismo de medida. Con este tratamiento se le puede dar solución a la pregunta ¿Cuántas vueltas da en 20 minutos y 11 segundos? O ¿Cuántas vueltas da en 1211 segundo? Al efectuar $1211\ \cancel{segundos}\ x\ \frac{3\ vueltas}{25\ \cancel{segundos}} = 145.3\ vueltas,$ es decir la rueda del molino da 145 vueltas en 25 segundos.	Tiempo (seg) Vueltas 25 $\longrightarrow$ 3 1211 $\longrightarrow$ x Tiempo (seg) Vueltas $\frac{3\ vueltas}{25\ segundos}$ 25 $\longrightarrow$ 3 1211 $\longrightarrow$ x

Nota: Elaboración propia.

2.3.2.3. Conversión

La conversión es la transformación externa relativa al registro de la representación inicial de un objeto a otro registro de representación, esto consiste en cambiar de registro sin cambiar el objeto que se está representando; el registro inicial da unas significaciones al objeto, cuando se realiza una conversión se conserva parte del significado (Duval, 2004, Gutiérrez, S. & Parada, D. 2007), pero al mismo tiempo se obtienen significados diferentes del mismo concepto, abriendo así la posibilidad de conocer más sobre el objeto.

Como lo afirma Duval, "un aprendizaje específicamente centrado en el cambio y en la coordinación de los diferentes registros de representación, produce efectos espectaculares sobre las macro-tareas de producción y de comprensión" (2004, p. 49), pues si se pide una descripción discursiva a varios estudiantes de un concepto que se encuentre en un registro, se obtendrá una variedad de descripciones, según el acercamiento de cada estudiante con el registro inicial, entonces se tendría una gama amplia, para analizar y así alcanzar una buena comprensión.

A pesar, de ser una actividad que brinda un medio potente y necesario para la comprensión del conocimiento, se observa que el lugar que se le ha dado a la conversión de representaciones es mínimo o casi nulo Duval (2004), esto es debido a tres razones. La primera, es la falta de reglas para la conversión, ya que existen las reglas pero "no son las mismas según el sentido en que se efectúa el cambio de registro" (Duval, 2004, p.48), dado que, según el concepto y el registro mismo las reglas de conversión son diferentes; la segunda, es que con frecuencia se utiliza esta transformación de conversión para hacer más simple y económico el tratamiento en algún registro; por último, pensar que trabajar esta actividad cognitiva sería quedarse atrasado en relación con la enseñanza de las matemáticas, quedándose con la inmediatez y simplicidad.

De aquí, que la conversión se considere entre las actividades cognitivas fundamentales de los registros de representación semiótica, como la menos espontánea y la más difícil Duval (2004). Por otro lado, cabe mencionar otros aspectos que dificultan esta transformación, los cuales son la comprensión de un contenido limitado algunas veces a la representación que se trabajo; también a la falta de coordinación o articulación entre registros, pues no es suficiente con mostrar el objeto en diferentes representaciones, es necesario enseñar cómo se hace el paso de una a otra y cómo se coordinan entre sí; y finalmente, el desconocimiento de alguno de los registros de representación que se estén trabajando. Gutiérrez, S. & Parada, D. (2007)

Ahora, cabe subrayar que la actividad cognitiva de conversión es necesaria en varias disciplinas, en vista de que, en varios libros de texto se encuentran esbozados diferentes representaciones de un concepto; por ejemplo en textos escolares de matemáticas, de historia y geografía se encuentran definiciones escritas en forma de lenguaje natural, también se encuentran gráficas, fotos, mapas, esquemas, tablas estadísticas, figuras, entre otros, para hacer que el conocimiento sea más accesible y más comprensible; pareciera que esta actividad fuera natural desde los primeros años de escolaridad, pensando que es una base para los aprendizajes de tratamiento, pero como ya se observó esta actividad no es del todo inmediata como se puede llegar a creer. Este pasose da cuando se conoce el registro de partida y el de llegada.

A diferencia de lo dicho anteriormente, la conversión también tiene otra característica que la hace ser o no ser congruente. En primer lugar, como lo afirma Duval (2004), “para efectuar una conversión es suficiente una correspondencia término a término entre las unidades significantes" (p. 50), los cuales son los valores que puede tomar las diferentes componentes de un registro, como por ejemplo palabras o símbolos. Ahora cuando se realiza la conversión inversa el resultado que se obtiene es que se encuentre la expresión inicial del registro de partida, en este caso se dice que se tiene una conversión congruente.

Para comprobar que una conversión es congruente, se han de cumplir tres criterios. El primero, correspondencia semántica de los elementos significantes, esto quiere decir que a cada unidad significante simple de una representación, se le puede asociar una unidad significante elemental[10] de un registro; el segundo criterio es la univocidad semántica terminal, a cada unidad significante del registro inicial, le corresponde una única unidad significante del registro de llegada; y el tercer criterio, es el de correspondencia en el orden de arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones, es pertinente cuando las unidades tienen la misma dimensión.

Observemos el siguiente ejemplo, donde se muestra el cumplimiento de los criterios de congruencia en la conversión:

[10] Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del léxico de un registro. Duval (2004)

Tabla 4: Criterios de congruencia en la conversión de representaciones de un registro, adaptado y tomado de Duval (2004) y Ospina, M. & Salgado, J. (2016).

Criterios Registros	Correspondencia semántica de los elementos significantes	Univocidad semántica terminal	Conservación del orden
"Andrés pagó $1200 por 8 dulces. ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?" Dulces Precio 8 → 1200 3 → x	Si, porque a cada elemento significante del registro en leguaje natural le corresponde una unidad en el esquema de isomorfismo de medida	Si, cada unidad del registro de salida le corresponde una única unidad de llegada	No, porque si se lee el esquema no quedaría en el mismo orden como se lee el registro en lenguaje natural

Nota: Elaboración propia.

Como en el anterior ejemplo no se cumplen los tres criterios entonces se considera que hay no-congruencia entre los dos registros.

2.4. Antecedentes

El presente trabajo se caracterizará por la realización de una descripción de los registros de representación semióticos usados por estudiantes en el aprendizaje de la multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida propuestos por Duval (2004) y Vergnaud (1991) respectivamente, por tal motivo se estudiarán algunos trabajos de grado los cuales desarrollen estas perspectivas, y dichos trabajos estén realizados en torno a las representaciones semióticas y/o los esquemas de isomorfismo de medida.

De acuerdo con lo anterior, se ubican tres trabajos. El primero, **"Análisis de enunciados relativos a la proporcionalidad como parte del campo conceptual multiplicativo, en cartillas de escuela nueva para grado quinto**", trabajo de grado de Peñafiel (2016), realiza un análisis de los enunciados-problema relativos a la proporcionalidad directa, como parte de la estructura multiplicativa en relación con algunos elementos semióticos, esta investigación aporta aspectos importantes en el ámbito de los registros de representaciones semióticas, pues en sus conclusiones afirma y ratifica la importancia de los sistemas de representación semiótica en el aprendizaje del concepto, además es fundamental que se trabajen varios sistema de representación semiótica a la vez, esto quiere decir que este trabajo se favoreció el trabajo de conversión de representaciones con el fin de tener una visión más diversa desde diferentes puntos de vista.

También, es importante el aporte desde la teoría de Vergnaud, cuando se trabajó la proporcionalidad desde una relación cuaternaria, en particular que los análisis escalar y funcional se pueden adaptar para a las condiciones del estudiante según el grado escolar y el objeto matemático que el docente planee trabajar.

El segundo trabajo de grado es **"Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo**" de Ospina, M. & Salgado, J. (2011), el cual aborda de manera explícita las situaciones de tipo multiplicativo de la teoría de Vergnaud, este trabajo de grado se enfoca en el análisis de los libros de texto de tercer grado bajo el enfoque Ontosemiótico[11], sobre los tratamientos dados al concepto de la multiplicación obteniendo información del cómo se concibe, se construye y se desarrolla el concepto matemático, dando como conclusión que en muchas ocasiones los libros de texto son implícitos

---

[11] El enfoque ontosemiótico está ubicado dentro del marco teórico de la didáctica de las matemáticas, cuyo propósito es articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. (Ospina, M. & Salgado, J. 2011)

al mostrar la multiplicación como isomorfismo de medida, pues a veces se queda en mostrar el algoritmo o en la memorización de las tablas de multiplicar, sin analizar las magnitudes que están en juego, siendo este un aprendizaje poco significativo.

Por último, **"La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: aproximación discursiva"** trabajo de grado de Ospina, M. & Salgado, J. (2016), el cual reafirma el papel del discurso en la enseñanza de la multiplicación, brindando aspectos teóricos y metodológicos a considerar en la perspectiva discursiva y en su perspectiva de isomorfismo de medida. Así que, llama la atención a un cambio de perspectiva en la forma de entender la multiplicación como operación ternaria y pasar a considerarla como un campo conceptual que involucra varias estructuras, y análisis matemáticos que vayan más allá de la adición iterada y de trabajo con algoritmos.

Esta investigación es crucial para este trabajo de grado pues de aquí sale la motivación para su realización, dado que deja un campo abierto para el análisis de los registros de representación semiótica realizados por los estudiantes que participaron en esta intervención, que permitió caracterizar la tematización inmersa en el discurso del maestro cuando enseña la multiplicación como isomorfismo de medida, a partir del sentido y significados que tiene el estudiante de tal concepto, analizando las magnitudes y la naturaleza de las cantidades, la formación de cantidades intensivas y cantidades extensivas en la solución de un problema multiplicativo, desde el punto de vista de las actividades cognitivas de Duval.

2.5. Referente metodológico

Este trabajo se encuadrará dentro de una investigación cualitativa, pues esta ayudará a dilucidar de manera generar el pensamiento que tienen los estudiantes sobre un concepto, intentando dar sentido a lo que el estudiante pueda mostrar, como lo afirma Rodríguez & Valldeoriola:

> Las metodologías cualitativas se orientan hacia la comprensión de las situaciones únicas y particulares, se centran en la búsqueda de significado y de sentido que les conceden a los hechos los propios agentes, y en cómo viven y experimentan ciertos fenómenos o experiencias los individuos o los grupos sociales a los que investigamos. (2009, p. 47).

Así que, esta metodología cubre el propósito de las investigaciones en educación matemática las cuales buscan responder a preguntas únicas y particulares de cada individuo centrándose en la búsqueda del sentido, en este caso de cómo los estudiantes entienden el concepto de la multiplicación bajo el esquema de isomorfismo de medida.

Para el desarrollo de esta metodología se describirán tres fases, las cuales buscan estructurar y precisar el trabajo final.

Fase1: En esta primera fase se realizó el rastreo, búsqueda de los elementos referentes a la teoría de Vergnaud, como lo son la teoría de los campos conceptuales específicamente las estructuras multiplicativas, mostrando los análisis escalar y funcional que se le puede realizar a un esquema de isomorfismo de medida; por otro lado, se explicó la naturaleza de las cantidades extensivas e intensivas de Shwartz; y por último, se expuso lo concerniente a la teoría de Duval, sobre los registros de representación semiótica, dando a conocer la importancia de las tres actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión de las representaciones.

Fase 2: En esta fase se propuso examinar las producciones de los estudiantes, dando como resultado la escogencia de los registros a analizar, mostrando las características de cada tarea y los elementos que se pueden analizar en la tercera fase, la identificación de los tipos de sistemas de representación semiótica presentes en las producciones de los estudiantes y los tratamientos de los registros de representación.

Fase 3: en esta fase se identificaron los alcances o potencialidades de los registros de representación semiótica, tomando en cuenta las actividades cognitivas propuestas por Duval, hallados bajo la luz de la situación de tipo multiplicativo propuesto por Vergnaud. Además, se expondrán los resultados y conclusiones del análisis.

Lo puntualizado, anteriormente fue con el fin, de dar a conocer detalladamente la teoría con la cual se van a analizar las tareas propuestas a los estudiantes, dicho análisis guiará el enfoque con el que se comparará las producciones escritas de los estudiantes. En el siguiente capítulo de describe el análisis cognitivo y semiótico en base con la teoría detallada en líneas anteriores.

CAPÍTULO III

3. ANÁLISIS DE TAREAS PROPUESTAS

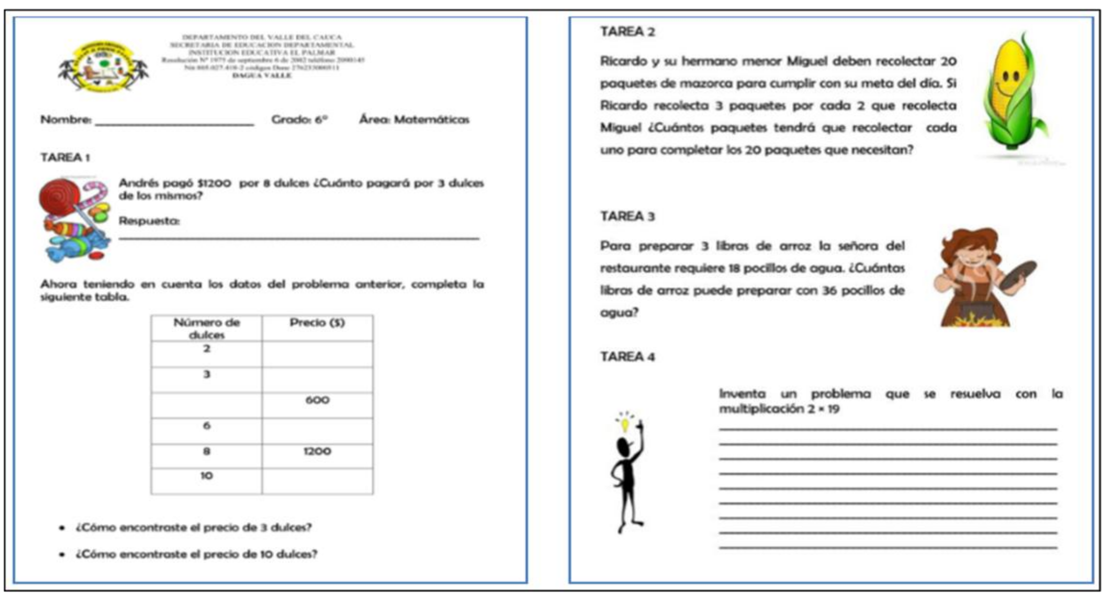
En este apartado se pretende observar las características de algunas tareas que se le propusieron a los estudiantes en el experimento de enseñanza, tomadas del trabajo de grado de Ospina, M & Salgado, J. (2016). Se presenta un análisis cognitivo – semiótico de las diferentes tareas planteadas, teniendo en cuenta la caracterización de la clase de enunciados que logró establecer Peñafiel (2017), el cual se enfatizó en identificar y caracterizar el esquema que presenta el isomorfismo de medida y los tratamientos propios de la estructura multiplicativa. Tambien, se muestra la naturaleza de las cantidades que se trabajan en las tareas, dada la importancia de identificar el tipo de medidas que se relacionan y sus transformaciones.

Para la realización de este análisis se cuenta con tres actividades, las cuales constan de diferentes tareas. Para la actividad 1 se tiene cuatro tareas, de las cuales se analizaron tres; la actividad 2 se compone de cinco tareas, de esta se consideraron tres tareas; finalmente, la actividad 3 se constituye por dos tareas de las cuales se analizará la tarea 1,. Además, es importante tener en cuesta que cada una de estas actividades tiene propósitos distintos según el experimento de enseñanza en el cual se puso en acción; es decir, la actividad 1 fue implementada en un primer momento para conocer el nivel conceptual con relación a las extructuras multiplicativas, sabiendo esto, se estructuró la actividad 2, que por su parte se centró en abordar tareas relacionadas con un contexto mas familiar para los estudiantes; y por último, en la actividad 3 se pretendió indagar la tematización del concepto multiplicación, tomando como referencia los medios de comunicación (oral y escrito) de los estudiantes, con el fin de develar el nivel comunicativo o no del objeto matemático. Ospina, M. & Salgado, J. (2016)

3.1. Actividad 1

La actividad 1 fue una adaptación hecha por el equipo de investigación y el grupo de estudiantes participantes del seminario de la Línea De Investigación En Lenguaje, Razonamiento Y Comunicación, de una secuencia didáctica propuesta en trabajo de grado de Gómez, D & Valencia, J. (2010); los cambios efectuados a esa secuencia fueron realizados en varios aspectos de los enunciados, como lo son: magnitudes de cantidades (costos, valores, etc.) de la vida real, estas modificaciones se hicieron de tal manera que se relacionaran con los contextos cotidianos de los estudiantes que viven los estudiantes de la Institución El Palmar.

En la actividad 1, se esbozan cuatro tareas, que se muestra en la siguiente imagen (Ver Anexo 1):


DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
DAGUA VALLE

Nombre: ____________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

TAREA 1

Andrés pagó $1200 por 8 dulces ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?

Respuesta: ____________________

Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla.

Número de dulces	Precio ($)
2	
3	
	600
6	
8	1200
10	

- ¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
- ¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?

TAREA 2

Ricardo y su hermano menor Miguel deben recolectar 20 paquetes de mazorca para cumplir con su meta del día. Si Ricardo recolecta 3 paquetes por cada 2 que recolecta Miguel ¿Cuántos paquetes tendrá que recolectar cada uno para completar los 20 paquetes que necesitan?

TAREA 3

Para preparar 3 libras de arroz la señora del restaurante requiere 18 pocillos de agua. ¿Cuántas libras de arroz puede preparar con 36 pocillos de agua?

TAREA 4

Inventa un problema que se resuelva con la multiplicación 2 × 19

Figura 11: Actividad inicial del experimento de enseñanza. Tomado de Ospina, M & Salgado, J. (2016).

En la Tarea 1 se observa un problema escrito en lenguaje natural, después se pide al estudiante completar una tabla, para las Tareas 2 y 3 se encuentran también problemas escritos en lengua natural, por último en la Tarea 4 se propone un problema en una expresión algebraica.

3.1.1. Análisis cognitivo

Tarea 1: Pregunta 1: "Andrés pagó $1200 por 8 dulces. ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?"

Según la caracterización que realizo Peñafiel, Z. (2017), este es un problema tipo B, el cual no se encuentra dado el valor unitario, en este caso el costo de un dulce, como se ve acontinuación en el esquema, por lo tanto se debe hallar, entonces se debe primero hacer una división de obtener este valor se procede a realizar una multiplicación.

Tabla 5: Planteamiento del esquema de isomorfismo de medida de la pregunta 1, tarea 1 actividad 1.

Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)
8 $\longrightarrow$	1200
3 $\longrightarrow$	x

Nota: Elaboración propia.

Como se dijo en este tipo de problema no se da explícitamente el costo de un solo dulce, para hallarlo se puede relizar un análisis escalar o funcional, luego se daría respuesta a las preguntas planteadas en la tarea.

Tabla 6: Análisis escalar de la actividad 1, tarea1, pregunta 1.

	Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)	
$x\ \frac{1}{8}$	8	1200	$x\ \frac{1}{8}$
	1	150	

$8\ dulces\ x\ \frac{1}{8}\ veces = 1\ dulce$ $\quad$ $1200\ pesos\ x\ \frac{1}{8}\ veces = 150 pesos$

Nota: Elaboración propia.

En este caso se multiplicó 8 dulces por $\frac{1}{8}\ veces$, o sea se multiplicó por 1 y se dividió por 8, de est manera se halla 1 dulce; se hace el mismo procesimiento con el precio de 8 dulces, de esta manera 1200 pesos se multiplica por 1 y el resultado de divide por 8, de aquí se obtine que el precio de 1 dulce es de 150 pesos. Ahora, se puede dar solución al problema planteado inicialmente, como se muestra acontinuación.

Tabla 7: Análisis escalar de la actividad 1, tarea1, pregunta 1, hallando la unidad.

	Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)	
$x\ 3$	1	150	$x\ 3$
	3	450	

$1\ dulce\ x\ 3\ veces = 3\ dulces$ $\quad$ $150\ pesos\ x\ 3\ veces = 450\ pesos$

Nota: Elaboración propia

Tabla 8: Análisis funcional de la actividad 1, tarea1, pregunta 1, hallando la unidad.

Número de dulces (unidades)		Precio (pesos)
8	$x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce}$	1200
1	$x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce}$	150

$8\ dulces\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 1200\ pesos$ $\quad$ $1\ dulce\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 150\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 9: Análisis funcional de la actividad 1, tarea1, pregunta 1

Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)
1 $\longrightarrow$	150
3 $\longrightarrow$	450

$$x\,\frac{150\ pesos}{1\ dulce}$$

$1\ dulces\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 150\ pesos$ $\qquad$ $3\ dulce\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 450\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Para la misma tarea 1, también se propone completar una tabla, la cual se realiza utilizando un tratamieto similar al de los esquemas de isomorfismo de medida, en seguida se muestra la tabla.

Pregunta 2: “Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la tabla”

Tabla 10: Pregunta 2, tarea 1, acividad 1.

Número de dulces (unidades)	**Precio (pesos)**
2	300
3	450
4	**600**
6	900
8	**1200**
10	1500

Nota: Actividad 1, tomado de la experiencia de enseñanaza realizada por Ospina, M. & Salgado, J. (2016)

Tarea 2

“Ricardo y su hermano menor Miguel deben recolectar 20 paquetes de mazorca para cumplir con su meta del día. Si Ricardo recolecta 3 paquetes por cada dos que recolecta Miguel. ¿Cuántos paquetes tendrá que recolectar cada uno para completar los 20 paquetes que necesitan”

En este problema se deben tomar dos casos, uno para saber cuántos paquetes de mazorca debe recolectar Ricardo y otro para conocer cuántos paquetes de mazorca debe recoger Miguel. Aquí el análisis escalar.

Tabla 11: Análisis escalar para la tarea 2, actividad 1, recolección de paquetes de mazorca por Ricardo.

	Total paquetes recolectados	Paquetes recolectados por Ricardo	
$x\ \frac{20}{5} = 4$	5	3	$x\ \frac{20}{5} = 4$
	20	12	

$5\ Total\ P\ x\ 4\ veces = 20\ Total\ P$ $\quad$ $3\ P\ Ricardo\ x\ 4\ veces = 12\ P\ Ricardo$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 12: Análisis escalar para la tarea 2, actividad 1, recolección de paquetes de mazorca por Miguel.

	Total paquetes recolectados	Paquetes recolectados por Miguel	
$x\ \frac{20}{5} = 4$	5	2	$x\ \frac{20}{5} = 4$
	20	8	

$5\ Total\ P\ x\ 4\ veces = 20\ Total\ P$ $\quad$ $2\ P\ Miguel\ x\ 4\ veces = 8\ P\ Miguel$

Nota: Elaboración propia.

Por lo anterior, Ricardo en el día debe recolectar 12 paquetes de mazorca y Miguel debe recolectar 8 paquetes, entre los dos recolectarán 20 paquetes de mazorca, la meta que deben cumplir al día.

Tabla 13: Análisis fincional para la tarea 2, actividad 1, recolección de paquetes de mazorca por Ricardo.

Total paquetes recolectados		Paquetes recolectados por Ricardo
5	$\longrightarrow$	3
	$x\ \frac{3\ P\ Ricardo}{5\ Total\ P}$	
20	$\longrightarrow$	12

$5\ Total\ P\ x\ \frac{3\ P\ Ricardo}{5\ Total\ P} = 3\ P\ Ricardo$ $\quad$ $20\ Total\ P\ x\ \frac{3\ P\ Ricardo}{5\ Total\ P} = 12\ P\ Ricardo$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 14: Análisis funcional para la tarea 2, actividad 1, recolección de paquetes de mazorca por Miguel.

Total paquetes recolectados	Paquetes recolectados por Miguel
5	2
20	8

$$x\ \frac{2\ P\ Miguel}{5\ Total\ P}$$

$$5\ Total\ P\ x\ \frac{2\ P\ Miguel}{5\ Total\ P} = 2\ P\ Miguel \qquad 20\ Total\ P\ x\ \frac{2\ P\ Miguel}{5\ Total\ P} = 8\ P\ Miguel$$

Nota: Elaboración propia.

Tarea 4: "Inventa un problema que se resuelva con la multiplicación 2 x 19"

Como se debe inventar un problema, se tomará uno de las producciones hechas por un estudiante para realizar el análisis escalar y funcional.

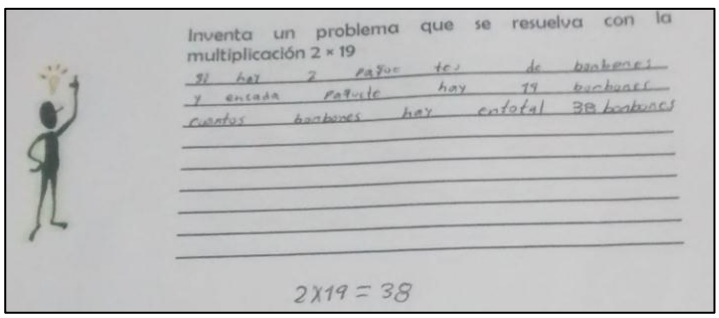


Figura 12: Solución de E1 en la Actividad 1, tarea 4.

ANÁLISIS ESCALAR: Solución de E1 en la actividad 1, tarea 4, "Si hay 2 paquetes de bombones y en cada paquete hay 19 bombones. ¿Hay en total?"

Tabla 15: Análisis escala de la solución de E1 en la actividad 1, tarea 4.

Paquete de bombones (paquete)	Cantidad de bombones por paquete (unidades)
1	19
2	38

$$x\ \frac{2}{1} \qquad\qquad x\ \frac{2}{1}$$

$$1\ paquete\ x\ 2\ veces = 2\ paquetes \qquad 19\ unidades\ x\ 2\ veces = 38\ unidades$$

Nota: Elaboración propia.

ANÁLISIS FUNCIONAL: Solución de E1 en la actividad 1, tarea 4, “Si hay 2 paquetes de bombones y en cada paquete hay 19 bombones. ¿Hay en total?”

Tabla 16: Análisis funcional de la solución de E1 en la actividad 1, tarea 4.

Paquete de bombones (paquete)	Cantidad de bombones por paquete (unidades)
1	19
2	38

$$x\ \frac{19\ unidades}{1\ paquete}$$

$$1\ paquete\ x\ \frac{19\ unidades}{1\ paquete} = 19\ unidades \qquad 2\ paquetes\ x\ \frac{19\ unidades}{1\ paquete} = 38\ unidades$$

Nota: Elaboración propia.

3.1.2. Análisis semiótico

En este apartado se revisaran los sistemas de representacion semiótica que están presentes en la actividad 1. En esta actividad se pueden encontrar diferentes sistemas de representación, como lo son el lenguaje natural, los gráficos cuando se trabajan los esquemas de isomorfismo de medida, asimismo se pide completar tablas, y también el leguaje algebraico cuando se operan las cantidades.

Pregunta 2: “Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la tabla”

En este problema se pide completar una tabla con los datos obtenidos en la pregunta 1, se pudo constatar que los **tratamientos** efectuados en el análisis escalar son los mismos de 2 a 3, 3 a 4, 4 a 6, 6 a 8 y 8 a 10, lo que cambia es el operador fraccionario. También en el registro sagital se encontró una propiedad que fue hallada cuando se hace el análisis funcional, conforme a este registro,el cual tiene en cuenta un número, que se llamará contante, en este caso será la constante k=150, que cumple la siguente función.

$$f(1) = 150 \qquad f(2) = 2\ x\ f(1) \qquad f(3) = 3\ x\ f(2)$$

Tabla 17: Análisis escalar de la pregunta 2, tarea 1.

	Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)	
	1	**150**	
$x\ \frac{2}{1}$	**2**	300	$x\ \frac{2}{1}$
$x\ \frac{3}{2}$	**3**	450	$x\ \frac{3}{2}$
$x\ \frac{4}{3}$	4	**600**	$x\ \frac{4}{3}$
$x\ \frac{6}{4}$	**6**	900	$x\ \frac{6}{4}$
$x\ \frac{8}{6}$	**8**	**1200**	$x\ \frac{8}{6}$
$x\ \frac{10}{8}$	**10**	1500	$x\ \frac{10}{8}$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 18: Análisis funcional de la pregunta 2, tarea 1.

Número de dulces (unidades)	$x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce}$	Precio (pesos)
2	$\longrightarrow$	300
3	$\longrightarrow$	450
4	$\longrightarrow$	**600**
6	$\longrightarrow$	900
8	$\longrightarrow$	**1200**
10	$\longrightarrow$	1500

Nota: Elaboración propia.

Aquí la constante, es 150, a continuación se observa el tratamiento, en un ejemplo.

$$2\ dulces\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 300\ pesos$$

En esta tarea se cambia de registro de representacion, de lengua natural a un registro sagital y luego se muestra una tabla que el estudiante debe completar.

El registro **sagital o isomorfismo de medida** son los gráficos que se han estado manejando, en este ejercicio.

Tabla 19: Vista del esquema sagital o isomorfismo de medida análisis funcional.

Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)
1 ⟶	150
3 ⟶	x

Nota: Elaboración propia.

Como se observa se conocen tres cantidades y otra cantidad es desconocida, para dar solución se hace el siguiente paso.

Tabla 20: Tratamiento del análisis funcional de la pregunta 1, tarea 1, actividad 1.

Número de dulces (unidades)	Precio (pesos)
1 ⟶	150
3 ⟶	x

$$\boxed{x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce}}$$

Nota: Elaboración propia.

Mediante el análisis funcional, propio del isomorfismo de medida, es posible realizar el tratamiento para este registro que seria $3\,x\,150 = 450$, es decir 450 pesos es el costo de 3 dulces.

Para esta actividad se debe realizar algunas **escrituras algebraicas**, tomando nota de lo dicho por Peñafiel, Z:

> El proceso de solución de la escritura algebraica requiere de realizar unos pasos propios del isomorfismo de medida, para ello, es necesario identificar las relaciones entre cada espacio de medida y conocer los análisis necesarios para efectuar el tratamiento de manera correcta. (2017, p. 55)

Tomado la tarea 1 de la actividad 1, mediante la escritura algebra se puede enunciar el tratamiento manteniéndose en el mismo registro para la solución.

$$\frac{1}{3} = \frac{150}{x}$$

$$\frac{1\ dulce}{3\ dulces} = \frac{1\ dulce\ cuesta\ 150\ pesos}{3\ dulces\ cuentan\ 450\ pesos}$$

$$\frac{1\ dulce}{3\ dulces} = \frac{150\ pesos}{450\ pesos}$$

$$3\ dulces = 450\ pesos$$

Es decir, tres dulces cuestan 150 pesos. Para llegar a la solución se ha recurrido a propiedades de linealidad.

Para finalizar, en esta actividad hay que decir que todas las tareas aquí planteadas se les reliazará el mismo tratamiento algebraico, resumiendo se tendrían las siguiente naturaleza de cantidades.

Tarea 1

Cantidad extensiva (E)= 8 dulces

Cantidad intensiva (I)= $\frac{150\ pesos}{1\ dulce}$

Cantidad extensiva (E)= 1200 pesos

$$8\ dulces\ x\ \frac{150\ pesos}{1\ dulce} = 1200\ pesos$$

Tarea 2

Cantidad extensiva (E)= 5 $Total\ P$

Cantidad intensiva (I)= $\frac{3\ P\ Ricardo}{5\ Total\ P}$

Cantidad extensiva (E)= $3\ P\ Ricardo$

$$5\ Total\ P\ x\ \frac{3\ P\ Ricardo}{5\ Total\ P} = 3\ P\ Ricardo$$

Tarea 3

Cantidad extensiva (E)= $2\ paquetes$

Cantidad intensiva (I)= $\frac{19\ unidades}{1\ paquete}$

Cantidad extensiva (E)= $38\ unidades$

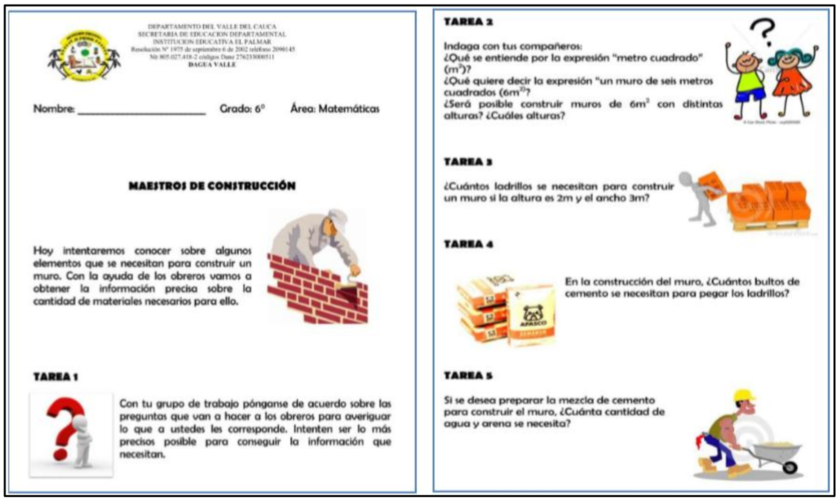
$$2\ paquetes\ x\frac{19\ unidades}{1\ paquete} = 38\ unidades$$

En la **lengua natural** se espera que los estudiantes propongan textos con una intencionalidad que no de pie a diversas interpretaciones que lleven a una ambigüedad, también se espera que cada expresión en lengua natural exprese ideas y relaciones entre el objeto matemático.

3.2. Actividad 2

Esta actividad la construyeron con la intención que se relacionará con la vida cotidiana de los estudiantes, en ese momento se estaba realizando una construcción en el colegio, entonces en una de las tareas de esta actividad los estudiantes debian hacer algunas preguntas acerca de los materiales necesarios y costos para dicha construccion, a los trabajadores y maestros de la obra, después con esos datos debian desarrollar las siguientes tareas.

En esta actividad se analizará las tareas 3, 4 y 5; se muestra la imagen de la actividad 2 (Ver anexo 2).


DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
Resolución N° 1975 de septiembre 6 de 2002 teléfono 2090145
Nit 805.027.418-2 códigos Dane 276233000511
DAGUA VALLE

Nombre: ____________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

MAESTROS DE CONSTRUCCIÓN

Hoy intentaremos conocer sobre algunos elementos que se necesitan para construir un muro. Con la ayuda de los obreros vamos a obtener la información precisa sobre la cantidad de materiales necesarios para ello.

TAREA 1

Con tu grupo de trabajo pónganse de acuerdo sobre las preguntas que van a hacer a los obreros para averiguar lo que a ustedes les corresponde. Intenten ser lo más precisos posible para conseguir la información que necesitan.

TAREA 2

Indaga con tus compañeros:
¿Qué se entiende por la expresión "metro cuadrado" (m^2)?
¿Qué quiere decir la expresión "un muro de seis metros cuadrados ($6m^2$)?
¿Será posible construir muros de $6m^2$ con distintas alturas? ¿Cuáles alturas?

TAREA 3

¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir un muro si la altura es 2m y el ancho 3m?

TAREA 4

En la construcción del muro, ¿Cuántos bultos de cemento se necesitan para pegar los ladrillos?

TAREA 5

Si se desea preparar la mezcla de cemento para construir el muro, ¿Cuánta cantidad de agua y arena se necesita?

Figura 13:Actividad 2 del experimento de enseñanza. Tomado de Ospina, M & Salgado, J. (2016).

Las tareas 3, 4 y 5, dependen de los datos que los estudiantes obtuvieron al consultar con los obreros, además de la guía que brindó la profesora-investigadora, pues con su apoyo se llegó a los acuerdos que para construir un metro cuadrado (1 m^2) se necesitan 25 ladrillos, medio bulto de cemento y medio bulto de arena, además se estableció que el área de un muro de dos metros de alto por tres metros de ancho era equivalente a seis metros cuadrados (6 m^2), Ospina, M & Salgado, J. (2016).

3.2.1. Análisis cognitivo

Tarea 3: "¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir un muro si la altura es de 2m y el ancho 3m?.

Como se dijo anteriormente, se pretende construir un muro de 2m de altura y 3m de ancho, entonces el área del muro será de $6m^2$, antes se dijo que para construir un área de $1m^2$, serián necesarios 25 ladrillos. Entonces haciendo un análisis escalar y funcional, se podrá obtener el resultado.

Tabla 21: Análisis escalar de la tarea 3, actividad 2.

	Área del muro (metros cuadrados)	Cantidad de ladrillos (unidades)	
$\boxed{x\ \frac{6}{1}}$	1	25	$\boxed{x\ \frac{6}{1}}$
	6	150	

$1m^2\ x\ \frac{6}{1}\ veces = 6m^2$ $\quad$ $25\ ladrillos\ x\ \frac{6}{1} veces = 150\ ladrillos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 22: Análisis funcional de la tarea 3, actividad 2.

Área del muro (metros cuadrados)		Cantidad de ladrillos (unidades)
1	$\xrightarrow{\boxed{x\ \frac{25\ ladrillos}{1\ m^2}}}$	25
6	$\longrightarrow$	150

$1m^2\ x\ \frac{25\ ladrillos}{1m^2} = 25\ ladrillos$ $\quad$ $6\ m^2\ x\ \frac{25\ ladrillos}{1\ m^2} = 150\ ladrillos$

Nota: Elaboración propia.

Se necesitan 150 ladrillos para construir un muro de 6m^2.

Tarea 4: “En la construcción del muro, ¿cuántos bultos de cemento se necesitan para pegar los ladrillos?”

Para pegar 25 ladrillos se necesita medio bulto de cemento, para esta tarea los análisis quedan de la siguiente forma:

Tabla 23: Análisis escalar de la tarea 4, actividad 2.

	Área del muro (metros cuadrados)	Cemento (bultos)	
$\boxed{x\ \frac{6}{1}}$	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{x\ \frac{6}{1}}$
	6	3	

$1m^2\ x \frac{6}{1} veces = 6m^2$ $\quad$ $\frac{1}{2}\ bulto\ x\ \frac{6}{1}\ veces = 3\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 24: Análisis funcional de la tarea 4, actividad 2.

Área del muro (metros cuadrados)	Cemento (bultos)
1	$\frac{1}{2}$
6	3

$x\ \frac{\frac{1}{2}\, bulto}{1\, m^2} = \frac{1\, bulto}{2\, m^2}$

$1m^2\ x\ \frac{1\, bulto}{2m^2} = \frac{1}{2} bulto$ $\qquad$ $6m^2\ x\ \frac{1\, bulto}{2m^2} = 3\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

Se necesitan 3 bultos de cemento para hacer la construcción de un muro de 6m^2.

3.2.2. Análisis semiótico

Con respecto, al análisis semiótico, se puede observar que para las tareas 3 y 4 se dan enunciados en lengua natural y se espera que los estudiantes puedan convertir estos a esquemas de **isomorfismos de medida**, pues en estos casos no se pide representaciones como tablas. Este análisis es similar al que se detalla en el análisis semiótico de la actividad 1.

En cuestión, a los tratamientos de **escritura algebrica** se ve en ambas tareas, que en el análisis escalar el operador de una línea a otra cambia, pero en el análisis funcional se llega a encontrar una constante, para la tarea 3 es $k = \frac{25\, ladrillos}{1\, m^2}$, y para la tarea 4 es $k = \frac{1\, bulto}{2\, m^2}$.

Además, en el registro algebraico se tiene la siguiente especificaciones para la naturaleza de cantidades

Tarea 3

Cantidad extensiva (E)= $6\ m^2$

Cantidad intensiva (I)= $\frac{25\, ladrillos}{1\, m^2}$

Cantidad extensiva (E)= $150\ ladrillos$

$$6\ m^2\ x\ \frac{25\ ladrillos}{1\ m^2} = 150\ ladrillos$$

Tarea 4

Cantidad extensiva (E)= $6m^2$

Cantidad intensiva (I)= $\frac{1\ bulto}{2m^2}$

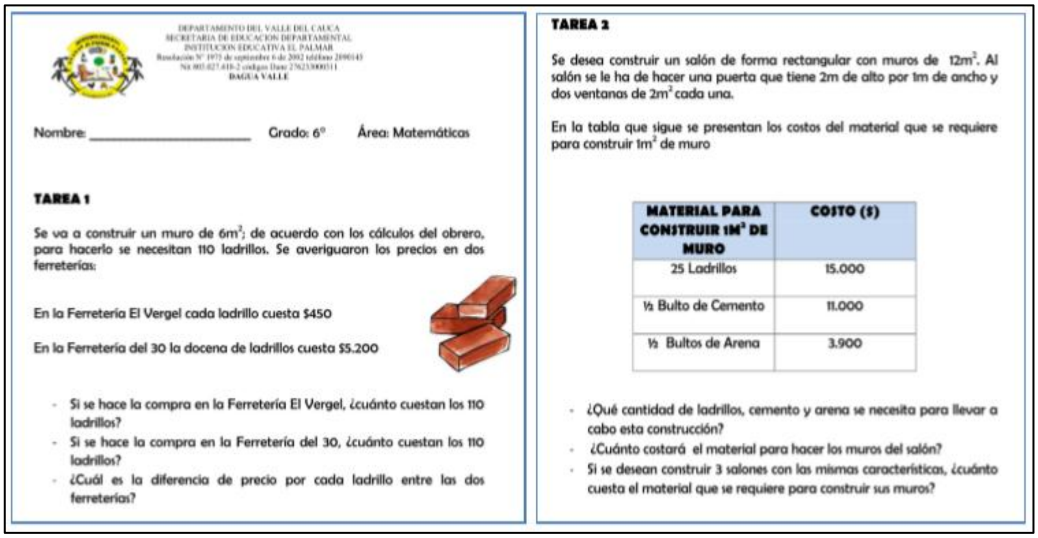
Cantidad extensiva (E)= $3\ bultos$

$$6m^2\ x\ \frac{1\ bulto}{2m^2} = 3\ bultos$$

3.3. Actividad 3

La actividad 3 fue creada por Ospina, M & Salgado, J. (2016), observando los mismos componentes del análisis realizado en las actividades 1 y 2.

En esta actividad se plantean 2 tareas, ambas tareas se observa una contextualización del problema y luego se realizan algunas preguntas, se evidencia en la siguiente ilustración (Ver anexo 3):



DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
DAGUA VALLE

Nombre: ____________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

TAREA 1

Se va a construir un muro de $6m^2$; de acuerdo con los cálculos del obrero, para hacerlo se necesitan 110 ladrillos. Se averiguaron los precios en dos ferreterías:

En la Ferretería El Vergel cada ladrillo cuesta $450

En la Ferretería del 30 la docena de ladrillos cuesta $5.200

- Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
- Si se hace la compra en la Ferretería del 30, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
- ¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?

TAREA 2

Se desea construir un salón de forma rectangular con muros de $12m^2$. Al salón se le ha de hacer una puerta que tiene 2m de alto por 1m de ancho y dos ventanas de $2m^2$ cada una.

En la tabla que sigue se presentan los costos del material que se requiere para construir $1m^2$ de muro

MATERIAL PARA CONSTRUIR $1M^2$ DE MURO	COSTO ($)
25 Ladrillos	15.000
½ Bulto de Cemento	11.000
½ Bultos de Arena	3.900

- ¿Qué cantidad de ladrillos, cemento y arena se necesita para llevar a cabo esta construcción?
- ¿Cuánto costará el material para hacer los muros del salón?
- Si se desean construir 3 salones con las mismas características, ¿cuánto cuesta el material que se requiere para construir sus muros?

Figura 14:Tercera actividad del experimento de enseñanza. Tomado de Ospina, M. & Salgado, J. (2016).

3.3.1. Análisis Cognitivo

Tarea 1: “Se va a construir un muro de $6m^2$ con los cálculos del obrero, para hacerlo se necesitan 110 ladrillos. Se hizo las averiguaciones de precios en dos ferreterías:

En la Ferretería El Vergel cada ladrillo cuesta $450

En la Ferretería del 30 la docena de ladrillos cuesta $5.200

Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?

Si se hace la compra en la Ferretería del 30 ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?

¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?”

Para el desarrollo de este problema se utilizará el análisis vertical y horizontal que propone Vergnaud de los campos conceptuales, y de ahí se hace el análisis de los criterios establecidos en la primera actividad.

“Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?

Tabla 25: Análisis escalar de la tarea 1, actividad 3, compra de ladrillos en la ferretería El Vergel.

	Número de ladrillos (unidades)	Precio de ladrillos (pesos)	
$x\ \frac{110}{1}$	1	450	$x\ \frac{110}{1}$
	110	49500	

$1\ ladrillo\ x\ 110\ veces = 110\ ladrillos$ $\qquad$ $450\ pesos\ x\ 110\ veces = 49500\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 26: Análisis funcional de la tarea 1, actividad 3, compra de ladrillos en la ferretería El Vergel.

Número de ladrillos (unidades)		Precio de ladrillos (pesos)
1	$\longrightarrow$	450
	$x\ \frac{450\ pesos}{1\ ladrillo}$	
110	$\longrightarrow$	49500

$1 ladrillo\ x\ \frac{450\ pesos}{1\ ladrillo} = 450\ pesos$ $\qquad$ $110\ ladrillos\ x\ \frac{450\ pesos}{1\ ladrillo} = 49500\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

"Si se hace la compra en la Ferretería del 30 ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?"

Tabla 27: Análisis escalar de la tarea 1, actividad 3, compra de ladrillos en la ferretería La 30.

	Número de ladrillos (unidades)	Precio de ladrillos (pesos)	
$x\ \frac{110}{12} = \frac{55}{6}$	12	5200	$x\ \frac{55}{6}$
	110	47666.6…	

$12\ ladrillo\ x\ \frac{55}{6}\ veces = 110\ ladrillos$ $\qquad$ $5200\ pesos\ x\ \frac{55}{6}\ veces = 47666.6\ ...\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 28: Análisis funcional de la tarea 1, actividad 3, compra de ladrillos en la ferretería La 30.

Número de ladrillos (unidades)		Precio de ladrillos (pesos)
12	$\longrightarrow$	5200
	$x\ \frac{5200pesos}{12\ ladrillos} = \frac{2600\ pesos}{6\ ladrillos}$	
110	$\longrightarrow$	47666.6…

$1ladrillo\ x\ \frac{2600\ pesos}{6\ ladrillos} = 450\ pesos$ $\qquad$ $110\ ladrillos\ x\ \frac{2600\ pesos}{6\ ladrillos} = 47666.6\ ...\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

"¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?"

Para saber cuál es la diferencia entre las dos ferreterías por cada ladrillo, basta con conocer el precio de un ladrillo en cada ferretería y calcular la diferencia.

En la Ferretería El Vergel cada ladrillo tiene un costo de 450 pesos; en la Ferretería del 30 la docena tiene un costo de 5200, entonces $5200 \div 12 = 433.3 \ldots$, si se realiza la diferencia se obtendrá $450 - 433.3 \ldots = 16.6 \ldots$, que la diferencia de precio por cada ladrillo es de 16.6… pesos por cada ladrillo.

Tarea 2: "Se desea construir un salón de forma rectangular con muros de $12m^2$. Al salón se le ha de hacer una puerta que tiene $2m$ de alto por $1m$ de ancho y dos ventana de $2m^2$ cada una.

En la tabla que sigue se presentan los costos del material que se requiere para construir $1m^2$ de muro.

MATERIAL PARA CONSTRUIR $1m^2$ DE MURO	**COSTO ($)**
$25\ ladrillos$	15.000
$\frac{1}{2}\ Bulto\ de\ Cemento$	11.000
$\frac{1}{2}\ Bulto\ de\ Arena$	3.900

Preguntas:

¿Qué cantidad de ladrillos, cemento y arena se necesitan para llevar a cabo la construcción?

¿Cuánto costará el material para hacer los muros del salón?

Si se desean construir 3 salones con las mismas características, ¿cuánto cuesta el material que se requiere para construir sus muros?"

Primero se debe conocer el área total del salón que se quiere construir, sabiendo que el área de cada muro es de 12 m^2 y teniendo en cuenta las dos ventanas las cuales tienen un área de 2 m^2 cada una y la puerta que también tiene 2 m^2, según lo anterior seria 12 m^2 x 4 = 48 m^2 y 48 m^2 – 6 m^2 = 42 m^2, entonces el área total será cuarenta y dos metros cuadrados, se halla restando los 6 m^2 que es el área que ocupan las ventanas y la puerta. Entonces el análisis para las preguntas de esta segunda tarea serán los siguientes:

Pregunta a:

“¿Qué cantidad de ladrillos, se necesitan para llevar a cabo la construcción?”

Tabla 29: Análisis escalar de la cantidad de ladrillos que se necesitan para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)	Cantidad de ladrillos (unidades)
1	25
42	1050

$\boxed{x\,\frac{42}{1}}$ $\qquad$ $\boxed{x\,\frac{42}{1}}$

$1m^2 x \frac{42}{1} veces = 42m^2$ $\qquad$ $25\ ladrillos\ x\ \frac{42}{1} veces = 1050\ ladrillos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 30: Análisis funcional de la cantidad de ladrillos que se necesitan para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)	Cantidad de ladrillos (unidades)
1	25
42	1050

$\boxed{x\,\frac{25\ ladrillos}{1\ m^2}}$

$1m^2 x \frac{25\ ladrillos}{1m^2} = 25\ ladrillos$ $\qquad$ $42m^2\ x \frac{25\ ladrillos}{1m^2} = 1050\ ladrillos$

Nota: Elaboración propia.

Se necesitan 1050 ladrillos para contruir un salón de $42m^2$.

Pregunta a:

“¿Qué cantidad de cemento, se necesitan para llevar a cabo la construcción?”

Tabla 31: Análisis escalar de la cantidad de cemento que se necesita para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)	Cemento (Bultos)
1	$\frac{1}{2}$
$\boxed{x\,\frac{42}{1}}$ 42	21 $\boxed{x\,\frac{42}{1}}$

$1m^2 x \frac{42}{1}\, veces = 42m^2$ $\qquad$ $\frac{1}{2} bulto\ x\ \frac{42}{1}\, veces = \frac{42}{2}\ bultos = 21\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 32: Análisis funcional de la cantidad de cemento que se necesita para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)		Cemento (Bultos)
1	$\boxed{x\,\frac{\frac{1}{2} bulto}{1\,m^2} = \frac{1\,bulto}{2m^2}}$	$\frac{1}{2}$
42		21

$1m^2 x \frac{1\,bulto}{2m^2} = \frac{1}{2}\ bulto$ $\qquad$ $42m^2\ x \frac{1\,bulto}{2m^2}\ = 21\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

Se necesitaran 21 bultos de cemento para construir un área de $42m^2$.

Pregunta a: **"¿Qué cantidad de arena, se necesitan para llevar a cabo la construcción?"**

Tabla 33: Análisis escalar de la cantidad de arena que se necesita para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)	Arena (Bultos)
1	$\frac{1}{2}$
$\boxed{x\,\frac{42}{1}}$ 42	21 $\boxed{x\,\frac{42}{1}}$

$1m^2 x \frac{42}{1}\, veces = 42m^2$ $\qquad$ $\frac{1}{2} bulto\ x\ \frac{42}{1}\, veces = \frac{42}{2}\ bultos = 21\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 34: Análisis funcional de la cantidad de arena que se necesita para la construcción de un salón.

Área del muro (metros cuadrados)		Arena (Bultos)
1	$\boxed{x\,\frac{\frac{1}{2} bulto}{1\,m^2} = \frac{1\,bulto}{2m^2}}$	$\frac{1}{2}$
42		21

$1m^2 x \frac{1\,bulto}{2m^2} = \frac{1}{2}\ bulto$ $\qquad$ $42m^2\ x \frac{1\,bulto}{2m^2}\ = 21\ bultos$

Nota: Elaboración propia.

También se necesitan 21 bultos de arena para dicha construcción.

Pregunta b: **"¿Cuánto costará el material para hacer los muros del salón?"**

Este punto se desarrollara con los datos dados en el problema.

Tabla 35: Análisis escalar del precio de los ladrillos que se necesitan para la construcción de un salón.

Cantidad de ladrillos (unidades)	Precio ($)
25	15000
1050	630000

$$x\ \frac{1050}{25} = \frac{42}{1} \qquad x\ \frac{42}{1}$$

$$25\ ladrillos\ x\ \frac{42}{1} veces = 1050\ ladrillos \qquad 15000\ pesos\ x\ \frac{42}{1} veces = 630000\ pesos$$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 36: Análisis funcional del precio de los ladrillos que se necesitan para la construcción de un salón.

Cantidad de ladrillos (metros cuadrados)	Precio ($)
25	15000
1050	630000

$$x\ \frac{15000\ pesos}{25\ ladrillos} = \frac{600\ pesos}{1\ ladrillo}$$

$$25\ ladrillos\ x\ \frac{600\ pesos}{1\ ladrillo} = 15000\ pesos \qquad 1050\ ladrillos\ x\ \frac{600\ pesos}{1\ ladrillo} = 630000\ pesos$$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 37: Análisis escalar del precio del cemento que se necesita para la construcción de un salón.

Cantidad de cemento (Bultos)	Precio ($)
$\frac{1}{2}$	11000
21	462000

$$x\ \frac{21}{\frac{1}{2}} = \frac{42}{1} \qquad x\ \frac{42}{1}$$

$$\frac{1}{2} bulto\ x\ \frac{42}{1} veces = 21\ bultos \qquad 11000\ pesos\ x\ \frac{42}{1} veces = 462000\ pesos$$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 38: Análisis funcional del precio del cemento que se necesita para la construcción de un salón.

Cantidad de cemento (bultos)	Precio ($)
$\frac{1}{2}$	11000
21	462000

$$x\ \frac{11000\ pesos}{\frac{1}{2} bultos} = \frac{22000\ pesos}{1\ bultos}$$

$$\frac{1}{2}\ bultos\ x\ \frac{22000\ pesos}{1\ bulto} = 11000\ pesos \qquad 21\ bultos\ x\ \frac{22000\ pesos}{1\ bulto} = 462000\ pesos$$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 39: Análisis escalar del precio de la arena que se necesita para la construcción de un salón.

Cantidad de arena (Bultos)	Precio ($)
$\frac{1}{2}$	3900
21	163800

$x\ \frac{21}{\frac{1}{2}} = \frac{42}{1}$ $\qquad$ $x\ \frac{42}{1}$

$\frac{1}{2} bulto\ x \frac{42}{1} veces = 21\ bultos$ $\qquad$ $3900\ pesos\ x\ \frac{42}{1} veces = 163800\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 40: Análisis funcional del precio de la arena que se necesita para la construcción de un salón.

Cantidad de arena (bultos)	Precio ($)
$\frac{1}{2}$	3900
21	163800

$x\ \frac{3900\ pesos}{\frac{1}{2} bultos} = \frac{7800\ pesos}{1\ bultos}$

$\frac{1}{2}\ bultos\ x \frac{7800\ pesos}{1\ bulto} = 3900\ pesos$ $\qquad$ $21\ bultos\ x \frac{7800\ pesos}{1\ bulto} = 163800\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Para hacer la construcción de los muros el salón se va $ 630000 en ladrillos, $ 462000 en cemento y $ 163800 en la arena en total se iria $ 1 255 800, en total.

Pregunta c: "**Si se desean construir 3 salones con las mismas características, ¿cuánto cuesta el material que se requiere para construir sus muros?"**

Tabla 41: Análisis escalar del precio de los materiales para la construcción de tres salones.

Cantidad de salones (unidades)	Precio ($)
1	1 255 800
3	3 767 400

$x\ \frac{3}{1}$ $\qquad$ $x\ \frac{3}{1}$

$1\ salón\ x \frac{3}{1} veces = 3\ salones$ $\qquad$ $1255800\ pesos\ x\ \frac{3}{1} veces = 3\ 767\ 400\ pesos$

Nota: Elaboración propia.

Tabla 42: Análisis funcional del precio de los materiales para la construcción de tres salones.

Cantidad de salones(unidades)	Precio ($)
1	1 255 800
3	3 767 400

$$x\,\frac{1\ 255\ 800\ pesos}{1\ salón}$$

$$1\ salón\ x\,\frac{1\ 255\ 800\ pesos}{1\ salón} = 1\ 255\ 800\ pesos \qquad 3\ salones\ x\,\frac{1\ 255\ 800\ pesos}{1\ salón} = 3\ 767\ 400\ pesos$$

Nota: Elaboración propia.

Para construir tres salones el presupuesto es de 3 767 400 pesos.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES ESCRITAS

Este apartado se dedica a hacer una presentación de las producciones escritas realizadas por los estudiantes de la Istitucion Educativa El Palmar, de grado sexto, dichas producciones fueron obtenidas como evidencia de la experiencia de enseñanza realizada por Ospina, M & Salgado, J. (2016). Como se observó en el capitulo anterior, en la experiencia de enseñanaza se plantearon tres actividades; la primera con el ánimo de hacer un diagnóstico para conocer desde qué punto se partia, buscando saber qué elementos tenían los estudiante para trabajar el concepto de la multiplicación; en la segunda, se quería conocer qué herramientas los estudiantes tenían o iban adquiriendo después de las intervenciones de la docente-inverstigadora y, para la última actividad los estudiantes han adquirido herramientas para comunicar de forma signifiativa el concepto de la multiplicación.

Conocinedo las intencionalidades con que fueron planteadas las actividades, ahora para este trabajo se realizará la presentación de los tratamientos que los estudiantes realizan en cada una de las actividades, descibiendo los tipos de registros utilizados por los estudiantes, y al mismo tiempo observando si en un mismo problema usa varios sistemas de registros de representacion semiótica, y cómo los registros se relacionan con la propuesta de Vergnaud.

Para tener en cuenta se observaron las producciones de 14 estudiantes, de los cuales se tomaran algunos ejemplos para representar en general.

4.1. Actividad 1

A continuación se muestra brevemente la descripción de cada tarea, acompañada del análisis semiótico respectivo.

TAREA 1

Andrés pagó $1200 por 8 dulces ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?

Respuesta: ______________________________

Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla.

Número de dulces	Precio ($)
2	
3	
	600
6	
8	1200
10	

- ¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
- ¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?

Figura 15: Actividad 1, tarea 1.

En la actividad 1 tarea 1, esta presentada en dos sistemas de representación semiótica, en lengua natural y en forma tabular.

Para la solución de esta actividad los estudiantes responden en términos generales usando dos sistemas de representación, la mayoría de los estudiantes usan en primer orden la representación de escritura aritmética y de segundo la de lengua natural. La forma de solución para estos estudiantes va acorde a los elementos básicos que han adquirido durante su proceso escolar.

En este orden de ideas, la representación en **lengua natural** que usaron los estudiantes cumplió con las características propias de este sistema, como lo son expresar ideas y relaciones entre objetos, la buena utilización de caracteres que forman frases y la intencionalidad coherente con el objetivo propuesto de cada respuesta. Adicional a las representaciones planteadas en el presente documento, los estudiantes usan la expresion aritmética, la cual cumple con las reglas del algoritmo de la división, la multiplicación y la suma. (Lo anterior se observa en las siguentes imágenes).

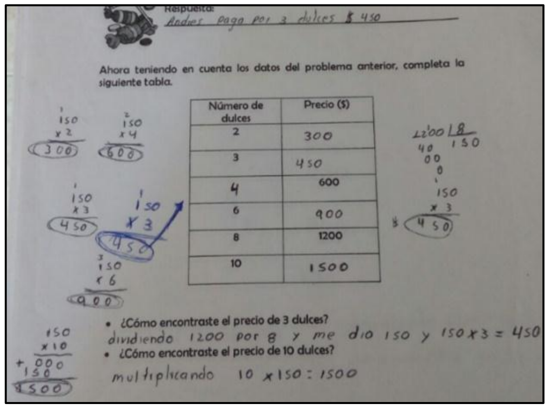
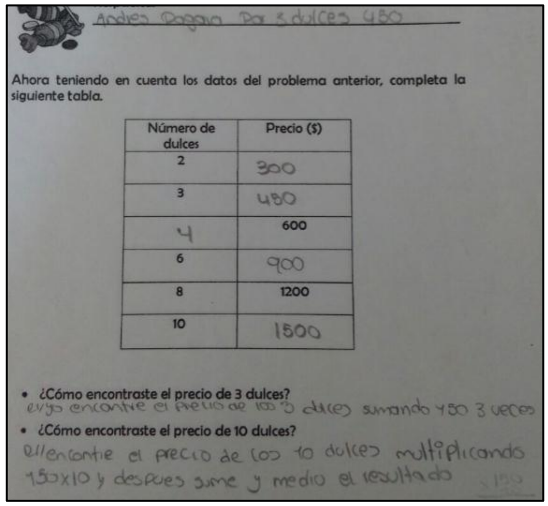


Figura 16: Solucion de E4, de la actividad 1, tarea1.

El estudiante realiza una división de 1200 entre 8 y el resultado que es 150, lo multiplica por 3 para hallar la respuesta a la pregunta ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?. Luego para completar la tabla propuesta multiplica el 150 por 2, por 3, por 4 por 6 y por 10. Y al final escribe en lenguaje natural el procedimiento realizado, contestando las preguntas ¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces? Y ¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?, aunque en la ultima pregunta hace una escritura aritmética.

En el siguiente ilustración el estudiante realiza una adicion iterada para hallar los precios que se piden, dependiendo el número de dulces.


Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla.

Número de dulces	Precio ($)
2	300
3	480
4	600
6	900
8	1200
10	1500

- ¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
- ¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?

Figura 17: Solución de E2, actividad 1, tarea 1 (parte 1).

Como se observa el estudiante escibe como halla los valores, dice: “yo encontré el precio de los 3 dulces sumando 150 tres veces” y “encontré el precion de los 10 dulces multiplicando 150 x 10 y después sume y me dio el resultado”.

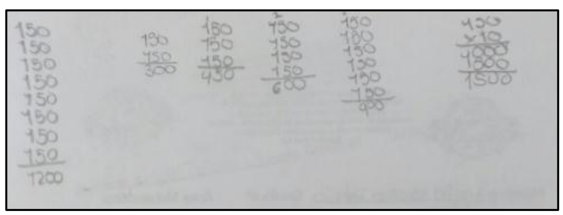
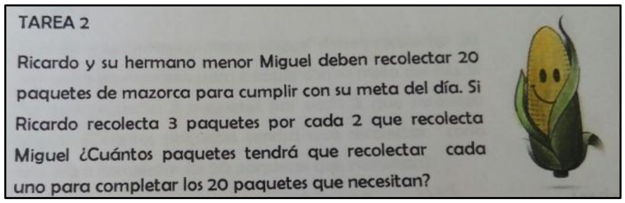


Figura 18: Solución de E2, actividad 1tarea (parte 2).

Se observa que realiza una suma iterada para hallar el precio de cada número de dulces.

Para las soluciones de la tarea 2 la gran mayoría de los estudiantes utilizaron el lenguaje natural, otros usaron expresiones aritmeticas, otros operaciones como multiplicaciones, divisiones, sumas y restas.

Recordemos la tarea:


TAREA 2

Ricardo y su hermano menor Miguel deben recolectar 20 paquetes de mazorca para cumplir con su meta del día. Si Ricardo recolecta 3 paquetes por cada 2 que recolecta Miguel ¿Cuántos paquetes tendrá que recolectar cada uno para completar los 20 paquetes que necesitan?

Figura 19: Actividad 1, tarea 2.

En ésta tarea la gran mayoría de los estudiantes utilizaron dos representacines: expresión artimetico y lengua natural, esta última fue utilizada como única herramienta por una pequeña porción del grupo y es importante decir que solo una persona usa la expresion aritmética como única opción.

Para el caso en el que los estudiantes usaron la **lengua natural**, la mayoría presenta ambiguiedad de acuerdo con lo que se le estaba preguntando, teniendo en cuenta que no le otorgaban un sentido lógico al problema planteado. La expresion aritmética usada por los estudiantes, muestra una solución adecuada en la operación, sin embargo no se percibe una asosiacón clara entre ésta y cómo usarla para llegar a la solución del problema planteado. (Lo anterior se observa en las siguentes imágenes).

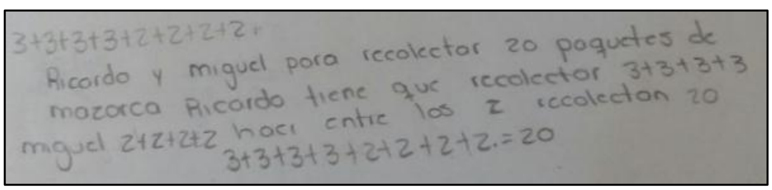


Figura 20: Solución de E3 de la actividad 1, tarea 2.

Como se observa el E3 realiza una suma iterada de dos valores diferentes, además realiza una explicación en lenguaje natural, este estudiante tiene una buena interpretación del problema y lo resuelve con éxito.

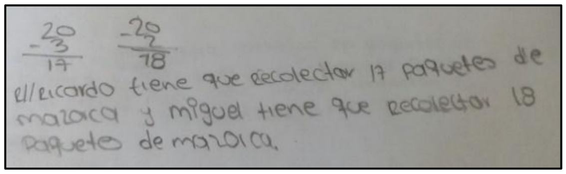


Figura 21: Solución de E2 de la actividad 1, tarea 2.

En esta solucion el E2 interpreta de una forma incorrecta el problema, dado que la solución que muestra es como si cada hermano debiera por aparte recolectar 20 paquetes de mazorca, realizando restas de veinte menos 3 y veinte menos 2, y realiza la explicación en lenguaje natural.

Para la tarea 4 (la tercera analizada), se plantea un ejercicio escrito en forma aritmética, se les pide a los estudiantes que inventen un problema en lenguaje natural que pueda ser resuelto con la multiplicación planteada.

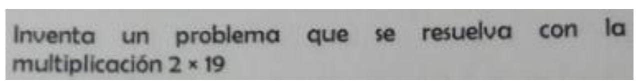

Inventa un problema que se resuelva con la multiplicación 2 × 19

Figura 22: Actividad 1, tarea 4.

En esta solución, se analizó el paso de la expresión aritmética al lenguaje natural, tomando aquí en cuenta la actividad cognitiva de la conversión, además analizar en qué momentos se realizan las otras dos actividades cognitivas, la formación y el tratamiento Duval (2004).

En la solución de esta tarea un gran porcentaje de estudiantes usó dos representaciones: la lengua natural y la expresión aritmética y solo un estudiante usó exclusivamente la lengua natural. Teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes en la **lengua natural** utilizada, se observó que intentaban expresar ideas y relaciones entre los números que se sugerían, también formaban frases de forma correcta, pero la intencionalidad de las respuestas no cumplió con las expectativas que se pedia, pues planteaban problemas que se solucionaban con sumas, restas, divisiones o simplemente eran ambiguos al intentar conectarlo con una operación; sin embargo hubo un pequeño porcentaje de estudiantes que si llegaron a plantear un buen problema. (Lo anterior se observa en las siguentes imágenes)

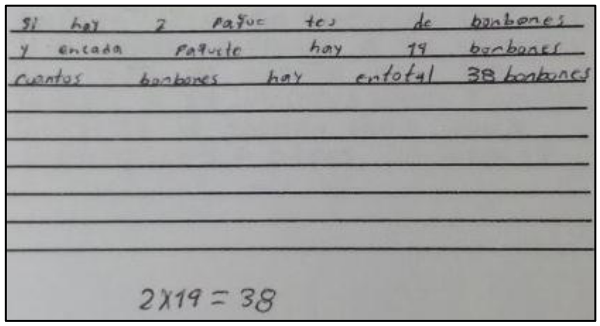


Figura 23: Solución de E11, actividad 1, tarea 4

En la solución del E11, muestra un enunciado que expresa la idea principal y la relación entre los números expuestos en la multiplicación. Por otro lado, la actividad cognitiva de la conversión de las representaciones se acerca pues cumple con los criterios de congruencia.

Ahora, se observará una segunda respuesta, a continuación:

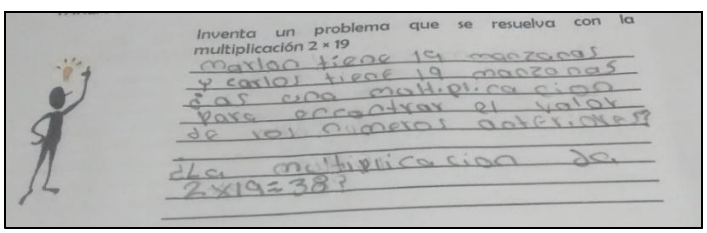


Figura 24: Solución de E2 actividad 1 tarea 4.

El enunciado que se observa tiene un buen comienzo, pues muestra la multiplicación que se debe realizar como adición iterada, pero la pregunta que formula no tiene la intencionalidad a la que debe llegar el problema. Por lo tanto, la actividad de formación no es acertada en el lenguaje natural.

Como se vio en las producciones analizadas, no se tiene un tratamiento con isomorfismo de medida entonces no se evidencia un acercamiento a la teoría de Vergnaud. Por último, se tiene que la gran mayoría de los estudiantes, no hacen conversión del registro de representación semiótica de tipo aritmético al registro representación en lengua natural, por la intención de las tareas que se les plantean.

4.2. Actividad 2

En la actividad 2 solo se analizan las tareas 3 y 4 que se muestra a continuación.

Figura 25: Actividad 2, tareas 3 y 4.

Los planteamientos de la ilustración, parten la conclusión a la que llegaron los estudiantes sobre cuántos ladrillos y cuánto cemento se necesitan para construir un metro cuadrado .

Para éstas tareas se espera que los estudiantes las puedan solucionar utilizando estrategias más notorias relacionadas con el esquema de isomorfismo de medida.

Ahora bien, en la tarea 3 la gran mayoría de los estudiantes usaron dos registros de representacion para expresar sus respuestas: la lengua natural y la expresión aritmética; un poco menos de la mitad de los estudiantes usó solo el lenguaje natural. En concordancia con lo que se esperaba ningún estudiante planteó o trazó algún esquema isomorfismo de medida, pero en la parte del lenguaje natural se vio que un porcentaje alto de estudiantes mejoró de manera significativa la escritura de sus respuestas, pues fueron coherentes y no se observaron ambigüedades en la comunicación de sus ideas, en ellas mensionaron las magnitudes o cantidades que se utilizaban y pedia en el ejercicio.

Por parte de la **lengua natural** los estudiantes expresaron sus ideas de forma acertiva, formaron frases coherentes y se notó la intencionalidad de las respuestas dadas por los estudiantes; en el caso de la expresión aritmética los estudiantes realizaron una operación correcta pero sin ninguna distinción para las magnitudes pues multicaron $25\ ladrillos$ por $6m^2$, dando como resultado $150\ ladrillos$ sin explicar que pasaba con la expresión m^2. (Lo anterior se observa en la siguente imágen).

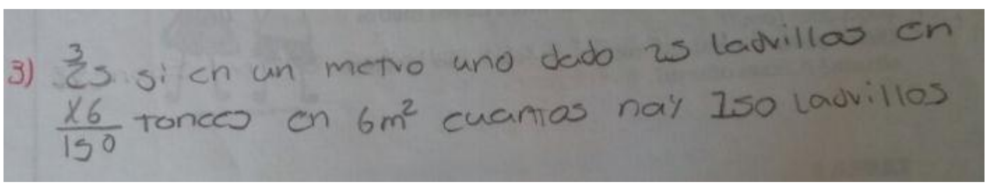


Figura 26: Solución de E1 de la actividad 2 tarea 3.

Para la tarea 4 un gran porcentaje de estudiantes usaron la lengua natural, solo dos estudiantes además de usar lengua natural usaron la expresión aritmética, sin embargo las dos producciones mostraban que no se realizó un tratamiento adecuado, ya que, sumaba dos cantidades con igual magnitud pero en la respuesta no tenia ninguna magnitud.

Por otro lado, las expresiones en **lengua natural** fueron coherentes, no se observó ambigüedad, y expresaba las ideas y relaciones con la intencionalidad que se pedia en el problema. (Lo anterior se observa en la siguente imágen).

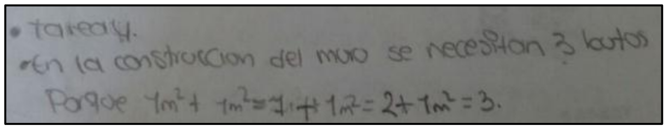


Figura 27: Solución de E13 de la actividad 2 tarea 4.

En las soluciones de esta actividad primaron las producciones en lengua natural, no se evidenció nungun esquema de isomorfimo de medida, pero en la parte de lengua natural hubo una mejor escritura, además que se noto el mejoramiento del manejo de las magnitudes que se debian trabajar.

4.3. Actividad 3

Esta actividad está compuesta por dos tareas, en las cuales se pretendió observar si los estudiantes comunican significativamente sus respuestas, dado que a este momento los estudiantes han tenido un mayor acercamiento a las estrategias relacionadas con las estructuras multiplicativas de Vergnaud.

En la tarea 1 se le presenta al estudiante un problema en lengua natural, con unas preguntas que debe solucionar.

TAREA 1

Se va a construir un muro de $6m^2$; de acuerdo con los cálculos del obrero, para hacerlo se necesitan 110 ladrillos. Se averiguaron los precios en dos ferreterías:
En la Ferretería El Vergel cada ladrillo cuesta $450
En la Ferretería del 30 la docena de ladrillos cuesta $5.200

d. Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
e. Si se hace la compra en la Ferretería del 30, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
f. ¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?

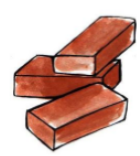


Figura 28: Actividad 3 tarea 1.

Un 64% de los estudiantes usaron tres representaciones para expresar las respuestas a la tarea: la lengua natural, la expresión aritmética y el esquema de isomorfismo de medida, y un

36% usó solo dos representaciones: la lengua natural y la expresión aritmética. Por parte de la **lengua natural** se observa que no hay ambigüedades, comunican las ideas de forma coherente; en el caso de la expresión aritmética los estudiantes realizan la operacion multiplicación de manera correcta.

En el caso de el **esquema de isomorfismo de medida para el análisis funcional o esquema sagital** los estudantes plantearon el esquema para hacer un análisis escalar, su tratamiento en dicho análisis fue correcto, se acercó a lo que se esperaba, pero cuando se observaba la producción escrita de la expresión aritmética, se daba cuenta que el estudiante lo que quería plantear era un esquema de isomorfimo de medida para un análisis funcional, sin embargo en nungun registro se evidenció la escritura algebraica con las unidades de medida. Es importante mencionar que solo un estudiante logro plantear y hacer el tratamiento preciso para un análisis funcional.

En la primera pregunta, “Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?”, la gran mayoría de los estudiantes no tienen dificultad al plantear como isomorfismo de medida la situación y realizar el tratamiento en el registro de representación de manera adecuada. Pero si se observa la operación multiplicación se da cuenta que no hace la operación que plantea el esquema, la cual seria $1\, ladrillo\; x\; 110\; veces = 110\; ladrillos$ y $450\; pesos\; x\; 110\; veces = 49500\; pesos$.

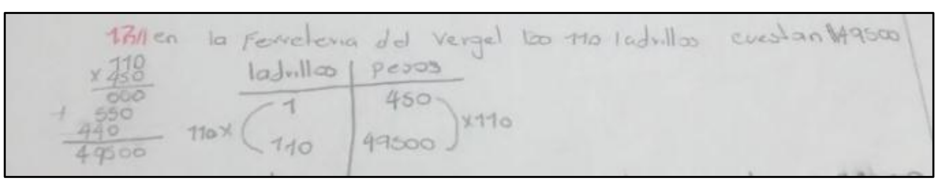


Figura 29: : Solución de E13 de la actividad 3 tarea 1, pregunta 1.

Otra solución en la que si plantea el análisis funcional, a continucion.

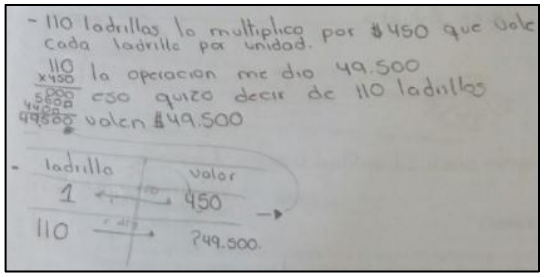


Figura 30: Solución de E3 de la actividad 3 tarea , pregunta 1.

Para la segunda pregunta, "Si se hace la compra en la Ferretería del 30 ¿Cuánto cuestan los 110 ladrillos?", se tomarán en cuenta las producciones de tres estudiantes las cuales muestran diferentes dificultades en la conversión y tratamiento, para Duval, y al acercamiento a la teoría de Vergnaud.

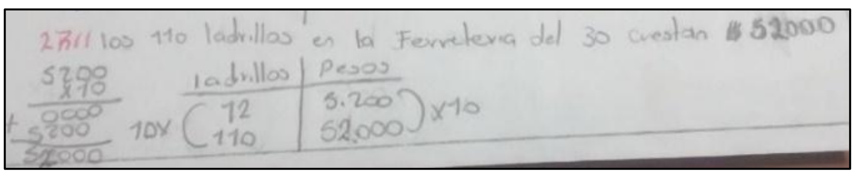


Figura 31: Solución de E13 de la actividad 3 tarae 1, pregunta 2.

El estudiante E13, plantea de forma adecuado el ejercicio en el esquema de isomorfismo de medida, pero cuando realiza el tratamiento cambia la cantidad de ladrillos de 110 ladrillos a 120 ladrillos, por este motivo no llega a la respuesta buscada, utiliza un análisis escalar.

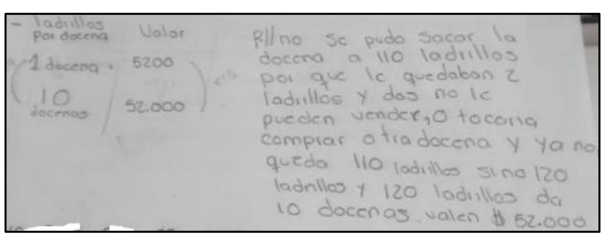


Figura 32: Solución de E3 de la actividad 3 tarea 1, pregunta 2.

El estudiante E3, plantea de forma adecuada el esquema realiza un buen tratamiento, da un excelente argumento en lengua natural, sobre el porque utilizo en las magnitudes “ladrillos por docena” y “ valor”.

En la última, pregunta “¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?”, se ilustra la respuesta algunos estudiantes, aquí se observa que algunos estudiantes obtinen el valor de cada ladrilloy hace la respectiva diferencia. (Lo anterior se observa en las siguentes imágentes).

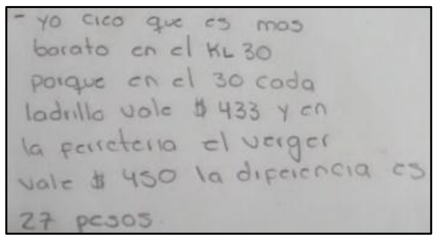


Figura 33: Solución de E3 de la actividad 3 tarea 1, pregunta 3.

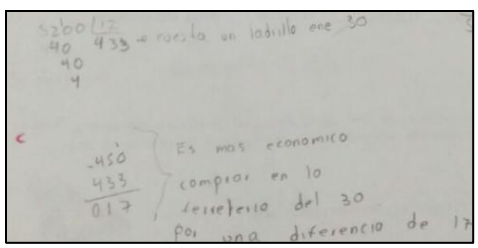


Figura 34: Solución de E4 de la actividad 3 tarea 1, pregunta 3.

Para la tarea 2 plantean preguntas a partir de una situación, además dan información en una tabla de los costos de algunas cantidades de materiales que se necesitan para contruir un salón.

TAREA 2

Se desea construir un salón de forma rectangular con muros de $12m^2$. Al salón se le ha de hacer una puerta que tiene 2m de alto por 1m de ancho y dos ventanas de $2m^2$ cada una.

En la tabla que sigue se presentan los costos del material que se requiere para construir $1m^2$ de muro

MATERIAL PARA CONSTRUIR $1M^2$ DE MURO	COSTO ($)
25 Ladrillos	15.000
½ Bulto de Cemento	11.000
½ Bultos de Arena	3.900

- ¿Qué cantidad de ladrillos, cemento y arena se necesita para llevar a cabo esta construcción?
- ¿Cuánto costará el material para hacer los muros del salón?
- Si se desean construir 3 salones con las mismas características, ¿cuánto cuesta el material que se requiere para construir sus muros?

Figura 35: Actividad 3, tarea 2.

En esta tarea un 57% de los estudiantes usaron la lengua natural, la expresión aritmética y el esquema y un 43% uso solo dos formas de representar la lengua natural y la expresión artimetica. La **lengua natural** en esta tarea se uso para dar una conclusión de los tratamientos del esquema de isomorfismo de medida y la expresion aritmética. Por otro lado en el esquema de isomorfismo de medida hubo una gran mayoría de estudiantes que planteaban el esquema para tratarlo con el análisis escalar y terminaron la solución multiplicando números de ambas cantidades. (Lo anterior se observa en las siguentes imágentes).

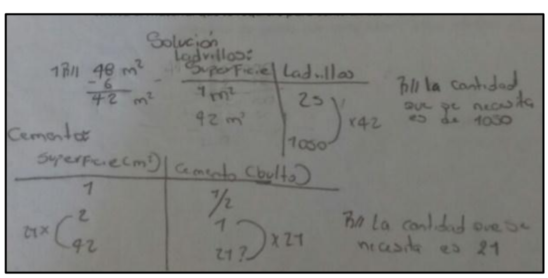


Figura 36: Solución de E13 de la actividad 3 tarea 2 , pregunta 1.

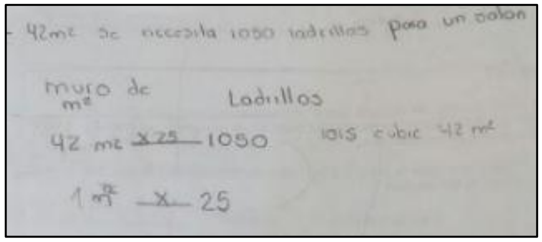


Figura 37: Solución de E3 de la actividad 3 tarea 2, pregunta 1.

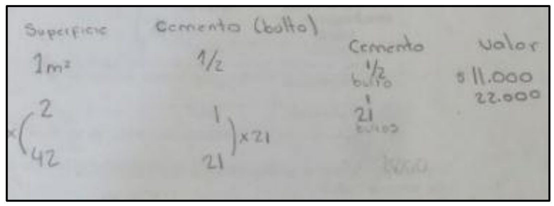


Figura 38: Solución de E3 de la actividad 3 tarea 2, preguntas 1 y 2.

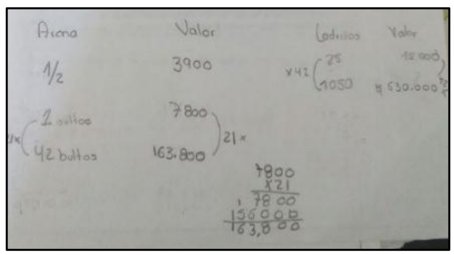


Figura 39: Solución de E3 de la actividad 3 tarea 2, pregunta 2.

Para la pregunta 3 de la tarea 2 en la actividad 3, ningún estudiante muestra solución.

En concordancia, con el análisis anterior de las tres actividades se puede decir que primó en la gran mayoría de las producciones la lengua natural, seguida por las expresiones artimeticas, y es de esperarse, dado que, es un primer acercamiento al concepto de la multiplicación, sin embargo finalizando en la actividad 3 se observo un gran avance en lo que tiene que ver con la propuesta de Vergnaud.

4.4. CONCLUSIONES

De acuerdo con el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes de grado sexto de una escuela rural de Dagua Valle referentes a la multiplicación, fue posible observar que no es suficiente que haya un desarrollo de un único registro de representación semiótico, se requiere de varios registros que permitan dar distintas miradas de la situación, para poder comprender las respuestas que se dan.

Algunos enunciados permitieron ver la covariación entre magnitudes y ayudaban al desarrollo y utilización de los esquemas de isomorfismo de medida propuestos por Vergnaud (1991), en otras tareas solo era realizar la operación indicada, sin referirse al conjunto de expresiones de las cantidades que aparecen en la situación y se dejan de lado para operar valores numéricos.

Respecto a las actividades cognitivas se destaca la situación de formación y de conversión, dado que las actividades están planeadas para que exista un cambio de registro de representación semiótica y los tratamientos que se podrían realizar en cada uno.

Se observó de acuerdo con el análisis que los estudiantes cambiaron la forma en que planteaban los esquemas de isomorfismo de medida, pues en los primeros registros de representación semiótica o en las primeras actividades los estudiantes no hacían referencia a dichos esquemas pues mostraban procesos de adición iterada, algunos otros estudiantes no realizaban dicha multiplicación.

Cuando los estudiantes realizaban el cambio de un registro a otro, se observó el avance desde las primeras actividades a las últimas, en algunas tareas no se logró la conversión, pero si hubo un acercamiento. Para el caso del tratamiento se vió que los estudiantes hacían análisis más conscientes brindando la oportunidad de conocer mejor el objeto matemático y no solo realizar un tratamiento meramente algorítmico.

REFERENCIAS

Arbeláez, G. Arce, J. Guacaneme, E. & Sánchez, G. (1999). *Análisis de Textos escolares de matemáticas.* Cali, Colombia: Universidad del valle.

Botero H, O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educacion básica a partir del estudio de la variación.* Tesis de maestría, Medellin, Antioquia: Universidad de Antioquia.

Castro, E. Rico, L & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (2004). Registros de representación, comprensión y aprendizaje. En Myriam Vega (Trad.). En R. Duval, *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (págs. 25-83). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval , & A. Saénz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (págs. 61-94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Goméz, D. & Valencia, J. (2010). *Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria.* Tesis de pregrado, Cali: Universidad del Valle.

Grossman, S. & Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal, septima edición.* México, D.F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Gutiérrez, S & Parada, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: en el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones.* Tesis de Maestria, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007*. Obtenido de http://www2.icfes.gov.co/docman/investigadores-y-estudiantes-de-posgrado/seminario-internacional-de-investigacion/seminario-2010/conferencias-principales-2010/1080-isabel-fernandes-carolina-lopera-y-victor-cervantes-resultados-de-colombia-en-timms-2007/fi

ICFES. (2016). *Informe nacional SABER 3°, 5° y 9°. Resultados nacionales 2009 - 2014*. Obtenido de http://www2.icfes.gov.co/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/pruebas-saber-3579/documentos/informes-saber-3-5-y-9/2323-resultados-nacionales-saber-3o-5o-y-9o-2009-2014/file?force-download=1.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Santafe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. En documento No. 3.* Santafe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3o y 4o de una institución educativa de la Educación Básica.* Tesis doctoral, Cali: Universidad del Valle.

Ospina, M. & Salgado, J. (2016). *La enseñanza de la multiplicación como isomorfosmo de medida: Aproximación discursiva.* Tesis de maestría, Cali: Universidad del Valle.

Ospina, M. & Salgado, J. (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de texto de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo.* Tesis de pregrado, Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Peñafiel, Z. (2017). *Análisis de enunciados relativos a la proporcinalidad como parte del campo conceptual multiplicativo, en cartillas de escuela nueva para grado quinto.* Santarder de Quilichao, Cauca: Universidad del Valle, sede norte del Cauca.

Rodríguez, D. & Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la investigación.* Barcelona, España: Universitat Oberta de Catalunya.

Schwartz, J. (1988). *Intensive quantity and referent transforming arithmetic.* In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 41-52): Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques. , 10*(2, 3), 133-170 (J. Godino, Trad.), CNRS y Université René Descartes.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). *Multiplicative conceptual field: what and why?* In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 41-60).: New York, NY: State University of New York Press.

ANEXOS

Anexo 1: Actividad 1

DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
Resolución N° 1975 de septiembre 6 de 2002 teléfono 2090145
Nit 805.027.418-2 códigos Dane 276233000511
DAGUA VALLE

Nombre: ______________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

TAREA 1

Andrés pagó $1200 por 8 dulces ¿Cuánto pagará por 3 dulces de los mismos?

Respuesta:

____

Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla.

Número de dulces	Precio ($)
2	
3	
	600
6	
8	1200
10	

- ¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
- ¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?

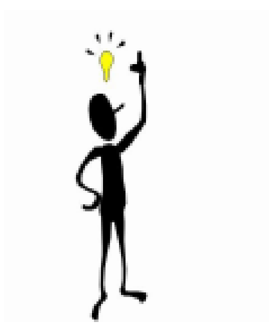
TAREA 2

Ricardo y su hermano menor Miguel deben recolectar paquetes de mazorca para cumplir con su meta del dí Ricardo recolecta 3 paquetes por cada 2 que recolecta Mi ¿Cuántos paquetes tendrá que recolectar cada uno p completar los 20 paquetes que necesitan?

TAREA 3

Para preparar 3 libras de arroz la señora restaurante requiere 18 pocillos de agua. ¿Cuá libras de arroz puede preparar con 36 pocillo agua?

TAREA 4



Inventa un problema que se resuelva con la multiplicación 2 × 19

____

____

____

____

____

____

____

____

Anexo 2: Actividad 2

DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
Resolución N° 1975 de septiembre 6 de 2002 teléfono 2090145
Nit 805.027.418-2 códigos Dane 276233000511
DAGUA VALLE

Nombre: ______________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

MAESTROS DE CONSTRUCCIÓN

Hoy intentaremos conocer sobre algunos elementos que se necesitan para construir un muro. Con la ayuda de los obreros vamos a obtener la información precisa sobre la cantidad de materiales necesarios para ello.

TAREA 1

Con tu grupo de trabajo pónganse de acuerdo sobre las preguntas que van a hacer a los obreros para averiguar lo que a ustedes les corresponde. Intenten ser lo más precisos posible para conseguir la información que necesitan.

TAREA 2

Indaga con tus compañeros:
¿Qué se entiende por la expresión "metro cuadrado" (m^{2})?
¿Qué quiere decir la expresión "un muro de seis metros cuadrados (6m$^{2)}$?
¿Será posible construir muros de 6m^{2} con distintas alturas? ¿Cuáles alturas?

TAREA 3

¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir un muro si la altura es 2m y el ancho 3m?

TAREA 4

En la construcción del muro, ¿Cuántos bultos de cemento se necesitan para pegar los ladrillos?

TAREA 5

Si se desea preparar la mezcla de cemento para construir el muro, ¿Cuánta cantidad de agua y arena se necesita?

Anexo3: Actividad 3

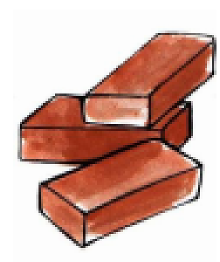
DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCION EDUCATIVA EL PALMAR
Resolución N° 1975 de septiembre 6 de 2002 teléfono 2090145
Nit 805.027.418-2 códigos Dane 276233000511
DAGUA VALLE

Nombre: ______________________ Grado: 6° Área: Matemáticas

TAREA 1

Se va a construir un muro de $6m^2$; de acuerdo con los cálculos del obrero, para hacerlo se necesitan 110 ladrillos. Se averiguaron los precios en dos ferreterías:
En la Ferretería El Vergel cada ladrillo cuesta $450
En la Ferretería del 30 la docena de ladrillos cuesta $5.200

d. Si se hace la compra en la Ferretería El Vergel, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
e. Si se hace la compra en la Ferretería del 30, ¿cuánto cuestan los 110 ladrillos?
f. ¿Cuál es la diferencia de precio por cada ladrillo entre las dos ferreterías?



TAREA 2

Se desea construir un salón de forma rectangular con muros de $12m^2$. Al salón se le ha de hacer una puerta que tiene 2m de alto por 1m de ancho y dos ventanas de $2m^2$ cada una.

En la tabla que sigue se presentan los costos del material que se requiere para construir $1m^2$ de muro

MATERIAL PARA CONSTRUIR 1M² DE MURO	COSTO ($)
25 Ladrillos	15.000
½ Bulto de Cemento	11.000
½ Bultos de Arena	3.900

- ¿Qué cantidad de ladrillos, cemento y arena se necesita para llevar a cabo esta construcción?
- ¿Cuánto costará el material para hacer los muros del salón?
- Si se desean construir 3 salones con las mismas características, ¿cuánto cuesta el material que se requiere para construir sus muros?