# FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN Y POTENCIALIDADES DE SU USO EN LA ESCUELA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali, diciembre de 2010

# FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN Y POTENCIALIDADES DE SU USO EN LA ESCUELA

Director de Tesis: Edgar Alberto Guacaneme S.
Profesor Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional

Estudiante: Ligia Amparo Torres Rengifo
Código 9302430

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali, diciembre de 2010

*A Julián, Tatiana y Natalia*
*por los sueños compartidos en silencio*

# Agradecimientos

Mis agradecimientos y reconocimiento por los aportes y reflexiones a este trabajo a los profesores: Luis Carlos Arboleda del área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle por ser la persona que acompañó este trabajo en su inicio y me regaló sus ideas alrededor del problema de Análisis y Síntesis y una manera de abordar un estudio histórico epistemológico pensando en los problemas educativos; al profesor Luis Puig de la Universidad de Valencia, quien guió mis inquietudes hacia el rescate de la teoría freudenthaliana en estos ámbitos colombianos; al profesor Edgar Fernando Gálvez del área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle por su empuje y confianza depositada en mi y su acompañamiento en las reflexiones fenomenológicas desde la perspectiva filosófica y a mi compañero y amigo Edgar Alberto Guacaneme, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, por las largas discusiones alrededor del papel de la historia de las matemáticas en los estudios en didáctica de las matemáticas y por permitir concluir este sueño.

# Resumen

Este trabajo de investigación parte del reconocimiento de una problemática general que se presenta, en la escuela, en el paso del pensamiento aritmético al algebraico con relación al corte didáctico que se presenta cuando hay necesidad de operar lo representado, en el caso de la ecuaciones, con la incógnita; como también, de la necesidad de rebasar ideas aritméticas que se oponen a la construcción del pensamiento algebraico. Se valida esta problemática con el estudio y análisis del estado del arte en didáctica del álgebra, tanto nacional como internacional. A partir de la ubicación de esta problemática se hace un estudio histórico epistemológico del concepto de ecuación algebraica en el marco de la teoría de Fenomenología didáctica propuesta por Hans Freudenthal, un estudio de fenomenología histórica en tres momentos fundamentales del desarrollo de las ideas algebraicas: el álgebra árabe en los trabajos de Al-khwarizmi, el álgebra del Renacimiento en el trabajo de Cardano y la del Siglo XVII en los trabajos de Descartes. Todo esto para volver a la problemática inicial y hacer algunas reflexiones didácticas que aporten a la discusión y propuestas curriculares que permitan potenciar la introducción del concepto de ecuación en la escuela a través de un campo semántico amplio.



Palabras Claves: álgebra escolar, fenomenología histórica, ecuaciones algebraicas.

# Presentación

*“…la matemática, a pesar de su edad, no está ni mucho menos condenada a una esclerosis progresiva por su complejidad creciente, sino que sigue intensamente viva, y se alimenta por las profundas raíces que tiene en la mente y en la naturaleza (Weyl, 1994)*

En este trabajo de investigación se articulan varios aspectos relacionados con la didáctica del álgebra; de una parte, el papel que juegan los estudios histórico-epistemológicos de las ideas algebraicas en propuestas de intervención en el aula, de otro, cómo el marco teórico de referencia propicia elementos que permiten observar fenómenos didácticos articulados a la designación de los objetos algebraicos y su campo de significación, donde el uso del sistema matemático de signos da cuenta de las tensiones, contenido – representación. De igual forma, cómo reflexiones en torno a propuestas de intervención en el aula articulan el conocimiento de la estructura formal del saber que se pone en juego, los resultados de investigación sobre problemáticas identificadas en la enseñanza y aprendizaje de ese saber y los de estudios epistemológicos.

En el Capítulo 1 se presentan algunas reflexiones sobre el campo de la Educación Matemática, en el cual se ubica esta investigación, una manera de abordar trabajos históricos epistemológicos para ser articulados en los estudios didácticos, la problemática de investigación, sus propósitos, justificación y estado del arte con relación a la problemática planteada.

Con relación al estudio histórico-epistemológico se opta por el método histórico- critico que permite realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje, en este caso del concepto de ecuación, cuando se ponen a prueba los hallazgos teóricos de los estudios matemáticos e histórico en los contextos educativos, para después volver a tener una nueva visión de la problemática histórica de ese saber, tal como lo plantea Filloy (1999).

La propuesta de análisis fenomenológico de un concepto o estructura matemática en lo relativo a la fenomenología histórica se adopta como marco teórico y metodológico, tal como lo propone Freudenthal y lo interpreta Luis Puig. Esta se expone en el Capítulo 2 como marco de referencia teórico de este trabajo.

En el Capítulo 3 se presenta el tratamiento hecho desde la perspectiva fenomenológica a tres momentos importantes de la consolidación del concepto de ecuación: el álgebra árabe, en el estudio de los trabajos de Al- khwarizmi; el álgebra renacentista con el análisis del trabajo de Cardano y el álgebra del siglo XVII a través del trabajo matemático de Descartes.

Así mismo, se asume los resultados de la investigación en álgebra, desde una perspectiva general, que permite dimensionar la producción pasada y el estado actual de la investigación, en dialéctica con la mirada puntual que arroja el estudio de fenomenología histórica para potenciar algunos elementos para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela, esto se articula y expone en el Capítulo 4 de esta tesis.

Todos los aspectos metodológicos y conceptuales utilizados en este trabajo para desarrollar y dar respuesta al problema de investigación son ellos mismos objeto de estudio en el desarrollo de este proyecto.

# Tabla de contenido

# 1 ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

## *INTRODUCCIÓN*

En este capítulo se presentan algunas reflexiones sobre el campo de la Educación Matemática, en el cual se ubica esta investigación, el papel de los trabajos históricos epistemológicos en los estudios didácticos, la problemática de investigación, sus propósitos, justificación y estado del arte con relación a la problemática planteada.

La presentación de la problemática de investigación parte de las inquietudes personales sobre el paso del pensamiento aritmético al algebraico de estudiantes en la escuela y se van concretando, estas inquietudes, a partir del estudio de investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas realizadas alrededor de estas temáticas sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en general y de las ecuaciones, en particular. Además, cómo problemas alrededor de estos procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra dan fundamento para buscar en la historia de las matemáticas, particularmente en la historia de las ideas algebraicas indicios de los tratamientos hechos en periodos específicos de esta historia de las ecuaciones y así formular la pregunta de investigación, los propósitos de dar respuesta a estas preguntas y la pertinencia de este trabajo. En esta dirección se formulan los objetivos y la justificación de la problemática de investigación.

## 1.1 EL CONTEXTO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Este apartado trata de la ubicación del problema en un contexto general en el campo de la Educación Matemática y en una perspectiva que articula estudios histórico-epistemológicos de un concepto con reflexiones didácticas.

### 1.1.1 El problema de la educación en matemáticas

Es innegable el impulso que las matemáticas le han dado al progreso de la humanidad, tanto en el aspecto científico como en el tecnológico; así también, es innegable la importancia de desarrollar un pensamiento matemático en todos y cada uno de los individuos de la sociedad, ya que en nuestra calidad de ciudadanos -aún para quien no tiene acceso directo a la ciencia y a la tecnología- a menudo necesitamos hacer cálculos y estimar algunos resultados, interpretar estadísticas, etc. y cada vez más, debido a la creciente complejidad y tecnificación de la sociedad moderna, nos vemos enfrentados a situaciones que requieren ser resueltas por un pensamiento que va más allá de del uso de una operatoria matemática.

En esta dirección, se espera que la formación escolar propicie el desarrollo del pensamiento matemático exigido socialmente, sin embargo, los elevados índices de fracaso escolar, la disminución progresiva de cultores por y para el saber matemático, la resistencia de los niños y jóvenes hacia el estudio de estas, y el bajo rendimiento en los cursos, expresan una problemática que caracteriza la situación de insatisfacción actual en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Esta problemática se atribuye a múltiples factores: problemas cognitivos de los alumnos, falta de formación de los docentes, programas curriculares demasiado extensos y no concatenados, problemas de infraestructura, etc. Estos problemas y posibles causas demandan de la comunidad de educadores matemáticos un replanteamiento de las estrategias tradicionales sobre la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

La consecución de este replanteamiento exige de sus actores una actitud abierta y permanente hacia la reflexión de su práctica y a la investigación en el contexto de la disciplina y en la actividad académica y profesional. Dicho replanteamiento debería considerar de suma importancia no solo la naturaleza del conocimiento matemático, las particularidades del pensamiento matemático, la evolución ontogenética y psicogenética de los conceptos matemáticos, las peculiaridades del aprendizaje matemático, entre otras, sino también sus nexos funcionales con la compleja actividad educativa como actividad social.

Como consecuencia de estos replanteamientos en los trabajos de investigación, en las prácticas de formación de docentes, entre otros; la posición, debe ser clara con relación a que “La enseñanza de las matemáticas tiene que contribuir a fomentar la ciudadanía inteligente e inquieta para todos los miembros de la sociedad. Más específicamente, la enseñanza de las matemáticas, debería darse a todo el mundo para ayudar a crear la perspectiva de “lo general”, es decir de los rasgos constitutivos y las fuerzas directrices esenciales que hay detrás del desarrollo de la naturaleza, de la sociedad y de la vida, de los seres humanos. Además, la enseñanza de las matemáticas tendría que capacitar a todos los alumnos en la escuela para entender, relacionarse con y actuar contribuyendo al papel de las matemáticas en el mundo” (Niss, 1998, p. 15).

Las implicaciones de estas consideraciones, tanto para la investigación en Educación Matemática, como para la docencia incluyen análisis diversos con relación a las matemáticas, el papel de las matemáticas en una sociedad, la sociedad, el individuo, los valores, etc. Estas implicaciones parecen utópicas. Aún así, conseguirlo sólo parcialmente representa un avance. En este sentido, el campo de la Educación Matemática a través de la investigación aporta elementos metodológicos y marcos teóricos para trabajar en esta dirección.

Este campo de la Educación Matemática se entiende, como las dos caras de una misma moneda: como campo de investigación y como campo de formación. Como campo de investigación estudia los fenómenos y problemáticas relacionados con la comunicación del conocimiento matemático en ámbitos escolares o extraescolares y como campo de formación se ocupa de todas las acciones, estrategias y reflexiones acerca de la construcción de pensamiento matemático de los estudiantes en la escuela o fuera de ella.

En este sentido es un campo extraordinariamente complejo, que ha de abarcar saberes relativos a las ciencias matemáticas y a otras disciplinas pertinentes a dar cuenta de las relaciones entre el conocimiento y los individuos en un ámbito escolar y en un determinado contexto socio-cultural; tales como: la psicología, la sociología, la epistemología, la historia de las matemáticas, etc. La Educación Matemática se debe entender como la que da cuenta de los factores que intervienen y hacen posible que las matemáticas se enseñen y se aprendan; en un sentido más amplio ella permite el reconocimiento de los factores que intervienen e interactúan en la comunicación de los conocimientos matemáticos; su objetivo primordial es el de permitir el desarrollo y la formación de un pensamiento autónomo y creativo. Es así, como la Educación Matemática no se limita a la labor del profesor de matemática en su salón de clase, en ella participan: el diseño de planes y programas de estudio, las teorías de aprendizaje, la formación de maestros, las metodologías de investigación en su propio campo... etc.

La Educación Matemática es un campo de investigación tendiente a constituirse en una disciplina, en este sentido plantea la necesidad de la conceptualización y su estructuración como un área del conocimiento con objetos de estudio propios. En esta dirección la investigación en Educación Matemática es una actividad fundamental tanto para la apropiación como para el desarrollo del conocimiento en ese campo, requisito indispensable para la conformación de una comunidad académica fuerte en este terreno.

Como campo de formación provee a la investigación de problemáticas de estudio que surgen en los procesos de construcción de pensamiento matemático y su relación con el uso y funcionalidad de esos razonamientos en la actividad social de los sujetos. A su vez se nutre de los desarrollos de la investigación y productos de esta, puesto que estos posibilitan análisis amplios sobre las problemáticas escolares o extraescolares de construcción de saberes matemáticos y el avance en la consolidación de una cultura matemática de la población.

En esta dirección, para efectos de esta investigación se asumen la Didáctica de las Matemáticas, la Educación Matemática y la Matemática Educativa con el mismo objeto de estudio. Asimilamos que en el ambiente europeo y particularmente en el francés se habla y se conceptualiza sobre la Didáctica de las Matemáticas, en él norteamericano en Educación Matemática y en Centroamérica esencialmente se habla de Matemática Educativa. En nuestro país en términos generales se han adoptado los vocablos Educación Matemática para hacer referencia al campo de investigación que da cuenta de los procesos de comunicación del conocimiento matemático y Didáctica de las Matemáticas a un campo referente a la comunicación de ese conocimiento matemático en un ámbito escolar. En forma simplista podríamos decir que la primera denominación tiene una connotación más amplia en cuanto a sus objetivos y a su objeto de estudio que la segunda. Sin embargo todas, estas acepciones tienen un objeto de estudio, de intervención y naturaleza común, puesto que estudian todos aquellos problemas relacionados con al enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para cuyo propósito confluyen varias disciplinas que aportan a la compresión de tales problemas y arrojan teorías y proceso metodológicos tanto para la investigación del mismo del campo como para su enseñanza.

Este trabajo de investigación se ubique en este campo de la Educación Matemática en tanto tiene como marco de referencia teórico la Fenomenología Didáctica, una de las teorías didácticas resultado de investigación en Educación Matemática, y además, centra su preocupación en la iniciación del álgebra en la escuela a través de la articulación de resultados de investigación histórica con reflexiones curriculares y didácticas para la apropiación del concepto de ecuación de forma significativa y funcional en la escuela.

### 1.1.2 La historia de las matemáticas y la investigación

Sobre el papel de la historia de las matemáticas en la Educación Matemática se han desarrollado múltiples estudios y propuestas articuladas a los mismos marcos teóricos (teoría de situaciones didácticas, teoría antropológica de lo didáctico, ingeniería didáctica, fenomenología didáctica etc.) que ha gestado el desarrollo de la didáctica de las matemáticas. Es decir, que el estudio y aporte de la relación entre historia de las matemáticas y Educación Matemática se ha convertido en línea de investigación obligada en los trabajos de la comunidad de educadores matemáticos (Barbin, 2000 pp.63-90, Niels, H. 2000 pp. 291-328, Bergé &. Sessa, 2003 pp.163-169, Tzanakis & Arcavi, 2000 pp. 201-240).

Una idea inicial, de la fortaleza investigativa de esta relación se debe a que, la historia de las matemáticas posibilita hacer potente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemática, enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes, señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente y apuntar las conexiones históricas de las matemáticas con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

La preocupación en este trabajo se centra en cómo los estudios históricos se articulan en la investigación en Educación Matemática. Es así, como podemos especificar que la forma como participa la historia de las matemáticas en la investigación en Educación Matemática está determinada por los objetivos que persigue ésta. Por ejemplo, para el tipo de investigaciones centradas en el saber matemático esta disciplina es fundamental, pues, da cuenta de los procesos de construcción y de comunicación del conocimiento matemático a través del tiempo y cuyos aportes dan luces en la construcción y comunicación de este conocimiento hoy en día. Es decir, estudia las tendencias sobre las matemáticas y su naturaleza, creencias sobre las matemáticas, posturas filosóficas, relaciones entre matemáticas y enseñanza etc., reflexión de tipo filosófico que permite vislumbrar el rumbo de las matemáticas en una época determinada y la relación de ésta con el medio cultural en determinados momentos y las condiciones y situaciones que motivaron el desarrollo de las matemáticas o estudio de la génesis de los conceptos que implica reflexión de orden epistemológico que permite determinar elementos dinamizadores en la construcción de un determinado concepto matemático, o que se constituyeron en obstáculos para dicha construcción.

Por lo tanto, consideramos que no hay necesidad de cuestionar la necesidad o la utilidad de estudiar la historia de matemáticas para la Educación Matemática puesto que hay producciones tanto nacionales (Arboleda 1993, Anacona, 2003, Vasco, 2002) como internacionales (Fauvel y Van Maanen, 2000), Katz (2000), y Jahnke, Knoche, y

Otte (1996) que han aportado en esta dirección, se trata entonces de visualizar el modo de usar estos estudios históricos en este campo, para efectos de este trabajo.

En esta dirección retomamos las ideas promovidas por Eugenio Filloy desde hace más de 25 años, sobre los estudios históricos críticos y que para el caso del álgebra, según los estudios que ha hecho Puig (1998) se puede sintetiza así:

El empleo de la historia tiene dos rasgos fundamentales: Uno concerniente con un análisis de las ideas algebraicas cuyo interés está en identificar las ideas algebraicas que son traídas a juego en un texto específico y la evolución de aquellas ideas, que pueden ser vistas comparando textos; en este contexto podemos considerar textos históricos como los actos de cognición y analizarlos como analizamos el funcionamiento de estudiantes, cuyas producciones también constituyen textos matemáticos.

El segundo rasgo crea una cercanía entre la investigación histórica y la investigación en Educación Matemática, que nos permite declarar que nuestra investigación histórica pertenece a la investigación en la Educación Matemática, y es caracterizada por un movimiento en doble dirección entre textos históricos y sistemas escolares. Es decir, que las problemáticas de la enseñanza y el estudio de álgebra son las que determinan que tipos de textos deben ser buscados en la historia y que preguntas deberían ser dirigidas a éstos; a su vez el examen de textos históricos conduce a describir el comportamiento competente, considerado como el comportamiento de un ideal o de un sujeto epistémico que posibilita contar con nuevos modos de entender el funcionamiento de los estudiantes y, por lo tanto, los requerimientos cognitivos para la apropiación del objeto o estructura matemática que se estudia y, finalmente, poder desarrollar modelos experimentales de enseñanza.

Así, se puede continuar, volviendo la atención a los textos históricos para hacer preguntas sobre ellos otra vez, ahora usando los resultados obtenidos con los estudiantes, es decir los resultados sacados del funcionamiento en los ámbitos escolares cuando todo lo qué ha sido extraído del análisis de ideas algebraicas son incorporados en el modelo de clases y en el análisis de la enseñanza y procesos de aprendizaje.

En nuestro caso particular, a partir de las problemáticas en la iniciación al álgebra y los problemas particulares en el aprendizaje de las ecuaciones que tienen que ver con la equivalencia, la simbolización, lo métodos de resolución, la resolución de problemas, entre otros, se ubican textos históricos de momentos fundamentales que abordan estas problemáticas en la constitución del concepto de ecuación y se vuelve la mirada a los ámbitos escolares para potenciar los hallazgos históricos.

## 1.2 CONTEXTUALIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

### 1.2.1 La problemática de investigación

La investigación en didáctica del algebra, la experiencia pedagógica personal, los análisis preliminares de propuestas curriculares nacionales y los resultados de pruebas de evaluación externas en la instituciones educativas, evidencian, dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra escolar. Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de generalización. Tal circunstancia se da, por ejemplo, cuando las letras comienzan a sustituir a los números, como elementos concretos que han sido básicos en el trabajo matemático, hasta el momento y pasan a ser representados por letras como incógnitas, números generalizados, parámetros o variables. Estas dificultades se manifiestan, entre otras, en errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operativamente con las expresiones algebraicas, errores de conversión cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje cotidiano, e interpretaciones erróneas de expresiones algebraicas, dados los diferentes contextos en que ellas aparecen y la falta de alusión a diversos fenómenos que organizan los objetos algebraicos asociados, por ejemplo, a la cantidad, la magnitud y las relaciones entre estas.

Con relación a las investigaciones revisadas, inicialmente, centramos la atención en las que abordan el paso de la aritmética al álgebra en el ámbito escolar, reconocido además por maestros y estudiantes, como un escenario donde se pone de manifiesto la problemática general antes anotada. Muchas investigaciones (Glaeser, G. 1981; Gallardo, A. y Rojano, T. 1988, Booth, 1984; Kieran 1980, 1988,1996; Mason, 1985; Ursini, 1990), dan cuenta de las dificultades u obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje del álgebra; maestros y alumnos experimentan estas en los cambios esenciales que se operan para pasar del pensamiento aritmético al algebraico.

Por lo tanto, la problemática del paso de la aritmética al álgebra va más allá de un hecho curricular, este momento,[1] el inicio del estudio de una etapa simbólica del álgebra ha sido caracterizado por varias investigaciones (Gallardo & Rojano, 1988) como la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar “lo representado”. En el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas, es decir, se requiere operar no solo los datos, sino también la cantidad a

[1] No es un momento, ni corresponde al cambio de un curso a otro, se va dando paulatinamente.

encontrar; por ejemplo, en ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Este corte didáctico se asume como un obstáculo didáctico de origen epistemológico.

El obstáculo en cuestión – operar sobre lo representado- se localiza en la frontera entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Lo que significa, que para dar paso al pensamiento algebraico se hace necesario romper con conceptos y hábitos del pensamiento aritmético, como por ejemplo la forma de uso del signo igual, como la orden de realizar una operación y no como equivalencia, la falta de cerradura de expresiones, no aceptar que una expresión algebraica puede ser una solución a un problema etc. Pero a su vez, se requiere extender nociones, conceptos, operaciones o relaciones de los objetos aritméticos a los algebraicos.

Esta etapa, donde se manifiesta el corte didáctico, se caracteriza por los cambios esenciales necesarios para transponer las fronteras entre el pensamiento aritmético al algebraico, por lo tanto, se convierte en un momento adecuado para la observación de fenómenos didácticos en dicho ámbito. Entre los resultados obtenidos, en los estudios que abordan estos fenómenos didácticos tenemos:

- La sintaxis algebraica no es adquirida en forma natural por el sujeto (Freudenthal, 1983)
- Cierta clase de errores frecuentes en el álgebra elemental es el resultado de una adaptación sistemática del conocimiento anterior (aritmético) que se ha generalizado o extrapolado en forma inadecuada (Booth, 1984, Matz 1982).
- Los literales en las expresiones algebraicas tienen diversas interpretaciones atendiendo a los componentes de símbolo, contexto y referente: el rol semántico, el sintáctico y el matemático (Wagner, 1981).
- En una situación problemática, en álgebra, en lugar de manejar un lenguaje natural con herramientas intuitivas – teorema en acción – los estudiantes tienen que manipular cadenas de símbolos, con reglas explícitas dando lugar a varias dimensiones del cambio: explícito – implícito, lenguaje simbólico – lenguaje natural, algoritmia - heurística (Vernaud &. Cortés, 1986).
- Un acercamiento a los símbolos literales como medio para describir las relaciones entre magnitudes, ofrece la perspectiva de modificar las ideas tradicionales sobre la relación entre los números y los símbolos literales (Davidov, 1974).

- Una enseñanza que utiliza modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales y situaciones concretas permite el planteamiento de las ecuaciones con significado (Bell, 1983).

- En el estudio de las dificultades de los alumnos al hacer uso del lenguaje algebraico se evidenció la existencia de áreas de dificultad: operaciones, naturaleza de los números, métodos primitivos (la estrategia del tanteo), métodos escolarizados (el esquema), interacción entre semántica y sintaxis del álgebra elemental, y el corte didáctico en el estudio de las ecuaciones lineales (Gallardo & Rojano, 1988).

- Los estudiantes usan letras en diversas formas – letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado y letra como variable – y tienen dificultad de captar las letras como números generalizados, piensan que las letras son más bien entidades que cantidades por lo que les cuesta manejarlos y confunden o no distinguen entre las letras que representan valores o números respecto a la medida o el objeto mismo (Kücheman, 1978- 1981, Enfedaque 1990).

De acuerdo a lo expuesto, se puede deducir que tanto el tratamiento de ecuaciones, como su conceptualización relacionada con la introducción de un lenguaje particular, como es el algebraico, en la escuela, son objeto de estudio en la investigación, cuyos resultados arrojan dificultades en su aprendizaje y preocupaciones para la enseñanza. Esta primera revisión permite tomar partido y decidir centrar como objeto de estudio, en este trabajo de investigación, el concepto de ecuación.

De otra parte, la investigación en las últimas décadas ha centrado su atención ya no en caracterizar, esta etapa, sino en proponer alternativas que permitan la continuidad o que cierren la brecha, o superen los obstáculos ya caracterizados en las investigaciones de los 80´s para pasar de un pensamiento numérico al algebraico. Estas alternativas y propuestas de aproximaciones al álgebra en la escuela, parten del hecho de que el álgebra elemental por su carácter más abstracto y en la cual las habilidades sintácticas requieren de un buen grado de competencia, demandan de la presencia de conceptos provenientes de la semiótica y análisis cercanos a la historia de las ideas algebraicas, entre otras disciplinas (Filloy, 1998).

Las diferentes aproximaciones (Rojano, Bell, Wheeler, Heid, Janvier, Charbonneau, 1998) han estado dirigidas a hacer este aprendizaje significativo para los estudiantes a quienes les haya sido propuesto, a través de situaciones de: generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que rigen las relaciones numéricas, resolución de problemas, resolución de ecuaciones apoyada en el uso de modelos concretos, funcionales y de la modelación de fenómenos físicos y matemáticos (Kieran, 1998).

El análisis de estas investigaciones ofrece una reflexión profunda sobre importantes características del pensamiento algebraico, sobre las dificultades que los estudiantes encuentran en el paso al álgebra y sobre las situaciones que pueden facilitar su desarrollo y presentan estudios que examinan la aparición y el desarrollo del álgebra desde diferentes perspectivas (generalización, histórica, resolución de problemas, modelación, funcional).

En esta dirección aparece como propuesta para la introducción al álgebra en la escuela a través de expresiones algébrica y resolución de ecuaciones la perspectiva histórica, en la cual se valoran situaciones importantes en el desarrollo de las ideas algebraicas que son llevadas como situaciones problemas al aula. Sin embargo, hasta aquí, no se encuentran investigaciones que no pasen directamente de las situaciones históricas, al aula sino que provean de elementos, según los estudios históricos, para comprender los fenómenos de enseñanza de los objetos algebraicos y particularmente de las ecuaciones; por ello se propone y se hace, en esta investigación, un análisis fenomenológico del concepto de ecuación, como concepto fundamental de las matemáticas que da cuenta de fenómenos y problemas importantes a tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de ese concepto.

Otro aspecto que ratifica a nivel nacional y en nuestro medio local, los problemas en el aprendizaje del álgebra y de las ecuaciones como objeto de estudio fundamental de esta área escolar, concierne al estudio de los resultados de la evaluación de los desempeños algebraicos de los estudiantes colombianos en las pruebas externas como TIMSS, Censales y Saber; es decir, validan las problemáticas encontradas en la revisión de la investigación internacional.

Teniendo como referencia los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias-TMSS (1997), las pruebas SABER (1991 - 1994) y las pruebas Censales (2002-2006) en álgebra, se muestra el nivel de desempeño de los estudiantes en los aspectos evaluados, que ha permitido visualizar dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra y potenciar la propuesta de este proyecto que pretende aportar elementos para una comprensión y significación relevante en la construcción de las ecuaciones en la escuela.

La prueba TIMSS evaluó en forma general a la población de estudiantes de séptimo y octavo grado de la Educación Básica[2], en seis grandes áreas temáticas (Martin M. O.

[2] Estudiantes entre 11 y 14 años.

and Kelly D. L. Editors, 1996, Sección 3.5): *Fracciones y sentido numérico*, *Geometría*, *Álgebra*, *Representación de datos, análisis y probabilidad*, *Medición* y *Proporcionalidad* y a través de 151 preguntas de los tipos de opción múltiple, respuesta abierta corta y respuesta abierta larga.

El área temática *Álgebra* es evaluada a partir de 29 preguntas, concentradas en los temas de *Patrones, relaciones y funciones y Ecuaciones y fórmulas*. 22 son del tipo opción múltiple, 3 son del tipo *respuesta abierta corta* y 4 son del tipo *respuesta abierta larga*. Específicamente en las preguntas clasificadas en el tema *Patrones, relaciones y funciones* confrontan al estudiante con sucesiones de gráficas o de números que exhiben regularidades o patrones y con relaciones numéricas expresadas mediante parejas ordenadas, tablas o enunciados verbales. En el tema *Ecuaciones y fórmulas* se evalúan los conceptos de expresión algebraica y ecuación, su utilización en la representación de situaciones verbales o propiedades formales de números, la solución de ecuaciones lineales en una y dos variables expresadas mediante enunciados verbales y/o simbólicos y la valoración numérica de una expresión algebraica.

Las 29 preguntas evalúan diferentes desempeños, como Conocimientos que se catalogan en dos subtipos de desempeño: Representando y Reconociendo equivalentes, Procedimientos rutinarios con Aplicando procedimientos rutinarios. Usando procedimientos más complejos, así mismo, en el tipo de desempeño Solución de problemas las preguntas se aglutinan en el subtipo de desempeño Solucionado. Y Razonamiento matemático.

De acuerdo al análisis de los resultados nacionales vs. los internacionales se concluye que el rendimiento de los colombianos en *Álgebra* es cuantitativamente inferior al rendimiento de los estudiantes internacionales[3].

Lo que se encontró en este análisis se sintetiza en:

- En el tema *Patrones, relaciones y funciones,* los estudiantes colombianos se desempeñan en forma acertada en la identificación y uso de patrones, si estos corresponden a arreglos gráficos o geométricos, pero que este rendimiento se torna deficiente cuando la identificación del patrón debe hacerse en arreglos

[3] Lo que significa, que en el ámbito nacional, más del 75% de los estudiantes de séptimo no contestan satisfactoriamente cerca de la mitad de las preguntas de Álgebra, y que la mayoría de los estudiantes de octavo responden de manera deficiente a la tercera parte de las mismas. En tanto que, a nivel internacional, solamente el 7% de las preguntas del área temática es difícil para los estudiantes de séptimo.

numéricos, presentados en tablas, parejas ordenadas o situaciones problemas expresadas en forma verbal.

- Las preguntas del tema *Ecuaciones y fórmulas*, del desempeño *Procedimientos rutinarios*, muestran un rendimiento deficiente aunque no tan bajo cuando los estudiantes, deben encontrar el valor de una incógnita ( ) en una ecuación lineal con una recurrencia de la variable y con coeficientes numéricos a operar, pero si la ecuación tiene más de una recurrencia de la variable y para su solución es necesario la utilización de un algoritmo, los niveles de respuesta son bajísimos. Se percibe que los estudiantes carecen de un método o procedimiento tanto para evaluar una expresión algebraica en x, conocido el valor de la incógnita, como para encontrar el valor de una de las incógnitas, cuando se conoce los valores de las otras incógnitas involucradas en el problema. En conclusión, los estudiantes colombianos de séptimo y octavo no han apropiado un procedimiento o algoritmo para la solución de ecuaciones lineales con más de una recurrencia de la variable, ni tampoco para encontrar el valor numérico de una expresión algebraica.

- Además, resuelven problemas en forma eficiente si el modelo de presentación de éste sugiere la solución, pero su rendimiento es deficiente si la resolución del problema implica tanto la expresión de la información en un modelo algebraico como un método de solución de éste. De lo anterior se puede deducir que los estudiantes de séptimo y octavo tienen deficiencias al pasar de una situación problema expresada en forma verbal o en tablas a otro modo de representación, eminentemente algebraico y estas deficiencias se hacen particularmente agudas si la situación no es directa e involucra varias relaciones u operaciones. Así mismo, se desvela una tendencia a limitar la percepción y las operaciones hacia una única relación, de las involucradas en un tipo de problema que involucra varias relaciones y tienden a considerar sólo la relación dada explícitamente e ignoran el hecho implícito. Esta tendencia de ignorar la relación implícita, deja percibir la ausencia de recursos interpretativos, en la matematización de situaciones problema

- Otros problemas relacionados con las ecuaciones y las expresiones algébricas aluden a cuando tienen que reconocer equivalentes, se identifica que los estudiantes pueden reconocer expresiones equivalentes sencillas, pero que presentan gran dificultad al reconocer propiedades formales de operaciones de números reales; de igual forma esta la tendencia a generalizar a partir de un sólo caso particular. Se percibe una deficiente significación de las expresiones algebraicas como formas de representación de relaciones numéricas.

- Sobresale una falta de conocimiento, por parte de los estudiantes nacionales, de un método para resolver inecuaciones lineales; es decir, se desconocen las propiedades de las desigualdades para resolver este tipo de problemas o se ignora una manera mecánica de abordar la situación a través de la transposición de términos, aún en casos simples en los que se trabaja con valores positivos.

A nivel nacional, El sistema de evaluación, SABER, diseñó y aplicó pruebas de logro cognitivo en las áreas de matemáticas y lenguaje entre 1992 a 2008 en los grados 3º, 5º, 7º y 9º de la Educación Básica. El propósito de las pruebas en matemáticas era determinar niveles de logro de la habilidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos en una etapa[4].

La prueba evalúa en álgebra, problemas rutinarios que requieren la interpretación de tablas y gráficas, en el nivel B. Problemas enmarcados en contextos no rutinarios que demandan realizar traducciones del lenguaje natural al tabular, gráfico o simbólico; reconocer patrones y regularidades que incluyen relaciones funcionales, interpretar y seleccionar métodos aritméticos, geométricos o algebraicos para su solución y manejar arreglos con más de una condición, en el nivel C y problemas en contextos hipotéticos, con varias o sin solución y demandan combinar operaciones y relaciones, crear modelos funcionales que den cuenta de situaciones especificas y realizar inferencias a partir de la decodificación de información presentada en diferentes lenguajes, realizar generalizaciones y justificarlas, en el nivel D. así mismo la prueba del grado noveno se evalúan tópicos de aritmética, estadística y probabilidad, geometría y medición y álgebra.

Tanto en séptimo como en noveno, nueve de cada 10 estudiantes se ubican en el nivel B; 7 de cada 10 en el nivel C, lo que significa que pueden relacionar y comparar conceptos matemáticos, reconocer patrones y regularidades, e interpretar y seleccionar métodos aritméticos, geométricos o algebraicos en la solución de problemas. Finalmente tres de cada 10 estudiantes de séptimo y cuatro de cada 10 estudiantes de noveno solucionan problemas que demandan traducciones entre diferentes tipos de representaciones, crean modelos funcionales que dan cuenta de situaciones específicas, deducen y realizan generalizaciones y las justifican.

---

[4] Con relación a la prueba de 7º y 9º, en el diseño se consideraron tres ejes estructurales: esquemas matemáticos (construcción y uso de operaciones, de relaciones y de combinaciones entre operaciones y relaciones), temáticas (sistemas numéricos, geometría y medición, sistemas de datos: 7º y 9º. Álgebra: 9º) y las habilidades (acciones del sujeto que revisten o una mayor o menor complejidad cognitiva y que pueden ser inferidas a partir del tipo de problemas que un alumno resuelve). Además, tres niveles de logro: Nivel de ejecución mecánica de algoritmos (B), Nivel de comprensión de conceptos (C) y nivel de solución de problemas (D).

En relación al álgebra, se evalúa sobre: conceptualización de funciones lineales y cuadráticas; establecimiento de expresiones algebraicas a partir de figuras geométricas y sus características; interpretación de ecuaciones lineales con una sola incógnita; manejo de la letra como número generalizado, incógnita y variable y traducción entre lenguajes natural y simbólico. En el análisis de los resultados se encontró que los desempeños con más bajo rendimiento, tanto en Cali, como en el Departamento del Valle en general, tiene que ver con:

- La falta de comprensión de un enunciado presentado en forma gráfica, donde las medidas son expuestas unas, en forma general a través de expresiones algebraicas y otras en números específicos no favorece que el estudiante encuentre una expresión simbólica que de cuenta de una relación entre esas medidas. También, se evidencia la falta de lectura correcta de una relación lineal, dada en registro de lenguaje natural, en una representación cartesiana. De igual manera la dificultad para reconocer una variación cuadrática entre dos magnitudes dadas en ese mismo tipo de registro cartesiano. Lo que deja de manifiesto que el paso o conversión de un registro de representación a otro no es una tarea obvia, sino que requiere de la actividad matemática en clase sea consciente de este problema y desarrolle estrategias vía la caracterización de estos registros y sus correspondientes procesos de traducción. Además se manifiesta una falta de apropiación conceptual de las relaciones lineales y cuadráticas.

- Es de anotar que desempeños con menos problemas se presentan cuando la lectura de una relación entre magnitudes, referidas al cambio, se debe hacer en un registro tabular (casi la mitad de la población resuelve correctamente el problema).

- Uno de los porcentajes de respuesta más bajos se presenta en preguntas donde el estudiante tiene que dar cuenta del significado de una ecuación expuesto mediante el modelo de la balanza. Lo que deja de manifiesto que no hay una apropiación conceptual de la igualdad en términos de equilibrio.

- Los estudiantes vallecaucanos de noveno, cuando tienen que poner en juego una relación entre cantidades que se comportan mediante un patrón determinado, no tienen un rendimiento adecuado. Es decir que pueden identificar una variación y describirla pero no la apropian, pues cuando se cambian los datos o se pregunta por una de las magnitudes involucradas en la relación no lo hacen.

El análisis de los resultados de pruebas externas importantes realizadas en Colombia ha permitido que se valide una problemática que a nivel mundial se viene trabajando desde los años ochenta en relación con las dificultades en la apropiación de un lenguaje algebraico por parte de los estudiantes en la secundaria y la falta de acercamientos significativos a los objetos algebraicos a través de la identificación y el trabajo de elementos fundamentales del pensamiento variacional. Lo que potencia la necesidad y pertinencia del trabajo abordado en este proyecto de investigación.

Todo lo anterior, nos permite afirmar que el tratamiento escolar de los polinomios, sus operaciones y relaciones, tal como lo plantea Freudenthal es un acercamiento anti didáctico, se comienza por los conceptos, sus definiciones y propiedades, en vez de por las situaciones, fenómenos y problemáticas que estos organizan. Lo que da como consecuencia un campo semántico restringido del uso, por ejemplo del concepto de ecuación.

Es importante resaltar que esta primera revisión del estado del arte sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela y el estudio de algunos resultados de pruebas externas, realizadas por organismos nacionales o internacionales permiten potenciar la intervención de la historia de las matemáticas al proveer de problemáticas como: la falta de apropiación de los sistemas matemáticos de signos en relación a la manipulación acertada de una sintaxis propia del álgebra, la permanecía en un pensamiento numérico que se opone a una nueva forma de concebir los objetos algebraicos, por ejemplo no reconocer el signo igual como relación de equivalencia, la misma conceptualización amplia del concepto de ecuación que favorezca el acercamiento a la resolución de problemas algebraicos, entre otros aspectos, hacen que vamos a la historia de las matemáticas con esos lentes de problemas y analicemos cómo en esta se dan estas situaciones, apoyados con un marco teórico que aporta elementos metodológicos, para hacerlo.

La ubicación de la problemática de investigación, en este sentido, se aborda en una dialéctica entre los desarrollos mundiales sobre la didáctica del álgebra y los problemas específicos tanto curriculares como de aprendizaje en el contexto local colombiano.

Es así como nos interesa determinar:

¿Qué elementos relativos a la conceptualización y operatividad de las ecuaciones se reconocen a partir de un estudio fenomenológico de este concepto en tres periodos de la historia del álgebra: el álgebra árabe (al-Khwarizmi), del renacimiento (Cardano) y del Siglo XVII (Descartes)?

Así como:

¿Qué potenciales implicaciones tendrían los elementos surgidos de esta fenomenología, para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en ámbitos escolares?

Un análisis de fenomenología histórica, es un marco teórico que privilegia este tipo de análisis, pues la identificación de los fenómenos que ha organizado el concepto de ecuación en diferentes momentos históricos del desarrollo de las ideas algebraicas permite establecer nexos entre los fenómenos, situaciones y problemáticas que el concepto organiza escolarmente, para favorecer la identificación de procesos curriculares que potencien un campo semántico amplio del concepto, hacia una formalización y objetivación de este objeto matemático en la escuela.

### 1.2.2 Justificación

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática, en este caso del concepto de ecuación, al describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos, lleva a estudios de diferente naturaleza, matemáticos, histórico epistemológicos y didácticos, lo cual posibilita una mirada del concepto o estructura no fragmentada. En consecuencia, al describir y caracterizar los fenómenos para los que la ecuación es un medio de organización, al considerar los fenómenos para los que actualmente es así, cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente, aporta elementos conceptuales fundamentales para establecer la relación entre fenómenos y concepto; por ejemplo, la relación entre situaciones de variación, cambio, relaciones entre magnitudes, cantidades, números, constantes y variables y los conceptos de ecuación y función.

De otra parte, esta clase de estudios y tal como lo plantea Freudenthal (1983), se hacen para servir a la organización de la enseñanza. Lo que significa, que este tipo de análisis esta al servicio de la didáctica y para el diseño curricular, específicamente. Este trabajo de investigación es importante en este sentido, pues da cuenta de esa articulación proponiendo elementos potencialmente útiles para los diseños de secuencias didácticas para la enseñanza del concepto de ecuación que retome, además de los elementos del análisis fenomenológico histórico, los resultados de la investigación más reciente en didáctica del álgebra.

Es importante resaltar, que este estudio, aquí propuesto, es coherente con las últimas propuestas curriculares adelantadas en Colombia. Tales propuestas corresponden a las expuestas en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los

Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2003) desarrollados a partir de la expedición de la Ley General de Educación (1994)[5].

En los Lineamientos Curriculares[6] uno de los aspectos fundamentales es el énfasis que hace a la necesidad de propiciar aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales y para ello propone superar los aprendizajes de conceptos y procedimientos e ir a procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender. De esta manera, se propone como uno de los objetivos fundamentales de la Educación Matemática, la formación de pensamiento matemático. Para lograr este propósito, se propone una organización curricular a través de tres ejes articulados, los conocimientos básicos[7], los procesos generales de pensamiento[8] y los contextos[9], con una actividad matemática en el aula alrededor de situaciones problema.

En este documento, el álgebra se encuentra vinculada al pensamiento variacional y a los sistemas algebraicos y analíticos. El pensamiento variacional se desarrolla a través del estudio de la variación y el cambio en contextos de dependencia de variables y evidenciado en el uso de diferentes sistemas de representación tales como los enunciados verbales, representaciones tabulares, gráficas cartesianas o sagitales, representaciones pictóricas e icónicas, instruccional (programación), mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas.

Además, se enfatiza en la necesidad de estudiar el concepto de variación y su representación, desde los primeros años de la educación básica (primaria), para lo cual

---

[5] A partir de la formulación de la Constitución de 1991 y de la expedición de la Ley General de Educación en 1994, se inicia un nuevo proceso de transformación en el sistema educativo del país, el cual se caracteriza por la presentación de unos fines y objetivos generales para la educación; la organización de unas áreas fundamentales y unas optativas; la autonomía otorgada a cada institución para organizar sus Proyectos Educativos Institucionales y sus propios currículos teniendo como base los lineamientos curriculares para cada área, que serían expedidos por el Ministerio de Educación Nacional; y en coherencia con toda la propuesta, una concepción distinta de los procesos evaluativos.

[6] Este documento se fundamenta en los resultados de las investigaciones, estudios y propuestas en diversos aspectos que a nivel nacional e internacional se han realizado en el campo de la Educación Matemática, y que plantean maneras distintas de concebir las matemáticas, la educación o formación matemática, la actividad matemática en la escuela y la estructura curricular en el área de matemáticas.

[7] Los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes se organizan en expresiones del pensamiento matemático y sus correspondientes objetos de estudio, así: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento estocástico y aleatorio y los sistemas de datos, y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

[8] Se proponen cinco procesos generales de pensamiento, uso de conceptos y procedimientos, razonamiento matemático, formulación y resolución de problemas, la comunicación y modelación matemática, los cuales fundamentan el desarrollo del pensamiento matemático a través de su presencia en la actividad matemática escolar.

[9] Los contextos aluden a los medios en los cuales se debe desarrollar la actividad matemática articulada en situaciones problemas propuestas a los alumnos, como son los contextos cotidianos, los matemáticos y los de otras disciplinas

se propone como herramientas conceptuales, de una parte, las tablas de datos, las cuales permiten iniciar el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que las involucran considera procesos aritméticos que conllevan a la comprensión de la variable y de las fórmulas. Esto último igualmente potencia el estudio de la función presentada en forma numérica. En cuanto a la variable, el uso de filas permite que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de reemplazos. Igualmente las tablas auxilian la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas que posibilitan la descripción de la variación o el cambio. Finalmente, esta herramienta facilita llegar a la graficación de situaciones problema inicialmente de tipo concreto que en un principio se reducen al primer cuadrante. De otro lado, se propone el estudio de regularidades y patrones; como una manera de percibir propiedades y relaciones entre magnitudes y cantidades que se pueden formalizar más tarde a través de expresiones algebraicas generales.

En la constitución del concepto de variación igualmente, son fundamentales los conceptos de ecuación, función y continuo numérico. Los primeros son una herramienta necesaria para enlazar patrones de variación y para predecir y controlar el cambio y para ello se recomienda el estudio de los modelos lineales, cuadráticos y exponenciales. En cuanto al continuo numérico, se considera que los procesos infinitos que encierra son fundamentales para el estudio de las aproximaciones sucesivas y de la divisibilidad. Igualmente se consideran otros conceptos como relevantes en la construcción de la variación siendo estos los de magnitud, proporcionalidad e incluso en una mirada más amplia el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica y con la variable como concepto nuclear.

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2003) se afirman el énfasis del pensamiento variacional en el estudio de la variación y el cambio. Para ello se describen los procesos que le son inherentes, esto es, los procesos de modelación de fenómenos físicos o eventos mundanos, la resolución de problemas y la generalización de patrones y relaciones entre números o hechos numéricos. Igualmente se desarrollan los requerimientos de los distintos sistemas de representación propuestos en la construcción del concepto de variación; para esto se plantean las transformaciones posibles en el interior de ellos y los tipos de conversiones que es necesario realizar entre dos clases de registros distintos. Lo anterior es consistente con las herramientas conceptuales presentadas en el documento de los Lineamientos y que ya fueron citadas antes.

Su relación con los sistemas algebraicos obedece a reconocer que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación. De allí se podría inferir la consideración de la disciplina como un lenguaje y para ello presenta como perspectivas de entrada la generalización de patrones numéricos mediante expresiones algebraicas y el proceso de modelación de fenómenos de diferente naturaleza. Postura que permite apreciar la relación entre los procesos variacionales y el álgebra, pero además, esa relación entre procesos empíricos, fenómenos y conceptos.

Estas orientaciones curriculares dejan apreciar la valoración de los contextos, los diferentes sistemas de representación de un objeto matemático y el papel fundamental que juega el lenguaje algebraico a la hora de describir y poder manipular la dependencia, la variación y el cambio. Lo que permite visualizar, que un estudio fenomenológico, como el propuesto en este proyecto aportaría a esclarecer este tipo de vínculos, teniendo en cuenta el sistema matemático de signos del álgebra escolar y los aportes de los desarrollos históricos en teoría de ecuaciones para comprende la relación entre las relaciones entre magnitudes y numéricas y los sistemas algebraicos.

Por último, la relación entre procesos empíricos y formalización de conceptos, en el sentido de describir los acercamientos intuitivos a los objetos y sus procesos de objetivación, debe ser uno de los propósitos de este tipo de trabajo.

### 1.2.3 Objetivos

#### *1.2.3.1 Objetivo general*

Aportar elementos conceptuales y procedimentales a la enseñanza y aprendizaje del concepto de ecuación, a partir del análisis de fenomenología histórica de este concepto.

Se trata de dar cuenta de elementos conceptuales relacionados con el significado de ecuación relativo al tipo de equivalencia, entre qué se da ésta, magnitudes y números cómo intervienen en esta relación, como se representa, a qué tipo de problemas da respuesta, entre otros aspectos. Además, de elementos procedimentales concernientes a las técnicas de resolución de ecuaciones, la relación entre coeficientes, raíces y grados de la ecuación, la naturaleza de las raíces desde la perspectiva numérica, geométrica y algebraica etc. Todo esto en el marco de un estudio de fenomenología histórica que arroja estos elementos a tener en cuenta en perspectivas didácticas.

#### *1.2.3.2 Objetivos específicos*

- Identificar fenómenos que organiza el concepto de ecuación en diferentes momentos del desarrollo de las ideas algebraicas (árabe, renacimiento y siglo XVII) a través del estudio de problemáticas histórico - epistemológicas de este concepto.

- Establecer posibles implicaciones de los elementos surgidos de esta fenomenología, para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en ámbitos escolares

Se trata de establecer relaciones o nexos entre los fenómenos, situaciones y problemáticas que el concepto de ecuación organiza históricamente para favorecer la identificación de procesos curriculares que potencien un campo semántico amplio del concepto de ecuación en la escuela.

## *1.3 ESTADO DEL ARTE*

Aquí se muestra una clasificación de la producción de la investigación en didáctica del álgebra que de una u otra forma tiene que ver con nuestro problema de investigación, se retoman las estudiadas tenidas en cuenta para efectos de hacer la propuesta investigativa y se añaden otras que hubo necesidad de revisar durante el desarrollo de este trabajo, por ejemplo, aquellas que vinculaban estudios históricos.

Es así, como desde el punto de vista didáctico, existe una amplia literatura que presenta gran variedad de resultados investigativos sobre el paso del pensamiento aritmético al algebraico en la escolaridad. Preocupación básica de los trabajos desarrollados en la década de los ochenta (Chevallard 1980, Gallardo y Rojano 1988, Filloy 1989). Como también, investigaciones que centran la atención en diversas propuestas – tanto para la investigación, como para la enseñanza - para abordar la iniciación al álgebra desde el trabajo aritmético y geométrico (Bednarz, Kieran, Lee 1996).

Además, con relación a la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra en la escuela, sobresalen compilaciones que organizan la producción investigativa en álgebra escolar desde diferentes perspectivas, para este trabajo, de esta clase, para este se han tenido en cuenta: la Agenda de investigación para la Educación Matemática, de la NCTM (1989), sobre el aprendizaje y enseñanza del álgebra, editado por Sigrid Wagner y Caroly Kieran; el análisis que presenta Carolyn Kieran en el *Hanbook del PME* del 2006, sobre la investigación en álgebra presente en los 30 años del PME. Así mismo algunas investigaciones analizadas en algunas tesis doctorales, como la de Pilar Bolea y el trabajo publicado en el volumen 9, numero 3 del 2007 en *Mathematical Thinking and Learning*, sobre el apoyo a la transición del razonamiento aritmético al algebraico, editado por Karen Koelluer. De igual manera el texto de Eugenio Filloy, Luis Puig y Teresa Rojano sobre el Algebra educativa, como una aproximación teórica y empírica en este campo, en todas ellas se estudiaran, fundamentalmente en los aspectos que tienen relación con el tratamiento y conceptualización de la ecuaciones.

La NCTM, en la publicación del 89, expone 15 reportes de investigación, en la segunda la agenda de investigación y la última parte algunas consideraciones teóricas. En los reportes de investigación, se enfatiza, desde la perspectiva temática, obstáculos cognitivos en el aprendizaje del algebra, estudios cognitivos sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje del algebra, la incorporación de sistemas tutoriales tecnológicos y en general de las tecnologías de la información en la enseñanza del álgebra. Así mismo, las reflexiones sobre teorías acerca de los sistemas de representación matemática y las perspectivas del álgebra escolar en el año 2000. Se proponen algunos tópicos sobre la agenda de investigación, relacionados con lo cognitivo y lo curricular. Es importante anotar, que en esta publicación, sólo sobresale el trabajo de Kieran, sobre las ecuaciones algebraicas y sólo en el último apartado, referente a algunas consideraciones teóricas (David Wheeler) se considera, el estudio del desarrollo histórico del álgebra (como sistema simbólico), para entender ciertos desarrollos u obstáculos en la escuela.

El trabajo de Carolyn Kieran (2006) en el marco de 30° congreso del PME, en el cual muestra el aumento de la producción de investigación sobre este campo del saber, desde el primer evento, hasta éste y como persisten problemáticas en el transcurso de estos años, y cómo se han incorporado nuevas miradas de la problemática. Al respecto, indica que las temáticas constantes abordadas en estos treinta años, aluden a La transición de la aritmética al álgebra, la resolución de ecuaciones en relación al tratamiento de constantes y variables y la resolución de problemas; y la incorporación, a partir de los 80s del análisis sobre el uso de herramientas tecnológicas en la movilización de pensamiento algebraico, el análisis de las múltiples representaciones presentes en este desarrollo y los procesos de generalización algebraica.

De igual forma, a partir del 90, el foco de atención puesto en el papel del profesor como dinamizador de ese pensamiento algébrico en la escuela y el privilegio de ambientes dinámicos modelados por el álgebra. En este trabajo se muestra además, los cambios desde la prospectiva teórica y metodológica, que se dan en los grupos de investigación, para abordar tales problemáticas, desde la atención puesta a los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra hasta el análisis de perspectivas enseñanza del álgebra en la escuela, las propuesta de marcos teóricos desde los análisis socio – culturales y la afectación de las tecnologías de información en los objetos matemáticos de análisis (funciones) y en la incorporación del análisis de poblaciones de nuevos niveles escolares. Todo esto ha demandado de la investigación resultados de otras disciplinas como la semiótica, las teorías de la información, la historia de las ideas algebraicas, entre otras, que aportan a la reflexiones sobre la movilización de significado de los objetos algebraicos en el aula y el papel del contexto en esta significación.

La publicación del 2007, editada por Koelluer, muestra la investigación que tiende a posibilitar la transición del pensamiento aritmético al algebraico, desde el trabajo con patrones de generalización, la comprensión del signo igual y las ecuaciones equivalentes, el conocimiento profesional del profesor asociado a la resolución de problemas, sobre conceptos algebraicos como el signo igual y las variables, entre otros.

El texto del Álgebra educativa, aborda problemas fundamentales de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, desde un marco teórico y metodológico particular (MTL), pero profundizando en cada una de sus componentes y fases; es así, como se evidencia el papel que juega la historia de la ideas algébricas, las perspectivas semiótica, la comunicación en el aula, los modelos de enseñanza, el trabajo experimental en la formación de pensamiento algebraico en la escuela y en la investigación educativa.

En este proyecto de investigación, se toma como punto de referencia algunos de estos trabajos y, atendiendo fundamentalmente a los enfoques y objetos de estudio, se han agrupado en: investigaciones que caracterizan el paso de la aritmética al álgebra en la escolaridad, investigaciones que abordan explícitamente el estudio de las ecuaciones, investigaciones que abordan la relación historia y epistemología del álgebra y su didáctica, investigaciones sobre propuestas de investigación y enseñanza para iniciar el trabajo formal algebraico y soportes para un estudio histórico epistemológico. Es importante resaltar que este intento de agrupación y clasificación de la investigación realizada desde los años 80 hasta la actualidad, de esta forma propuesta no es fácil, pues existen intersecciones y limites difíciles de trazar. Aquí se hace un intento por ello.

### 1.3.1 Investigaciones que caracterizan problemas en el paso del pensamiento aritmético al algebraico

La investigación en didáctica del álgebra es tardía comparado con el inicio y la preocupación de investigadores en temáticas relacionadas con la aritmética y la geometría que se inicia por psicólogos y pedagogos que pretenden dar cuenta de problemas de aprendizaje en los niños. El los 80´s esta investigación centra su atención en caracterizar las problemáticas que se enfrentan desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje en álgebra. En este grupo se destacan aquellas que se refieren al estudio sobre el corte didáctico entre el pensamiento aritmético y el algebraico (Chevallard 1980, Gallardo & Rojano 1988, Filloy 1989), en el momento en que aparece como necesario operar con lo representado, es decir, aceptar la existencia de *lo desconocido* para ser representado y operar sobre ello, e.g, operar la incógnita, en el caso de la resolución de ecuaciones.

Específicamente en este grupo están las que aluden a procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar, tales como: procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico, dificultades para que los alumnos puedan apropiarse de nociones algebraicas y dificultades en el uso del álgebra simbólica.

Los temas principales estudiados han sido: marco de referencia aritmético, las variables, las expresiones algebraicas, las ecuaciones y las funciones. En una síntesis de las conclusiones de estas investigaciones, se describen a continuación:

La permanencia de una cultura aritmética al inicio del estudio del álgebra escolar: Los estudiantes tienden a seguir empleando las técnicas, los procesos y las significaciones que les son familiares en aritmética. (Interpretan el signo igual como una señal que indica el resultado de operar algo y no como equivalencia. en relación con las expresiones algebraicas y ecuaciones les asignan un carácter unidireccional en el cual la respuesta va al lado derecho, no aceptan una expresión algebraica como respuesta, entre otras).

Limitaciones o desfases de orden cognitivo: Algunas características de los conceptos y operaciones matemáticas involucradas en el estudio del álgebra exigen el desarrollo previo de estructuras cognitivas no logradas por los estudiantes al inicio del álgebra escolar (No se alcanza, en la mayoría de los adolescentes, a conceptuar la variable como "variación", no pueden fácilmente percibir lo general en lo particular y viceversa; en cuanto a la resolución de ecuaciones se observa que la noción de operación inversa no está consolidada en el estudiante durante la transición de la aritmética al álgebra, entre otros).

De las que aluden a la construcción de una simbolización propia, que permita una comunicación más eficiente de las ideas algebraicas, se revisaron seis trabajos representativos (Kucheman, 1981; Usinskin, 1988; Booth, 1984; Enfedaque, 1990; Ursini, 1994; Grupo Pretexto; 1994). En ellas sobresale el estudio de cierta taxonomía sobre las interpretaciones que los alumnos dan a las letras (la letra evaluada, la letra no usada, letra usada como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable) y la indicación de que el nivel de desarrollo de pensamiento formal está asociado la noción de variable. Con respecto a la notación y al simbolismo algebraico Booth concluye, que los jóvenes tienen dificultad de captar las letras como números generalizados. Como piensan que las letras son entidades más no cantidades, les cuesta trabajo manipularlas y las toman como objetos. Estos trabajos concluyen que en la secundaria no se alcanza una correcta comprensión del concepto de variable.

### 1.3.2 Investigaciones sobre el estudio especifico de las ecuaciones

Como hemos anotado antes, hacer esta clase de clasificación, tiene el riesgo de caer en repeticiones dadas la características no disjuntas de los conjuntos que tenemos, sin embargo en este esfuerzo de análisis encontramos que en investigaciones como las de Kieran (1988, 1992, 2006), Filloy & Rojano (1985,1989,), Gallardo & Rojano (1997), Filloy (1998, 2001, 2008) dan cuenta de dificultades y tratamiento escolares en el aprendizaje y enseñanza de las ecuaciones, así:

Existen diferentes enfoques empleados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones y afianzados por la enseñanza: métodos intuitivos, estrategias de ensayo y error y métodos formales. Los primeros, incluyen, el uso de hechos numéricos, técnicas de contero o cubrir o llenar lo que falta, en el caso de expresiones con espacios en lugar de la incógnita, que son propuestos a los estudiantes. Al respecto señalan que el uso de estas técnicas intuitivas no puede generalizarse a ecuaciones, por ejemplo con números negativos, lo que obstaculiza el avance al uso de métodos formales de solución de ecuaciones. Así mismo, de técnicas de ensayo y error requiere mucho tiempo y se apoya fuertemente en la memoria, al menos que se usen proceso sistemáticos para acotar rangos de posibilidades de respuesta a la solución de las ecuaciones, lo que se reporta en estos trabajos es la evidencia que los estudiantes que usan estos métodos como primera aproximación a la solución de ecuaciones poseen una noción más desarrollada de equilibrio y equivalencia entre las componentes de la ecuación. El uso de métodos formales, como la transposición de términos, presenta algunas dificultades puesto que no hay una apropiación de la inversabilidad de las operaciones y la relación de equivalencia entre los miembros de la ecuación, aparecen formas mecánicas de manipulación de los términos. Por lo que estos reportes enfatizan en la necesidad de ir de métodos intuitivos a los formales haciendo énfasis en las propiedades de la igualdad a la hora de operar para solucionar ecuaciones.

Además, presentan estudios sobre el uso de ciertos modelos para introducir y dar significada al concepto de ecuación. Por ejemplo, el uso de modelos concretos para dar significado y resolver ecuaciones usando modelos geométricos y de equilibrio como las balanzas. Reportan que los estudiantes pueden lograr un buen control del modelo concreto pero, a causa de este, desarrollan una tendencia a quedarse y avanzar dentro de este contexto, pero puede retrasar la construcción de una sintaxis algebraica, ya que esta requiere salirse de la semántica del modelo concreto.

También, han indagando sobre el conocimiento de las estructuras generales de las ecuaciones por pate de los estudiantes cuando se ha llevado a cabo una enseñanza formal de estos objetos, es decir, el problema del reconocimiento, por ejemplo, de la linealidad o lo cuadrático. Al respecto reportan la dificultad que tiene los estudiantes al asignar una estructura a expresiones que envuelven varias combinaciones de operaciones, términos numéricos y literales. Así mismo tienen dificultades para reconocer ecuaciones y expresiones algebraicas equivalentes, hecho fundamental en la solución de ecuaciones., como también, la falta de reconocer las restricciones que determina si las transformaciones sobre la expresiones son posibles. Lo anterior esta relacionado con la apropiación del lenguaje algebraico y las reglas que lo rigen ligadas a la significación de las expresiones, el significado de la equivalencia en el signo igual y el papel de la operaciones visto a través de sus propiedades, como también, a la necesidad de ver una ecuación como una totalidad, más que como una acumulación de términos.

Para superar estos y otras dificultades reportadas, se proponen, por estos y otros autores, diferentes enfoques para introducir el álgebra y el concepto de ecuación que se tratan más adelante.

### 1.3.3 Investigaciones sobre la relación historia y epistemología del álgebra y didáctica del álgebra

De la agenda de investigación en álgebra escolar que plantean Wagner y Kieran (1989) Puig y Cerdán (1989, 1990), Puig (2006) toman algunas preguntas y problemáticas de investigación expuesta en esta y realizan varios estudios en los cuales a partir del estudio de método de análisis y síntesis en los griegos y el método de análisis en

Descartes analizan el proceso de resolución de problemas verbales aritméticos y algebraicos, utilizando estos métodos en ámbitos escolares. De esta manera prueban como el método de análisis y síntesis puede usarse como herramienta metodológica para obtener una representación de la estructura de un problema de traducción de problemas aritméticos de verbales de una etapa y de varias operaciones combinadas, de igual forma, cómo estos tratamientos puede permitir una transición a problemas propiamente algebraicos, apoyando así la transición a partir de la resolución de problemas al pensamiento algebraico propiamente.

El trabajo de Rojano (1996) sobre el papel de los problemas y la resolución de problemas en el desarrollo del álgebra, se plantea en una dirección, sobre la intervención de la historia en los problemas didácticos, distinta a lo trazado por Puig y Cerdán sobre este asunto. En este sentido, la muy conocida separación que los estudiantes tienden hacer entre la manipulación algebraica y su uso en la modelación y la resolución de problemas tiene su origen en una aproximación educativa basada en una visión simplificada del álgebra, que oculta el aspecto semántico de su gramática.

En este trabajo, se discute algunos factores decisivos en la evolución de la constitución del lenguaje algebraico para obtener enseñanzas de la historia que tienen influencias hoy en la enseñanza de este lenguaje. Mientras que es importante preservar una apreciación para el uso del álgebra como un soporte lingüístico indispensable en el desarrollo de las matemáticas, la concepción del álgebra simbólica como un vehículo lingüístico para "describir" la semántica de un problema de palabras, y por tanto permitiendo la resolución (automática) del problema, tiende a perder de vista los principales hechos en la constitución de un lenguaje algebraico.

Por ejemplo, esta concepción ignora lo siguiente: A pesar del hecho de que los algebristas de la mitad del siglo XVI eran consientes que el álgebra era aplicable a un amplio rango de problemas, fue la formulación de problemas que no eran ejercicios simples de aplicación los que guiaron su investigación en la segunda mitad de ese siglo. Esta investigación condujo a la generación de una teoría más general, con un propósito más allá de los límites originalmente definidos por los problemas mismos. Vale la pena mencionar, como ejemplos relevantes, los problemas geométricos tomados de los textos clásicos de la geometría griega, la naturaleza irreducible de las ecuaciones cúbicas (o el problema de trisección de un ángulo) el problema de las raíces negativas e imaginarias, y el de la relación entre los coeficientes de una ecuación y sus raíces. Este trabajo, trata sobre reflexiones de este tipo importantes a la hora de diseñar estrategias de intervención en el aula.

En el texto *Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching* (1996), Charbonneau expone los estudios desde Euclides a Descartes estableciendo la relación entre álgebra y geometría, a través del estudio del razonamiento algebraico en la geometría griega, de la pruebas geométricas de reglas algebraicas en Al-Khwarizmi y Cardano y la solución algebraica de problemas geométricos en Chuquet y Regiomontanus, los proceso de homogenización en Vieta y Descartes, para caracterizar formas de razonamiento algebraico y poner el análisis como centro del álgebra, y ésta como forma de manipular relaciones, así mismo, cómo se hace necesario en ese tipo de razonamiento romper con los compromisos ontológicos con lo numérico y geométrico y analiza el papel de la simbolización en ese pensamiento algebraico. Además, junto con Lefrevre, este autor hace otro estudio, sobre el lugar y la función de los problemas en los tratados algebraicos desde Diofanto hasta Vieta, en el cual indagan sobre los tipos de problemas que se han enfrentado algunos matemáticos de estos periodos, los métodos y propuesta de resolución de problemas presentes en los tratados de Diofanto, Al-Khwarizmi, Cardano y Vieta para develar el pale que esto juega en la producción de sus teoría algebraicas.

En este mismo texto, Radford, analiza las implicaciones para la enseñanza del estudio que realiza sobre la raíces del álgebra indagando sobre el papel de la geometría y la aritmética en el desarrollo del álgebra. El hilo conductor de este trabajo son las ideas de incógnita, formula y variable indagadas en los babilonios y la aritmética de Diofanto. Esta discusión histórica le permite al autor plantear algunas preguntas en relación con el papel de la geometría y la aritmética en la enseñanza de los conceptos básicos del álgebra, como los de incógnita y variable.

Por último, después de la revisión de esta literatura sobre la investigación que relaciona estudios históricos con los didácticos, de contar con algunos que abarquen distintos ámbitos de la constitución del concepto de ecuación, buscamos producciones de algunos matemáticos y estudios históricos específicos para llevar a cabo nuestro cometido sobre el estudio fenomenológico del concepto de ecuación.

Es así, que tomamos, textos de los matemáticos Al-Khwarizmi, Cardano y Descartes y estudio de esos documentos realizados por Gardies (2000), Rashed (1984, 1986) Hoyrup (1991), Vasco (1985), Acevedo (1997), Álvarez (2000), Puig (1998, 2006), que permiten valorar que el estudio del desarrollo histórico de los objetos algebraicos devela la actividad y el pensamiento matemático en estado de evolución y cómo el desarrollo de algoritmos para solucionar ecuaciones abrió caminos hacia la construcción del significado de ecuación y hacia la generalidad. Además, como un estudio de la solución de ecuaciones por aproximación desemboca, como es natural, en la generación de métodos numéricos, estableciéndose una relación entre álgebra y teoría de números. Asi mismo, cómo los sistemas numéricos han condicionado la posibilidad de resolver cierto tipo de ecuaciones.

Específicamente, en los trabajos de Al-kwarizmi la propuesta de una teoría de ecuaciones inicial, desde lo numérico, abre un campo rico para explorar la relación aritmética - álgebra y como los trabajos de Cardano con relación a las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuarticas abren una perspectiva de generalización de la teoría de ecuaciones a partir del estudio de la naturaleza de las raíces. En fin existe una literatura ampliamente valorada en el ámbito académico que puede permitir dar cuenta de una fenomenología histórica del concepto de ecuación de manera amplia y precisa, en este proyecto.

### 1.3.4 Investigaciones en propuestas metodológicas de investigación y enseñanza

La preocupación de otras disciplinas sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemáticas, como la lingüística, la semiótica, la historia y epistemología de las matemáticas, la informática, entre otras, han hecho posible la constitución de grupos interdisciplinarios en Educación Matemática y nuevos enfoques y propuestas de investigación en didáctica del álgebra, que caracteriza la producción de los años 90´s y posteriores. De igual manera los desarrollos en estas disciplinas se incorporan a las reflexiones didácticas, donde la puesta de atención sobre las características del lenguaje algebraico y la apropiación de este por parte de los alumnos se muestra en toda su complejidad epistemológica, didáctica y cognitiva.

El Grupo Azarquiel (1991) de Madrid, en uno de sus artículos, plantea una serie de interrogantes y sugiere algunas interpretaciones sobre la adquisición del lenguaje algebraico por parte de los alumnos con base en resultados de algunas investigaciones antes señaladas. Este grupo se plantea si en la enseñanza del álgebra lo más importante es utilizar el modelo sintáctico o el modelo semántico.

El modelo sintáctico, basado en la repetición de ejercicios de aplicación de reglas, conlleva a la transferencia inadecuada de reglas de una situación a otra, al aplicarlas en forma mecánica sin sentido para el estudiante. Así, el uso de modelos semánticos al iniciar el estudio del álgebra escolar sería una alternativa para que los estudiantes se apropiaran del lenguaje algebraico. Entendidos estos como modelos de enseñanza donde el énfasis está en el significado de los símbolos y en las propiedades que permiten transformar las expresiones o las igualdades algebraicas, tales modelos son más útiles en la enseñanza porque se refieren a las estructuras y a las propiedades y relaciones que permiten distinguir las transformaciones.

Los modelos sintácticos completan el trabajo iniciado con modelos semánticos. Lo que no parece adecuado es proceder al revés; debido a que los principiantes en álgebra no muestran conductas consistentes, ni en la observación de la estructura que tienen delante antes de iniciar las operaciones, ni en el momento de realizarlas.

Los estudios recopilados por Bednarz, Kieran., Lee (1996) permiten determinar diversas perspectivas de iniciación al álgebra, en las cuales se abordan aspectos fundamentales de la problemática planteada por las investigaciones antes registradas sobre el paso de lo aritmético a lo algebraico. Se propone, en estos trabajos el ingreso en una forma más natural y constructiva al álgebra en la escuela.

Perspectivas valoradas por la comunidad de educadores matemáticos: el establecimiento de actividades de generalización, el trabajo con el enfoque de funciones, el desarrollo de actividades de modelación, la resolución de problemas y el enfoque desde una perspectiva histórica.

La introducción del texto, hace una síntesis importante de estas perspectivas para la iniciación del trabajo algebraico en la escuela. Aquí se presenta, la manara como se perciben estos enfoques incluyendo otras investigaciones en esa misma dirección.

Desde la perspectiva de generalización, se concibe el álgebra como el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades (Mason 1985, 1988 y 1998) y por lo tanto las tareas y actividades escolares para involucrar a los alumnos en el álgebra esta relacionado con la expresión de la generalidad de patrones numéricos y geométricos y cuyo propósito es el transito de lo particular a lo general y viceversa. Esta perspectiva se presenta como una manera de pensar y actuar sobre los objetos algebraicos, donde en el proceso de constitución de éstos,

Estos trabajos (Cañadas, M. y otros 2008), centran la atención en el proceso inductivo, como estrategia heurística para resolver problemas matemáticos. Llegan a conclusiones como las siguientes: La generalización depende tanto de la detención de un patrón, como de la identificación de un patrón apropiado. Así mismo considerar que el lenguaje numérico es una herramienta fundamental par la identificación de patrones y la forma de expresión de la generalidad se hace generalmente en forma retórica, el paso o la expresión algebraica es complejo.

El uso de símbolos permite presentar el razonamiento de una manera concisa y así pueden tratarse a la vez grupos completos de ejemplos. Buena parte de la potencia que presentan los símbolos en matemáticas radica en su capacidad para expresar hechos generales. Sin embargo, explotar esta capacidad de los símbolos no resulta tan sencillo, sino que depende de que los símbolos se conviertan en algo tan familiar y significativo como los números a los que sustituyen.

El proceso de generalización comienza en cuanto se intuye un cierto esquema general subyacente, aunque todavía no se pueda expresar claramente. Este proceso lleva a hacer una conjetura sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. El proceso de justificar la conjetura trae consigo una nueva generalización y ahora el énfasis se desplaza de intentar averiguar qué puede ser verdadero a tratar de ver por qué ha de ser verdadero.

Davis y Hersh. (1980) hablan de varios significados particulares de generalización: cuando la hipótesis del primer enunciado implica la de un segundo, pero no a la inversa y la conclusión subsiste, cuando partiendo de un primer enunciado, la generalización no siempre va acompañada de conclusión igual. En tanto la generalización amplía el escenario en el que acontecen los hechos, su efecto es la expansión del material existente; la consolidación puede ser imposible si el estrecho marco inicial tiene peculiaridades vitales.

Coherente con lo anterior, es posible considerar que dentro del proceso de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es fundamental presentar situaciones donde se requiera establecer relaciones, identificar características comunes a los casos específicos y llegar a una lectura y escritura de lo general, que constituye el interés fundamental de este trabajo de investigación.

Mason y Gowar (1.999) analizan tres etapas que deben ser consideradas en el desarrollo de las actividades de generalización en el aula de clase: ver, decir y registrar. Para estos investigadores, aunque en las dos primeras etapas no es explícito el trabajo algebraico, sí es fundamental en el trabajo escolar, dedicar suficiente tiempo a ellas, el paso apresurado al registro simbólico de una regularidad conlleva a una pérdida de sentido y significado de la expresión general y a un obstáculo para el manejo adecuado de las expresiones algebraicas resultantes. El paso del *ver* y *decir* al *registrar*, es un paso difícil para los alumnos y por tanto debe ser realizado a través de suficientes y variadas situaciones diseñadas para tal fin.

Los contextos geométricos se caracterizan por facilitar la manipulación de la información así como la percepción de las características de la situación, además, la capacidad para percibir datos de figuras geométricas es de acceso a un mayor número de estudiantes y no necesariamente para los que son de mejor rendimiento. Las series numéricas por otra parte, aunque son menos visuales tienen la ventaja de poder aprovechar la mayor experiencia en el trabajo con los números y sus propiedades. Se da con alguna frecuencia el caso de estudiantes a quienes se les presenta la situación en un contexto geométrico y requieren llevar la información a series numéricas para poder ser tratados.

Un último aspecto para abordar en la etapa de la percepción de la regularidad, es el problema de la validez de las conjeturas hechas sobre las características de los casos específicos y si éstos son o no patrones generales de comportamientos. Es fundamental tener en cuenta que las conjeturas deben ser probadas para ver si expresan propiedades del patrón como un todo o si simplemente son un resultado de ejemplos particulares; pero en general es importante resaltar la importancia que tiene el desarrollo del pensamiento conjetural dentro del aprendizaje de las matemáticas, toda vez que sin hacer conjeturas y probarlas o refutarlas es imposible hacer matemáticas.

Lesley Lee considera el problema que se origina en la elaboración de fórmulas el hecho de encontrar un patrón algebraicamente útil. Ella afirma: “El hecho de que los estudiantes se fijen en un patrón irrelevante o inoperante, lo transforma en un obstáculo para la elaboración de fórmulas que se tomen como un procedimiento general o una relación entre cantidades”.

Es importante destacar, el énfasis hecho por investigadores como Kieran y Radford sobre las relaciones que se deben plantear explícitamente entre las diferentes aproximaciones al álgebra. Mientras para Luis Radford (1998) la generalización como norma epistémica no puede funcionar sola, sino que tiene que estar relacionada con otra probable norma epistémica, por ejemplo la resolución de problemas, para Kieran (1996), el paso entre las diversas componentes son esenciales para el aprendizaje del álgebra; según ella debe hacerse un minucioso estudio sobre el paso del álgebra como una herramienta de generalización al álgebra como una herramienta para la resolución de problemas o para el álgebra como una herramienta de modelación, fundamentado este estudio en el tipo de negociaciones que hacen los estudiantes en estos pasajes y sobre el tipo de dificultades que ellos conllevan tanto en el ámbito procedimental como en el ámbito de los conceptos algebraicos involucrados.

Desde esta perspectiva, abría que hacer algunas consideraciones al tratar el acercamiento al concepto de ecuación, pues como se observa, no hay una claridad sobre cómo la puesta en marcha de esta perspectiva a los estudiantes a una posesión de un sistema simbólico en pleno funcionamiento, requisito indispensable para la conceptualización y tratamiento de la ecuaciones.

En las Investigaciones en las perspectivas de modelación y funcional, la elaboración de modelos matemáticos que den cuenta de fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas y con los que además se puedan predecir eventos futuros es considerada por autores como Freudenthal y De Lange, la muestran como la actividad principal de los matemáticos. Esta actividad, al inscribirse situaciones de las matemáticas mismas, ha favorecido la construcción de teorías y el avance científico de la disciplina en cuestión.

En la literatura especializada es posible encontrar diversos nombres para designar el proceso de elaboración de modelos, y aún en algunos casos, se establecen relaciones y/o diferencias entre ellos. Algunos de estos nombres son: modelación, matematización, modelación y modelaje; términos que se caracterizarán desde varios puntos de vista a continuación.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la modelación se cataloga como un proceso presente en toda actividad matemática con el cual es posible describir las interrelaciones entre el mundo real y las matemáticas. Así, el proceso de modelación implica la identificación de una situación problemática real, la cual es puesta bajo observación con el objeto de formularla matemáticamente, es decir, encontrar los aspectos matemáticos presentes en ella; esto conducirá a la construcción del modelo, el cual será objeto de un proceso de validación a partir de su poder de predicción y descripción de los fenómenos que hacen parte de la situación problemática originaria.

Desde esta perspectiva, se distingue entre modelación y matematización; la modelación abarca el proceso completo de construcción del modelo, mientras que la matematización tiene que ver con establecer o identificar las matemáticas presentes en la situación problema. Para llegar a identificar tales matemáticas es preciso descubrir relaciones entre las variables de un problema, descubrir regularidades, transferir un problema de la vida real a un problema matemático, etc. Después de ello, el problema debe tratarse con herramientas matemáticas, para lo cual se puede representar una relación en una fórmula, utilizar distintos modelos, etc.

Para Castro (1997) al proceso de construcción y desarrollo de modelos matemáticos se le llama “modelización” y considerar igualmente, que matematizar una situación equivale a modelizarla. Para el autor el proceso de modelización consta de cinco pasos en los cuales se identifica un problema real; se interpreta matemáticamente llevándose a un modelo matemático; con herramientas y teorías matemáticas se soluciona el problema usando el modelo para describir la situación real y predecir nuevos fenómenos; se evalúa el modelo a la luz de la situación real y se realizan los ajustes necesarios. Las coincidencias entre estos pasos y el esquema propuesto en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas son evidentes, pudiéndose afirmar que las diferencias en ambos sólo se presenta en los términos utilizados. Igualmente, en este trabajo se considera al proceso de construcción de modelos como un poderoso instrumento de aprendizaje significativo puesto que es esencialmente una forma de resolución de problemas de la vida real, en la cual el problema es considerado como un todo.

Janvier (1996) enmarca la modelación en el trabajo de construcción del lenguaje algebraico y la define como un proceso que comprende dos fases: la fase de formulación y la fase de validación. En la fase de formulación se establecen las relaciones claves entre las variables del problema, lo cual puede hacerse a partir de medidas o conjeturas; posteriormente, se ejecutan una serie de transformaciones de tipo matemático que conducen a expresar el modelo en una expresión simbólica. La fase de validación comprende la constatación de la validez del modelo, a partir de la comparación con la situación que lo origina. Esta validación puede hacerse a través de mediciones, cálculos, etc, lo cual conduce a realizar ajustes en el modelo. Desde este enfoque, la fase de formulación es vital ya que en ella, desde la identificación de las relaciones claves entre las variables del problema, se deduce la regla que hace pertenecer esa relación a una familia de relaciones más general y que en últimas constituirían el modelo.

En Brasil, Salett Biembengut & Hein (1999) presentan un punto de vista sobre el uso de la modelación matemática como auxiliar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Una característica importante del marco teórico sobre el cual este equipo desarrolla su propuesta investigativa es la que considera que el aspecto estructural de las matemáticas posibilita la elaboración de modelos con lo cual se obtiene una mejor comprensión, simbolización y previsión de los fenómenos estudiados. En este trabajo, se establece una diferencia significativa entre modelaje y modelación. El modelaje matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo mientras que la modelación es propia de la escuela, en donde hay un programa a seguir, en un tiempo determinado, etc., con un tema único; es decir, en éste último hay una intención de tipo didáctico, lo cual no sucede en el modelaje, que se inscribiría más como una actividad propia de la disciplina matemática.

Una perspectiva de introducción al álgebra y al estudio de las ecuaciones se refiere a la propuesta de hacerlo a través de la resolución de problemas, esta se nutre de una mirada a la historia de las ideas algebraicas para determinar la importancia que ha tenido la resolución de problemas en su desarrollo y valorarla en los procesos de enseñanza. Algunos aspectos de esta perspectiva son tratados en el apartado 1.3.3.

Así mismo se propone una perspectiva histórica del álgebra que permita apreciar mejor la complejidad de los conceptos algebraicos y de la ruptura que ocurren durante su construcción. En esta perspectiva propuesta por la investigación en didáctica, se ubica este trabajo de investigación y algunos elementos, también, son tratados en el apartado 1.3.3 y el marco de referencia teórico de este trabajo.

De otra parte, Filloy (1998), propone un marco teórico que permita interpretar observaciones experimentales que dan cuenta de fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela y a su vez permita proponer nuevas observaciones que vayan desentrañando las relaciones entre las diferentes componentes que entran en juego, en esta actividad tan compleja.

Este marco teórico para la observación en Educación Matemática, denominado Modelos Teóricos Locales (MTL), propone cuatro componentes teóricas articuladas para enfocar el objeto de estudio: “(1) Modelos de enseñanza junto con (2) modelos para los procesos cognitivos y ambos relacionados con (3) modelos de competencia formal que simulan actuación competente de un usuario ideal del SMS ( sistema matemático de signos) y (4) modelos de comunicación, para describir las reglas de competencia comunicativa, formación y decodificación de textos, desambiguación contextual y circunstancial” (Filloy 1998).

En este sentido hay varios presupuestos de fondo, de un parte, una manera de mirar el lenguaje matemático, como un sistema, donde tanto el sistema formal abstracto y los principios del uso de ese lenguaje son complementarios en la observación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, de igual forma reconocer la diferencia entre la competencia de decodificar un mensaje y la de emitirlo. De otra, aceptar que un claro entendimiento de un fenómeno especifico en Educación Matemática, que se trata de observar, se hace concentrándose en un modelo teórico local que articule las componentes señaladas y no de acercamientos globales, que se hacen desde alguna teoría general de cierta disciplina.

Además, Filloy plantea la articulación entre la investigación y la enseñanza a través de los modelos de enseñanza y desde un marco general para el desarrollo curricular para el estudio de un modelo teórico local, que incluye: reconocer los conceptos en redes conceptuales; que los sistemas matemáticos de signos en el que se expresan los textos matemáticos sobre esas redes conceptuales tienen una estratificación asociadas a los diversos usos y a su vez, la relación con lo real es compleja y se manifiesta en la idea que un diseño curricular que no parta de la necesidad de ir de lo concreto a lo abstracto y, luego no complete la acción inversa producirá un SMS con un sentido diverso al que socialmente se le ha querido adjudicar; Los conocimientos matemáticos tienen diversos usos y por tal razón es importante tener en cuenta su relación con la solución de problemas cotidianos y su relación con lo social; reconocer la potencia del lenguaje de las matemáticas para tener en cuenta su función analítica e instrumental para construcción de otros saberes, a su vez, explicitar la relación entre la formación del profesor, cuando éste está directamente involucrado en desarrollos experimentales de la investigación educativa, con la teoría misma de investigación y en consecuencia la manera como permear la practica escolar del maestro por la investigación didáctica y a su vez, como la praxis permea la investigación educativa, esto último tensiona las tesis doctorales y la relación entre lo particular de una investigación y su relación con las problemáticas generales en Educación Matemática.

De esta manera Filloy presenta un esquema muy completo de articulación entre investigación en Educación Matemática, observación y experimentación y práctica educativa.

Esta mirada a reportes de investigación importantes en este campo, en contraste con algunas puntuales estudiadas con anterioridad (Kieran, Radford 1996) deja apreciar las posibilidades de investigación en álgebra, cómo no se agotan problemáticas que tradicionalmente se han ido abordando, porque surgen marcos teóricos y metodológicos que permiten seguir los tratamientos de estas problemáticas o se validan en el tiempo otros. La apropiación significativa y funcional del concepto de ecuación y los procesos operativos, sigue siendo una preocupación de investigadores y maestros, por lo tanto este trabajo aporta en este sentido, al determinar fenomenologías propias en dos momentos importantes del desarrollo del concepto de ecuación y en relación con los análisis didácticos para articular un modelo de enseñanza que permita la movilización de algunos aspectos relacionados con el significado y la operatividad de las ecuaciones.

Las investigaciones que proponen alternativas de investigación y de enseñanza para abordar el trabajo formal del álgebra desde diferentes enfoques, las que trabajan las ecuaciones y las que reconocen los estudios histórico epistemológicos en relación con los didácticos en álgebra, son centrales en este trabajo, puesto que en Colombia apenas empieza una reflexión en este campo, para que maestros e investigadores, interesados en el aprendizaje y enseñanza del álgebra, se apropien de sus resultados.

# 2 MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

## *INTRODUCCIÓN*

El marco teórico de referencia para el estudio histórico epistemológico y didáctico del concepto de ecuación en este proyecto está determinado, por la teoría de la Fenomenología Didáctica de Hans Freudenthal (1993), analizada y reinterpretada por Luis Puig (1997), de la cual se toma los elementos relativos a la fenomenología histórica y didáctica que permiten hacer estos análisis (histórico y didáctico) de una manera particular, tal como se describe a continuación.

Los aportes de Freudenthal al campo de la Educación Matemática han sido fundamentales para su consolidación y desarrollo, pues, no solo propone una manera de abordar los estudios e investigaciones de los conceptos y estructuras matemáticas con fines educativos sino que propuso reflexiones profundas sobre las problemáticas escolares en relación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas en contraposición a las posturas de la llamada matemática moderna. Todo esto lo hace a través de su significativa y clásica obra expuesta en textos como: *Mathematics as an educational task* (1973), *Weeding and Sowing - Preface to a Science at Mathematical Education* (1978), *Revisiting mathematics education* (1991) y *Didactical phenomenology structures* (1983), este ultimo es nuestra referencia fundamental para los estudios aquí realizados.

## 2.1 *ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO*

En el Capítulo 2: El Método del texto sobre Fenomenología didáctica de estructuras matemáticas, Freudenthal expone los elementos fundamentales de la fenomenología. Al respecto dice:

> Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos – fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas -…Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos; los números organizan el fenómeno de la cantidad. En el nivel superior el fenómeno de la figura geométrica se organiza mediante construcciones y demostraciones geométricas, el fenómeno “número” se organiza mediante el sistema decimal.
> Así se va subiendo en matemáticas hasta los más altos niveles: una abstracción continuada da un aspecto similar a los fenómenos matemáticos bajo un concepto – grupo, cuerpo, espacio topológico, deducción, inducción, etc.- (Freudenthal, 1983).

Como se puede apreciar son muchos los aspectos aquí tratados, de una parte el problema del fenómeno, al respecto indica, en ese Capítulo, que se debe considerar una antítesis entre el *noumenon*, como objeto de pensamiento y *phainomenon,* como objeto de la experiencia. Por lo tanto los objetos matemáticos serian *noumena,* pero como plantea una abstracción continuada, ese mismo objeto de pensamiento puede ser en otro nivel fenómeno.

Aunque Freudenthal no asume ningún compromiso filosófico en la relación *noumenon - phainomenon* si alude a lo que no se refiere en este sentido[10], pero de su lectura podemos intuir, con relación al fenómeno, una idea Kantiana como, todo aquello que es objeto de experiencia posible o lo que es objeto de experiencia matemática. Es decir, aquello que se sitúa en el tiempo y en el espacio (por lo menos en sus niveles iníciales) y que se manifiesta por medio de relaciones determinadas, como resultado de un proceso de abstracción y de objetivación, pues tal como, el mismo, ejemplifica el mundo de la cantidad o de los contornos, aunque tienen relación con hechos concretos requieren un proceso de abstracción para ser vistos como tales organizados por el concepto de número y de figura geométrica. En este sentido entendemos los fenómenos en este trabajo. Por lo tanto, tal como lo plantea Puig (1999, p. 68):

> El par fenómenos-medios de organización está definido así por la relación entre ambos y no por la pertenencia a mundos distintos y se despliega en una serie fenómenos/medios de organización en la que los medios de organización de un par

---

[10] “ Desde luego no me refiero a “fenomenología” en el sentido que puede ser extraído de los trabajos de Hegel, Husserl, y Heidegger”

> pasan a ser fenómenos del siguiente. Hacer fenomenología es entonces describir una de esas series o uno de sus pares.

En esta dirección, Freudenthal plantea que la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura o idea matemática significa describir el objeto de pensamiento en relación con los fenómenos para los cuales es medio de organización. Es decir, el análisis fenomenológico consiste pues en describir, cuáles son los fenómenos, para los que es medio de organización el concepto (en nuestro caso el concepto de ecuación). Esta descripción ha de considerar la totalidad de los fenómenos en su uso actual, así como para cuáles fue creado y a cuáles se extendió.

En el análisis Fenomenológico de un concepto o estructura Matemática, Freudenthal plantea que se deben distinguir varios tipos de fenomenología y que hay un orden de prioridades entre ellos:

- Fenomenología (fenomenología pura): se trata de los fenómenos relacionados con las matemáticas en este momento y con su uso actual. Las relaciones que se estudian son las que en este momento están establecidas y los conceptos o estructuras se tratan como “productos” cognitivos.

- Fenomenología histórica: examina los fenómenos para cuya organización fue creado el concepto, a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos.

- Fenomenología didáctica: se trata de describir fenómenos presentes en los sistemas educativos donde se estudia el concepto, es decir cómo se adquiere esa relación concepto-fenómeno en un proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Fenomenología Genética: Se trata de describir los fenómenos relacionados con el desarrollo cognitivo donde interviene el concepto y la relación entre estos (fenómeno- concepto).

Las relaciones fenómeno - medio de organización en los casos de la fenomenología histórica, didáctica y genética, se centran en cómo se produjeron, se adquirieron o se conformaron en la historia, en el sistema educativo y en el desarrollo cognitivo respectivamente, estas relaciones. Los conceptos se tratan en estos casos como “procesos”.

En el análisis Fenomenológico de un concepto o estructura matemática el orden propuesto es: Fenomenología, Fenomenología histórica, Fenomenología didáctica y en todo caso en último lugar la Fenomenología genética. Sin embargo, dadas las características del conocimiento algebraico, en este trabajo de tesis se estudia la fenomenología histórica donde aparecen elementos fundamentales de la fenomenología pura y la didáctica, donde hacen aparición elementos de la fenomenología genética.

En la reinterpretación del trabajo de Freudenthal que hace Puig (1998) explicita algunos aspectos sobre la naturaleza de las matemáticas que esta presente en el trabajo freudenthaliano, tomamos algunos elementos y los adaptamos a la temática particular del estudio sobre las ecuaciones que aquí se hace.

## *2.2 LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA PERSPECTIVA FENOMENOLÓGICA*

### 2.2.1 La constitución de objetos matemáticos como medios de organización de fenómenos

Freudenthal en sus trabajos, no hace un estudio explícito de la naturaleza de las matemáticas, pero consideramos que esta presente en muchas de sus afirmaciones, como lo veremos en el transcurso de esta exposición. Así mismo, no se puede perder de vista que el análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y los análisis didácticos y, no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas.Sin embargo, para efectos de este trabajo, consideramos que la concepción que tienen alumnos y profesores sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su construcción escolar incide directamente en la actividad matemática. Por ejemplo, Usiskin (1988) señala la relación que existe entre los usos de las variables en la enseñanza y las diversas concepciones de álgebra. Es decir, que si se considera el álgebra como una generalización de la aritmética, las variables se traducen como generalizadores de patrones y las destrezas algebraicas se centran en traducir y generalizar diversas relaciones. Si se considera como el estudio de relaciones entre cantidades, las variables se considerarán argumentos o parámetros y los gráficos como medios de representar estas relaciones funcionales, etc. y por lo tanto la destreza a desarrollar será la identificación de las variables dependiente e independiente, lo que significa determinar la clase de relación que se establece entre ellas. Si el álgebra se interpreta como un medio para resolver problemas, la actividad se centrará en el planteamiento, simplificación y resolución de ecuaciones y las variables serán incógnitas. Si se considera como el estudio de las estructuras, la variable será vista como una clase de objetos arbitrarios pertenecientes a una estructura determinada.

Coherente con las tesis de Freudenthal de que los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos y las matemáticas esos medios de organización, su estructuración y difusión. Podríamos decir que en el nivel más bajo los fenómenos que va a organizar las matemáticas, están en el mundo real, el mundo físico, con sus propiedades, las acciones, etc. y nuestras experiencias en ese mundo físico tienen que ver con esos objetos del mundo, sus propiedades y las acciones que realizamos sobre ellos, en consecuencia, los conceptos que organizarán a estos fenómenos no tienen una existencia anterior.

Al respecto Puig (1999, p.70.), afirma:

> Esta primera interpretación sirve para hacer potente la idea de que los conceptos matemáticos no están, pues, en un mundo ideal cuyo reflejo estudiamos, ni tienen un existencia anterior a la actividad matemática, ni ésta consiste por tanto en el descubrimiento de la geografía del mundo en el están esos objetos. Pero tampoco, al ser creados como medios de organización de fenómenos del mundo, se instalan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. La interpretación anterior no es afortunada en este punto porque no toma en cuenta que Freudenthal no se queda en el nivel más bajo describiendo la actividad matemática simplemente como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en matemáticas, Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización lo acompaña Freudenthal de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos.

Es así como, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia pasando a ser fenómenos en una nueva relación fenómenos - medios de organización en la que surgen nuevos conceptos matemáticos y este proceso se reitera, debido a esto las matemáticas no se ubican en un mundo ideal, las matemáticas están por tanto en el mismo mundo de los fenómenos que organizan, que son los objetos de este mundo. Esta progresión escalonada comporta dos procesos: la elaboración de conceptos matemáticos como medios de organización y el proceso por el que se objetiva un medio de organización y se convierte a su vez en fenómeno, en este sentido es importante relacionar con este proceso de objetivación el papel que juegan las designaciones y representaciones de los conceptos en este proceso de constitución, el cual llamaremos Sistema Matemático de Signos, de acuerdo a la conceptualización de Eugenio Filloy (1988)

Esta progresión escalonada de producción de objetos matemáticos, comporta niveles cada vez más abstractos y una progresiva ampliación del campo matemático como consecuencia de la actividad matemática.

### 2.2.2 Los Sistemas matemáticos de signos - SMS

Teniendo en cuenta que la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas influye, sin duda, en la concepción sobre el tipo de signos que son idóneos para su comunicación, se asume que la existencia material de los objetos matemáticos es la que le dan los signos con los que están escritos y producidos. Por lo tanto, hay que considerar que en los textos matemáticos se utilizan dos tipos de lenguaje, el que en general llamamos signos matemáticos y la lengua vernácula.

Como también, que hay episodios en la historia en los cuales la utilización de signos apropiados es la que ha permitido el avance, por ejemplo la introducción de la simbolización algebraica por Descartes, permitió que muchas de las disciplinas en el siglo XVII avanzaran notablemente. Pero también puede suceder lo contrario, la falta de desarrollo en sistemas simbólicos ha retardado procesos, por ejemplo, como lo anota Azcárate (1990, pp.43):

> …algunos obstáculos de tipo conceptual, como el uso de proporciones o la disociación entre número y magnitud, así como el carácter eminentemente geométrico de la Matemática griega y a ellos cabría añadir los problemas debidos al simbolismo, totalmente inexistente por lo que se refiere al establecimiento de expresiones algebraicas…constituyeron un serio obstáculo para el avance hacia el concepto general de función...

Esto ha hecho que en muchos casos se considere vital el formalismo entendiéndolo como el uso exclusivo de signos “artificiales”. De acuerdo con estas dos consideraciones, el interés acerca de los signos se toma en relación con el estudio de los procesos de significación y producción de sentido, por lo que no se considera el “sistema de signos” de forma global, sino reconociendo que, todos los signos que se usan en la actividad matemática están combinados y no son homogéneos, entonces se consideran desde la perspectiva de sistemas matemáticos de signos.

Los sistemas matemáticos de signos considerados de esta manera global para producir sentido, van a tener signos cuya materia de la expresión es heterogénea y están constituidos por su expresión y su contenido, esta expresión a su vez puede objetivarse y pasar a formar parte de un nuevo contenido para el cual se puede obtener una expresión de un nivel de abstracción superior. Por ejemplo, la experiencia de un cuerpo que cae, se puede expresar en lenguaje vernáculo, en un primer nivel, “este cuerpo cae cada vez más rápido”, expresando la relación entre la velocidad del cuerpo y el tiempo transcurrido de forma cualitativa; en un segundo nivel de abstracción, podemos decir que este movimiento corresponde a un caso de caída libre ($s=\frac{1}{2}gt^2$) y en un nivel posterior, el caso de caída libre se incluye dentro del Movimiento Uniformemente

Acelerado ( $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ). Como podemos observar cada vez el nivel de los signos utilizados es más abstracto y se corresponde con un medio de organización más general.

Los sistemas matemáticos de signos están implicados en la producción de conceptos, es decir, en la relación fenómenos-medios de organización, y les dan su existencia material al describirlos y crearlos. El proceso de objetivación de un medio de organización para convertirse en fenómeno tiene su expresión en un Sistema de Signos cada vez más abstracto. En este sentido Puig dice:

> Este carácter dinámico, implicativo del signo, resulta a mi entender particularmente esclarecedor para los sistemas matemáticos de signos, ya que éstos se ven involucrados en la relación fenómenos / medios de organización, y en ella los conceptos matemáticos son creados por los sistemas matemáticos de signos que los describen. De ahí que los objetos matemáticos así creados no sean entonces objetos ideales que se coloquen fuera del mundo de nuestra experiencia ya que tienen la existencia material que les dan los sistemas de signos que simultáneamente los describen y los crean.

Es así como, lo que es objeto de organización por parte de las matemáticas se da en cuatro estilos: los objetos, las propiedades, las acciones y las propiedades de las acciones. Cuando se habla de acciones se refiere a lo que el SMS permite hacer, y no las que efectivamente se realizan o se pueden realizar. Los SMS no sólo permiten organizar los fenómenos creando los conceptos, sino efectuar acciones sobre ellos, que limitaciones de tiempo o de otro tipo no permiten. Estas acciones no son arbitrarias sino las sugeridas por los SMS más abstractos. Un segundo proceso de regulación es de tipo sociológico, el acuerdo por parte de la comunidad matemática sobre si tiene o no tiene sentido tales procesos.

### 2.2.3 Los conceptos matemáticos evolucionan

Como hemos dicho, tal como lo platea Freudenthal, a partir de la relación fenómenos - medios de organización se crean los conceptos. Estos conceptos con el uso y en función del SMS que los describen se van modificando en el sentido de ampliar y enriquecer el concepto. A partir de la teoría de Lakatos (1976), con relación a cómo pueden evolucionar los conceptos cuando son utilizados en una prueba de teoremas se encuentra una explicación de la manera que se da tal evolución, la cual tomaremos en consideración de la manera que la introduce Puig al reinterpretar la teoría freudenthaliana.

Lakatos muestra en su prueba de teoremas, a partir de la conjetura relativa a los poliedros regulares sobre la relación entre el número de vértices $(V)$, el de aristas $(A)$y caras $(C)$ mediante la relación $V - A + C = 2$, que al probar que se puede aplicar a cualquier poliedro, pueden aparecer contraejemplos, que él clasifica en dos tipos:

- Contraejemplos locales: los que tienen características que hacen que no podamos aplicar la prueba, y
- Contraejemplos globales: cuando se oponen al teorema.

Lakatos (1976, p.p. 27) dice:

> Maestro:…permítanme introducir la siguiente terminología. Llamaré *contraejemplo local* al ejemplo que refute un lema (sin refutar necesariamente la conjetura principal), y llamaré contraejemplo global al que refute la propia conjetura principal…
> Un contraejemplo que sea local pero no global critica la prueba y no la conjetura

La presencia de estos contraejemplos obliga a modificar el concepto, esta modificación puede ser exclusión de monstruos, exclusión de excepciones y ajuste de monstruos. En el primer caso, los contraejemplos son abarcados por la definición de los monstruos -generalmente de forma implícita- para poder salvar el teorema, es necesario redefinir haciendo exclusión explicita. En el segundo no intenta eliminar el inesperado monstruo, se matiza, introduciéndose una clasificación en el concepto y afirmando que el teorema sólo hace referencia a una de las partes. En el último caso, el ajuste de monstruos se efectúa reinterpretando el objeto de otra manera para incluirlo. En todos los casos se ve afectado el concepto, se amplía su campo semántico y el sistema de signos que interviene lo va formalizando progresivamente.

En resumen, se puede decir que los conceptos matemáticos no se forman de una vez por todas, son consecuencia de la actividad de los matemáticos, y por lo tanto los conceptos no existen a priori, ni se llega a un concepto ideal preexistente.

Además, no sólo en el proceso de probar o refutar teoremas se producen o modifican los conceptos, sino en la resolución de problemas, en el proceso de definir y de organizar los resultados en forma deductiva de toda la actividad matemática.

La resolución de problemas, en general engloba la prueba y refutación de teoremas. De acuerdo con la terminología de Polya hay que distinguir entre problemas de probar y problemas de encontrar: la primera, que los teoremas son problemas de probar y la segunda, que en el proceso de resolución de los problemas de encontrar, es necesario probar las soluciones, es decir, argumentar la solución y/o verificar que se cumplen las condiciones del problema. Lo anterior pone de manifiesto que en todos los problemas hay prueba.

La tensión planteada inicialmente entre teorema, prueba y concepto que daba lugar a la ampliación y creación de conceptos se desplaza a la tensión entre resolución de problemas y concepto. Esta tensión da lugar al planteamiento de nuevos problemas y a la estructuración en familias de problemas.

Además de la resolución de problemas, otra actividad matemática es la organización de resultados en cadenas deductivas, y la producción de definiciones consideradas como los eslabones de estas cadenas. Es decir, las definiciones actúan como organizadores de sistemas deductivos más o menos axiomáticos. Estas definiciones no son neutrales, por tanto producen transformaciones de los conceptos ya que, según las características que destaquen del objeto, las propiedades se derivan de lo que se ha tomado como definición y el concepto transforma porque se incluye en una cadena deductiva determinada.

### 2.2.4 Concepto - objeto mental

Hasta ahora se ha hablado de la transformación y construcción de conceptos como medios de organización de fenómenos. En el uso corriente se habla de conceptos o concepciones que la persona tiene de un concepto, para referirse a la idea particular, y parcial, que la persona tiene respecto de un concepto. Pero Freudenthal distingue entre conceptos y objetos mentales. Ambos organizan fenómenos. Para él, no es la adquisición de conceptos la finalidad de la enseñanza en los niveles elementales; sino la constitución de objetos mentales. Al respecto dice:

> Para tener un cierto $X$ concebido, se enseña, o se intenta enseñar, el concepto de $X$. Para tener números, grupos, espacios vectoriales, relaciones concebidos, se inculcan los conceptos de número, grupo, espacio vectorial, relación, o, mejor dicho, se intentan inculcar. Es bastante obvio, de hecho, que a las edades que se intenta materializar los conceptos desnudos (en un "embodiment"). Sin embargo esas concreciones son usualmente falsas: son demasiado bastas para reflejar los rasgos esenciales de los conceptos que tienen que ser "embodied", incluso si, mediante una variedad de "embodiments", uno desea dar cuenta más de una faceta. Su nivel es demasiado bajo, muy por debajo del concepto que se persigue. Didácticamente esto significa que el carro va delante del caballo: enseñar abstracciones haciéndolas concretas.
>
> Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización…Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos

> que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que esta siendo matematizado *por* el concepto de grupo…Para este enfoque contrario he evitado el término adquisición de conceptos intencionalmente. En su lugar hablo de la constitución de los objetos mentales, lo que desde mi punto de vista, precede a la *adquisición de conceptos*, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos.

En este sentido, se puede entender a los objetos mentales como las ideas con que una persona organiza ciertos fenómenos, fenómenos que a su vez el concepto ha organizado en la disciplina. Es así, como la totalidad de usos constituye el campo semántico del concepto, usos producidos en una cultura o una espíteme. Los conceptos organizan los fenómenos que se corresponden con estos usos. La identificación del contexto en el que el concepto se está dando, permite a quien recibe la información atenerse a la restricción semántica que le imponga el contexto. Los objetos mentales se corresponden con el "campo semántico personal", que el sujeto ha producido para dar sentido a un determinado concepto.

La intención de los sistemas educativos consiste, para Freudenthal, en ampliar el campo semántico que tiene el individuo, enriqueciéndolo con otros usos que le permitan interpretar las distintas situaciones en las cuales interviene el concepto. Objetos mentales ricos se corresponden con campos semánticos amplios. Además, hemos de tener en cuenta que los contextos de uso cotidiano se corresponden con el nivel más bajo de los simples fenómenos físicos, pero esto no es suficiente, en la secundaria, a menudo es necesario pasar a contextos más matematizados. Tendremos que considerar y analizar la relación fenómenos - objeto mental de niveles cada vez más abstractos.

¿Por qué ha sido necesario hacer la distinción concepto - objeto mental? Como se ha señalado, en las matemáticas los fenómenos se han organizado por medio de los conceptos, pero esta organización se ha producido de distintas maneras: restringiendo el campo semántico, ampliando el campo semántico y utilizando el concepto como unificador. El objetivo de la enseñanza es construir un campo semántico muy enriquecido, constituir un buen objeto. Ya que la mayor parte de los conceptos tienen una aparición múltiple. ¿Cuál es el buen objeto mental? Tendría que poder dar cuenta de todos los usos, en todos los contextos. Adquirir el concepto, supone saber cómo ha sido creado en las matemáticas, cómo ha evolucionado y cómo se relaciona la formación del objeto mental con la adquisición del concepto. La finalidad del análisis fenomenológico consiste en determinar las componentes anteriormente mencionadas.

Al respecto Puig (2001, p. 3)

> La segunda idea que Freudenthal enuncia en este capítulo (El método), y es fundamental desde mi punto de vista, es una toma de partido didáctico: lo que el llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Si el análisis fenomenológico es una tarea previa a todo desarrollo curricular para conocer cuál es el conjunto de fenómenos que hay que tomar en consideración para presentarlos en el desarrollo curricular, esa oposición y la toma de partido de Freudenthal por la constitución de objetos mentales marca la intención del currículo.

En este análisis fenomenológico es necesario considerar los objetos que los alumnos elaboran y los conceptos establecidos en las matemáticas como disciplina. Los conceptos aquí, están ya establecidos y se trata de que los alumnos accedan a estos valiosos medios de organización que se han ido formando a través de la historia.

En lo expuesto antes podemos apreciar la crítica que Freudenthal hace a lo denominado adquisición de conceptos al contraponerlo a la constitución de objetos mentales a través de la constitución de campos semánticos amplios del concepto, la cual deja ver una manera de concebir las matemáticas como objetos culturales, fijados mediante definiciones, propiedades y relaciones, descontextualizadas y despersonalizadas y un enfoque de la enseñanza que pretende que los alumnos las aprendan reducidas a esta visión cultural, como producto terminado y fijado a través de sistemas matemáticos de signos abstractos, es así como, defiende poner por delante la fenomenología, las situaciones problemas, los hechos que inducen a acciones matemáticas, con lo cual los alumnos puestos ante estos constituirán objetos mentales que podrá ser enriquecida con la perspectiva cultural.

### 2.2.5 Los conceptos en la historia

En la historia, los conceptos matemáticos no preexisten a la experiencia, como lo son en los sistemas educativos, por lo tanto la contraposición concepto – objeto mental es de tipo didáctica. Es decir, los conceptos se crean a partir del análisis de los objetos mentales y de la definición, por medio de la actividad matemática de los matemáticos.

En este proceso, puede pasar que: los objetos mentales existan durante mucho tiempo sin llegar a dar lugar a un concepto, los objetos mentales primitivos tengan que ser revisados, substituidos o compaginados a partir de la definición, como en el caso de la continuidad donde numerosos ejemplos de funciones continuas tuvieron que incorporarse al objeto mental desde el momento en que la definición se explicita.

Lo anterior no debe entenderse como la simple substitución de un objeto mental por otro sino que el objeto primitivo puede persistir. Es así, como entre el objeto mental y los conceptos la relación es muy diversa. La distancia entre uno y otro a veces es muy pequeña y a veces enorme. A veces hay que construir muchos conceptos intermedios, que en un proceso de abstracción cada vez mayor nos llevan hasta un concepto que resulta muy distante del objeto mental que había originado el proceso.

En otros casos sucede todo lo contrario, el objeto mental es muy amplio, se puede avanzar mucho sin conceptos, pueden hacerse definiciones o modificaciones parciales. La importancia del análisis de fenomenología pura se debe a que muchas veces la distancia entre el objeto mental y el concepto es tan grande que no se puede salvar por medios didácticos en secundaria. Al planificar la enseñanza es necesario considerar este hecho y ver qué tipo de construcción es necesaria.

# 3 FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN: EL CASO DEL ÁLGEBRA ÁRABE Y LOS TRABAJOS ALGEBRAICOS DE CARDANO Y DESCARTES

## *INTRODUCCIÓN*

Para el estudio de la fenomenología histórica, realizado con el objetivo de determinar y estudiar los fenómenos para cuya organización se creó el concepto de ecuación y cómo se extiende este concepto a otros fenómenos, hemos determinado tanto algunas condiciones iniciales, como varios momentos fundamentales para nuestro cometido, materializados en las obras de varios matemáticos, a saber: el álgebra árabe y las obras algebraicas de Cardano y Descartes.

En cuanto a las **condiciones iniciales**, el estudio histórico tiene en cuenta, de una parte, que los conceptos son algo que no preexiste a nuestra experiencia sino que es la actividad matemática la que los crea (en particular la actividad matemática de los matemáticos) y, de otra, el interés de preservar, en lo posible, el sentido original que tienen los sistemas de signos en la obra matemática, incorporando, cuando esto permite algún tipo de claridad, sólo los sentidos que se les dan a los conceptos y sus expresiones en el álgebra elemental actual.

Para el estudio retomamos las ideas de Rashed (1984, 1999), Høyrup (1990) y Puig (1998) en cuanto a la importancia de contar la historia de las matemáticas *de otra manera* y, en consecuencia, nos apropiamos de sus descubrimientos y reorganizaciones de las matemáticas árabes, particularmente de los aspectos que tienen que ver con el álgebra.

En una versión tradicional de la historia de las matemáticas, las matemáticas árabes no se han presentado como uno de sus capítulos fundamentales, aunque en dicha versión no se puede evitar su aparición en escena; sin embargo, esta puesta en escena no ha variado mucho desde que se empezó a escribir la historia de las ciencias, a principios del siglo XIX. Por otra parte, las matemáticas árabes usualmente se presentan bajo la designación de "matemáticas no occidentales", lo cual ha invitado a subvalorar y hasta esquivar estas matemáticas, como si no fueran verdaderamente parte integrante de la historia de las matemáticas; si bien esta presunción ha sido superada por muchos historiadores, ésta aún persiste en algunos ámbitos. Existe también una presunción que sobrevalora el papel de las matemáticas árabes y hace una apología de éstas, seguramente apoyada en un interés sin precedentes en su estudio y en una abundante producción sobre éstas.

Nuestro estudio se ubica en un punto intermedio entre tales posturas, reivindicando sí el papel de la historia del álgebra árabe clásica en la historia del álgebra. Precisamente, la historia usual del álgebra suele tomar la forma del relato del progreso, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje que permita que esas técnicas y fórmulas, al final de la historia, aparezcan verdaderamente expresadas. Bajo esta versión, la historia del álgebra se ha periodizado en álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica (sin dejar de lado la llamada álgebra geométrica de los griegos); si la historia se narra de esta manera, el álgebra árabe clásica desaparece o queda relegada al papel de mera intermediaria entre Alejandría y la repúblicas italianas. Nos interesa mostrar que ese vacío no existe (de hecho está suficientemente lleno) o que esa forma de intermediario nimio no es tal, pues es allí donde vemos aparecer las principales estructuras del álgebra y la aritmética.

Por lo tanto, de los estudios tomados como referencia nos interesa la reconstrucción de algunos hechos hasta ahora ignorados y develar algunos aspectos teóricos ocultos, como la identificación de las estructuras del álgebra árabe. Para ello, situamos el desarrollo del álgebra en relación con el de la aritmética y de la geometría, reconociendo una doble dialéctica, entre aritmética y álgebra, y entre geometría y álgebra, expresada en un movimiento de reorganización y de estructuración recíproca de estas disciplinas; esta perspectiva nos permite captar el papel capital y radicalmente nuevo del álgebra en la formación de la racionalidad matemática. Asimismo, para dar cuenta de una fenomenología amplia del concepto de ecuación y de la teoría que la sustenta, estudiamos la noción de álgebra, del sistema matemático de signos, la noción de ecuación y resolución, los problemas que se plantea resolver, su forma de organización y el método de análisis para resolver estos problemas.

En relación con los **momentos fundamentales**, como ya lo citamos, hemos seleccionado el álgebra árabe y las obras algebraicas de Cardano y Descartes.

En el primer momento se ha restituido un acontecimiento, la aparición del libro de al-Khawarizmi en álgebra, pues es en esta obra de principios del siglo IX cuando por primera vez en la historia el álgebra aparece como una disciplina autónoma y en posesión de su nombre, marcando así toda una corriente de investigación posterior. Es decir, usando el texto de al-Khawarizmi daremos cuenta de aspectos del origen del álgebra.

A propósito de este momento, Rashed (1984) plantea que a pesar de que se ignore todo sobre los predecesores de al-Khawarizmi —y por consecuencia la génesis de este primer comienzo del álgebra—, se sabe que se inscribe en una tradición aritmética no-helenista. En la época de al-Khawarizmi, las matemáticas se adueñan de esta nueva disciplina para desarrollar el cálculo algebraico, la teoría de las ecuaciones y el análisis indeterminado, todo esto antes de la traducción de la aritmética de Diofanto. Nosotros, en este aspecto, tomamos los estudios de Høyrup, quien ha realizado una nueva lectura de los textos algebraicos árabes para fundamentar esos antecedentes en la cultura “subcientífica” de la Antigua Babilonia, contando para ello con la evidencia del texto árabe *liber mensuratinum,* escrito por Abu BaKr y conocido sólo a través de una traducción al latín por Gherardo de Cremona.

Un segundo momento fundamental en el desarrollo de las ideas algebraicas corresponde al Renacimiento; los trabajos de Del Ferro, Tartaglia, Ferrari y Cardano centran la atención en la solución de ecuaciones con grado mayor a 2, fundamentalmente en las ecuaciones de tercer grado. En este trabajo tomamos la obra del *Ars Magna* de Cardano de 1545, considerado el libro matemático más importante del Siglo XVI puesto que hace públicos los métodos de resolución de ecuaciones, las cúbicas y las cuárticas, acompañados de demostraciones geométricas de estos métodos, para dar cuenta de los fenómenos que organiza el concepto de ecuación a través del estudio de la naturaleza de las raíces, los métodos de solución de ecuaciones, los problemas que soluciona y la tensión del campo numérico.

La versión del texto de Cardano utilizada para el estudio de la fenomenología histórica corresponde a la traducción inglesa de T. Richard Witmer (1968) *Ars Magna or The Rules of Algebra*. Adicionalmente consideramos el texto de Vasco (1983), denominado *El Algebra Renacentista*, y el de Acevedo y de Lozada (1997) sobre teoría de ecuaciones.

En el trabajo que hace Descartes en relación con las ecuaciones, el cual constituye el tercer momento, fundamentalmente aquí se analizan los fenómenos que organizan el concepto de ecuación en este periodo importante de la historia de las matemáticas expuesto a través de la obra de este filósofo francés. Para ello se toma como referencia el texto de *La Geometría*, apéndice del texto del *Discurso del Método* (1673), en la versión electrónica en francés del Proyecto Gutenberg[11] y la traducción española de Espasa-Calpe[12], como también algunos textos de Álvarez (2000) y Dhombres (2000).

En una primera lectura del trabajo de Descartes, se podría afirmar que los fenómenos que organiza el concepto de ecuación, son los problemas geométricos con magnitudes de diferente naturaleza. Sin embargo, el problema fenomenológico va más allá del hecho eminente que relaciona el concepto, lo que quiere decir que se complejiza este hecho, en tanto se determina de qué manera se organizan esos problema, bajo qué formas, qué tipo de simbolización está presente, cuáles son los procesos para llegar a estas ecuaciones, etc.; en fin, se trata de describir todos los aspectos que determinan las ecuaciones en el trabajo cartesiano.

Para abordar esta tarea se tienen dos elementos de análisis; el primero se relaciona con cómo Descartes determina una manera de poner un problema en ecuaciones, para lo cual establece el método analítico de resolución de problemas matemáticos. Un segundo aspecto, alude al tratamiento mismo que hace de las ecuaciones relacionado con las curvas geométricas.

## *3.1 ANTECEDENTES DEL ÁLGEBRA*

Trataremos de mostrar, en este apartado, que las tradiciones "subcientíficas" de resolución de problemas, estudiada por Høyrup (1990), a partir de sus trabajos de reinterpretación de los textos algebraicos de la antigua Babilonia, proporcionan unos nuevos antecedentes para el álgebra árabe clásica.

### 3.1.1 La tradición subcientífica

En la Edad de Bronce Babilonia, dentro de un medio de geómetras prácticos (como agrimensores, arquitectos, o constructores), surge una "tradición subcientífica", entendida ésta, como técnicas para resolver problemas que no son de uso práctico, sino de tipo "recreativo", probablemente destinados a la preparación de aprendices de estos oficios, pero, cuya función principal era mostrar el valor de la profesión y desarrollar competencias profesionales. Los enigmas, acertijos o pasatiempos, que constituían esta clase de problemas, eran más complejos que los problemas de uso

[11] Proyecto para la divulgación de obras científicas (http://www.gutenberg.org/).
[12] Compañía Editora Argentina, Buenos Aires (1947).

diario o real; éstos eran construidos con herramientas más abstractas y con un mayor refinamiento de las técnicas de solución. Aunque sus enunciados los presente como problemas cotidianos, éstos no son de la actividad práctica; son situaciones nunca presentes en la vida real.

Los vestigios de este tipo de conocimiento se encuentran, no en artículos teóricos o libros seculares (como los textos matemáticos egipcios y babilonios), sino en algunos materiales que recogen tradiciones literarias de diferentes tipos.

El comienzo de esta tradición subcientífica se ubica con los agrimensores de Mesopotamia, a finales del tercer milenio a.n.e. y con los agrimensores parlantes de la lengua Akkadian del centro de Iraq.

Respecto de las técnicas desarrolladas para solucionar la clase de problemas antes descrita, tenemos que los **agrimensores mesopotámicos** conocían y usaban la regla:

$$\square(R - r) = \square(R) - 2\Box(R,r) - \square(r)$$

En esa relación $\square(R)$ representa un cuadrado de lado R y $\Box(R,r)$ un rectángulo de largo R y ancho r. Una representación de esta relación está dada por el cuadrado construido sobre la transversal bisecada de un trapecio, ubicado en medio de los cuadrados de los lados paralelos del trapecio (ver Figura 1).

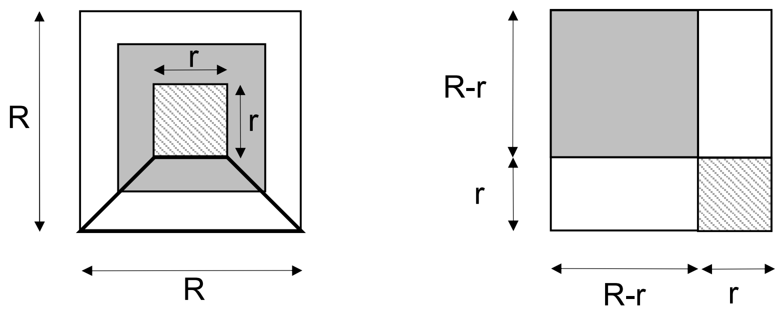



Figura 1. Representación del problema y su solución

Aunque allí no hay evidencias de otros conocimientos de este tipo, llama la atención que se puede *encontrar* el cuadrado, mediante un argumento geométrico aplicado a áreas y figuras simples.

Por su parte, los **agrimensores iraquíes** conocían la técnica de *completar el cuadrado* mediante el proceso de *cortar y pegar* y la usaron para resolver numerosos acertijos recreativos.

Los siguientes tipos de problemas circulaban en este medio:

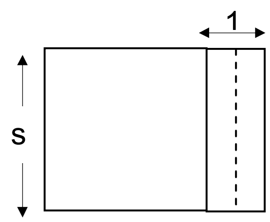
- Problemas que involucran áreas de un cuadrado y lados del cuadrado. Estos contemplaban expresiones del tipo $s \pm Q = \alpha$ o $_4s \pm Q = \alpha$ donde $Q$ representa el área de un cuadrado; $s$ el correspondiente lado, con $Q_i$ y $s_i$ ,$(i = 1, 2)$ cuando dos cuadrados son involucrados, y $_4s$ para cuando se involucran "todos los cuatro" lados del cuadrado.
- Problemas con rectángulos. Representados por expresiones como $A = \alpha,\ l \pm w = \beta, A + (l \pm w) = \alpha,\ l \pm w = \beta, A = \alpha,\ d = \beta,$ donde *A* representa Área*,* $l$ el largo, $w$ el ancho, y $d$ la diagonal.
- Problemas con las áreas de dos cuadrados y una relación entre los lados de los cuadrados. Estos expresados por: $Q_1 + Q_2 = \alpha,\ s_1 \pm s_2 = \beta, Q_1 - Q_2 = \alpha,\ s_1 \pm s_2 = \beta$

Respecto del **primer grupo de problemas** tenemos como ejemplos:

a. $s + Q = 110$

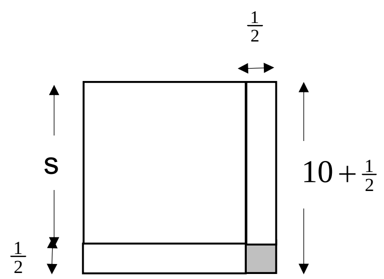
Usando la técnica de *cortar y pegar* resolvieron el problema así:

El lado *s* es considerado de ancho 1; es decir, como un rectángulo □(1,s). Este rectángulo se coloca al lado del cuadrado y se biseca.




La parte exterior de esta partición se traslada al otro lado del cuadrado, produciendo un gnomon de área 110. Se completa el cuadrado añadiendo un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ .

El área del nuevo cuadrado es $110 + \frac{1}{4}$ y el lado de este cuadrado es $10\frac{1}{2}$.




La mitad del rectángulo movida antes, se devuelve a su posición inicial y se puede observar que el lado $s = 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 10$ y por lo tanto $Q = 100$.

La relación inicial se cumple.

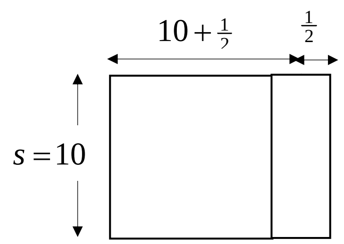


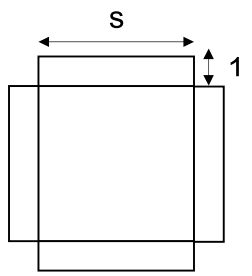
Figura 2. Solución del problema $s+Q=110$

Si este problema se traslada al sistema matemático de signos del álgebra escolar, se obtiene la ecuación $x^2+x=110$; sus soluciones coinciden con las encontradas por este método.

b. ${}_4s+Q=140$

Este tipo de problemas que hacen referencia al cuadrado y sus cuatro lados se resolvieron así:

Cada uno de los 4 lados es considerado como un rectángulo de ancho 1 y largo *s*. Se localizan donde ellos corresponden naturalmente, es decir, como lados del cuadrado. Por lo tanto el área (140) es una configuración en forma de cruz.




Para completar un cuadrado a partir de esta configuración, se añade en cada esquina un cuadrado de lado una unidad. Resultando un cuadrado de área 144.

El lado de este cuadrado es 12 y en consecuencia *s* vale 10, ${}_4S$ =40 y *Q* = 100

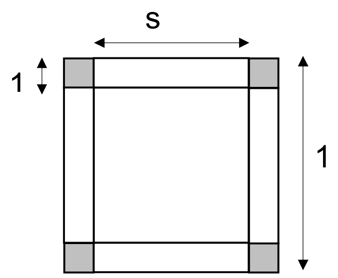



Figura 3. Solución del problema ${}_4s+Q=140$

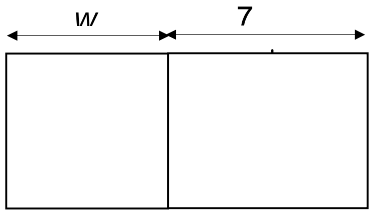
Si consideramos el problema en una ecuación escrita en notación actual, ésta sería: $x^2+4x=140$.

Del **segundo grupo de problemas** tenemos como ejemplos:

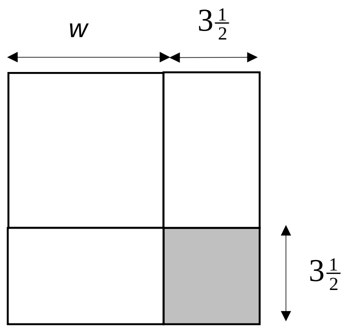
a. *“un par de números, de la tabla de recíprocos, cuya diferencia es 7*”

Este problema es representado por las dimensiones de un rectángulo de área 60, en donde el largo excede al ancho por 7. Es decir $A=60,\quad l-w=7$. El problema lo resolvieron utilizando el procedimiento geométrico de *cortar y pegar* y como habíamos anotado antes, *completando el cuadrado*.

El rectángulo tiene un lado *w* y el otro $l = w + 7$. El rectángulo está formado por un cuadrado de lado *w* y un rectángulo de largo 7 y ancho *w*. Este último rectángulo se biseca.




La mitad exterior del rectángulo bisecado se mueve hasta el lado horizontal del cuadrado formando un gnomon de área 60. Este gnomon se completa como un cuadrado, añadiendo un cuadrado de lado $3\frac{1}{2}$. Cuando este está completo, el área total es $60 + 12\frac{1}{4} = 72\frac{1}{4}$ y el lado de este nuevo cuadrado es $8\frac{1}{2}$.




Se observa que el cuadrado tiene por lado $w + 3\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ y por lo tanto, $w = 5$ es el valor del ancho del rectángulo. El otro lado $l = w + 7 = 5 + 7 = 12$.

Los números buscados son 5 y 12

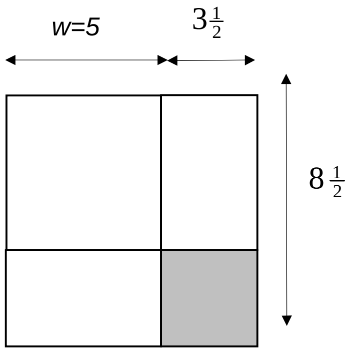


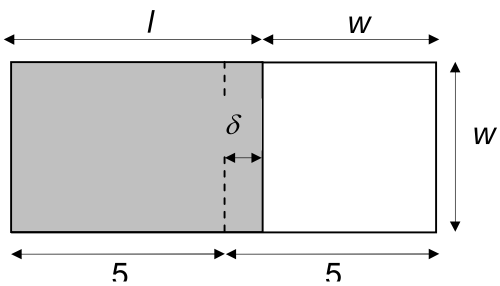

Figura 4. Solución del problema "*un par de números, de la tabla de recíprocos, cuya diferencia es 7*"

Si este problema es trasladado a la ecuación $x^2 + 7x = 60$ y se resuelve completando el cuadrado, las dos soluciones son las mismas obtenidas antes.

b. $= 24, \quad + \quad = 10$

En este caso que se relacionan los lados aditivamente procedieron así:

Se forma un rectángulo de largo $l + w = 10$ y ancho *w* y uno nuevo sobre este, de largo $\frac{l+w}{2} = 5$ y ancho *w*. Así obtenemos un rectángulo de dimensiones *w*, δ donde $\delta = 5 - w$, $\delta = l - w$.



Este rectángulo $(w, \delta)$ se mueve sobre la base del rectángulo al cual se le quita éste.

El cuadrado completo de lado $\frac{l+w}{2} == 5$ tiene área conocida 25 y la diferencia de esta área con la del rectángulo original 24 (en este momento del gnomon) es uno (1). Luego $\delta = 1$ y así

$w = \frac{l+w}{2} - \delta = 5 - 1 = 4 \Rightarrow w = 4 \wedge l = 6$

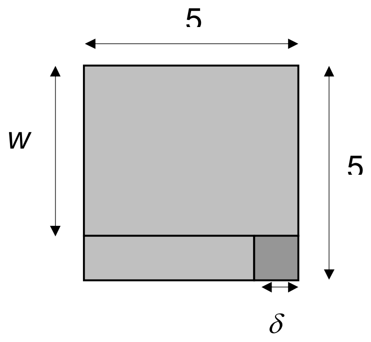



Figura 5. Solución al problema $= 24,$ $+$ $= 10$

En nuestro sistema analítico el problema anterior se resuelve mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 = 24 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

En general, los problemas de los tipos

$$A = \alpha, l + w = \beta$$
$$s - Q = \alpha$$
$$_4 s - Q = \beta$$

fueron resueltos, así:

Sobre el rectángulo original de largo *l,* ancho*, w* y área $\alpha$ se construye el rectángulo de largo *l* + *w* y ancho *w*. Se halla la mitad de este largo obteniéndose dos rectángulos de largo $\mu = \frac{l+w}{2} = \frac{\beta}{2}$ y ancho *w*. De esta manera se forma un nuevo rectángulo de dimensiones *w* y $\delta$ = *l* - $\mu$ . Este nuevo rectángulo es movido sobre el largo del rectángulo que queda al quitar éste, para crear un gnomon de área conocida (la del rectángulo original $\alpha$); como se conoce el área del cuadrado completo de lado $\frac{\beta}{2} = w + \delta = \mu$ se puede encontrar el valor del ancho del rectángulo original (*w*) y con éste, el valor del largo *l.*

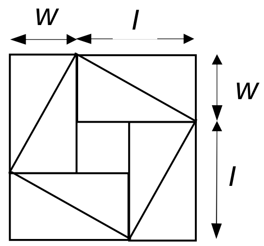
c. $A + (l \pm w) = \alpha, \quad l \pm w = \beta$

Para solucionar los problemas de este tipo, mediante un cambio de variable, los redujeron a la forma $A = \alpha, \quad l \pm w = \beta$ , conocida ya su solución.

d. $A = 48, d = 10$

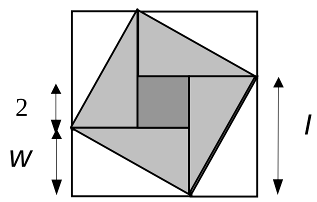
Este tipo de problemas concerniente a un solo rectángulo y su diagonal, los resolvieron reduciéndolos al tipo $A = \alpha, \quad l - w = \beta$.

El rectángulo de largo *l* y ancho *w*, es presentado en cuatro copias, formando un cuadrado de lado *l*+*w*; cada una de estas copias es bisecada por su diagonal *d*=10, produciéndose un nuevo cuadrado de lado la diagonal y área conocida (100).




El cuadrado sobre la diagonal que resulta equivale a dos veces el área del cuadrado dado y el cuadrado de la diferencia entre el largo y el ancho. Así se halla *l-w.*

El doble del área del rectángulo (cuatro veces la semiárea), es conocida
$2\alpha = 2(48) = 96$




$100 = 2\alpha + (l - w)^2 \Rightarrow l - w = 2$ y se tiene una situación ya conocida:

$$\begin{cases} A = 48 \\ l - w = 2 \end{cases}$$

Figura 6. Solución al problema $A = 48, d = 10$

En nuestra notación el problema se puede representar mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} xy = \alpha = 48 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \beta = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \alpha = 48 \\ x^2 + y^2 = \beta^2 = 10 \end{cases}$$

Respecto al **tercer grupo de problemas**, tenemos como ejemplos:

a. $Q_1 + Q_2 = 74, s_1 + s_2 = 12$

Éste pertenece a los problemas de la forma $Q_1 + Q_2 = \alpha, s_1 \pm s_2 = \beta$ y que aparecen resueltos por medio de una variante del anterior, es decir, se forma un cuadrado con la duplicación de los cuadrados dados.

Así, dos veces la suma de las áreas de los cuadrados dados, excede el cuadrado de la suma de los lados de los cuadrados por el cuadrado de su diferencia.

$2(Q_1 + Q_2) = (s_1 + s_2)^2 + (s_1 - s_2)^2$, para este caso:

$2(74) = (12)^2 + (s_1 - s_2)^2$ entonces $(s_1 - s_2)^2 = 4$ y $s_1 - s_2 = 2$.

Como se conoce que

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 12 \\ s_1 - s_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow s_1 = 7 \wedge s_2 = 5$$

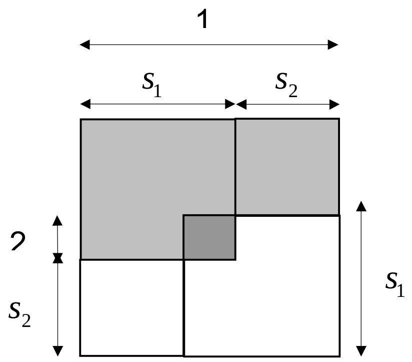



Figura 7. Solución al problema $Q_1 + Q_2 = 74, s_1 + s_2 = 12$

Sin embargo parece que los agrimensores operaron con el promedio (la semisuma) de los lados de los cuadrados $\mu$ y la semidiferencia de los lados $\delta$, como lo suguieren los diagramas encontrados. Todo esto para transformar el problema en un rectángulo con área conocida y una relación entre sus lados, ya dada.

En el caso del problema que tenemos como ejemplo, sería:

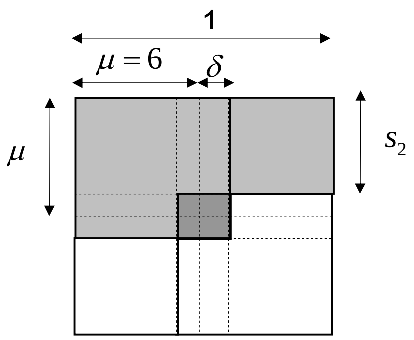
$$\mu = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \wedge \quad \delta = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

Entonces:

$$Q_1 + Q_2 = 2(\mu^2 + \delta^2) \Rightarrow 74 = 72 + 2\delta^2$$
$$\delta = 1$$

Con este valor se encuentran las dimensiones del rectángulo, ya que:

$$s_1 = \mu + \delta = 6 + 1 = 7$$
$$s_2 = \mu - \delta = 6 - 1 = 5$$



Sin embargo, parece que conocido el valor de $\delta$ , se trabaja con el área del rectángulo de dimensiones $s_1, s_2$ y la relación aditiva de sus lados. Es decir, con el caso de los problemas de la forma

$A=\alpha, \quad l-w=\beta$ , donde

$A=35, \quad l-w=12$

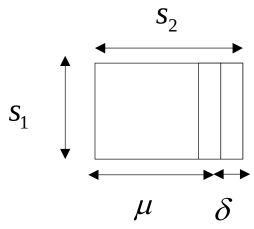



Figura 8. Solución al problema $Q_1+Q_2=74, s_1+s_2=12$

Hasta aquí, observamos que esta técnica "subcientifica":

- Trata con segmentos de líneas conmensurables y con superficies, no con números. Algunos de estos problemas realmente se refieren a medidas geométricas (áreas), como en el caso donde hay que encontrar las dimensiones de un terreno rectangular, cuando el área y la diferencia del largo con relación al ancho son conocidas; otros representan entidades geométricas desconocidas, a través de segmentos de línea de largo conmensurable y rectángulos que representan lados. Lo anterior significa que las ecuaciones, como objetos algebraicos propiamente no existen y son relaciones entre objetos geométricos, más concretamente entre magnitudes conmensurables o cantidades.

- Las operaciones usadas para definir y resolver estos problemas no fueron aritméticas sino geométricas. Los textos, trataron la "adición" como *juntando*, por ejemplo, un cuadrado completado por un gnomon; y también, adicionando aritméticamente números de medidas. La "sustracción" como *moviendo aparte*, *removiendo aparte*, el *inverso de juntando*; y comparando dos entidades diferentes. Y la "multiplicación" como la multiplicación aritmética de números por números; como la computación de una magnitud concreta; como la construcción de un rectángulo y como la repetición concreta de una entidad (la repetición de rectángulos). Lo que quiere decir que estos procedimientos operativos están ligados a la naturaleza misma de los objetos que se operan, por ejemplo rectángulos y cuadrados que pueden representan terrenos. A su vez, las conceptualizaciones geométricas son reflejadas en técnicas geométricas. La técnica central para la solución de un problema de segundo grado es la partición y reorganización de figuras, la técnica de cortar y pegar.

- Por último, es necesario resaltar que al considerar líneas como rectángulos en la solución de los problemas, se crea un proceso de homogenización, bastante significativo, ya que es necesario operar con objetos de la misma naturaleza.

Desde el punto de vista fenomenológico, podemos decir que en estos antecedentes del álgebra, las relaciones se establecen entre magnitudes conocidas y desconocidas representadas por objetos geométricos o cantidades numéricas y las técnicas para solucionar estas relaciones (es decir, para encontrar el valor o la cantidad de magnitud desconocida), se basa en procesos geométricos como las técnicas de cortar y pegar y completar cuadrados.

### 3.1.2 La escuela Escriba

Las nuevas épicas y géneros literarios de la época de la Escuela Escriba de Mesopotamia (1800 años a.n.e.), se convierten en las fuentes indirectas más representativas de un nuevo tipo de matemáticas. Los problemas cuasi algebraicos de los agrimensores fueron adoptados junto con las técnicas de *cortar* y *pegar*. Problemas de relaciones entre áreas de cuadrados y los lados de estos, trabajados en el sistema numérico de posición sexagesimal[13], ocupan casi la mitad de la obra de la Escuela Escriba. Un aspecto importante a tratar aquí consiste en discernir sobre los aspectos innovadores de estas matemáticas, ya que los textos que contienen esta clase de problemas no repiten exactamente lo que se había hecho hasta que estos forman parte de una disciplina escolar. Entre estos aspectos tenemos:

- En los textos matemáticos de la región nordeste de Esnunna, la primera en adoptar la opción de la Escuela, también se agregan lados a una superficie, considerado el lado como si tuviera ancho estándar 1, práctica extendida hasta el Renacimiento. Sin embargo, en los últimos textos de esta época, al agregar el lado tienen el cuidado de que éste se aprecie como una proyección, mostrando que consideran las líneas, como una longitud sin ancho y no como rectángulos, lo cual plantea un cambio conceptual importante.

- Desde la perspectiva de los objetos que se operan, se valora la búsqueda de sistematización en la organización en listas y series de los tipos de problemas resueltos, lo que no parece pertinente en un medio de acertijos o problemas recreativos propuestos en términos de competencias. Entre las relaciones que se establecen entre lados y cuadrados, se muestran entre varios cuadrados y fracciones de la longitud de los lados.

- La forma de enunciar los problemas tiene ciertas variaciones respecto del trabajo de los agrimensores iraquíes; es el caso de los problemas de relación aditiva

[13] En el cual se usan símbolos con diferente orientación de acuerdo a si son múltiplos o submúltiplos del grado. Así: `, `` hacen referencia a un orden creciente, unidades de menor a mayor orden y ´, ´´ para un orden decreciente. Por ejemplo: $14`30^{\circ}40' = 14 \cdot 60^{1} + 30 \cdot 60^{0} + 40 \cdot 60^{-1}$ dado en grados.

entre un lado del cuadrado y su área, en el cual aparece mencionada primero el área y luego el lado, contrario a la forma de presentar los problemas los agrimensores, quienes comienzan por lo que les es familiar y simple (el lado), y luego pasan a la magnitud derivada (el área). Al convertirse estos problemas en problemas de una disciplina hay una búsqueda de correspondencia entre el enunciado y el proceso de solución de éste y, por lo tanto, primero se ubica el cuadrado y su correspondiente área y luego los lados.

La siguiente lista muestra las apreciaciones antes anotadas.

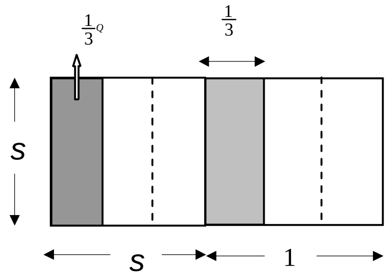
1. $Q + s = 45'$
2. $Q - s = 14^{'}30$
3. $Q - \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}s = 20'$
4. $Q - \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}s = 20^{'}46^{\circ}40'$
5. $Q - s + \frac{1}{3}s = 55'$
6. $Q + \frac{2}{3}s = 35'$
7. $11Q + 7s = 6^{\circ}15'$
8. $Q_1 + Q_2 = 21'40'', s_1 + s_2 = 50'$ (Reconstruido).
9. $Q_1 + Q_2 = 21'40'', s_2 = s_1 + 10'$
10. $Q_1 + Q_2 = 21^{\circ}15', s_2 = s_1 - \frac{1}{7}s_1$
11. $Q_1 + Q_2 = 28^{\circ}15', s_2 = s_1 + \frac{1}{7}s_1$
12. $Q_1 + Q_2 = 21'40'', \quad \square(s_1, s_2) = 10'$
13. $Q_1 + Q_2 = 28'20'', s_2 = \frac{1}{4}s_1$
14. $Q_1 + Q_2 = 25'25'', s_2 = \frac{2}{3}s_1 + 5'$
15. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 27'5'', (s_2, s_3, s_4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)s_1$
16. $Q - \frac{1}{3}s = 5'$
17. $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10^{'}12^{\circ}45', s_2 = \frac{1}{7}s_1, s_3 = \frac{1}{7}s_2$
18. $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 23'20'', s_2 = s_1 + 10', s_3 = s_2 + 10'$
19. $Q_1 + Q_2 + \square(s_1 - s_2) = 23'20'', s_1 + s_2 = 50'$
20. [ Perdido; $Q_1 + Q_2 + \square(s_1 - s_2) = 23'20'', s_1 - s_2 = 10'?$ ]
21. Perdido.
22. Perdido.
23. ${}_4s + Q = 41'40''$
24. $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 29'10'', s_2 = \frac{2}{3}s_1 + 5', s_3 = \frac{1}{2}s_2 + 2'30''$

Respecto a los cambios asociados a los procesos de resolución de los problemas presentes en la anterior tabla, tenemos:

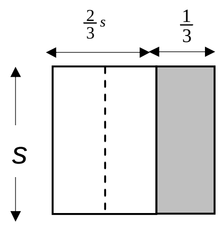
- Se introducen problemas en los cuales no basta la técnica de cortar y pegar como procedimiento para su solución sino que se hace necesario normalizarlos, es decir hacer ciertas transformaciones para ponerlos en términos de casos de problemas ya conocidos. Por ejemplo, los problemas con coeficientes fraccionarios, no naturales, que expresan operaciones con el área de un cuadrado y el lado del cuadrado. Esto indica una ampliación en el campo de problemas y de las técnicas de resolución; este es el caso de los problemas 3, 4, 5 y 6 de la lista anotada.

  En el caso del problema 3 se tiene: $Q-\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}s=20'$, es decir, $Q-\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}s=\frac{1}{3}^{\circ}$

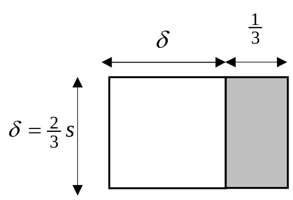
Se tiene un cuadrado de lado *s* y área *Q* y un rectángulo de lado 1 y ancho *s*, correspondiente al lado del cuadrado. Sobre éstos se indica el tercio de *Q* y el de *s*.




Para obtener una situación normalizada de un cuadrado con un rectángulo anexo, se toma el rectángulo que se obtiene del cuadrado de área *Q* cuando se quita un tercio de esa área. Es decir, el rectángulo de largo *s* y ancho $\frac{2}{3}Q$ (aparece a la derecha de la primera parte sombreada, de izquierda a derecha) y el rectángulo de largo *s* y ancho $\frac{1}{3}$. Este nuevo rectángulo es de área conocida $20'=\frac{1}{3}^{\circ}$.




Se aplica un factor, al ancho de este nuevo rectángulo, igual al ancho del primer rectángulo anexo $\left(\frac{2}{3}\right)$. De esta manera se tiene un cuadrado y un rectángulo, que constituyen una situación normal ( $s \pm Q = \alpha$ )



El cuadrado de lado $\delta = \frac{2}{3}s$ y el rectángulo de largo $\frac{2}{3}s$ y ancho $\frac{1}{3}$. El valor de la suma de sus áreas correspondientes es: $\frac{2}{3}20' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{\circ} = \left(\frac{2}{9}\right)^{\circ}$. Este problema se soluciona de acuerdo a las técnicas subcientífica, ya anotadas.

$$\left(\delta + \tfrac{1}{6}\right)^2 = \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{36} \Rightarrow \delta = \tfrac{1}{3}$$

$$\tfrac{2}{3}s = \tfrac{1}{3} \Rightarrow s = \tfrac{1}{2}$$

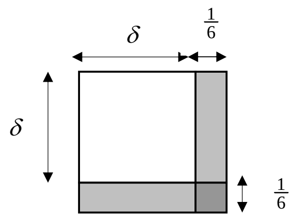



Figura 9. Solución al problema $Q - \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}s = 20'$

- Los problemas 8 y 9 son problemas cuya variación, respecto al trabajo de los agrimensores, sólo radica en la forma de expresar las relaciones entre los lados (problema 9), por lo tanto su solución se basa en la repetición del rectángulo de dimensiones $s_1$, $s_2$, cuatro veces, de tal manera que se conforme un cuadrado de lado $s_1 + s_2$, solución ya conocida y basada en la relación:

$$\square(s_1 + s_2) = \square(s_1 - s_2) + 4\ \sqsubset\!\sqsupset(s_1, s_2)$$

- Los problemas 10, 11, 13 y 14 son de la misma clase que los anteriores (involucran dos cuadrados); la diferencia está dada por la clase de cantidades de las magnitudes que se involucran en la relación entre los lados. Lo que significa, una diferencia relativa entre los lados, una razón entre los lados, una razón o el exceso de un lado en relación con el otro; todo esto como datos de los problemas.

- La solución del problema 12 es de extremado interés, puesto que marca un avance conceptual importante al manipular representaciones y no objetos en sí mismos. Todos los problemas de los agrimensores y los que preceden a este en la lista, manipularon lo que se enuncia (áreas como cuadrados y relaciones de los lados de estos cuadrados). Aquí sin embargo, una longitud se toma para representar algo diferente de sí mismo, un área.

  Høyrup afirma que, “si algún paso demarca la invención del álgebra, este es uno”. Lo que significa: El problema $Q_1 + Q_2 = 21'40''$, $\sqsubset\!\sqsupset(s_1, s_2) = 10'$ no se redujo al caso $Q_1 + Q_2 = \alpha,\ s_1 \pm s_2 = \beta$; calcularon $[\ \sqsubset\!\sqsupset(s_1, s_2)\ ]^2 = (10')^2$, lo cual es

$\square(Q_1, Q_2) = 100'$. El problema es reducido al tipo $A = \alpha,\ l \pm w = \beta$, $\square(l, w) = \alpha, l + w = \beta$, donde $Q_1 = l, Q_2 = w$.

Después de este hecho, textos de la antigua Babilonia usan longitudes para representar números, precios o expresiones aritméticas complejas, lo cual muestra que este avance en la conceptualización de los objetos y su operatividad no es ningún accidente.

- Los problemas 15, 17, 18 y 24 que tratan con tres o cuatro cuadrados presupone, para su solución, procesos más complejos, puesto que hay sustituciones que se reflejan en el manejo conjunto de las diversas técnicas de resolución de la tradición subcientífica.

Los rasgos que caracterizan los problemas de las tablas, por ejemplo, la aquí descrita, como matemáticas escolares (organización sistemática de problemas, extensión del rango de problemas etc.) se repite en otros lugares de la Antigua Babilonia. Es el caso de los textos llamados “Textos de la Serie” que corresponden a secuencias canónicas de enunciados de problemas de cuadrados y lados (MKT). La tabla Nº 4 de esta serie es traducida y analizada por Høyrup en 1992.

De los 39 problemas organizados en grupos con características similares, se observa, del 1 al 19 y del 30 al 39 un conjunto, de lo que podemos llamar ahora, ecuaciones lineales que involucran los lados y sus cuadrados. Para su solución se requieren tantas ecuaciones como sea necesario, lo que hace tedioso y complejo este proceso. Un ejemplo de este tipo de problemas es la ecuación 8: $Q_1$+$Q_2$+$Q_3$+$Q_4$=2``23`20.

Los problemas 21 al 28 muestran un esfuerzo de organización pluridimensional, en los cuales su solución requiere de productos y relaciones de variación conjunta entre la diferencia de los lados y la alternación (sustitución) entre la suma de las áreas y los lados. Pareciera que hay un acercamiento a la idea de constante y variación. Los valores de las adiciones entre cuadrados es el mismo, y entre cuadrados y lados, de igual manera. Estos problemas son:

21. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 52`30, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1} = s_i + \frac{1}{7} s_1$

22. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 54`20, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1} = s_i + \frac{1}{7} s_1$

23. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 52`30, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1} = s_i + \frac{1}{4} s_4$

24. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 54`20, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1} = s_i + \frac{1}{4} s_4$

25. $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 52`30, \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1} = s_i + \frac{1}{5} s_3$

26. $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+s_1+s_2+s_3+s_4=54`20,\ \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}=s_i+\frac{1}{5}s_3$

27. $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=52`30,\ \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}=s_i+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}s_2$

28. $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+s_1+s_2+s_3+s_4=54`20,\ \mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}=s_i+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}s_2$

Es de anotar que dos siglos más tarde de la Escuela escriba de Esnunna (1600 a.n.e.) el predominio de las técnicas de los agrimensores del periodo inicial de la Antigua Babilonia persisten y aún el derrumbamiento de la Escuela y la desaparición de esta álgebra escolar, su influencia se hará presente, por ejemplo, en los trabajos de los árabes.

Las técnicas geométricas es la evidente en estos trabajos. Esto contradice la postura tradicional de que son aritméticos y que el vocabulario geométrico es una metáfora de las operaciones aritméticas. Sin embargo Høyrup redimensiona y formula esto a partir de la estructura lingüística donde revela las técnicas geométricas eminentemente de resolución de acertijos y problemas.

## *3.2 EL ÁLGEBRA ÁRABE Y LA TEORÍA DE ECUACIONES*

Un desarrollo consciente y profundo en lo que se refiere al estudio de ecuaciones algebraicas es llevado a cabo por los matemáticos árabes, quienes preservan, aprehenden y cultivan las ciencias que provienen de fuentes babilónicas, hindúes y algunas griegas. Si bien la matemática árabe tiene su período de máximo esplendor entre los siglos IX y XI, su influencia se percibe en Europa hasta muy entrado el Renacimiento, por lo que los matemáticos europeos continúan el estudio de las ecuaciones hasta las primeras décadas del siglo XIX. De esta manera el álgebra está ligada a la resolución de ecuaciones.

En este apartado trataremos de dilucidar la relación entre la aritmética y el álgebra, para lo cual tomamos, primordialmente, una traducción del texto de al-Khwarizmi de autoría de Rosen (1986), los resultados del análisis del texto de al-Khwarizmi realizados por Puig (1998) y los de Rashed (1984), tal como se anotó antes.

### 3.2.1 La obra de al-Khwarizmi

De la exposición de la estructura del libro y de algunos comentarios del mismo al-Khwarizmi trataremos de captar la idea misma que él se hacía del álgebra, como también de la noción de ecuación y resolución, el tipo de problemas que resolvía y, en general, las características del pensamiento “algebraico” de aquella época, para mostrar que aquí hay un inicio de la teoría de ecuaciones, entendida como la determinación de unos objetos, desde el plano teórico, sin alusión a un contenido particular, sus relaciones, propiedades y su relación con lo numérico.

Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi escribió en Bagdad, entre el año 813 y 833, es decir bajo el reino de al-Mamun, su célebre obra *El libro conciso del cálculo de al-jabr y de al-muqabala.* Es la primera vez en la historia que se encuentra esta palabra “álgebra” y que aparece en un título para designar una disciplina; pero, como lo iremos tratando, la autonomía de esta disciplina no está solamente asegurada por un nombre que le sea dado, sino que está igualmente consolidada por la concepción de un nuevo vocabulario técnico destinado a designar objetos y operaciones específicos. No es sólo un problema de nominación, esa nominación corresponde a un contenido concreto.

En la introducción de su libro, al-Khwarizmi enuncia su proyecto: dotar de un manual conciso en el que la gente se pueda servir para sus problemas de cálculo, para los cambios comerciales, para sus sucesiones y para la agrimensión de sus tierras. Las diferentes partes de su libro son sucesivamente consagradas a estos diferentes temas.

La primera parte, teórica, está destinada al establecimiento de este cálculo —*hisab*— del *al-jabr* y de *al-muqabala*, es decir de sus términos primitivos y de sus conceptos. En la segunda, al-Khwarizmi fija igualmente las bases de procedimientos regulares que permiten llegar a solucionar los problemas de la práctica del cálculo a tipos algebraicos fundamentales. En cuanto a las últimas partes, de intención estrictamente práctica, tratan de la aplicación de este cálculo a las transacciones comerciales, a la agrimensión, a las medidas geométricas y, finalmente, a los testamentos.

Es importante anotar, que en el libro no aparecen símbolos matemáticos en el sentido actual; ni siquiera los números aparecen escritos en cifras, sino en palabras, es decir, no utiliza la llamada numeración arábiga. Estamos en el nivel del álgebra retórica[14], un texto escrito en la lengua árabe y con algunas representaciones geométricas para validar las reglas; en otras palabras, el sistema matemático de signos corresponde fundamentalmente al lenguaje natural.

#### *3.2.1.1 Los términos primitivos y una nueva teoría matemática*

El examen del libro de al-Khwarizmi revela tres clases de términos primitivos, que corresponden a los tipos de números que aparecen en los cálculos: raíz, “posesión” o “tesoro” y simples números.

- Una raíz es cualquier cosa que será multiplicada por sí misma, consistente en la unidad o números, hacia arriba, o fracciones hacia abajo.

---

[14] La división del álgebra en retórica, sincopada y simbólica se debe a G.H.F. Nesselmann en el libro “*Die Algebra der Griechen*”, Berlin, 1842 (Nota de Vasco, 1984, p. 56).

- Un tesoro es el valor total de una raíz multiplicada por sí misma.
- Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo a raíz ni a tesoro.

Los números son los racionales positivos, las operaciones aritméticas son las que hoy identificamos con los símbolos: $\pm, \times, \div, \sqrt{\ }$, además, incluye la igualdad. Todas estas operaciones son a menudo designadas por palabras diversas.

Respecto a estos términos y su significado, Puig (1998) afirma que aunque tradicionalmente se han traducido por los términos del trinomio, en donde $x^2$ es el cuadrado de la $x$ y corresponde a la traducción de la palabra árabe $m\bar{a}l$, (esta palabra significa “tesoro” o “posesión”), no es la palabra que significa “cuadrado” en árabe. Por lo tanto, no es conveniente hacer corresponder a $m\bar{a}l$, el significado de “cuadrado”, ya que, de una parte carece del significado geométrico que tiene “cuadrado” y esto obstaculiza la comprensión cuando al-Khwarizmi explica que $m\bar{a}l$ puede *representarse* por un “cuadrado”; de otra parte, si $m\bar{a}l$ significa el cuadrado de la incógnita ($x^2$) no sería comprensible porque, después de encontrar la incógnita (la raíz), calcula su cuadrado, pues en esos casos el cuadrado es la incógnita. Como consecuencia de esto, se puede identificar la raíz de la ecuación como la raíz, advirtiendo que muchas veces la raíz (incógnita) de la ecuación es el tesoro mismo. Un ejemplo de ello se encuentra cuando al-Khwarizmi dice: “Un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve *dirhams*”; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? Si lo tuviésemos que traducir a nuestro sistema analítico sería $x + 10\sqrt{x} = 39$ y no $x^2 + 10x = 39$.

Sin embargo, para Rashed (1984) al-Khwarizmi designa por $m\bar{a}l$, casi siempre, el cuadrado de la incógnita y afirma que en su libro se designan dos clases de términos, los puramente algebraicos y los comunes al álgebra y a la aritmética; los primeros son la incógnita indiferentemente llamada *raíz* o *cosa*; su cuadrado $m\bar{a}l$ y los segundos los números racionales positivos. Esta interpretación, permite que Rashed afirme que, en cuanto los términos algebraicos propiamente hablando, sería extraño que al-Khwarizmi no conociera más que los dos preferentemente citados, puesto que en algún caso él trata un problema cuyo contexto sugiere que recurre a la tercera potencia; este término no es sin embargo nombrado por al-Khwarizmi, ya que en efecto él escribe: “si llamamos un cuadrado —*mal*— multiplicado por su raíz, se convierte en tres veces el primer cuadrado”. En esta lectura, en nuestro sistema de signos se tendría $x^2 \cdot x = 3x^2$ y no como lo sugiere Puig, $x \cdot \sqrt{x} = 3x$. Lo que sí nos permite la lectura de Puig es comprender porque no es necesario recurrir a la tercera potencia en este caso.

De acuerdo con la perspectiva del presente trabajo nos parece pertinente y bastante justificado el análisis de Puig, ya que nos devela un esfuerzo por comprender tanto la naturaleza de los objetos matemáticos presentes en la obra de al-Khwarizmi, como las razones por las cuales establece una diferencia entre los términos primitivos y los que intervienen en el proceso de solución de los problemas (cuadrado, cosa), cuando se traducen a las formas normales, como lo veremos más adelante.

Con relación a la naturaleza de los términos primitivos, su carácter monetario, parece develar, que ante la carencia de un sistema de signos más sintético, son un recurso teórico para designar elementos esenciales de una teoría. Este carácter monetario se expone en los enunciados de los problemas cuando se relacionan tesoros, raíces de tesoros y monedas (*dirhams*).

Nótese que estos objetos matemáticos —algebraicos— tienen un compromiso ontológico con lo numérico y no con lo geométrico. Es decir, que se transita en el mundo de la cantidad y en las relaciones entre esas cantidades, como lo mostraremos a continuación.

#### *3.2.1.2 La idea de ecuación, operaciones y resolución de ecuaciones.*

La noción de ecuación aparece desde el comienzo, por sí misma, y, podemos decir, que de manera genérica, en la medida que no surge simplemente a lo largo de la solución de un problema, sino que es deliberadamente llamada a designar una clase infinita de problemas, puesto que se introduce la noción de forma normal. Al-Khwarizmi exige reducir —*yarud, reducere*—, sistemáticamente, cada ecuación a la forma normal correspondiente. La fórmula de la solución es justificada, matemáticamente, con la ayuda de una demostración geométrica.

#### *3.2.1.3 Formas normales y ecuaciones*

Así pues, después de haber introducido los términos de su teoría, Al-Khwarizmi escribe:

> …de estos tres tipos los unos pueden ser iguales a los otros, como cuando tu dices: los tesoros son iguales a las raíces, los tesoros son iguales a un número, las raíces son iguales a un numero". Y prosigue: "Yo he encontrado que de estos tres tipos —*al-durub, modus*— que son las raíces, los tesoros y los números, se componen, y que tenemos tres géneros compuestos —*ajnas muqtarina*, genera, *composita*— que son tesoros más las raíces igual a un número, tesoros más un número igual a las raíces y las raíces más un número igual a tesoros. (Rashed 1984).

Estas posibilidades de combinación de los términos primitivos tienen el carácter de un conjunto completo de formas normales, así:

- Tesoros igual a raíces,
- Tesoros igual a números,

- Raíces igual a números,
- Tesoros y raíces igual a números,
- Tesoros y números igual a raíces, y
- Raíces y números igual a tesoros.

Hasta aquí, podemos decir que el texto de al-Khwarizmi se distingue de lo que se encuentra en los textos babilónicos, pues no se trata ya de una sucesión de problemas a resolver, sino de una exposición que parte de términos primitivos cuyas combinaciones deben dar todos los prototipos posibles[15]. Lo que significa, que establece un conjunto completo de formas canónicas, un conjunto completo de posibilidades y los procedimientos de solución de éstas.

#### *3.2.1.4 Operaciones algebraicas*

Las operaciones del cálculo de *al-jabr, al-muqa¯bala[16], reducir y completar* tienen como propósito fundamental, transformar la ecuación que resulta del proceso de modelación de un problema a una de las formas normales, en la cual no debe aparecer una cantidad negativa (cantidad “substractiva”) y las cantidades de la misma especie estén agrupadas. Pero además hace falta que sólo haya un tesoro, ya que las reglas algorítmicas para resolver las formas normales están enunciadas para un tesoro.

La operación *al-jabr* o *restauración*, permite quitar las cantidades substractivas. Por ejemplo: en $x^2 - 3x = 4x + 3$ pasa por *al-jabr* a $x^2 = 4x + 3x + 3$ y en “cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams” $100 + 2t - 20c = 58$, al *restaurar* queda $100 + 2t = 58 + 20c$.

*Reducir*, *radd* trata de que haya un solo tesoro. En, nuestro primer ejemplo, no hay necesidad de reducir, hay un solo tesoro. En el segundo caso, al reducirse la expresión, dividiendo por dos, queda $50 + t = 29 + 10c$.

La operación *al-muqa¯bala,* u *oposición,* se encarga de eliminar la repetición de términos de la misma especie. Para $x^2 = 4x + 3x + 3$ por *al-muqa¯bala* queda $x^2 = 7x + 3$ y en $50 + t = 29 + 10c$ se obtiene $21 + t = 10c$.

En el caso que haya partes de un tesoro, hay que aplicar la operación *completar, ikma¯ l* o *takmi¯l*.

---

[15] Según Rashed, al-Khwarizmi expone estos prototipos en tres ecuaciones binómicas y tres ecuaciones trinómicas: $ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c;\ ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c.$

[16] Mucho se ha discutido sobre el sentido de las palabras *al-jabr* y *al-muqa¯bala* , ver al respecto a Vasco C., El álgebra renacentista, pp. 10 y 11.

### *3.2.1.5 "Formulas" y reglas de resolución*

La exposición de al-Khwarizmi evoluciona al mostrar cómo resolver cada una de las formas normales y cómo todos los problemas tratados en álgebra deben ser llevados a una forma normal con un solo tesoro y coeficientes racionales positivos. Estas formas normales se pueden pensar como las únicas ecuaciones permitidas en el libro de al-Khwarizmi. Las operaciones restaurar, reducir, oponer y completar son pues, aplicadas para que la ecuación sea puesta bajo, su forma normal, y expone la solución como un algoritmo para cada clase de problemas. Al-Khwarizmi se encuentra entonces en la situación de escribir que todo lo que revela el álgebra debe de llevar a uno de los seis tipos de formas normales descritos en su libro.

Aquí, mostraremos las reglas de solución para la cuarta y quinta forma normal. Para la cuarta (tesoros y raíces igual a números) en particular, tendríamos: Un tesoro y diez raíces del mismo tesoro igualan a treinta y nueve números. Es decir ¿Cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añaden diez raíces del mismo tesoro, iguala el equivalente de treinta y nueve *dirhams*?

Al-Khwarizmi escribe: "la regla en este —*fabābahu, cujus regula*— es que tu dividas las raíces en dos mitades, en este problema (se obtiene) cinco, que tu multipliques por el mismo, tendríamos veinticinco, le añades treinta y nueve, tendríamos sesenta y cuatro; toma su raíz que es ocho, y calculas la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres, que es la raíz del cuadrado que tu buscas, y el cuadrado es nueve"[17].

Para la quinta forma normal (tesoros y números igual a raíces) es como si dices, "un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro". Es decir, ¿cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún *dirhams*, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro?

La regla es: divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es

---

[17] Lo que se ha traducido tradicionalmente por:

$x^2 + px = q,$ Si $p$=10 y $q$=39 entonces:

$$x = \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{p}{2} = \left[\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{10}{2} = \left[(5)^2 + 39\right]^{\frac{1}{2}} - 5 = 3$$

cuarenta y nueve. Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no se puede en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces.[18]

Para concluir este apartado, al-Khwarizmi escribe: Estos son los seis tipos que he mencionado al principio de mi libro. Yo he acabado su explicación y he dicho que tres no dividiendo sus raíces en dos mitades (tesoros igual a raíces, tesoros igual a números, raíces igual a números). Y he demostrado sus reglas y su necesidad. Cuanto a estos en los cuales es necesario partir sus raíces en dos mitades en las tres clases que quedan[19], los he explicado de dos maneras presentado para cada uno una figura, por la cual podemos reconocer la causa de la partición en dos mitades.

El trabajo de al-Khwarizmi es importante por los métodos que introduce para resolver problemas tipos, formas canónicas, que se extienden en forma paralela a los problemas que tienen la misma estructura. Describe un programa, da un algoritmo, para obtener la solución en un número finito de pasos que no dependen de los números particulares que están dados en el problema, sino de sus relaciones mutuas, comparando los coeficientes de las raíces. En este sentido, el álgebra aporta una manera general de referencia de la cantidad, de lo numérico. Hecho importante que luego Vieta al introducir una forma particular, simbólica, de designar los objetos, permite a su vez una

---

[18] Para este caso $x^2 + q = px,$ , si $p$=10 y $q$ =21 se obtiene:

$$x = \frac{p}{2} \pm \left[ \left( \frac{p}{2} \right)^2 - q \right]^{\frac{1}{2}}, \quad si \left( \frac{p}{2} \right)^2 > q,$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \left[ \left( \frac{10}{2} \right)^2 - 21 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad x = 3, \ x = 7$$

Y de este caso, Al-Khwarizmi precisa: "entonces la raíz del cuadrado es igual la mitad de las raíces, exactamente, sin exceso ni disminución" (Si $\left( \frac{p}{2} \right)^2 = q$)

"entonces el problema es imposible –*falmas·alatu musthaila*- esta cuestión es imposible" (Si $\left( \frac{p}{2} \right)^2 < q$)

[19] Para "raíces y números igual a tesoros" se ha escrito la regla como : $x = \frac{p}{2} + \left[ \left( \frac{p}{2} \right)^2 + q \right]^{\frac{1}{2}}$

forma de expresar la generalidad de la estructura algebraica de los conjuntos numéricos. Lo que significa, que la originalidad de este trabajo no se encuentra en los algoritmos propiamente dichos, algunos de los cuales ya se encontraban en la matemática egipcia, otros en la de los babilonios y la mayoría en la matemática india. La originalidad se encuentra en la decisión del autor de clasificar las ecuaciones canónicas y de establecer un vocabulario tanto para los objetos matemáticos como para las relaciones y aún para los razonamientos.

En consecuencia, si se toma desprevenidamente el libro de al-Khwarizmi parece no reafirmar más que una técnica algebraica bastante elemental; pero es importante comprender que esta simplicidad corresponde de hecho exactamente a las limitaciones impuestas por la construcción de la teoría en un sistema matemático de signos que limita una visualización más precisa de conceptos y procedimientos. E incluso las innovaciones terminológicas estaban destinadas a crear una lengua susceptible de traducirse indiferentemente a los términos de la geometría y de la aritmética. Así, expresando una exigencia de la teoría, reflejan también la necesidad de distinguir la nueva sabiduría, la nueva propuesta teórica.

Además, notemos cómo tensiona el campo numérico las reglas de resolución de ecuaciones, es decir, se hace necesario hacer restricciones para que la solución este en el campo de los números racionales positivos y a su vez tomar conciencia sobre cuándo una ecuación no tiene solución. Esto último, dado que la validación de las reglas esta en el mundo de las magnitudes geométricas y se hace necesario hacer esta validación, producto de la tradición griega. Por lo tanto, a pesar del compromiso antológico de los objetos algebraicos con lo numérico, en al-Khwarizmi, no hay una independencia antológica con lo geométrico, que compromete la validación de las reglas.

#### *3.2.1.6 Sobre la demostración de las reglas*

Aunque en el texto al-Khwarizmi en la demostración de la validez de la regla sólo aparece la figura final después de la frase “Esta es la figura” y en el texto de Puig (1998) una propuesta desmenuzada, de esa demostración, aquí presentamos una forma intermedia, de estas dos, que nos permite comprender la manera como trata las magnitudes y su relación con lo numérico.

Una primera precisión que hace Puig (1998) corresponde a la determinación de las magnitudes que se usan, dice:

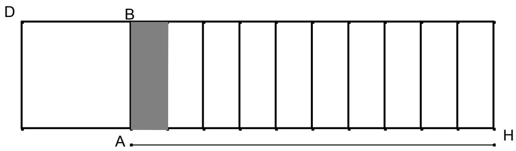
> Vale la pena entretenerse en observar el cuidado que tiene al-Khwarizmi de indicar que el cuadrado es una *representación* del tesoro —distinción que obviamente desaparece si se traduce *mal* por “cuadrado” o por $x^2$ —, y la distinción que hace entre la raíz del tesoro, que está representada por un lado del cuadrado que

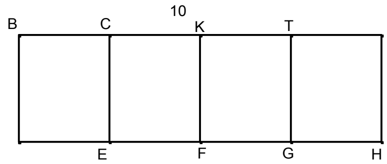
representa el tesoro, y la raíz de la superficie, que es un rectángulo de lado la raíz del tesoro y ancho una unidad, lo que permite representar las (diez) raíces.

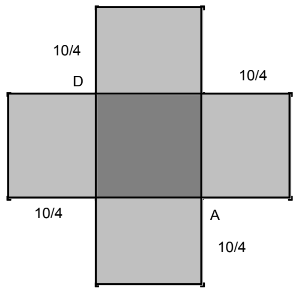
Para la demostración de la regla de la cuarta forma normal tenemos:

Un tesoro y diez raíces del mismo tesoro igualan a treinta y nueve números.

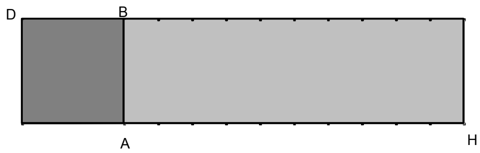
Representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, la superficie AD y añadimos el paralelogramo, donde uno de sus lados es igual a uno de la superficie AD, la superficie HB. Las dos superficies juntas equivalen en números a 39. Pero como cada lado del cuadrado se considera como una de las raíces, los cuatro lados equivalen al total de raíces, y cada uno con un valor de $\frac{10}{4}$ (cantidad de superficie). La superficie HB se divide en cuatro rectángulos por los puntos E, F y G con los segmentos, CE, KF, TG, de longitud igual a un lado del cuadrado. Se hace la configuración en forma de cruz de tal forma que las 10 raíces quedan distribuidas donde corresponden y la nueva figura, también equivale a 39.

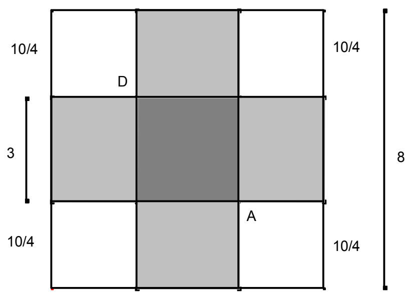



Se prolongan cada uno de los segmentos paralelos a las raíces, en ambas direcciones, una longitud de $\frac{10}{4}$, de tal manera que se completa un cuadrado de lado $2\left(\frac{10}{4}\right)$ más la raíz del cuadrado (desconocida) y se configuran cuatro cuadrados pequeños de superficie $\left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Por lo tanto, el valor de la superficie del cuadrado grande es



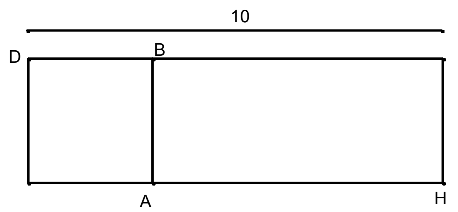
$39+4\left(\frac{25}{4}\right)=39+25=64$ y cada una

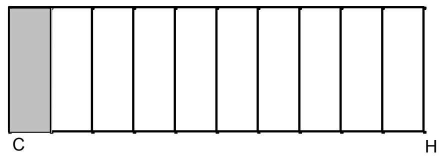
de sus raíces 8. El lado del cuadrado que representa el tesoro es $8-2\left(\frac{10}{4}\right)=8-5=3$.

Figura 10. Demostración de la regla de la cuarta forma normal

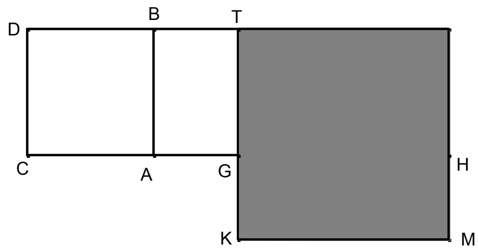
Y para la demostración de la regla de la quinta forma normal tenemos:

Cuando un tesoro y veintiún *dinrhams* son iguales a diez raíces, representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, que es la superficie *AD*. A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie HB, cuya anchura, esto es, el lado *HN*, es igual a uno de los lados de la superficie *AD*. La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado *HC*. Sabemos que su longitud es en números diez, ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos. Si uno de sus lados del cuadrado (raíz del tesoro) se multiplica por uno, eso da la raíz de la superficie. Cuando se declara que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces. Sabemos que la longitud del lado *HC* es igual a diez números, ya que el lado *CD* es una raíz del tesoro.

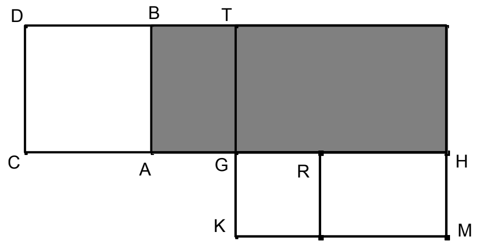


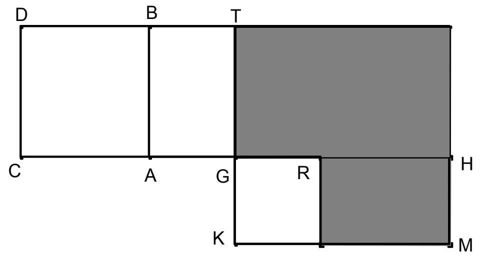

*Dividimos el lado CH en dos mitades* por el punto *G*. Entonces sabes que la línea *HG* es igual a la línea *GC*, y que la línea *GT* es igual a la línea *CD*. Entonces extendemos la línea *GT* una distancia igual a la diferencia entre la línea *GC* y la línea *GT* para cuadrar la superficie.



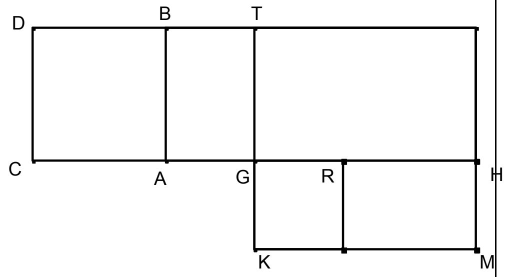

Entonces la línea *TK* es igual a la línea *KM*, y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales, que es la superficie *MT*. *Sabemos que la línea TK es cinco* y ésa es consecuentemente la longitud de los otros lados. *Su superficie es veinticinco* (obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo).



La superficie *HB* representa los veintiún números que se añaden al tesoro y sabemos que la superficie *HT* añadida a la superficie *MR* es igual a la superficie *HB* que es veintiuno.




La superficie *MT* es veinticinco. Y así, restamos de la superficie *MT*, la superficie *HT* y la superficie *MR*, entre ambas igual a veintiuno. Nos queda una superficie pequeña *RK*, que es veinticinco menos veintiuno, que es cuatro. Su raíz, la línea *RG*, es igual a la línea *GA*, que es dos. *Si lo restamos de la línea CG, que es la mitad de las raíces*, queda la línea *AC*, que es tres. Esta es la raíz del primer tesoro.




Si se añade la línea *CG*, que es la mitad de las raíces, resulta siete, o la línea *RC*, la raíz de un tesoro más grande. Si se añade veintiuno a este tesoro, también el resultado será diez de sus raíces.

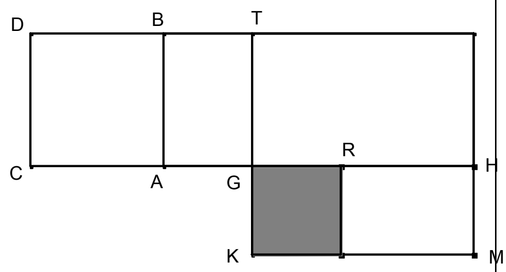



Figura 11. Demostración de la regla de la quinta forma normal

Una de las cosas, que distingue a al-Khwarizmi de sus predecesores árabes de la antigüedad o de la India, es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas. Se podría firmar que el tratado de al-Khwarizmi, en términos de la justificación y demostración de sus algoritmos, no aporta al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquellos han sido demostradas.

Además, la demostración en al-Khwarizmi tiene una tendencia analítica ya que supone que la ecuación se satisface, en esto y porque involucran números se diferencia de una demostración euclidiana. Al involucrar números identifica lo que se mide con la medida misma y al diferenciar la raíz del tesoro de la raíz de la superficie. Sin embargo, parece que solamente magnitudes geométricas se involucran en el razonamiento, pues las medidas de esas magnitudes se usan para calcular aunque la generalidad de la demostración se sigue de la generalidad de su aritmética.

Es importante aclarar que la demostración en Euclides, tiene un claro sabor lógico, puesto que las formas lógicas *p implica q* y *q es consecuencia de p* se utilizan frecuentemente. En este sentido sus demostraciones poseen un carácter más general y más intelectual que aquellas de al-Khwarizmi, aún haciendo precisos los conceptos de magnitud y unidad de medida utilizados y respetando los principios de homogeneidad en las especies con las que opera.

En conclusión, las pruebas del matemático de Bagdad son pragmáticas, se apoyan en diagramas a los que hay que observar y usar en un razonamiento cuyas etapas son asistidas por el lenguaje ordinario (adición o sustracción de figuras al diagrama inicial, aplicación de áreas o atención a la homogeneidad de los términos sobre los que se opera). Estas formas de justificación son retomadas por la mayor parte de los sucesores de al-Khwarizmi, aun aquellos que adoptan pruebas nuevas.

#### *3.2.1.7 Sobre los problemas y sus soluciones*

Los problemas[20] aparecen en el libro de Al-Khwarizmi, después de expuesta la parte teórica, y estos son modelados por ecuaciones que deben reducirse a una de las formas normales aplicando las operaciones pertinentes de la teoría, para ser solucionados aplicando las reglas enunciadas para cada caso.

Un nuevo término cosa *(shay)* aparece en el proceso de construcción de la ecuación, en ningún caso parece en el enunciado del problema. Se importa del lenguaje ordinario y se usa para referir a la cosa buscada. Se la emplea para identificar dentro del problema el número a determinar a partir de los números dados. Una ecuación deviene así del establecimiento de una relación binaria, mediante la igualdad, de tres especies las cosas, sus productos por sí mismos y los números dados en el enunciado. El estatuto de la representación de incógnita ha evolucionado en tanto tiene una designación específica.

Presentamos un ejemplo, expuesto por Puig (1997), del proceso utilizado por al-Khwarizmi en el tratamiento de los problemas, para mostrar la coherencia de su propuesta teórica.

> He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho *dirhams*.

[20] Puig (1997) anota, sobre las clases de enunciados de los problemas tratados por Al-Kwarizmi: Los *enunciados* de los problemas son de dos tipos: (a) La historia trata sobre el número diez, que se ha dividido en dos partes; se han realizado varias operaciones aritméticas con las partes y se da el resultado de esas operaciones o una igualdad entre los resultados de series de operaciones. Las incógnitas del problema son las dos partes en que se ha dividido diez. (b) La historia trata de un tesoro al que se le han realizado varias operaciones aritméticas y se da el resultado de ellas en *dirhams* o en tesoros. La incógnita es el tesoro.

Construcción de la Ecuación:

| | |
|---|---|
| Haces una de las partes cosa y la otra diez menos cosa. | Si representamos Cosa por $c$, entonces: $c, \quad 10-c$ |
| Multiplica luego diez menos cosa por si mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas. | Si representamos Tesoro por $t$, entonces: $(10-c)(10-c)$ es $100+t+20c$ |
| Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro. | $c.c$ es $t$ |
| Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho *dirhams*. | $100+2t-20c=58$ |

Reducción a la forma normal:

| | |
|---|---|
| *Restaura* luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas. | $100+2t=58+20c$ |
| *Reduce* luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas. | $50+t=29+10c$ |
| *Opón* luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas. | $21+t=10c$ |

Aplicación de la regla:

| |
|---|
| Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres. |

Resultado:

| |
|---|
| Es tres una de las dos partes, y la otra es siete. |

### 3.2.2 Número y álgebra en al-Khwarizmi

Así pues, acabamos de mostrar, que fue al-Khwarizmi el que constituyó las piedras angulares de una nueva disciplina; gracias a la generalidad del objeto matemático que trata la disciplina y a la generalidad de sus operaciones. Se trata en efecto de operaciones sucesivas destinadas a llevar un problema numérico o geométrico a una de las ecuaciones, puesta bajo su forma normal; y de aquellas que permiten llevar a continuación a las fórmulas canónicas de las soluciones, las cuales deben ser, a la vez, demostrables y calculables.

Es decir, el álgebra como un cálculo —*hisab*— como escribió al-Khwarizmi, primero porque se pueden aplicar a diferentes objetos una vez formulados en los términos primitivos del álgebra las leyes de la aritmética, y porque se encuentra en la salida conocida de sus posibilidades de aplicación, y responde así a las necesidades prácticas del cálculo, es también una ciencia aplicada. Su objeto no es un ser particular, ya que se trata también tanto de números como de magnitudes geométricas.

Podemos afirmar utilizando un lenguaje técnico actual que la idea del álgebra según al-Khwarizmi: se trata de la teoría de las ecuaciones lineales y cuadráticas con una sola incógnita, y del cálculo elemental de binomios y trinomios asociados. Pero si al-Khwarizmi se atiene, además, al segundo grado, es simplemente en razón de la idea misma de la solución y la prueba en la nueva disciplina. La solución debe ser a la vez general y calculable, y de una generalidad que sea además matemáticamente —y por tanto geométricamente— fundada. Solamente de hecho la solución por radicales podría responder a las exigencias de al-Khwarizmi, y por tanto se aclara la restricción del grado y del número de términos primitivos.

Desde su auténtico comienzo, el álgebra se presenta pues como una teoría de ecuaciones resolubles por radicales, y de cálculo algebraico sobre las expresiones asociadas, sin que sea formulada todavía la idea de polinomio en general. Esta concepción sobrevivirá durante largo tiempo a al-Khwarizmi, puesto que sus sucesores inmediatos se dedicaron precisamente al estudio de las ecuaciones de grado superior, pero pudieron llegar a la ecuación de segundo grado. Otros fueron tentados por la solución por radicales de la ecuación cúbica. Es suficiente convencerse de la influencia de al-Khwarizmi recordado como al-Khayyam rehúsa considerar como algebraica la solución de la ecuación cúbica con la ayuda de intersección de curvas, y consagra este calificativo a la sola solución por radicales.

Así, pues, podemos encontrar algunas características esenciales y fundamentales sobre la manera como empiezan a constituirse los objetos algebraicos en la teoría de ecuaciones, como sabemos, Al-khwarizmi utilizaba un lenguaje verbal, retórico en el que los números se designaban con palabras, pero es uno de los primeros en referirse a las cantidades como números y no simplemente en tanto magnitudes geométricas como lo hacían los griegos y esto es uno de los hechos fundamentales en el tipo de concepción matemática que tenían los árabes. De esta manera se puede pensar que al intentar desligarse un poco los árabes, de la parte geométrica para incorporar conceptos algebraicos, es decir al considerarse la cantidad como número se puede pensar que los árabes están haciendo referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada (podríamos hablar de una existencia ideal) y de esta manera tendían alejarse un poco del enfoque de lo construido, es decir aunque los árabes quisieran conservar aspectos de la tradición subcientífica a través de verificaciones geométricas de sus algoritmos, al considerar una cantidad como un número se puede entonces pensar que este objeto cantidad (número) es producto de la mente o simplemente es considerado también como un objeto eterno, anterior a la actividad del individuo.

Con esto no se pretende sustentar que el álgebra árabe era de concepción platónica, por el contrario teniendo en cuenta que el álgebra árabe surge como una necesidad del hombre por resolver ciertos problemas de la época, es decir sus teorías y conceptos se originan a través de la actividad de los individuos, es pertinente reflexionar que no basta con situar la concepción de estos objetos matemáticos a las experiencias reales del hombre en el marco de una actividad, pues se están considerando entes matemáticos como objetos dados en este caso los números, de esta manera llegamos a plantearnos un fuerte interrogante ¿Cuáles son las condiciones bajo las cuales se convalida la existencia o no existencia de un objeto matemático determinado? En realidad para responder a este interrogante es necesario apropiarse de una idea de objeto matemático lo suficientemente consistente y establecer bajo que condiciones un sujeto accede a este particular modo de realidad, pero teniendo en cuenta los propósitos de esta reflexión, podemos decir que los objetos matemáticos que se involucran en el álgebra árabe como son los términos primitivos y la clase de formas normales nacen de un proceso de objetivación cultural, es decir son patrones fijos de actividades cuyos orígenes resultan no de una contemplación intelectual de estos objetos, sino de actividades que llevaron a estos individuos a darse cuenta de estos, sin embargo tuvieron como referencia algunos objetos que consideraban como ya dados es decir que su existencia era independiente de las actividades que estos realizaran y esos objetos son los números.

Ahora bien, teniendo en cuenta una manera como pueden concebirse estos objetos matemáticos involucrados en el álgebra árabe, es pertinente recalcar porque estos objetos matemáticos permiten un inicio de la teoría de ecuaciones, esto se observa dado que hay un análisis del enunciado del problema donde se establece una incógnita del problema se expresan las operaciones narradas del problema como operaciones de la incógnita; las expresiones resultantes se transforman en resultados establecidos, se igualan las dos expresiones para formar una ecuación, se establece la reducción a una forma normal, para aplicar procedimientos operatorios o algorítmicos, y la aplicación de la regla algorítmica produce un resultado que se expresa en términos de la incógnita del problema. En otras palabras se puede decir que en el álgebra árabe se establece el método general de solución de ecuaciones que consiste en traslado de términos de una ecuación de un lado a otro y la agrupación de términos semejantes y esta es una de las bases fuertes en la consolidación de el álgebra clásica.

Lo anterior se puede sintetizar, desde la perspectiva de constitución de objeto matemático, el concepto de ecuación y la teoría de ecuaciones, han pasado constituirse en un nivel diferente al babilónico y producciones anteriores, en tanto el contenido y la expresión de ese contenido, que hace alusión a relaciones entre cantidades numéricas, en formas generales, en posibilidades expresadas en formas canónicas que dan cuenta que no se soluciona casos particulares únicamente. "Dicho de otra manera, antes de al-Khwarizmi se sabía resolver problemas cuadráticos con procedimientos tipificados, quizá incluso se sabía resolver cualquier problema cuadrático, pero no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos" (Puig 1998).

Desde el punto de vista fenomenológico, encontramos que los fenómenos organizados por el concepto de ecuación están en las matemáticas mismas y son de naturaleza numérica, sin embargo en los tratamientos de los problemas llevados a formas canonícas para su solución, estos expresan relaciones del mundo cotidiano, como herencias, terrenos etc.

Ahora, si bien es cierto que el álgebra árabe presenta otros expositores importantes como Omar al-Khayyam (1048-1131) y Sharaf ad-Din at-Tusi (1135-1213) quienes en lugar de proponer soluciones mediante radicales buscarán soluciones geométricas y extienden la tipología de las ecuaciones cuadráticas a las ecuaciones de tercer grado, lo que significa, que no sólo continúan ampliado el plan teórico de al-Khwarizmi, sino que generan otras ideas y teorías fundamentales en el álgebra y la teoría de ecuaciones, como la idea de solución de ecuaciones en términos de la intersección de curvas (secciones cónicas). Nuestro interés radica fundamentalmente en rastrear la continuidad de estas ideas, por lo menos en otro periodo de la historia de las matemáticas, en la relación aritmética — álgebra y por ello centramos la atención, no en éstos matemáticos árabes, sino en otro representante de tal problemática como Girolamo Cardano del Renacimiento italiano.

## 3.3 EL ARS MAGNA DE CARDANO Y UNA TEORÍA GENERAL DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Para los desarrollos posteriores a las matemáticas griegas y árabes era necesaria la expansión de una numeración más ágil que la utilizada por las culturas orientales y helénicas (letras del respectivo alfabeto) y un sistema matemático de signos cada vez más refinado. Con relación al sistema de numeración, este hecho se da en los hindúes en el siglo VII, pero solo a comienzos del siglo VIII aparece el primer matemático hindú que utiliza consistentemente la numeración decimal y desarrolla varios métodos algebraicos: Brahmagupta. Esta numeración no se había generalizado en la India y era desconocida por los árabes y lo seguiría siendo hasta la segunda parte del siglo IX (Bashkara, en la India y Omar Khayyam, en el Cercano Oriente). Los astrólogos de los templos y las cortes son los primeros en utilizar esta numeración en Europa en el siglo X, pero ésta no se extenderá hasta que los traductores de manuscritos empiecen a trabajar en la mitad del siglo XII. Sólo la imprenta y la difusión de las aritméticas impresas a fines del siglo XV marcarán el triunfo definitivo de la llamada numeración arábiga. Con esto la viabilidad de las operaciones y el desarrollo y difusión de la aritmética se hace evidente. En la segunda mitad del siglo XIII, comienza la manipulación mecánica de símbolos numéricos con la introducción definitiva de la numeración decimal, en las obras de Fibonacci (*Libro del ábaco*, *La práctica de la geometría*, la *Flor* y el *Libro de los cuadrados*) y otros matemáticos de Italia, Francia, Inglaterra y Alemania (Jordanus Nemorarius, por ejemplo).

La peste negra (1346–1356) y la guerra de los cien años entre Francia e Inglaterra detendrá los avances científicos y culturales en el siglo XIV; no obstante este letargo que hace ver al siglo XIV como una edad oscura, aparecen copias y comentarios de las obras del siglo anterior, así como algunos trabajos de matemáticos célebres, como Bradwardine[21] (1290-1346), en los ingleses, con un trabajo de proporciones en el cual extiende la idea de proporción más allá de la proporción simple, Juan de Muers (1310-1360) y Nicolás Oresme (1323-1382) en Normandía; este último escribió algunas obras sobre proporciones y aritmética en general, en las cuales considera una suma de una serie infinita o la invención de unos operadores equivalentes a los hoy llamados exponentes fraccionarios. Además, en tales trabajos se extienden las maneras de disponer las operaciones, como la multiplicación y la división, para facilitar los cálculos. Todo ello constituye ejemplos de los desarrollos posibles por un sistema matemático de signos potente, como la numeración decimal.

[21] Se afirma además que él es el gestor de modelos exponenciales y logarítmicos.

De otra parte, se ven los desarrollos para expresar operaciones y relaciones numéricas y algebraicas de forma cada vez más sintética, iniciando este proceso con la incorporación de abreviaturas de palabras y símbolos, que da origen al denominado lenguaje sincopado. Johannes Regiomontanus[22] es un exponente de esto; su notación manuscrita decidiría el empleo de muchos símbolos de abreviación en los libros impresos posteriormente. En sus trabajos, Nicolás Chuquet utiliza sistemáticamente abreviaturas para raíces (primera, segunda, tercera), para raíces de raíces, el signo menos no sólo para la resta, sino para números negativos aislados, exponentes para la dimensión del número aludido, etc. Pero la generalización de esta forma de producción de conocimiento no se generalizaría sino hasta el trabajo de Luca Pacioli con su *Summa* (1494), texto básico de todos los algebristas italianos del siglo XVI; su mérito está en hacer asequibles los métodos (aritméticos y algebraicos) conocidos y en la sistematización de las abreviaturas para los cálculos[23].

Notemos que las condiciones de base científica están aseguradas por la proliferación de las aritméticas impresas (Gutemberg, completa la primera imprenta en 1440) y por la difusión de la Summa de Pacioli, además de las condiciones económicas y sociales que permite recibir a los grandes algebristas del renacimiento de los siglos XV y XVI.

### 3.3.1 Aritmética y álgebra: La obra de Cardano

El *Ars Magna* de Cardano pertenece a la primera mitad del siglo XVI, la cual salió a la luz pública en el año 1545; esta obra sustenta tanto cuestiones que muestran cómo el autor ha roto con ataduras de las matemáticas anteriores, así como aquellos aspectos que dejan ver hasta qué punto las concepciones de la época, respecto al concepto de número y las relaciones dimensionales de las cantidades con lo geométrico, pueden obstaculizar una posibilidad de progreso científico.

Cardano comienza su libro haciendo un reconocimiento a sus antecesores árabes, también, a Leonardo de Pisa, Luca Pacioli y a Del Ferro, Fior, Tartaglia y Ferrari; estos

---

[22] Sus cálculos algebraicos siguen los métodos árabes popularizados en Europa desde el S. XIII. Los planteamientos son siempre en palabras, y esta “álgebra retórica” domina el lenguaje matemático de Regiomontanus (excepto la notación para los números). Pero en sus cartas y notas manuscritas empieza a utilizar una serie de abreviaturas que se desarrollan casi simultáneamente en toda Europa a fines del S. XV: es el “álgebra sincopada” o abreviada (Vasco 1983).

[23] Pero Luca Pacioli perfecciona las abreviaturas de tal manera, que éstas se pueden clasificar como minimales. Apenas es posible pensar en una ulterior comprensión de las letras de una palabra sin caer en ambigüedades. Se llega con la “Summa” al último límite de las abreviaturas, que serán utilizadas durante todo el S. XVI. Para superar este límite, habrá que llegar a la refundición del álgebra sincopada que llamaremos el álgebra simbólica, y que constituye un nuevo modo de producción de conocimiento matemático.

últimos, de quienes obtiene la solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado[24] y cuyo trabajo amplía y fundamenta en su obra.

Pues bien, con el análisis del contexto matemático en el cual se encontraba Cardano y el de su libro, es posible determinar realmente su preocupación por consignar y desarrollar las soluciones generales a las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, lo cual puede ser considerado como un intento por construir una teoría general de solución de ecuaciones, aunque veremos hasta qué punto puede Cardano lograr su propósito. Esta empresa, inicialmente, la podemos apreciar en la organización misma de su libro.

El primer capítulo sobre la soluciones dobles de cierto tipo de ecuaciones, nos enfrenta de entrada al problema de la no aceptación de los números negativos; el segundo, sobre el total de casos de ecuaciones presenta la consecuencia de la no aceptación de los negativos al enunciarse los distintos casos de ecuaciones cuadráticas y de tercer grado primitivas y derivadas por elevación de potencias, (22 casos primitivos y 44 derivados). En el capítulo tercero relacionado con las soluciones de casos simples expone a partir de un caso (un problema), la manipulación de términos de las ecuaciones para obviar lo números negativos, además de la cuidadosa verificación de los algoritmos y las reglas generales que se exponen. "Sobre las soluciones generales y particulares que siguen" y que corresponde al capítulo cuarto, Cardano clasifica las posibles soluciones de una ecuación en simples y constantes (*binomiun)* y sus correspondientes *apotomes* (*recisum)*[25]. En los capítulos quinto y sexto él nos explica la solución de casos que conducen a ecuaciones cuadráticas, que llama menores.

---

[24] Una buena referencia sobre esta disputa, se puede apreciar en Vasco, C. (1983). El Álgebra Renacentista, pp. 69-73.

[25] En una nota del traductor del *Ars Magna*, éste expone que en el capítulo tercero del libro de Cardano *Ars Magnae Arithmeticae*, este ilustra estos términos (en notación actual):

| *Constans (binomium)* | *Apotome (recisum)* |
|---|---|
| $3+\sqrt{5}$ | $3-\sqrt{5}$ |
| $\sqrt{12}+3$ | $\sqrt{12}-3$ |
| $\sqrt{18}+\sqrt{10}$ | $\sqrt{18}-\sqrt{10}$ |
| $3+\sqrt{2}$ | $3-\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{11}+2$ | $\sqrt{11}-2$ |
| $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ |

En los capítulos siguientes trata sobre transformación de ecuaciones, de una parte, parejas de transformadas, pues al conocer la solución de una se puede calcular el de la otra; de otra, como ecuaciones polinómicas con coeficientes fraccionarios pueden transformarse a ecuaciones con enteros y por último, trata el problema con dos cantidades desconocidas.

En los capítulos del XI al XXIII trabaja los 13 casos de las ecuaciones cúbicas primarias y sus demostraciones geométricas. En el capítulo siguiente, estudia las derivadas, como por ejemplo $x^6 + 6x^4 = 100$, a continuación, y hasta el capítulo XL expone las reglas usadas para resolver ecuaciones. En el capítulo XIX aborda el problema de la solución general de la ecuación de cuarto grado.

El texto de Cardano es escrito en un lenguaje retórico con elementos de un álgebra sincopada, fundamentalmente para expresar operaciones; no obstante, expondremos su teoría usando el sistema de signos actual, pues no distorsiona las significaciones de las ideas expuestas en el texto, del gran matemático del Renacimiento.

#### *3.3.1.1 Soluciones dobles, raíces dobles y números negativos.*

En el primer capítulo del *Ars Magna*, expone sobre las soluciones dobles, que surgen de ecuaciones donde intervienen potencias pares de las incógnitas, como:

$$x^2 = 9, \quad x^2 = 16, \quad x^4 = 81, \quad x^4 + 3x^2 = 28, \quad x^4 + 12 = 7x, \quad x^4 + 12 = 6x, \quad x^4 = 2x^2 + 8$$

Cardano considera las raíces positivas como verdaderas y las negativas como ficticias o falsas. En el primer y segundo caso, de las ecuaciones anteriores afirma que si cada potencia par es igual a un número, sus raíces tienen dos valores, uno verdadero y otro negativo, las cuales son iguales una a otra (en valor), en el primero 3 y -3, en el segundo 4 y -4. Para la tercera, 3 y -3 que se deriva del primer caso. Esta regla se cumple, también, si tenemos, *la suma del cuadrado del cuadrado con el cuadrado igual a un número*, el resultado será el mismo como en el caso simple, en la cuarta ecuación, 2 y -2.

Pero, *si el cuadrado de un cuadrado y un número son iguales a un cuadrado*, hay dos soluciones verdaderas y al mismo tiempo dos soluciones negativas, como en la quinta ecuación: $2, \sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}$ y para la sexta, concluye que si no hay una solución verdadera tampoco hay una falsa. Para el caso de la última ecuación de la lista anterior, *si el cuadrado de un cuadrado es igual a un número y un cuadrado*, hay siempre una solución verdadera y otra solución ficticia, 2 y -2. Lo que significa que establece las diferencias de las soluciones para estas ecuaciones de potencia par.

En este mismo capítulo, para las potencias impares, inicialmente, Cardano, considera estas ecuaciones:

$$2x=16,\quad 2x^3=16,\quad x^3+6x=20$$

Y concluye que para potencias impares, siempre hay una solución verdadera, cuando está igualada a un número.

Luego, enuncia, en forma general, que cuando dos potencias impares y una constante se comparan, hay que determinar primero si el producto de los dos tercios del coeficiente de la primera potencia por la raíz cuadrada de un tercio del mismo coeficiente es mayor, igual o menor al término constante[26]. Cuando son iguales, la ecuación tiene dos raíces y una de los dos es verdadera (la raíz de un tercio del coeficiente de la primera potencia), como en la ecuación: $x^3+16=12x$ y corresponde, según Cardano, a 2, que es la raíz cuadrada de 4 y la falsa a -4[27]. Si el producto es mayor que el valor de la constante, habrá tres soluciones, dos verdaderas y una falsa, como en el caso de $x^3+9=12x$ y el valor numérico de la falsa corresponde a la suma de las verdaderas[28].

Cardano, completa esta disertación sobre las soluciones dobles, estableciendo la solución de otras ecuaciones a partir de las obtenidas. Además, en algunos casos expone la regla para un caso específico y luego la enuncia en forma general y en otros enuncia primero la regla general y luego la ejemplifica. Trabaja, también, casos en los cuales se combinan potencias pares e impares y extensiones de la formula cuadrática y bicuadrática. Al final del capítulo presenta una demostración sobre el caso del *cubo más constante igual a la segunda potencia más la primera*, desde la perspectiva geométrica y anuncia que esto se hará en todo el libro, como efectivamente lo hace.

Es importante resaltar, hasta aquí, el trabajo de Cardano, sobre la formulación de reglas basadas en las relaciones numéricas de los coeficientes de los términos de la ecuación y las soluciones o raíces de ésta, el interés en el número de raíces que resultarán de la solución de la ecuación y la clase de raíz que se obtendrá. Problemas fundamentales, del desarrollo del pensamiento algebraico y de la teoría de ecuaciones, que desbocarán

---

[26] Para $x^3+px=q$ entonces, se compara $\frac{2}{3}p.\sqrt{\frac{1}{3}p}$ con $q$. Cuando son iguales la ecuación tiene dos raíces una verdadera y otra falsa. La verdadera corresponde a $x=\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

[27] Nótese, que la a la raíz doble (2) se toma como una sola, lo que daría dos soluciones de ecuación de tercer grado, aún cuando Cardano reconoce que a este tipo de ecuaciones le corresponden tres raíces.

[28] Cuando $\frac{2}{3}p.\sqrt{\frac{1}{3}p}>q$, la ecuación tiene tres raíces, dos verdaderas y una falsa: $x_1=r,\quad x_2=s,\quad x_3=-t$, y $r+s=t$

en el teorema fundamental del álgebra, cuando el interés radica en prever cuantas y como serán las raíces, sin importar cuáles son específicamente. Es decir, cuando el problema de determinar las raíces pasa a ser el de anticipar su existencia.

Desde el inicio de este trabajo se muestra el reconocimiento de cantidades negativas que surgen de solución de ecuaciones, aunque no se admitan como soluciones, de estas ecuaciones. Se aprecia el "temor" de Cardano en el trabajo con los números negativos, esto se refleja en la forma como él se refiere a dichos números en este capítulo del libro, aquí reconoce por ejemplo, que el 9 se deriva igualmente como cuadrado de 3 y -3, y añade inmediatamente que un cubo negativo, que llama "*debitum*" o "deuda", no puede provenir de un "número verdadero", califica las soluciones negativas como "ficticias"; en el capítulo III las llama "inútiles y falsas". Cardano se ve abocado a respetar una concepción relacionada con estos números "no verdaderos". No obstante, los manipula, opera con ellos y sabe que son el resultado de un proceso o algoritmo aplicado correctamente para obtener la solución de una ecuación.

De esta forma Cardano no solo descalificaba los números negativos como soluciones de las ecuaciones sino que su rechazo lo obligaba a trabajar laboriosamente con diferentes casos para un mismo tipo de ecuación, puesto que siempre busca establecer una ecuación en la cual los coeficientes debían ser necesariamente positivos, es por ello que el capítulo II, como lo hemos anotado antes, concluye con la lista completa de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas, 22 casos primitivos y 44 derivados, los capítulos XI a XXIII se dedican a la solución de las 23 cúbicas primarias y sus demostraciones geométricas, en el capítulo XXIV estudia los 38 casos derivados, teniendo en cuenta estos capítulos mencionados, es posible determinar que el propósito de Cardano por construir una teoría general de soluciones de ecuaciones estaba lejos de ser establecida así, pues la falta de aceptación de los coeficientes negativos en las ecuaciones, lo llevaron a contemplar casos y casos de cada tipo de ecuación (cuadrática, cúbica) de forma detallada, según los términos de los diversos grados que debían aparecer en el mismo o en diferente miembro de la ecuación, puesto que los coeficientes solo debían ser positivos, tratando cada caso de la ecuación como un problema diferente, aunque relacionados.

La idea de ecuación que sobresale, hasta aquí, corresponde a la igualdad de relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas que representan números. Lo que significa, que la ecuación organiza relaciones del mundo de la cantidad, pues las relaciones geométricas solo usadas para validar las reglas de solución de las ecuaciones, como lo veremos más adelante.

### 3.3.1.2 Solución de ecuaciones cúbicas y "continuidad"

La estructura de los capítulos donde Cardano aborda la solución de las ecuaciones cúbicas, es constante, en el titulo aparece el caso que va tratar, luego la demostración de la regla, desde la perspectiva geométrica, acompañada de su explicación, después la regla expuesta en forma general y luego algunos ejemplos. Trabaja la cúbica reducida directamente[29] o hace transformaciones para obtenerla[30], ésta con coeficientes positivos. Todos los ejemplos que presenta son numéricos con coeficientes enteros positivos.

Para *el cubo y la primera potencia igual a número:* $x^3 + px = q$, la regla que Cardano da en su Ars Magna es la siguiente:

> Elevas al cubo un tercio del coeficiente de la primera potencia; sumas a lo obtenido el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación; tomas la raíz cuadrada de todo esto. Duplicarás esto y a uno de los dos agregas la mitad del número que ya elevaste al cuadrado y de lo otro restas la mitad de lo mismo. Tendrás entonces su binomio y su apotome. Entonces, sustraes la raíz cúbica de la apotome de la raíz cúbica del binomio; el residuo o lo que es dejado es el valor de la raíz.

Esta regla demostrada por Cardano, la ilustra con varios ejemplos:

$$x^3 + 6x = 20, \quad x^3 + 3x = 10, \quad x^3 + 6x = 2$$

Para el primero tenemos, un tercio de 6 es 2 y elevado al cubo obtenemos 8. La mitad de la constante de la ecuación es 10 y lo elevamos al cuadrado y se obtiene 100; sumamos esto con lo anterior y se obtiene 108; luego, tomamos la raíz cuadrada de que es $\sqrt{108}$. Esto lo duplicamos y a una le adicionamos 10, que es la mitad de la constante 20 y a la otra le substraemos lo mismo. Así, obtenemos el *binomio* $\sqrt{108} + 10$ y el *apotome* $\sqrt{108} - 10$ . Tomamos la raíz cúbica de cada uno de ellos. Substraemos la raíz cúbica del *apotome* de la raíz cúbica del binomio y obtenemos el valor de $x$*:*

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

---

[29] Cubo y primera potencia igual a número, cubo igual a primera potencia más número y cubo y número igual a primera potencia. No hay término cuadrático.

[30] Como en los casos: Cubo igual a cuadrado más número; cubo y cuadrado igual a número; cubo y número igual a cuadrado; cubo, cuadrado y primera potencia igual a número; cubo y primera potencia igual a cuadrado y número; cubo y cuadrado igual primera potencia y número; cubo igual a cuadrado, primera potencia y número; cubo y número igual a cuadrado y primera potencia; cubo, primera potencia y número igual al cuadrado y cubo; cuadrado y número igual a primera potencia.

Notemos que si $a=\sqrt{108}+10$ y $b=\sqrt{108}-10$, entonces $a-b=20$, y además $ab=2^3=8$. Entonces la solución es de la forma $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ [31]. Cardano no alude a las otras raíces de la ecuación, solo a esta que es la verdadera.[32]

Para el caso de *el cubo igual a la primera potencia y un número:* $x^3=px+q$, Cardano enuncia la siguiente regla:

Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la primera potencia no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y, de nuevo, réstalo de la misma mitad, y tendrás, como se dijo, un binomio y su apotome, la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la raíz.

Es importante notar aquí, la restricción que le impone Cardano $\left(\frac{p}{3}\right)^3 \le \left(\frac{q}{2}\right)^2$, la diferencia, entre estos términos debe ser no negativa pues es necesario tomar la raíz cuadrada de este número, para encontrar la solución. La no aceptación de los negativos y la falta de sentido para las raíces de números negativos conducen a no poder ver la generalidad de este argumento. Allí, está presente el discriminante de la cúbica[33].

---

[31] Dicho de otra forma: Si $x^3+px=q$ con $p>0$ y $q>0$, para encontrar su solución Cardano utilizó la identidad algebraica: $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$. Si $p=3ab$ y $q=a^3-b^3$, entonces la identidad se trasforma en: $(a-b)^3+p(a-b)=q$ y por lo tanto, $x=a-b$ será una solución de la cúbica reducida (el coeficiente de $x^2$ es nulo).

[32] Esta raíz es 2 y las otras raíces son: $-1+3i, -1-3i$.

[33] Puesto que para $x^3+px+q=0$, $(a-b)^3+p(a-b)=q$

i) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0$, entonces $a^3$ y $b^3$, son ambas reales y las raíces son:

$$a+b,\quad -\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cdot\sqrt{-3},\ -\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\cdot\sqrt{-3}$$

ii) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$, entonces $a^3=b^3$, $a=b$ y las raíces son:

$2a,\quad a(w+w^2),\quad a(w+w^2)$ donde $w$ es la raíz tercera primitiva de la unidad que es obtenida al solucionar en C la ecuación $x^3=1$, o sea $2a,\quad -a,\quad -a$

iii) Si $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0$, entonces $a^3$ y $b^3$ serían complejos; sus raíces cúbicas también complejas y las raices de la ecuación son en este caso: $2a,\quad -a-b\sqrt{3},\quad -a+b\sqrt{3}$, todas reales.

En el caso de *El cubo y número igual a la primera potencia*, el matemático del Renacimiento aplica lo explicado en el primer capítulo sobre las trasformadas de ecuaciones, conocer la solución de una ecuación permite conocer la de otra relacionada. En efecto, enuncia su regla afirmando que si $x^3 + q = px$, y $y^3 = py + q$, entonces $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{p - 3\left(\frac{y}{2}\right)^2}$.

En el capítulo XIIII, Cardano introduce la transformación de ecuaciones cúbicas con términos cuadráticos a la forma reducida, dice *"Si el cubo es igual al cuadrado y constante, se puede introducir un cambio en la ecuación por una del cubo igual a la primera potencia y la constante por el primer método de conversión, el cual es del todo a la parte…"* Y enuncia la regla en los casos que le es necesaria, por ejemplo para el caso El cubo y el cuadrado iguales a un número, se puede traducir como:

$x^3 + px^2 = q$, si $x = y - \frac{p}{3}$, la ecuación se transforma en $\left(y - \frac{p}{3}\right)^3 + p\left(y - \frac{p}{3}\right)^2 = q$, entonces

Desarrollando y reduciendo términos, tenemos: $y^3 = 3\left(\frac{p}{3}\right)^2 y + \left[q - 2\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$, que se reduce a uno de los casos estudiado[34]

Es importante en este aspecto retomar el caso sobre *El cubo y números igual al cuadrado*: $x^3 + q = px^2$, tratado tanto en el primer capítulo con en el XVI. En este último, Cardano da primero la regla y ejemplifica, para después hacer la demostración geométrica de ésta.

En el primer capítulo, él dice lo siguiente: Si, el cubo y el cuadrado son iguales a una constante y si el producto de un tercio del coeficiente de $x^2$ y el cuadrado de los dos tercios del mismo es menor que la constante de la ecuación, $x$ solamente tiene un valor

---

[34] La regla que da Cardano para resolver este problema, en forma general es equivalente a lo siguiente: Considerando la ecuación general de tercer grado, en una variable $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, se supone $y = x - \frac{a}{3}$. La ecuación, tomaría la forma $\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c = 0$, desarrollando obtenemos: $x^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)x + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$. En la cual se ha eliminado el término cuadrático.

y este es positivo. Este valor es igual al de las soluciones ficticias en el correspondiente caso de que el cubo y la constante sean iguales al cuadrado con el mismo coeficiente. Ejemplifica para $x^3+3x^2=20$ y $x^3+20=3x^2$.

Lo que tenemos es, que si $x^3+px^2=q$ ($p>0$ y $q>0$), si $\frac{1}{3}p\left(\frac{2}{3}p\right)^2<q$, entonces $x=+s$, y $+s=-s$ en $x^3+q=px^2$.

Si el producto de esta multiplicación es igual a la constante, habrá una solución verdadera y dos ficticias y en el otro caso dos verdaderas y una ficticia. Por ejemplo, en $x^3+11x^2=72$ y $x^3+72=11x^2$

Al respecto Bergé (2003) hace referencia a un análisis de Zariski, sobre el trabajo de Cardano, donde este comenta, que al asumir Cardano, a propósito de estas ecuaciones, que hay un número positivo $N$ (en nuestro caso $s$), de modo tal que si $x=N$, se tiene que si $x^3+q<px^2$ (se muestra que bajo la condición $q<\frac{4}{27}p^3$, basta tomar $N=\frac{2}{3}p$). Por otro lado para $x=0$ se tiene $x^3+q>px^2$ y, existen valores suficientemente grandes de $x$ para los que $x^3+q>px^2$, el deduce, por ejemplo que existen dos raíces positivas, una entre *0* y *N* y la otra entre N y un valor grande de $x$, Cardano hace uso implícitamente de una idea de completitud. Bergé, afirma que según esto, lo que se ve es un uso implícito, de los que hoy se conoce por el teorema de Bolzano[35].

De acuerdo a la afirmación de Zariski y Bergé (2003), es importante aludir que en el proceso de resolver ecuaciones y en el análisis de su naturaleza, existe en la base una idea de cómo es el conjunto que admite esas raíces, porque recordemos, que para el caso de Cardano, numéricamente esos objetos existen (los negativos y complejos), lo que no admite es la validez de éstos como raíces de ecuaciones. Por lo tanto hay unas propiedades de esos números que permiten su operatividad y su pertenecía a un conjunto que no sabemos, como lo caracteriza Cardano. Existen intuiciones respecto a lo que deja apreciar esa operatividad respecto a un caso específico, la solución de ecuaciones.

---

[35] El teorema dice que Si $f$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, tal que $signo\ de\ f(a)\neq signo\ de\ f(b)$ entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

En total, son 13 casos de la cúbica los que son analizados y resueltos por Cardano, así como también otros casos derivados de ellos.

Recordemos que en el caso de una ecuación cuadrática las soluciones están dadas por una expresión que sólo involucra operaciones aritméticas elementales sobre los coeficientes de la ecuación (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas) y el proceso de esta aplicación se conoce como *resolver la ecuación por medio de radicales*. En el caso de las cúbicas y bicuadráticas, Cardano pretende obtener sus raíces por medio de realizar operaciones aritméticas sobre los coeficientes de una ecuación dada, hecho que logra afirmativamente como lo hemos anotado.

Es así, como considera a sus ecuaciones con coeficiente numéricos concretos como representantes de tipos generales, contempla la solución típica de todas aquellas ecuaciones que se presentan, por ejemplo para *el cubo y la cosa igual a un número* $\left(x^3 + px = q\right)$, después de efectuar todo el proceso para el caso concreto, termina dando una formula verbal de la regla equivalente a la solución general para las ecuaciones cúbicas que tienen esa forma.

De otra parte, es importante resaltar, que la teoría de ecuaciones, enmarca problemáticas, que no se superan por la constitución de los números reales, dado que sus soluciones desbordan este campo numérico. Lo que permite valorar, más aún la potencia de abordar enfoques integradores en el estudio de las matemáticas, que constituyan, por ejemplo lo numérico y lo algebraico.

Un ejemplo de esta problemática lo aborda Cardano, cuando desarrolla la solución de ecuaciones que tienen por ejemplo la forma *el cubo igual a la primera potencia y número,* que en el caso concreto de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ pues haciendo sus cálculos obtiene que $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Él tenía conocimiento acerca de que la raíz cuadrada de un número negativo no existe, pero también sabe que $x = 4$ soluciona la ecuación, por lo tanto no podía entender que sucedía en este caso con su regla de solución. También se ve enfrentado al problema de las raíces de números negativos que al operarse producen soluciones de ecuaciones que son aceptadas, como en el producto $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right) = 25-\left(-15\right) = 40$. Ha tales expresiones las califica como *verdaderamente sofisticas*.

De esta forma, se evidencia como la falta de aceptación y de desarrollo de un concepto más abstracto como es el de los números complejos, hizo que la teoría de Cardano no alcanzara la generalidad que él esperaba y lo condujera a caminos inexplicables y sin una salida de explicación lógica, que obstaculizó el desarrollo de nuevas técnicas, puesto que obtener raíces cuadradas de números negativos en la solución implicaba dejar el procedimiento de resolución incompleto, de tal forma que la regla establecida no ofrecía la posibilidad de encontrar la raíz positiva, cuya existencia muchas veces era evidente al comprobarla mediante una simple sustitución en la ecuación.

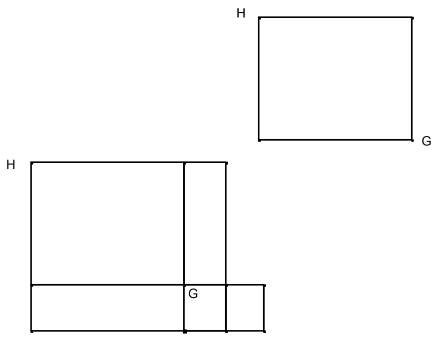
Sin embargo, es de resaltar que Cardano adopta, cierta posición con respecto a las concepciones de la época, pues no se limitó a considerar que ecuaciones que tenían como solución raíces de números negativos o con los mismos números negativos no eran solucionables, como es el caso de las ecuaciones $x^2+1=0$ y $x+1=0$, y tratar de negar su existencia a toda costa, Cardano presentó aquellas ecuaciones y problemas que conllevaban a obtener en algunos casos, de un lado raíces de números negativos y del otro un valor real, conflicto que muestra de forma importante para el desarrollo de las producciones posteriores, cierto grado de interés acerca de estos números y un intento de ruptura ideológica presentando la problemática, aludiendo a no poder entender cual era el sentido de su regla en tales casos, lo cual además lograría despertar un completo interés de los matemáticos posteriores.

#### *3.3.1.3 Sobre la demostración de las reglas.*

Las demostraciones geométricas de Cardano para sus reglas algebraicas, las cuales a pesar de estar basadas en las proposiciones euclidianas, presentan algunas excepciones, en este tipo de razonamiento, por ejemplo en la prueba que hace de la fórmula para la ecuación $x^3+6x=20$, es una demostración con "apariencia" geométrica. Cardano basa su razonamiento en la identidad algebraica $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ y usa el siguiente razonamiento:

"Si $GH^3$ más seis veces su lado $GH$ es igual a 20, y si $AE$ y $CL$ son dos cubos cuya diferencia es 20 y tal que el producto de $AC$, el lado (de uno), y $CK$, el lado (del otro), es 2, a saber un tercio del coeficiente de $x$. Haciendo $BC$ igual a $CK$; así, el resto de la línea $AB$ es igual a $GH$ y por consiguiente el valor de $x$, para $GH$ ya esta dado ( $x$ ).

De acuerdo con la primera proposición del capítulo sexto de este libro, completamos el solidó con $DA$, $DC$, $DE$ y $DF$; y como $DC$ representa $BC^3$, como $DF$ representa $AB^3$, $DA$ representa $3(BC \times AB^2)$ y $DE$ representa



$3\left(AB \times BC^2\right)$. Entonces, $AC \times CK$ es iguala 2 y $AC \times 3CK$ sería igual a 6, el coeficiente de $x$; por esta razón $AB \times 3\left(AC \times CK\right)$ es $6x$ o $6AB$, por lo cual tres veces el producto de $AB, BC$, y $AC$ es $6AB$. Ahora la diferencia entre $AC^3$ y $CK^3$ es 20 — Evidentemente el mismo $BC^3$, el cual es igual a esto por suposición —, y desde la primera proposición del capítulo seis esta la suma de los cuerpos $DA, DE,$ y $DF$. Por consiguiente estos tres cuerpos son iguales a 20"

Figura 12. Prueba de la fórmula para la ecuación $x^3 + 6x = 20$

Cardano continúa su demostración asumiendo BC negativo.

En este caso Cardano usa la figura solamente como un soporte que brinda elementos intuitivos mediante el gráfico, para representar la fórmula $(u+t)^3$ y facilitar su comprensión, pues de lo contrario se necesitaría una figura tridimensional. Así, se puede deducir que una demostración de este tipo esta bajo la influencia geométrica, pero en realidad no alude a una prueba estrictamente geométrica, su compromiso geométrico se refleja con la figura utilizada, el amarre que todavía se presenta para un desarrollo algebraico independiente, sin embargo hay un intento por hacer una prueba que no dependa estrictamente de los axiomas y proposiciones euclidianas, poniendo en evidencia en cierta forma, que el álgebra también proveía elementos generales para que posteriormente fuera totalmente independiente de la generalidad de la geometría.

Por otro lado, en el propósito de establecer su teoría general, Cardano se ve nuevamente bloqueado por una noción que obstaculiza su desarrollo, aunque en este caso se podría hablar de un bloqueo parcial. Pues bien, este aspecto tiene que ver con un bloqueo geométrico que puede ser considerado desde tres aspectos, uno de acuerdo a la naturaleza de los objetos matemáticos que considera Cardano, el segundo a la metodología usada y el tercero tiene que ver con sus demostraciones, en cada caso veremos cómo este bloqueo puede ser considerado parcial.

Veamos, Cardano () caracteriza explícitamente la naturaleza de los objetos matemáticos con los cuales trabajará, explicando porque cierra su libro con el tratamiento de las ecuaciones cúbicas así:

> Como la posición se refiere a una línea, el cuadrado a una superficie, y el cubo a un cuerpo sólido, seriamos muy torpes si siguiéramos más allá. La naturaleza no lo permite, con esto podemos establecer como Cardano hace explicito su compromiso antológico conservando la tradición griega al estilo euclidiano, pues cada potencia esta relacionada con un objeto geométrico, amarrado a la percepción intuitiva que la naturaleza provee físicamente, por ello la potencia no puede superar el grado 3.

El segundo aspecto tiene que ver con su metodología, aquí nuevamente se ve Cardano influido por las consideraciones ideológicas de los antiguos y de su época, es el caso de su metodología, pues todavía el álgebra está lejos de desprenderse de la geometría, donde se consideraba que el cuerpo axiomático euclidiano era el más formal, que permitía dar a las demostraciones ese estatus de validez y generalidad. Así Cardano, establece la formulación verbal de la regla que soluciona la ecuación, procede a realizar su demostración que además de las proposiciones de Euclides, usaba diagramas y letras.

También se aprecia que su método sigue cierta influencia de Al-Khwarizmi relacionada con un razonamiento geométrico, de manera que el busca por ejemplo, resolver la ecuación “completando el cubo”, sin embargo se podría decir que su método está estrechamente relacionado con la concepción de la validez de las pruebas geométricas, pero a pesar de esto Cardano se preocupa es por una teoría de reglas generales para las ecuaciones en términos de un álgebra que aunque es retórica y algo sincopada, es su eje central, la geometría se constituye en un obstáculo parcial, ya que de acuerdo a ello Cardano se limita, mas no termina siendo su objeto de estudio central, además recordemos que a pesar de que las figuras geométricas euclidianas no permiten representar una expresión de dimensión mayor que 3, Cardano incluyó en su libro ecuaciones de cuarto, quinto y sexto grado.

Sin embargo, Cardano no es del todo fiel a este compromiso, pues a pesar de hacer esta aclaración, presenta la solución desarrollada por Ferrari para la ecuación cuártica, y se dice que su libro retoma multitud de ecuaciones de cuarto, quinto y sexto grado, por tanto el compromiso ontológico se pone en cierta forma, en duda, pues no limita los resultados de su libro solamente a la ecuación cúbica.

### 3.3.2 Álgebra y objetivación en Cardano

En el trabajo de Cardano, se puede apreciar que este hace explicito su compromiso ontológico, conservando la tradición griega al estilo euclidiano amarrado a la percepción intuitiva que la naturaleza provee físicamente, de esta manera para Cardano la potencia no pude superar el grado tres y no acepta el uso de cantidades negativas; teniendo en cuenta estas concepciones de Cardano podemos decir que para él, los objetos algebraicos deben ser construidos lógicamente a partir de otros objetos definidos con anterioridad, es decir, como este conservaba la tradición euclidiana tendía al enfoque de lo construido.

Los postulados de Euclides no constituyen un sistema axiomático en el sentido moderno, sino que, sobre todo, estipulan los medios de construcción de figuras admitidos (fundamentalmente la idea de geometría con regla y compás, de rectas y de círculos), quizá podría decirse que el único axioma en el sentido moderno es precisamente el quinto el de las paralelas. La deducción de Euclides no es sólo obtención de consecuencias lógicas, sino que tales consecuencias se basan en la elaboración de construcciones con los medios admitidos; de esta manera podemos decir que Cardano, constituye los objetos algebraicos en su teoría desde un enfoque constructivista, en su metodología se ve que el álgebra está lejos de desprenderse de la geometría, donde él considera que el cuerpo axiomático euclidiano es el más formal que permite dar a las demostraciones status de validez y generalidad.

Ante esto, podemos decir que la concepción de los objetos algebraicos en Cardano se ve enfrentada a un conflicto ontológico, sus creencias se enfrentan con "descubrimientos" matemáticos no explicables bajo su realidad, Cardano descubre que es posible trabajar y encontrar soluciones a ecuaciones de grado cuarto, rechazaba las raíces negativas a pesar de saber que la ecuación que estaba resolviendo tenía solución y conocer su solución, tal vez no se puede afirmar que Cardano "invento" los números negativos, pero si los descubrió en un mundo en el que no podía darles una explicación lógica, dado que la manera como este concibe los objetos matemáticos no se lo permite, de esta manera podemos decir que limitar una teoría simplemente a la adecuación de la realidad física desde lo constructivo puede generar obstáculos en esta.

Asimismo, el trabajo de Cardano hizo varios intentos por despejar caminos complicados y sin salidas, que aportarían elementos de mucho interés a tener en cuenta para el desarrollo de las matemáticas posteriormente.

Los comentarios que hemos hecho y los ejemplos que hemos revisado de este libro, son relevantes; sin embargo, para darnos una idea mejor sobre la gran contribución de Cardano al desarrollo del álgebra, comentaremos algunos otros que merecen atención especial.

Así, se ve Cardado enfrentado a fuertes concepciones ideológicas que bloquean su intento de generalidad, por lo que se puede decir, que él sí logra establecer reglas generales de solución (con las limitaciones del sistema numérico existente), pero para una serie de casos específicos de ecuaciones de un mismo tipo (cuadráticas, cúbicas y cuárticas), cada una vista como una clase de problema diferente, lo cual se encuentra muy lejos de alcanzar la generalidad que se perseguía, además hoy por hoy, con una sola ecuación basta para representar todos los casos posibles de un mismo tipo de ecuación, por ejemplo así ocurre con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, no quiero decir con ello que el trabajo de Cardano no fuese relevante, por el contrario su texto fue muy famoso por haber dado allí solución a dos de los problemas antiguos fundamentales, los cuales eran resolver ecuaciones cúbicas y cuárticas, además a esto se le deben agregar las adversidades ideológicas y concepciones con las que tuvo que lidiar Cardano y con las que entró en contradicción, teniendo en cuenta también la falta de un desarrollo más amplio del simbolismo, pues él no contaba con símbolos generales para los coeficientes, variables, raíces, etc., mucho menos contaba con la multitud de generalizaciones y unificaciones económicas con las que hoy contamos nosotros.

Desde la perspectiva fenomenológica podemos afirmar que las ecuaciones en obra de Cardano se ubican en un nivel superior en la relación contenido — expresión, pues dan cuenta grupos de casos de ecuaciones que en un primer nivel organizan fenómenos del mundo real o modelan problemas concretos de medidas, pero que aquí determinan familias de casos como las cuadráticas, cúbicas y cuarticas, con propuesta de resolución precisas. En este sentido la obra de Cardado centra la atención en el grado de las ecuaciones, las relaciones entre coeficientes y raíces, la naturaleza de estas raíces y los métodos de solución por radicales de las mismas.

## *3.4 EL ÁLGEBRA EN DESCARTES*

El texto de La Geometría, objeto de estudio en este apartado, está estructurado en tres libros, El Libro Primero: De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas; el Libro Segundo: De la naturaleza de las líneas y el Libro Tercero: De la construcción de los problemas sólidos o más que sólidos.

El Libro Primero expone los procedimientos que resuelven geométricamente las operaciones aritméticas de multiplicación, división y extracción de raíz cuadrada e introduce el concepto de unidad. Además, la designación de líneas por letras y como se llega a las ecuaciones que sirven para resolver problemas, exponiendo el método analítico que emplea para solucionar, en este mismo Libro, el problema de Pappus.

El Libro Segundo trata de la construcción y propiedades de tangentes y normales, dividiendo los problemas en planos, sólidos y lineales que resuelve con ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado utilizando rectas, círculos, secciones cónicas, curvas mecánicas y óvalos. En este libro aborda el problema de Pappus que lleva a la construcción de la ecuación de segundo grado en dos variables.

En el Libro Tercero aborda el estudio de la resolución de ecuaciones, naturaleza de las raíces y relación con los coeficientes cuando trata con los problemas sólidos y supersólidos. Libro sobre el cual se centra de manera especial la atención en este trabajo de investigación.

### 3.4.1 Cómo poner un problema en ecuaciones: El método analítico

Desde el punto de vista fenomenológico encontramos en la obra de Descartes una primera fenomenología alrededor del concepto de ecuación y tiene que ver con su método para poner un problema geométrico en ecuaciones. No obstante relacionado con este cometido surgen una serie de situaciones que determinan todas las aristas de esta fenomenología, es esto lo que trataremos de describir en los apartados siguientes.

En el Libro Primero Descartes expone el método para poner un problema en ecuaciones, así:

> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombres a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras, lo que se denomina una ecuación, pues el resultado de los términos, de una de esas dos formas son iguales a los de la otra. (La Geometría pp. 53)

Sin embargo, para hacer esto, necesita fundamentar varios aspectos relacionados con las operaciones entre magnitudes, la designación de las rectas, la clasificación de las curvas y la redimensión del método analítico.

Por lo tanto es necesario ocuparse de estos asuntos antes de proseguir con el centro de atención del trabajo algebraico de Descartes, como es la construcción de ecuaciones.

#### *3.4.1.1 Las operaciones y los segmentos como forma general de la magnitud*

Descartes inicia su trabajo con dos aspectos fundamentales: toma a los segmentos como las formas de expresión de cualquier magnitud y, para determinar el resultado de las operaciones, correspondiente en geometría a las líneas que se buscan, determina una línea que llama la unidad. Estos dos aspectos los expone así:

> Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos. (La Geometría p. 49).

…no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré unidad para relacionarla lo más posible con los números… (La Geometría p.49).

Es de señalar que para $a^2$ o $b^2$ u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, las designe cuadrados, cubos, etc. (La Geometría p. 52).

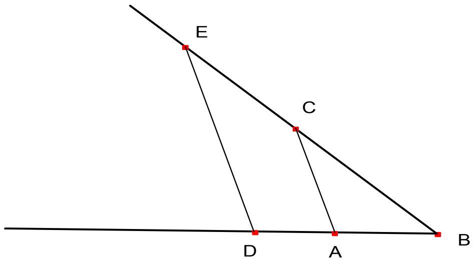
Lo que significa, que desde el inicio de la Geometría esta claro el plan de poner problemas geométricos en ecuaciones, para lo cual debe determinar la homogeneidad de las magnitudes que garantizan su operatividad sin restricciones. Al respecto Álvarez (1999 p. 37) afirma:

Claramente el objetivo cartesiano es precisamente el de eliminar esta diferencia existente entre distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una *forma única de la magnitud*, dada a través de los segmentos. Es esta, a nuestro juicio, la condición de posibilidad de que pueda surgir una lectura algebraica de la geometría: cuando el objetivo de esta, el estudio de las magnitudes continuas, es susceptible de un tratamiento unitario a través de una *forma* por medio de la cual todas ellas pueden ser representadas, haciendo posible así el manejo de la forma abstracta de la magnitud geométrica.

Nótese en la referencia de Álvarez como muestra el carácter abstracto de esta designación de los segmentos, pues más tarde va designarlos por letras, cuyas magnitudes se pueden manipular algebraicamente. Es decir, no es necesario regresar a la magnitud misma pues el trabajo se hace sobre la expresión, es así como no es preciso el referente geométrico para su manipulación.

Es precisamente en la definición misma de las operaciones que se puede apreciar mejor el uso que da Descartes a estos dos hechos fundamentales de su teoría, la determinación de una unidad y la estructura de segmentos como representantes de todas las magnitudes geométricas, pues permite la posibilidad de definir el producto de segmentos con la propiedad de la cerradura y la construcción posible para esta magnitudes de la cuarta proporcional. Es así, como define la multiplicación, la división y la extracción de la raíz cuadrada, utilizando el Teorema de Thales y las cuartas y medias proporcionales, como:

"Sea, por ejemplo, $AB$ la unidad, y que deba multiplicarse $BD$ por $BC$; no tengo más que unir los puntos $A$ y $C$, luego trazar $DE$ paralela a $CA$, y $BE$ es el producto de esta multiplicación" (La Geometría p.p. 50)



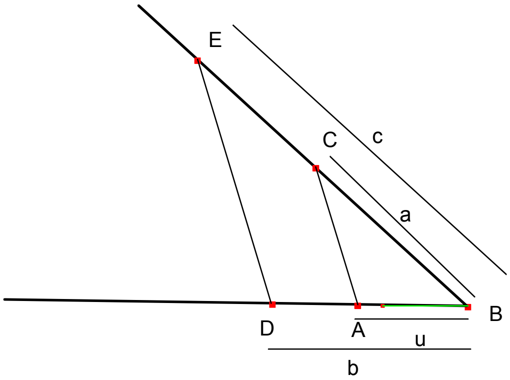
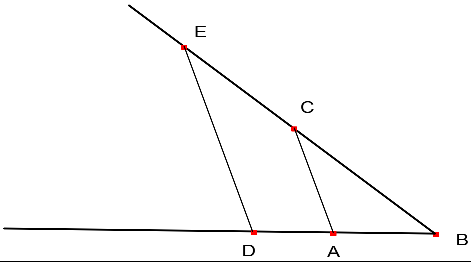




Figura 13. Multiplicación cartesiana

Lo que significa, que el segmento $BE = c$ se encuentra a partir del Teorema de Thales, de tal manera que si, $AB = u$, $BC = a$ y $BD = b$, se tiene que $a : u :: c : b$. En términos modernos tendríamos: $\frac{a}{u} = \frac{c}{b}$ y en consecuencia $a \cdot b = c \cdot u$.

Para la división tenemos:

"O bien, si debe dividirse $BE$ por $BD$, habiendo unido los puntos $E$ y $D$, se traza $CA$ paralela a $DE$, y $BC$ es el resultado de esta división" (La Geometría p.p. 51)



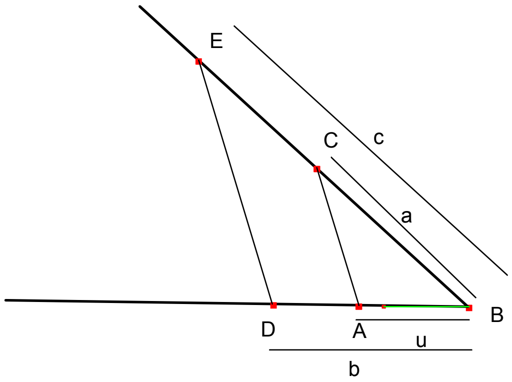
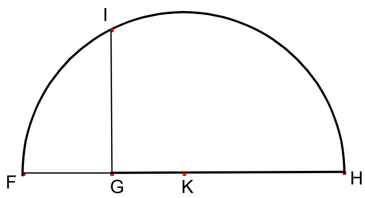



Figura 14. División cartesiana

En este caso $a : u :: c : b$, es decir $\frac{a}{u} = \frac{c}{b}$ y $a = \frac{c}{b}$.

Y para la extracción de raíz cuadrada procede, así:

"O si hay que extraer la raíz cuadrada de $GH$, se agrega en línea recta por $FG$, que es la unidad y dividiendo $FH$ en dos partes iguales por el punto $K$, con ese punto como centro se traza el circulo $FIH$; luego elevando desde $G$ una línea recta, con ángulos rectos sobre $FH$, hasta $I$, es $GI$ la raíz buscada" (La Geometría p.p. 51)



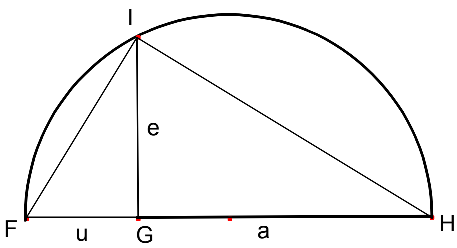




Figura 15. Raíz cuadrada cartesiana

Para la raíz cuadrada, entonces con $FG = u$, $GH = a$ y $GI = e$, se tiene que la raíz cuadrada de $a$, se obtiene a través de la media proporcional de $a$ y $u$. Es decir que $a : e :: e : u$ o $\frac{a}{e} = \frac{e}{u}$ y entonces $e = \sqrt{a}$

Álvarez (2000 p. 39) afirma al respecto:

> La presencia del segmento unidad $u$ como condición necesaria para poder definir las operaciones en cuestión, multiplicación división o extracción de raíz, obedece a varias estrategias simultaneas. En primer término es a partir de él como los valores de los resultados de las operaciones se pueden establecer, ya que para determinar, por ejemplo, el valor del producto de dos magnitudes, es importante determinar cómo son esta respecto a la unidad…..Si en todos los casos, principalmente en la multiplicación, se asegura que el producto de dos segmentos es un segmento, esto significa un abandono, de la idea seguida tradicionalmente…según la cual al producto de dos segmentos se le asocia el área del rectángulo generado por ellos.

Según esta afirmación, la determinación de Descartes del segmento unidad, no es ingenua, pues es indispensable para darle el estatuto que tienen la operaciones aquí, fundamentalmente la multiplicación, en tanto su carácter abstracto, poder determinar cómo es el valor del producto respecto de las dos magnitudes que intervienen en este, lo que significa, que el valor del producto puede ser mayor o menor que uno de los factores siempre y cuando el otro factor sea menor o mayor que la unidad. La otra afirmación, corresponde a que si “el producto de dos segmentos es otro segmento”, es mediante la determinación de la unidad que se despoja del carácter dimensional al producto, al verificarse que el segmento unidad funciona como elemento neutro de esta nueva operación, tal como se da al aplicar la cuarta proporcional de las magnitudes ( $a \cdot b = c \cdot u$ ).

Todo lo dicho hasta aquí es indispensable para que Descartes requiera del recurso del álgebra para la construcción de los problemas geométricos, pero no es suficiente, se requieren los elementos antes nombrados, la designación de las líneas, la clasificación de las curvas y la forma analítica de razonamiento.

#### *3.4.1.2 La designación de las rectas y el referente cartesiano*

Otro aspecto importante para poder proseguir con su propósito de poner problemas geométricos en ecuaciones, es decir, en términos algebraicos, alude a esa transición del trabajo con el objeto mismo, que ya se ha visto en el apartado anterior, que tiene su primer acercamiento al determinar los segmentos como la forma general de las magnitudes, y que ahora se trata de romper con este designándolos con letras para hacer un tratamiento que no tiene que volver al objeto sino que permite la manipulación de este a través de sus representación algebraica: proceso de designación de magnitudes a través de las letras.

Descartes hace esto desde el comienzo de su Geometría, cuando dice:

> Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras una sola para cada línea. Así, para sumar la línea $BD$ a la $GH$, designo a la una $a$ y a la otra $b$ y escribo $a+b$… (La Geometría p.p. 52)

> Por último, a fin de no dejar de recordar los nombres de estas líneas, conviene siempre hacer una anotación separada, a medida que se las coloca o se las cambia, escribiendo, por ejemplo:
> $AB = 1$, es decir, $AB$ es igual a $1$
> $GH = a$
> $BD = b$, etc. (La Geometría p. 53)

Pero este fenómeno, va más allá, cuando va a poner el problema de Pappus en ecuaciones, elige dos longitudes geométricas como $x$ y $y$, determina que tomando una de base, todas las demás serán medidas, así:

> …para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo $AB$ y $CB$ como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado $x$ el segmento de la línea $AB$ comprendido entre los puntos $A$ y $B$; y $CB$ sea designado $y$… (La Geometría p.p. 66)

Lo que significa, que Descartes no solo realiza un proceso de designación de letras, sino que determina unas como referente para dar cuenta de las otras. Es decir, elige dos longitudes geométricas ($x$ y $y$) y tomando a una como base, puede expresar todas las demás en términos de ésta. Lo que va a permitir que las diferentes longitudes involucradas en un problema tomen formas afines, como por ejemplo, en el problema de Pappus, las líneas pueden ser expresadas por tres términos: $ax + by + c$. Se puede observar cómo el referente proporciona las incógnitas que toman forma para representar magnitudes geométricas.

Es importante resaltar que la introducción de este referente, no solo da cuenta de una escritura particular sino que posibilita modos de razonamiento específicos: espacializa lo que una escritura algebraica linealiza, lo que quiere decir que, el referente cartesiano determina una escritura que representa lo espacial y a su vez, el referente hace alusión a una forma de expresión algebraica. Razonamiento que en síntesis se puede expresar como: la asociación de una forma algebraica a una forma geométrica. Este modo de razonamiento cartesiano difiere de sus predecesores griegos, en tanto es un razonamiento que se aparta de la figura y por lo tanto no depende de ella, así sea en forma parcial.

Esta forma de razonamiento no se refiere a casos específicos, es una manera general de razonar, puesto que estas formas representan géneros, en tanto las relaciones surgen de líneas y ángulos expuestos en forma general, como se podrá apreciar, en los casos del problema de Pappus y de la de la trisección del ángulo que se abordan más adelante.

### *3.4.1.3 La clasificación de las curvas*

Descartes comienza con esta clasificación, en el Libro Primero de su Geometría determinando los problemas planos como aquellos que se pueden resolver utilizando líneas rectas y circulares y cuya ecuación se puede reducir a un cuadrado desconocido igual a la suma de la raíz de éste multiplicada por una cantidad conocida con alguna cantidad también conocida, es decir que se pueden expresar mediante una ecuación de segundo grado[36] de la forma: $z^2 = az + b^2$.

Y continúa en Libro Segundo:

> Los antiguos distinguieron bien que entre los problemas de geometría, unos son planos, otros sólidos y otros lineales: es decir que unos pueden ser construidos sin trazar más que líneas rectas y círculos; mientras que los otros no pueden serlo si no se emplea por lo menos alguna sección cónica; y otros, por últimos, más que empleando alguna línea más compuesta. Pero no deja de extrañarme que, a pesar de ello, no hayan distinguido diversos grados entre las líneas más compuestas, y no puedo comprender porque las llamaron mecánicas más bien que geométricas; pues decir que la causa es tener que servirse de alguna máquina para trazarlas haría necesario incluir también entre ellas a los círculos y las rectas, dado que para trazarlas sobre el papel se requiere un compás y una regla, que pueden también considerarse maquinas. Tampoco se debe a que los instrumentos que sirven para trazarlas por ser más complicados que la regla y el compás sea menos exactos…..No diré tampoco que sea a causa de que ellos no hayan querido aumentar el numero de condiciones…. Y no hay que suponer nada más, para trazar todas las líneas curvas que yo pretendo introducir aquí, sino que dos o más líneas puedan ser cortadas una por las otras, y que sus intersecciones engendren otras; lo que no me parece nada difícil. …pero es muy claro, me parece, que tomando, como se hace, por geométrico lo que es preciso y exacto, y por mecánico lo que no lo es, y considerando la geometría como una ciencia que enseña generalmente a conocer las medidas de todos los cuerpos, no deben excluirse las líneas por compuestas que sean, mientras pueda imaginárselas descritas por un movimiento continuo, o por varios que se suceden, y en que los últimos están enteramente regidos por lo que les preceden; pues por este medio se puede siempre tener un conocimiento exacto de su medida. Pero quizás lo que haya impedido a los antiguos geómetras admitir aquellas líneas que eran más compuestas que las secciones cónicas, sea el que entre las primeras que han considerado hayan sido por casualidad la espiral, la cuadratriz y otras semejantes, que solo pertenecen en verdad, a las mecánicas y no al numero de las que pienso admitir aquí, a causa de que pueden imaginarse descritas por dos movimientos separados que no tienen entre si ninguna relación que pueda medirse exactamente… (La Geometría p. 72)

De acuerdo con la anterior cita, Descartes amplia el universo de curvas geométricas, determinando la propiedad fundamental que les da tal carácter cuya intersección

---

[36] Descartes escribe $z^2 = az + bb$

genera otras curvas y descritas por un movimiento continuo, pero, continua aceptando que existen curvas mecánicas. Es importante por lo tanto, considerar que un instrumento teórico fundamental en este nuevo programa de Descartes, es sin la menor duda la clasificación de curvas en "geométricas" y "mecánicas". Una pregunta importante, sobre el origen de esta clasificación seria: ¿qué es lo que ella encubre?, algunas reflexiones importantes al respeto se pueden resumir en:

Una hipótesis para explicar esta clasificación envía al desarrollo sin precedentes del número de nuevas curvas en el siglo XVII, seria pues una nueva necesidad, la necesidad de rendir cuentas de estos nuevos objetos la que habría incitado a Descartes a forjar su célebre distinción. Y de hecho uno de los puntos más remarcables de la investigación matemática desde la primera mitad del siglo XVII fue esta invención de nuevas curvas. Pensemos por ejemplo en todos los esfuerzos y en todos los debates que rodearon la cicloide. La hipótesis seria pues seductora, o incluso natural, si ella pudiera resistir a las fechas y al examen del conocimiento matemático de Descartes desde su concepción de esta clasificación. Y este examen no lo pasa, puesto que esta clasificación es relativamente antigua y se basa en el conocimiento que tenia de la curvas, como la cuadratriz determinada por lo antiguos griegos. La curvas nuevas como la cicloide no será conocida por él sino después de publicada la Geometría. El interés llevado por Descartes hacia las curvas y su clasificación no puede ser por lo tanto el efecto de este aumento del número de curvas nuevas, se debe fundamentalmente a un problema matemático, puesto que las curvas mecánicas no se pueden determinar por intersección de otras dos conocidas, sin embargo muchas determinadas de esta manera pertenecen al mundo de la geométricas, que se pueden describir por medio de una ecuación algebraica[37]

---

[37] Rashed (1999 p.p. ) aclara esto cuando afirma: "…los primeros indicios de esta clasificación, incluso si los términos son todavía ausentes son relativamente antiguos ya que se remonta a los años1619 – 1621. Citemos por ejemplo lo que Descartes escribía en la época de las *Cogitationes Privatae*: "La línea de las proporciones debe ser conjugada con la cuadratriz; nace en efecto de dos movimientos no subordinados el circular y el recto". Diez años más tarde, en 1629, Descartes afirma a propósito de la cuadratriz y de la elipse cilíndrica que las dos no están "recogidas en Geometría" porque "no se las puede trazar por completo como encuentro entre dos movimientos que no dependan el uno del otro". Estas citas vienen a confirmar lo que nosotros sabíamos ya, la clasificación es muy antigua, incluso si más tarde ganara en elaboración y en claridad. Pero que nuevas curvas conocía Descartes en esta época? Una sola, y todavía de manera poco precisa: *la línea proportonum*, todas las otras curvas venían de los antiguos. De esta *línea de las proporciones,* sabia solamente a la época de que fue engendrada, como la cuadratriz, como dos movimientos separados y que por tanto era una curva "mecánica" La segunda curva "mecánica" nueva, la ruleta o cicloide no será conocida por él, hasta bastante más tarde; él no habla más que un año después de su Geometría. E incluso si queremos suponer que ya había tenido algún eco en 1635, el conocimiento que el tendría entonces no puede ser mas que el de una curva todavía mal estudiada, como atestigua Roberval en persona. Más sorprendente todavía este interés se afirma sobre el trasfondo de un conocimiento tradicional de curvas, como mínimo hasta la redacción de la geometría. Pero esta clasificación se debe a Descartes únicamente bajo este dictamen no es efecto deudora en absoluto a sus predecesores tanto si son próximos como si son lejanos.

Otro aspecto importante a tener en cuenta, es que la clasificación de la curvas, no es arbitraria puesto que el mismo Descartes la sitúa al centro de su programa, como se puede apreciar de la cita expuesta antes. Sobre el motivo de esta clasificación, lo hace indicando primero porque los antiguos no distinguieron distintos grados entre las geométricas[38] y abona los elementos distintivos entre unas y otras, pues ratifica la clasificación de los antiguos para las de los primeros grados pero justifica que ellos privados del álgebra no podían reparar este abismo entre las clases de curvas y revela sus propias intenciones de ir más allá de la cónicas y separar claramente entre esta clase de curvas tratadas y privilegiadas por los algebristas y todas las otras curvas.

El concepto de que dispone Descartes o al menos el que está antes presente en él no es otro que el antiguo concepto de movimiento continuo sin ninguna consideración cinemática aparente, o no esta revestida de la menos dimensión algebraica. Se observa en contraposición que hasta aquí la ecuación de una curva no interviene para establecer la clasificación, es únicamente más tarde cuando será llamada para describir los elementos de esta clase de curvas, privilegiadas por los algebristas. Esta noción de continuidad de las curvas, es fundamental para la resolución de ecuaciones pues va garantizar que la intersección de las curvas existe y por lo tanto la raíz de la ecuación, como se verá más adelante.

Es así como, una vez establecida la distinción entre curvas geométricas y mecánicas, Descartes puede incluir en su geometría a los problemas y a las curvas geométricas. Aunque la intención declarada de Descartes era claramente hablar de todas las curvas, o, según sus propias palabras, *"todas las que están en la naturaleza".* El segundo libro tiene precisamente por finalidad el estudio de dichas curvas y Descartes lo indica ahí en un texto celebre, en sus primeras páginas, así:

> …no conozco nada mejor que decir que todos los puntos de las que pueden designarse geométricas, es decir, que admiten cierta medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea, que puede ser expresada por alguna ecuación, la misma para todos los puntos. Y que cuando esta ecuación no sea superior al rectángulo de dos cantidades indeterminadas, o bien al cuadrado de una sola, la línea curva es del primero y más simple género, en el cual no hay más que el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse. Pero cuando la ecuación llegue a la tercera o cuarta dimensión de las dos o

[38] Descartes parece levantar un poco el velo indicando primero algunas razones por la cual los antiguos no distinguieron diversos grados entre las líneas compuestas: Confusión entre la geometría y la mecánica y por lo tanto no consideraron algunas curvas como geométricas, Las primeras curvas que han considerado habiendo sido por azar la espiral la cuadratices y similares, que no pertenecen verdaderamente más que a las mecánicas no son bastante cantidad las que yo pienso deberían estar aquí recogidas, a causa de que se las imaginan descritas por dos movimientos separados y que no tienen entre ellas ninguna relación que se pueda medir exactamente. a causa de que ellos no han podido remarcar bastante sus propiedades. y no han hecho más que el estado de las primeras. O bien, porque viendo que no conocían más que pocas cosas en lo referente a la sección de las cónicas y que les quedaba mucho referente a lo que se puede hacer con la regala y el compás que ellos ignoraban

> de una de las dos cantidades indeterminadas, — pues se necesitan dos para explicar aquí la relación entre un punto y otro — ella es del segundo género. Y cuando la ecuación llegue a la 5ª o 6ª dimensión, ella es del tercero; y así para las otras hasta el infinito. (La Geometría p. 77).

Este texto presenta, además, la formulación más precisa, dada por Descartes de la noción de curva y de sus relaciones con la ecuación asociada.

Lo anterior ratifica la importancia teórica que tiene la clasificación de las curvas que hace Descartes, puesto que la restricción que hace en la Geometría a las curvas geométricas para el desarrollo de su teoría de ecuaciones y de curvas no niega la existencia de la curvas mecánicas sino que aporta a la generalización de las curvas geométricas, tal como lo dice aquí:

> …es de señalar que hay gran diferencia entre esta manera de encontrara varios puntos para trazar una línea curva y la que se emplea para la espiral y sus semejantes: pues para esta última no se obtienen indiferentemente todos los puntos de la línea que se busca, sino solo aquellos que pueden ser determinados por alguna medida más simple que la requerida para formarla; así que, hablando propiamente, no se encuentra uno de sus puntos, es decir, uno de los que le son propios, que no pueda ser hallado sino por ella. En cambio, no hay ningún punto, en las líneas que sirven en la cuestión propuesta, que no pueda encontrarse entre los que se determinan de la manera antes explicada. Y aunque esta manera de determinar una línea curva, encontrando indiferentemente varios puntos, no se aplica más que a las que pueden también ser descritas por un movimiento regular continuo, no por eso se la debe excluir de la Geometría" (La Geometría pp. 100 - 101)

Es importante insistir que una curva como la espiral es mecánica porque ella está engendrada por dos movimientos continuos separados que no tienen ninguna relación que se pueda medir exactamente y por consecuencia no puede ser estudiada en los términos de la teoría de las proporciones. Los dos movimientos son una rotación y una traslación.

Es claro pues que las curvas geométricas son construibles a partir de puntos que cumplen relaciones específicas que determinan el movimiento que las engendra, relación expresa en una ecuación algébraica. Mientras las curvas mecánicas, como la espiral, no se pueden expresar a través de este tipo de expresiones pues requieren de ecuaciones diferenciales para su determinación, es decir, es necesario que avance la geometría diferencial para que estas tengan un lugar en las matemáticas completamente determinado.

De otro lado es importante tener en cuenta que la clasificación de las curvas por grados, tiene un doble propósito en la obra cartesiana: se presta para determinar las curvas que permiten construir la solución de un problema dado, pero también, va a usar esta clasificación para indicar el tipo de curva en la cual se encuentran los puntos que satisfacen el problema.

#### *3.4.1.4 El método de análisis como forma de razonamiento algebraico*

La distinción entre análisis y síntesis ha ocurrido frecuentemente en la historia de las matemáticas y en la discusión filosófica acerca de las matemáticas. Desde Platón, podemos encontrar completamente una cantidad de interpretaciones de las ideas de análisis y síntesis, las cuales están relacionadas en uno u otro sentido con el pensamiento matemático. Los matemáticos de todas las épocas han recurrido a ellas para distinguir diferentes formas y estilos en sus argumentaciones y exposiciones y los filósofos se han referido a ellas para clarificar el carácter específico de las matemáticas en sus relaciones con el conocimiento en general.

Es así, como el libro XIII de los Elementos de Euclides contiene una definición del método de análisis, el cual por haber sido sin duda interpolado en el texto original, no es menos interesante.

> El análisis consiste en establecer como acuerdo aquello que es buscado, para lograr que, por vía de consecuencia, alguna cosa cuya verdad es acordada.

El inicio de libro VII de la colección matemática de Pappus ofrece en su recorrido del análisis una definición un poco más explícita.

> El análisis es la vía que parte de aquello que es buscado, como si él estuviera acordado para lograr, por las consecuencias que se siguen, cualquier cosa que es acordada por la síntesis. En el análisis, en efecto, suponiendo eso que es buscado como ya obtenido, nosotros examinamos aquello de lo cual él deriva y de nuevo las premisas de las cuales este ultimo procede, hasta aquello que nosotros llegamos así a cualquier cosa que sea ya conocida o que tenga función de principio.

Pappus, habiendo así caracterizado el análisis y refiriéndose a la síntesis, caracteriza a su vez esta última en los siguientes términos:

> En la síntesis, a la inversa, suponiendo ya obtenido aquello que en el análisis ha sido afectado en último lugar, disponiendo en el orden natural los antecedentes del análisis en lugar de consecuentes y ligarlos los unos a los otros, nosotros llegamos al objetivo, que es la construcción del objeto buscado.

A partir de ahora problemas y teoremas se apoyarán los unos sobre los otros: las construcciones de los primeros permiten fundar nuevos teoremas; las propiedades expresadas por los segundos, resuelve nuevos problemas. La arquitectura del edificio matemático iba a partir de ahora a suponer el juego combinado de estos géneros.

También Pappus, inmediatamente después de haber caracterizado el análisis como enfoque inverso a la síntesis, estaba muy naturalmente conducido a distinguir dos géneros, a saber de una parte el análisis *poristique y problematique*, que vuelva a subir de la suposición del problema resuelto a las condiciones suficientes de su solución, y de otra parte el análisis *zététique o théorétique*, que remonta del teorema conjeturado a las verdades anteriormente establecidas sobre las cuales se puede fundarlo.

De lo anterior se aprecia que la forma de iniciar Descartes su razonamiento analítico no es inédita, pues asume que se puede conocer lo desconocido, es decir, acepta lo que se busca; lo original radica en el tratamiento mismo que hace de lo que es buscado. Al respecto Álvarez (2000 p.p. 68) afirma:

> … es la innovación cartesiana de expresar a todas las magnitudes involucradas en un problema como longitudes de líneas lo que permite que los *términos* involucrados — y expresados— en este primer paso permiten hacer del análisis la condición de la traducción del problema en una ecuación. Esto significa que esencialmente en la *Géometrié* el camino propio de análisis no se lleve a cabo de una proposiciones (que son las que se buscan) hacia otras (aceptadas como verdaderas) para encontrar la condiciones de dependencia de las primeras a las segundas, sino que consiste en relacionar tanto a cantidades conocidas como a cantidades desconocidas.

Es así como Descartes imprime un nuevo sello al análisis al involucrar esta forma de razonamiento en la producción de ecuaciones a partir de un análisis problémico eminentemente. Esto es posible por todo lo tratado antes, pues puede dar el mismo estatus a las cantidades conocidas y desconocidas al tratar a todas las magnitudes a través de la representación de éstas por los segmentos; este es uno de los rasgos fundamentales del carácter algébrico del método. Lo que garantiza la operatividad entre esta cantidades y por lo tanto su forma de expresarse mediante dos maneras diferentes y así obtener una expresión que establezca la relación de dependencia de una con otras. Además, de garantizar la existencia de las raíces de la ecuación y la cantidad de ellas, como lo indica en su Libro Tercero.

#### *3.4.1.5 El método en acto*

Un ejemplo que toma para mostrar el método de poner un problema en ecuaciones, es el problema de Pappus. Método que se expuso al inicio de esta sección y que se puede sintetizar en los siguientes pasos (Álvarez, 2000 p. 43):

1. Suponer que el problema se encuentra ya resuelto.
2. Nombrar a todas las líneas involucradas en el problema, tanto a las conocidas como a las desconocidas.

3. Bajo la condición 1, se debe encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las líneas desconocidas.
4. Bajo el último punto es posible expresar de dos maneras distintas una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones es lo que constituye una ecuación.
5. La ecuación se debe resolver. Los requerimientos constructivos del problema están dados por los requerimientos constructivos de la ecuación.

El problema de Pappus, tal como lo enuncia Descartes es:

> Dadas tres, cuatro o más rectas, se trata de encontrar un punto del que se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, y haciendo con ellas ángulos dados, y que el rectángulo formado por dos de esas así trazadas desde el punto, tenga una proporción dada con el cuadrado de la tercera, si no hay más que tres, o bien con el rectángulo de las otras dos, si hubiera cuatro; o bien si hay cinco que el paralelepípedo compuesto por tres tenga la proporción dada con el paralelepípedo formado por las dos que restan y por otra línea dada. O bien si hay seis, que el paralelepípedo formado por tres tenga una proporción dada con el paralelepípedo de las otras tres. O bien si hay siete…O bien si hay ocho…Y así este problema se puede extender a todo número de líneas (La Geometría p. 63).
>
> Y así he encontrado que cuando no hay más que tres o cuatro líneas dadas, los puntos buscados se encuentran todos no solamente en una de las tres secciones cónicas, sino a veces en la circunferencia de un circulo o en una línea recta… (La Geometría p. 66).

En términos modernos, el enunciado sería:

> Dadas $2n$ rectas, encontrara el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, con ángulos dados, a $n$ de esas rectas esté en una relación dada con el producto de las distancias, con ángulos dados, a las otras $n$ rectas

Para cuya solución enuncia:

> Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo $AB$ y $CB$ como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado $x$ el segmento de la línea $AB$ comprendido entre los puntos $A$ y $B$; y $CB$ sea designado $y$; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve ellas cortan la línea $AB$ en los puntos $A$, $E$, $G$ y la línea $BC$ en los puntos $R$, $S$, $T$. … (La Geometría p. 67).

Para lo cual determina las líneas nombrandolas, tanto las conocidas como las deconocidas (Paso 1y 2). Luego para expresar cada linea en términos de $x$ y $y$ se determinan los triángulos convenientes (según se conozcan ángulos y lados) para poder establecer las proporciones en las cuales aparece el parámetro $z$ como la unidad común a todas la relaciones que se establecen para cada línea buscada (paso 3). Así:

Para el triángulo $ARB$, $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$ y como $AB = x$ y $BR = \frac{bx}{z}$, entonces $CR = y + \frac{bx}{z}$.

Para el triángulo $DRC$, $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$ y como $CR = y + \frac{bx}{z}$, entonces $CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$.

Si se hace $AE = k$, ya que es conocida, entonces $EB = k + x$, por lo tanto para el triángulo $ESB$, $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$ entonces $BS = \frac{dk + dx}{z}$ y $CS = \frac{zy + dk + dx}{z}$.

Para el triángulo $FSC$, $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$ entonces $CF = \frac{ezy + dek + dex}{z}$.

Si se hace $AG = l$, ya que es conocida, entonces $BG = l - x$, por lo tanto para el triángulo $BGT$, $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$ entonces $BT = \frac{fl - fx}{z}$ y $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$.

Para el triángulo $TCH$, $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$ entonces $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$

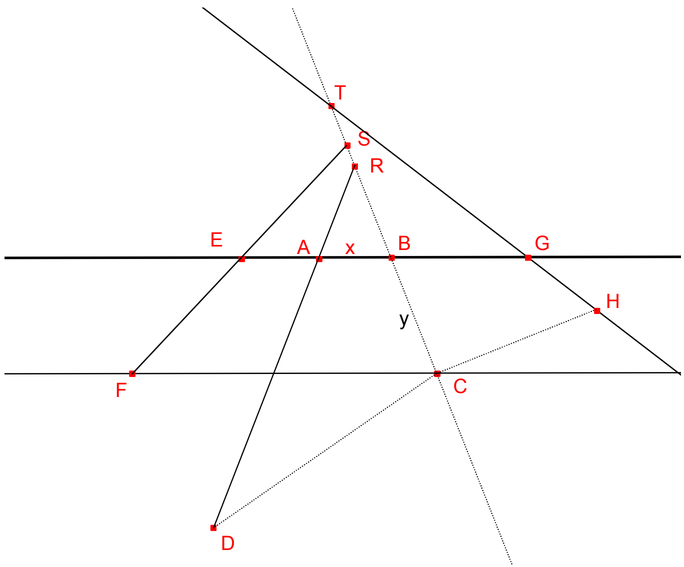



Figura 16.        Figura relativa al problema de Pappus

Lo que significa que en este problema se expresan todos los recursos conceptuales constituidos por Descartes, desde el tratamiento mismo de magnitudes y cantidades, expreso en el uso de las operaciones, el uso del referente y la construcción de la relaciones. Cada línea obtenida esta expresada en términos de $x$ y $y$, así:

$$CB = y$$
$$CD = \frac{czy + bcx}{z^2}$$
$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$
$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

Nótese que para la formulación de la ecuación es necesario apoyarse en la figura dada por las cuatro lineas, en este caso, y el punto $C$ que se supone cumple las condiciones del problema.

Para hallar la curva sobre la cual se encuentran los puntos como $C$, desde el cual, trazadas las cuatro líneas, con ángulos dados sobre las rectas dadas, resulte que: $CB \times CF = CD \times CH$, se tiene la ecuación (Paso 4):

$$y \cdot \left( \frac{ezy + dek + dex}{z^2} \right) = \left( \frac{czy + bcx}{z^2} \right) \cdot \left( \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2} \right)$$

Y da como resultado, la de segundo grado:

$$y^2 = (\frac{cfglz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2})y - (\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2})xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

En este proceso sustituye el coeficiente de $y$ por $2m$ y el coeficiente de $xy$ por $\frac{2n}{z}$. Es así, como Descartes llega a la expresión[39]:

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z} xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

[39] Es aquí, cuando Descartes alude a la existencia de las raíces cundo afirma que esa es la ecuación: "…por lo menos suponiendo $ez > cg$ ; pues si fuera menor deberán cambiarse todos los signos + y -. Y si la cantidad $y$ fuera nula, o menor que cero en esta ecuación, habiendo supuesto el punto $C$ en el ángulo $DAG$, deberá suponérselo también en el ángulo $DAE$ o $EAR$ o $RAG$ , cambiando los signos + y – según se requiera. Y si en todas estas posiciones el valor de $y$ resultara nulo, el problema sería imposible"

Luego, completa cuadradosy extrae la raiz cuadrada de la expresión a la cual ha llegado y vuelve a sustituir[40] parte del radicando para obtener:

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

De esta manera se tiene la longitud de la linea $BC$, dejando a $AB$ que es $x$ como término independiente.

Lo que significa, que el tratamiento realizado por Descartes hasta llegar al valor de $y$ se lleva acabo sobre la ecuación misma, independiente de la figura. Expresión que describe los puntos que satisfacen el problema.

Al respecto Puig (2003, p.3) al hablar sobre las reglas del álgebra de Descartes cuando éste desarrolla el método y explica que una vez se tienen construidas las ecuaciones, hay que transformar las ecuaciones, dice:

> …lo que Descartes comienza a hacer, por usar por un momento la terminología de la fenomenología, es tomar las propias ecuaciones no ya como un medio de organización de fenómenos, sino en un movimiento de matematización vertical, como un campo de objetos sometidos a exploración fenomenológica, que necesitan nuevos medios de organización para ello. A partir de la idea de que si $a$ es una raíz de una ecuación $x - a$ divide al polinomio correspondiente, Descartes explora el número de raíces de las ecuaciones, el efecto que tiene sobre las raíces el cambiar $x$ por $y - a$, etc.
>
> La expresiones algebraicas que se consideran canónicas son pues los polinomios. Esto es así porque la reiteración de las cuatro operaciones aritméticas elementales conduce, cuando estas operaciones se realizan entre cantidades desconocidas, a que todas las multiplicaciones (y divisiones) produzcan una cantidad multiplicada por si misma tantas veces y multiplicada por un número determinado, es decir, produzcan un monomio, y la reiteración de adiciones ( y substracciones), que sólo puede realizarse — y este hecho es crucial— entre monomios del mismo grado, produzca una suma (y resta de monomios)”.

Esta nota, nos permite observar dos aspectos relacionados con el método y el tratamiento de la ecuaciones polinómicas, de una parte el método concluye con la solución de la ecuación para lo cual hay que trabajar sobre su expresión para llevarla a

---

40 $o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$

$-\frac{p}{n} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}$

una de las formas canónicas que ha determinado (por ejemplo ,en el libro Primero: $z^2 = az + b^2$, $z^2 = -az + b \ldots$) pero a su vez nos hace caer en cuenta que en este nivel fenomenológico, tal como se expresa en el Capítulo 2 de este trabajo, la ecuación asume un estatus diferente al no organizar directamente los fenómenos de la magnitud sino ecuaciones mismas que lleva a procesos de matematización más generales pues se debe reconocer la forma canónica de la expresión como el caso general de los casos particulares de solución de un problema especifico. Dicho de otra manera, en este nivel no se trabaja con el fenómeno de la cantidad de magnitud, sino con la forma de organización de muchos de estos fenómenos expresos en formas canónicas de la ecuación que las organiza

Hasta aquí se ha puesto el problema en ecuaciones, lo que continua es el tratamiento que hace a una ecuación de segundo grado para solucionarla (Paso 5) encontrando la clase de curva que da respuesta a esta ecuación en dos variables, para ello vuelve a la figura, para reconocer las magnitudes involucradas en la expresión algebraica y dar cuenta de la clase de lugar geométrico que se determina. Lo que hace Descartes para este caso se puede resumir en:

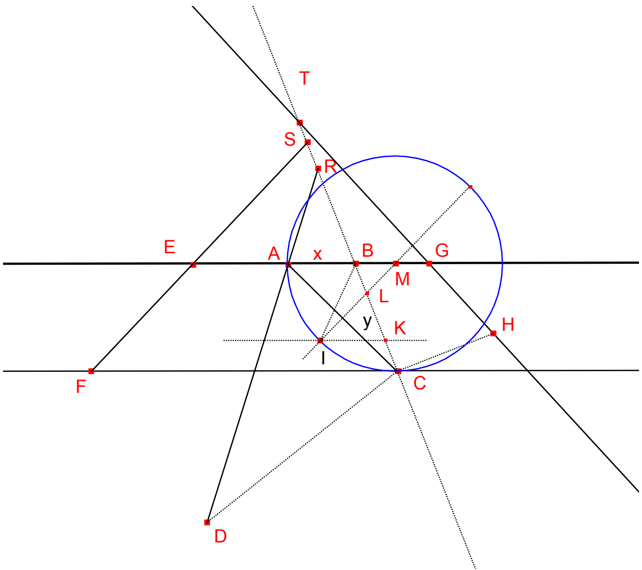



Figura 17.

$KI$ la hace igual y paralela a $BA = x$, el punto $K$ sobre el segmento $BC$ y $BK = m$, en el mismo segmento el punto $L$, de tal manera que $\frac{IK}{KL} = \frac{z}{n}$, entonces $KL = \frac{n}{z}x$ y $\frac{KL}{IL} = \frac{n}{a}$ y como se conoce $KL$, se tiene que $IL = \frac{a}{z}x$.

Si el punto $K$ esta entre $L$ y $C$, entonces $LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$, es decir, que si el término $\frac{p}{m}x^2 = 0$ la sección cónica que describe el punto $C$ es una parábola, si es $\frac{p}{m}x^2 > 0$ corresponde a una hipérbola y si es $\frac{p}{m}x^2 < 0$ a una elipse.

De acuerdo al valor de $\frac{p}{m}$ (discriminante) Descartes clasifica las curvas que describe los puntos $C$.

### 3.4.2 Sobre el tratamiento de las ecuaciones polinómicas

Como se aprecia en el apartado anterior, las ecuaciones organizan relaciones entre segmentos que dan cuenta de magnitudes diversas y a su vez describen curvas en forma general. En este apartado se completa el marco fenomenológico que presenta Descartes con relación a la teoría de ecuaciones y curvas, en relación al tratamiento de las ecuaciones y los elementos de éstas expuestos en la Geometría, aunque algunos elementos se han presentado en la solución del problema de Pappus.

Se puede apreciar, en lo expuesto a continuación, que Descartes asume de manera explicita una conceptualización de ecuación, una preocupación sobre la naturaleza de las raíces, un proceso particular de resolución y una relación con lo numérico fundamental en esta nueva postura sobre el tratamiento de estos objetos matemáticos.

Sobre la definición de ecuación, en el Libro Tercero tenemos,

> …es necesario que diga alguna cosa general de la naturaleza de las ecuaciones; es decir, de las sumas compuestas de varios términos, en parte conocidos y en parte desconocidos, y en que los unos son iguales a los otros; o mejor, que considerados en conjunto, son iguales a cero: pues este será a menudo el mejor modo de considerarlas. (pp. 143, 144)

En este sentido se asume la ecuación como una igualdad de expresiones algebraicas o una expresión algebraica igualada a cero. Lo que significa que el término o términos desconocidos corresponden eminentemente a incógnitas que representan magnitudes de segmentos.

Además, enuncia el número de raíces que tendrá la ecuación correspondiente con su grado, así:

Sépase, pues, que en cada ecuación, según cuantas dimensiones tenga la cantidad desconocida, otras tantas serán las diversas raíces que puede haber, es decir valores de esa cantidad…

Presenta un proceso constructivo para la ecuación a partir de sus factores líneas, lo que deja apreciar que la preocupación de Descartes esta más cerca del teorema del factor que del mismo teorema fundamental del álgebra, al cual aporta elementos importantes como los aquí expresos:

Si se supone $x$ igual a 2 o bien $x-2=0$; y luego $x=3$ o bien $x-3=0$ y multiplicamos estas dos ecuaciones $x-2=0$ y $x-3=0$ una por otra, se tendrá: $xx-5x+6=0$ o bien $xx=5x-6$ que es una ecuación en la cual la cantidad $x$ vale 2 y al mismo tiempo vale 3. Que si luego se hace $x-4=0$ y se multiplica esta suma por $xx-5x+6=0$ se tendrá: $x^3-9xx+26x-246=0$ que es otra ecuación, en la cual $x$, teniendo tres dimensiones, tendrá tres valores, que son 2, 3 y 4. (La Geometría, p. 144).

Pero además esto se expresa claramente en relación entre raíces y la puesta de una ecuación en factores lineales cuando afirma:

Y recíprocamente si la suma de una ecuación no puede ser dividida por un binomio, compuesto de la cantidad conocida + o – alguna otra cantidad, esto prueba que esa otra cantidad no es el valor de ninguna de sus raíces, así la última $x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$ puede ser dividida por $x-2$ y por $x-3$ y por $x-4$ y por $x-5$; pero no por $x$ + o – ninguna otra cantidad: lo que muestra que ella no puede tener más que las cuatro raíces 2, 3, 4, 5. (La Geometría, p. 146).

Además hace tratamientos algunos ya conocidos, desde los árabes, para expresar la ecuación de la manera más simplificada y de acuerdo a unas formas canónicas, como: reducir a enteros las fracciones (*cómo se reducen los números quebrados de una ecuación a números enteros*), irracionales (*números sordos*) a racionales, cambios de variable para estos propósitos, eliminación del segundo término, por ejemplo para el caso de las cubicas, el término cuadrático (*cómo se puede sacar el segundo término de una ecuación*), manipulación de los términos de la ecuación para transformar la raíces originales, entre otros.

Como se aprecia en lo expuesto antes de La Geometría, en ésta se ponen de manifiesto elementos importantes para el tratamiento de las ecuaciones, que posibilita un cálculo con las expresiones que permite transformarlas en las que se saben resolver. Es decir, que este proyecto cartesiano adopta una forma cada vez más algebraica.

#### 3.4.2.1 *Naturaleza de las raíces: Raíces verdaderas, falsas e imaginarias*

Descartes reconoce la naturaleza de las raíces desde varias perspectivas. La primera desde el campo numérico al cual pertenecen, al respecto afirma:

> … a menudo se llega a que algunas de estas raíces son falsas o menores que cero: como cuando se supone que $x$ designa el defecto de una cantidad, que si es 5, se tendrá $x+5=0$, que multiplicada por $x^3-9xx+26x-246=0$ dará $x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$ ecuación en la cual hay cuatro raíces, a saber: tres verdaderas que son 2,3 y 4 y una falsa, que es 5.
>
> …tanto las raíces verdaderas como las falsas no son siempre reales sino a veces solamente imaginarias: es decir que puede siempre imaginarse todo lo que he dicho en cada ecuación, pro que no hay a veces ninguna cantidad que corresponda a las que se imagina. Así, aunque puedan imaginarse tres en ésta $x^3-6xx+13x-10=0$ no hay sin embargo más que una real, que es 2 y para las otras dos, aunque se las aumente, se las disminuya o se las multiplique, de la manera que acabo de explicar, no se podrá hacerlas más que imaginarias en todos los casos.

Queda aquí claro que la naturaleza de las cantidades imaginarias se reduce a un problema geométrico, puesto que se trata de cantidades que no se pueden representar geométricamente o no pueden ser identificadas con alguna representación geométrica, es decir, que los segmentos como representantes de todas las magnitudes geométricas, en la Geometría de Descartes quedan determinados para representar únicamente cantidades reales, tal como él las identifica

Otro aspecto, alude a la relación de las raíces con los coeficientes (regla de los signos) de la ecuación, cuando afirma:

> Se conoce también, de este modo, cuántas raíces verdaderas puede haber y cuántas falsas, en cada ecuación. A saber, puede haber tantas verdaderas como veces los signos + y – se encuentren cambiados; y tantas falsas como veces se encuentren dos signos + o dos signos —, que se sigan. Como en la última ( $x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$ ), después de $+x^4$ sigue $-4x^3$, hay un cambio de signo de + en -; y después de $-19xx$ sigue $+106x$ y después $+106x$ viene $-120$ se tienen otros dos cambios, se deduce que hay tres raíces verdaderas; y una falsa a causa de los dos signos —, después de $4x^3$y $19xx$, que se siguen.[41] (La Geometría p.).

---

[41] Este enunciado conocido como la Regla de los signos de Descartes, en forma moderna se enuncia como :
Si los coeficientes de un polinomio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ son reales y si todas sus raíces también son reales, entonces el número de raíces positivas, teniendo en cuenta multiplicidades, es igual al número de cambios de signos en la sucesión de los coeficientes del polinomio. Si $f(x)$ tiene raíces complejas, entonces el

### 3.4.2.2 *Sobre el proceso de resolución de las ecuaciones y sus tratamientos*

Descartes trabaja varios casos en la solución de ecuaciones, el caso de las cuadráticas con una sola variable, con dos variables y que corresponden a problemas planos, las de tercer grado y en general propone la solución de ecuaciones para grados superiores (hasta seis). No podemos perder de vista que en la construcción geométrica de la ecuaciones (poner un problema en ecuaciones) Descartes trata de mostrar que si el problema se puede expresar en términos de una ecuación, será posible asegurar que el problema tiene solución siempre y cuando la ecuación sea soluble, por lo tanto la solución de ecuaciones está ligada a la construcción misma de éstas.

Para las cuadráticas en una variable considera los casos según $a$ o $b$ sean positivas o negativas, pero no ambas negativas, caso que no expone. Téngase en cuenta que los signos están determinando el valor de la magnitud.

La solución de $z^2 = az + b^2$ se encuentra utilizando la construcción que involucra un triangulo rectángulo cuya hipotenusa se desconoce y un círculo, aplica el teorema de Pitágoras y procede así:

Se construye el triángulo rectángulo $NLM$ con $LM$ igual a $b$ (raíz cuadrada de la cantidad conocida) y $LN$ como $\frac{1}{2}a$ (la mitad de la otra cantidad conocida). Se prolonga $MN$ (hipotenusa del triangulo) hasta el punto $O$, de tal forma que $NO$ sea igual a $LN$. Así la línea $OM$ corresponde a $z$, la línea buscada y corresponde a:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

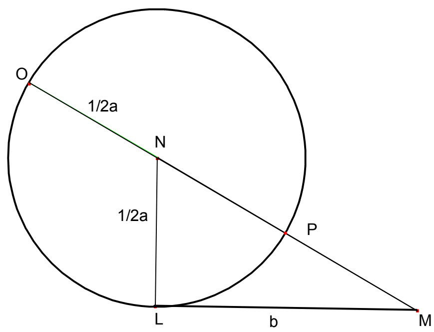



Figura 18. Solución de $z^2 = az + b^2$

número de raíces reales es igual al número de cambios de signo en la sucesión de coeficientes menos un número par.

Para el caso de $z^2 = -az + b$

Se construye el triángulo rectángulo $NLM$, a la hipotenusa $MN$ se le quita $NP$, de longitud iguala a $LN$, $\frac{1}{2}a$. El resto $PM$ corresponde a la cantidad buscada $z$.

Por lo tanto:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Y lo mismo, si se tuviera $z^4 = -az^2 + b^2$

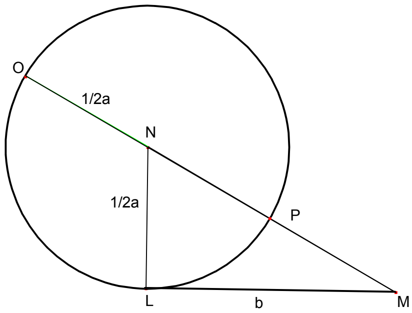



Figura 19. Solución de $z^2 = -az + b$

En el caso de $z^2 = az - b^2$, Descartes procede así:

Se construyen dos rectas perpendiculares, $LM$ igual a $b$ (raíz cuadrada de la cantidad conocida) y $LN$ como $\frac{1}{2}a$ (la mitad de la otra cantidad conocida). Se traza la recta $MQR$ paralela a $LN$ y un circulo con centro en $N$ que pase por $L$ y corte a la recta paralela en $Q$ y $R$. La línea buscada $z$, corresponde a $MQ$ o a $MR$.

Por lo tanto los valores de $z$ son:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

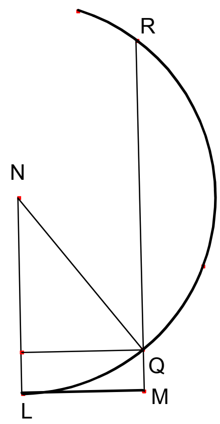



Figura 20. Solución de $z^2 = az - b^2$

Añade además, que si el círculo que tiene centro en $N$ y pasa por el punto $L$ no corta ni toca la línea recta, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurase que la construcción del problema propuesto no es posible, lo que quiere decir que la existencia de la raíces está determinada por la condición de que $b < \frac{1}{2}a$.

De lo expuesto antes se puede observar, hasta aquí, que Descartes solo considera las raíces positivas, lo que significa que no representa una cantidad negativa a través de una magnitud geométrica.

En el caso de la solución de la ecuación de segundo grado con dos variables, tal como se apreció en la solución del Problema de Pappus, se trata de encontrar el lugar geométrico que satisface las condiciones de la ecuación que soluciona el problema.

Para las ecuaciones cúbicas Descartes procede así:

Expone los casos cuando las cúbicas solucionan problemas planos, es decir que pueden ser construidos con regla y compás y cuando solucionan problemas sólidos, cuyas raíces se encuentran por medio de la intersección de una las secciones cónicas con rectas y círculos.

En el primer caso procede así:

> …cuando para encontrar la construcción de un problema, se obtiene una ecuación en la cual la cantidad desconocida tiene tres dimensiones, si en las cantidades conocidas que tiene, hay algunos números quebrados, primeramente se debe reducirlos a enteros por la multiplicación antes explicada. Y si contiene números sordos, es necesario también reducirlos a otros racionales, mientras sea posible, ya sea por la misma multiplicación, ya por distintos modos que son bastante fáciles de encontrara. Luego examinando, por orden, todas las cantidades que pueden dividir sin fracción el último término, hay que ver si alguna de ellas, unida a la cantidad desconocida por el signo + o — puede formar un binomio que divida la suma. Y si eso es así, el problema es plano, es decir que puede ser construido con regla y compás. Pues, o bien la cantidad conocida de este binomio es la raíz buscada, o bien la ecuación, siendo dividida por él se reduce a dos dimensiones: de modo que pueda encontrarse después la raíz, por lo que se dijo en el primer Libro.[42] (La Geometría, p. 159).

Para el segundo caso enuncia:

---

[42] El ejemplo que Descartes muestra es $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$ (factores de 64: $\pm 1, \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32 \pm 64$), cuyo binomio que contiene una raíz es $y^2 - 16$ y la ecuación resultante $y^4 + 8y^2 + 4=0$, que ya se sabe cómo se soluciona.

Ahora, cuando se ha asegurado que el problema es sólido, sea que la ecuación por la cual se lo busca llegue al cuadrado de cuadrado, sea que ello no llegue más que al cubo, se puede siempre encontrar la raíz por medio de una de las tres secciones cónicas, sea la que fuere, a aun por alguna parte de una de ellas, tan pequeña como puede serlo, sin emplear en lo demás, más que líneas rectas y círculos.

Pero me contentaré aquí con dar una regla para encontrarlas todas por medio de una parábola, a causa de que ella es en cierto modo la más simple. (La Geometría, p. 173, 174).

Nosotros mostramos esta solución para la ecuación que resulta de resolver el problema de la trisección del ángulo, pero teniendo en cuenta que Descartes presta especial interés por los problemas no resueltos con regla y compás por los antiguos, como la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, pues ve en ellos una aplicación que permite mostrar la potencia de su método.

Descartes procede así:

Para dividir el ángulo $NOP$ o el arco $NQTP$ en tres partes iguales, hace el radio de la circunferencia $NO=1$ y la cuerda del arco dado $NP=q$ y la cuerda del tercio de este arco, la que se busca $NQ=z$ y habiendo trazado las rectas $NQ, OQ$ y $OT$ y haciendo paralela $QS$ a $TO$ se tiene que:

$$\frac{NO}{NQ}=\frac{NQ}{QR}=\frac{QR}{RS}.$$

Como $NO=1$ y $NQ=z$ entonces $QR=z^2$ y $RS=z^3$.

Y como $RS=z^3$, la línea $NP=q$ es el triple de $NQ=z$ y se tiene: $q=3z-z^3$ o bien que $z^3=3z-q$

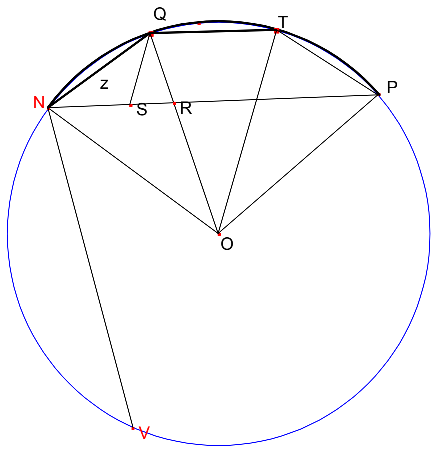



Figura 21.

Tal como hizo para el problema de Pappus, Descartes aplica su método para poner el problema en ecuaciones, asumiendo que está resuelto cuando hace la cuerda $NQ=z$, está comprendida por el tercio del ángulo $NOP$. Designa, así mismo la líneas conocidas y desconocidas mediante las medias proporcionales las pone en relación con $z$ de dos maneras y así llegar a la ecuación de tercer grado.

Para la solución que consiste en encontrar el arco a partir de su cuerda asociada ($z$) y que es la raíz de la ecuación construida $z^3 = 3z - q$, procede así:

Considera la parábola $FAG$ con vértice en $A$, eje $ACDL$ y lado recto de longitud $1$. Hace $CA = \frac{1}{2}$ (la mitad del lado recto) y $CD = \frac{3}{2}$ al ubicar el punto $C$ de manera que esto suceda (ya que el coeficiente de $z$ es positivo). Y $DE = \frac{q}{2}$ perpendicular al eje de la parábola. Con centro en $E$ y radio $AE$ traza la circunferencia $FAgG$ que corta a la parábola en los puntos distintos a l vértice $F, G, g$ y las raíces están determinadas por los segmentos perpendiculares al eje de la parábola que pasan por los puntos de intersección entre la parábola y la circunferencia.

Las raíces $GK$ y $gk$ son las verdaderas y $FL$ la falsa. De las cuales $gk$, la menor debe tomarse para la línea buscada $NQ$. Pues la otra, $GK = NV$, la cuerda de la tercera parte del arco $NVP$ que con el otro arco $NQP$ completa el circulo. La falsa $FL = QN + NV$.

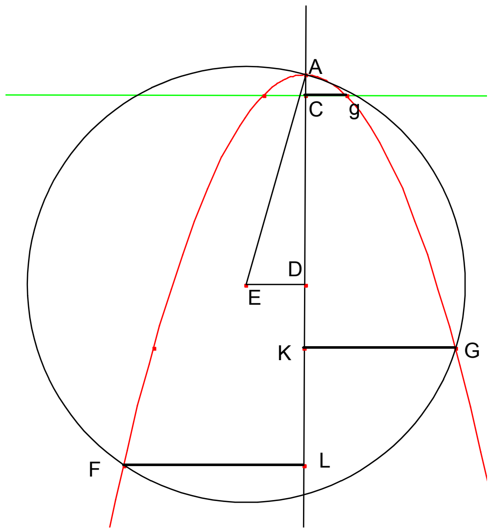



Figura 22.

Lo anterior nos permite apreciar cómo se aplican los aspectos de la teoría de ecuaciones que ha enunciado Descartes aquí: sobre la naturaleza de la raíces resultantes, dos de igual signo y una de signo contrario, de acuerdo a la misma regla que sobre los signos expusimos antes (puede haber tantas raíces verdaderas como veces los signos + y – se encuentren cambiados; y tantas falsas como veces se encuentren dos signos + o dos signos -, que se sigan, $+z^3 - 3z + q = 0$) y en este mismo sentido, cuando asume que $FL = QN + NV$, Álvarez (2000, p. 62) nos dice:

> El único argumento dado por Descartes como prueba que existen tantas raíces como indica el grado de la ecuación, establece que una ecuación de grado $n$ acepta $n$ factores simples de la forma $(n-\alpha)$, en donde $\alpha$ es una raíz de la ecuación. En este caso dado que la ecuación es de la forma $x^3 \pm ax \pm b = 0$, si se acepta que $x^3 \pm ax \pm b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, se puede concluir que la suma de las tres raíces es el coeficiente del término en $x^2$; de la ausencia de este término se concluye que la suma de la raíces es cero.

Además, por la construcción propuesta para la solución de la cúbica entre la intersección de una parábola y una circunferencia tenemos que se intersecan en el vértice y al menos una vez más, pues la intersección de una cónica con una circunferencia puede ser en dos, cuatro o cero puntos. Por lo tanto, una ecuación de tercer grado siempre tendrá al menos una raíz real. Cundo son tres raíces el signo de estas esta determinado por el sentido de los segmentos en relación con el eje de la parábola, dos del mismo signo y la otra de signo contrario.

## *3.5 ALGUNAS CONCLUSIONES*

Podemos finalizar este capítulo, observando que los objetos algebraicos en la consolidación de la teoría de ecuaciones a través de la mirada del álgebra árabe, el álgebra renacentista y la expuesta por Descartes, tienen su fundamento a través del proceso de actividad del hombre en su cultura, se relaciona mucho con las ideologías pertinentes de cada época, pero nos deja ver además el problema fundamental en el campo de la historia y la filosofía de la matemática y es el que tiene que ver con el tipo de realidad y existencia de la que gozan estos objetos matemáticos, dado que pesar el álgebra simplemente como una construcción del hombre para responderse a los problemas específicos, deja muy corto lo que significa este campo de conocimiento, tampoco podemos decir que estos objetos algebraicos son entes independientes del hombre regidos por unas relaciones y condiciones universales, en realidad no estamos en las condiciones de determinar la manera como estos objetos existen, esto quedara como interrogante, pero si podemos concluir que estos elementos apoyados en recursos geométricos y en la realidad física son la base de la teoría general de ecuaciones de nuestra actualidad.

En ese proceso de constitución de objetos matemáticos de la teoría de ecuaciones, tratados en estos apartados nos dejan ver como un sistema matemático de signos que posibilite la designación de las propiedades de los objetos que se van constituyendo, es fundamental. Tanto en al-Khwarizmi, como en Cardano y, aún en un ámbito retórico y sincopado, se hace necesaria la especificidad de ciertos términos, que demarcan significaciones específicas, se toman términos del lenguaje natural que especifican objetos en la teoría. Este hecho es fundamental a tener en cuenta, pues permite, de una parte, valorar la ganancia de contar con un sistema matemático de signos, como el actual, que no sólo permite la determinación exacta de la propiedad fundamental de los objetos matemáticos, sino que permiten su operatividad precisa. Además, reconocer, en el proceso de construcción de objetos matemáticos, la pareja: contenido, representación de objeto. Aspecto que se sintetiza en la forma como este sistema matemático de signos interviene en la obra cartesiana.

Además, una reflexión, deducible de este trabajo, alude a la importancia de reconocer en los estudios epistemológicos, la potencia de tratamientos integradores a la hora de abordar los estudios históricos, es decir, que el campo numérico ha determinado, las técnicas de solución de ecuaciones, la caracterización de los objetos mismos del álgebra los niveles de generalidad de éstos, entre otros aspectos, y a la vez, la teoría algebraica ha puesto en blanco y negro los objetos numéricos, por ejemplo su corporación a un campo teórico. Dicho de otra forma, un significado de la raíces de ecuaciones no está por fuera del campo de variación de éstas, como más adelante se verá (por ejemplo en el capítulo de Descartes) como teoría de ecuaciones y teoría de curvas se consolidan para la comprensión de esa característica fundamental de R, la completitud y la continuidad.

También, vale la pena resaltar que los polinomios son la consolidación de esta historia de lo que en un momento u otro de esta historia se ha considerado como las formas normales o canónicas, donde prevalece la idea fundamental de la búsqueda de esas formas canónicas. Es así como se aprecia que para que surjan estas formas, se hizo necesario que el tratamiento de los problemas o fenómenos que ellas describen u organizan, no plantean como único objetivo la solución del problema concreto sino que ese proceso incluye el análisis del carácter general, donde con el mismo procedimiento o variantes de éste se puedan solucionar otros problemas, para lo cual, como se anoto antes, es necesario un sistema matemático de signos que posibilite el trabajo no con los números concretos sino con expresiones que describen o representan esos números concretos y la operaciones y relaciones entre éstos. Estas expresiones aquí, se conciben como las ecuaciones.

Por lo tanto, desde la perspectiva didáctica es importante reconocer que en la introducción de los objetos matemáticos en la escuela se debe privilegiar la construcción de campos amplios de significación fenomenológica, un campo semítico rico de situaciones, fenómenos y problemas matematizables y organizados por el objeto, en cuestión, que lleve a potenciar la determinación de las características fundamentales de este objeto y su construcción lógica, en una teoría matemática, lo cual es posible a través de un sistema que lo viabilice. Los aspectos semánticos no pueden estar por fuera de los sintácticos y viceversa. Esto es objeto de estudio en el Capítulo siguiente, de este trabajo.

# 4 ELEMENTOS DE LA FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN Y LA ENESEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES EN LA ESCUELA

## *INTRODUCCIÓN*

En este capítulo se sintetizan algunos elementos que surgen del análisis fenomenológico del concepto de ecuación en la historia de las ideas algebraicas para luego analizar las implicaciones que tienen en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela. Para lo cual se priorizan los elementos relacionados con el concepto de ecuación concernientes a su contenido, como equivalencia de relaciones geométricas, numéricas o eminentemente algébricas, su representación en un sistema matemático de signos, los procesos de resolución, la naturaleza de las raíces, la relación número de raíces con el grado de la ecuación y ecuaciones y curvas geométricas.

## *4.1 MAGNITUDES, NUMEROS Y ECUACIONES*

Es importante recordar que la relación fenómeno-medios de organización o fenómenos-conceptos, en este caso fenómenos-ecuación, no es única, tal como lo hemos tratado en el marco de referencia teórico, esta relación puede presentar varios niveles en su vinculo, lo que es medio de organización en un nivel puede ser fenómeno en otro. El estudio histórico desarrollado nos permite apreciar esto.

Un primer nivel se presenta en, a tradición subcientífica de la antigua Babilonia correspondiente a los antecedentes del álgebra, en la cual las relaciones se establecen entre magnitudes conocidas y desconocidas representadas por objetos geométricos o cantidades numéricas y las técnicas para solucionar estas relaciones, es decir, para encontrar el valor o la cantidad de magnitud desconocida se basa en procesos geométricos como las técnicas de cortar y pegar y completar cuadrados. Las relaciones numéricas entre superficies y lados están determinadas por la medida de estas magnitudes y esa noción de ecuación esta determinada por esas relación que expresa una condiciones de tratamiento de los lados de un cuadrado y el área de este, por ejemplo. Los tratamientos para encontrar el lado o el área, son propiciados por los objetos geométricos y sus propiedades y las técnicas de cortar y pegar para completar cuadrados, desde la perspectiva física eminentemente.

Podemos afirmar, que en este caso, la noción de ecuación tiene un vínculo directo con el mundo de la cantidad y la magnitud como objeto de experiencia matemática cuyo proceso de abstracción esta dado por el tipo de problemas que son resueltos con esta relaciones, como son problemas de acertijos y sin vinculo especifico con una realidad concreta, de herencia o agrimensión, pero que a su vez permiten el tratamiento de este tipo de problemas.

En el tratamiento que hace la Escuela Escriba, desde la perspectiva de los objetos que se operan se valora la búsqueda de sistematización en la organización en listas y series de los tipos de problemas resueltos, lo que no parece pertinente en un medio de acertijos o problemas recreativos propuestos en término de competencia. Entre las relaciones que se establecen entre lados y cuadrados se muestran, entre varios cuadrados y fracciones de la longitud de los lados. Se introducen problemas en los cuales no basta la técnica de cortar y pegar como procedimiento para su solución sino que se hace necesario normalizarlos, es decir hacer ciertas transformaciones para ponerlos en términos de casos de problemas ya conocidos.

Este tipo de relación entre fenómeno y concepto, tiene otro sentido, puesto que las acciones llevan a una relación entre series de problemas organizados en ciertas formas normales en tablas cuyos tratamientos para su solución están dados, no para un caso sino para los similares, máxime que aquellos que no tienen esa forma normal hay que llevarlos a los casos organizados, haciendo cierto tratamiento de ellos.

Los que significa, que la organización de problemas en grupos de problemas, hace que se vayan refinando técnicas de tratamiento para esos casos más generales de problemas. Es este sentido la relación determinada por la actividad matemática de organizar y agrupar en tablas, genera una nueva relación con la noción de ecuación.

En el caso del trabajo Al-Khwarizmi la noción de ecuación aparece desde el comienzo, por sí misma, y, podemos decir, que de manera genérica, en la medida que no surge simplemente a lo largo de la solución de un problema, sino que es deliberadamente llamada a designar una clase infinita de problemas, puesto que se introduce la noción de forma normal. Al-Khwarizmi exige reducir, sistemáticamente, cada ecuación a la forma normal correspondiente. La fórmula de la solución es justificada, matemáticamente, con la ayuda de una demostración geométrica.

En este caso los fenómenos que organiza la relación entre cantidades conocidas y desconocidas tiene un estatus diferente a los casos precedentes, puesto que Al-Khwarizmi, parte de unos términos (tesoro, raíces y simple números), fenómenos de la misma matemáticas representados por un lenguaje extraído del lenguaje cotidiano pero con un estatus matemático. Estos entes producen según se combinen unas formas canónicas especificas, que puesto un problema en ellas permite su solución.

La relación fenómeno-ecuación, esta dada por un nivel de abstracción y generalización amplia, donde la ecuación precede al problema y permite la solución de todos los problemas que se pueden expresar en estas formas, para lo cual se dan la operaciones y se presentan las reglas generales para su solución. Estamos en un mudo eminentemente teórico. Las magnitudes geométricas, en este caso, son utilizadas para validar y probar las reglas de resolución de estas ecuaciones. Por lo tanto las seis formas normales organizan relaciones numéricas y se relacionan con un mundo empírico a través del tipo de problemas que pueden modelar.

En Cardano, las ecuaciones organizan tipos de relaciones (lineales, cuadráticas, de tercer o cuarto grado), su interés esta puesto en cómo son estas relaciones determinadas por una forma de expresión particular y cuyos componentes se comportan de unas determinadas formas, es decir, por ejemplo, existe una relación entre el grado de la ecuación y el numero de las raíces, entre los coeficientes y las raíces. Además, su interés esta puesto en cómo todos estos elementos se relacionan para permitir la solución de las ecuaciones. Por lo tanto la relación entre fenómeno y concepto, determinada por la relación contenido – expresión, corresponde a la equivalencia de relaciones numéricas de distinto orden que implican soluciones diferentes, en este sentido trabaja con expresiones generales aunque no llegue a procesos generales de solución. Esto trae como consecuencia su preocupación expresa por la naturaleza de las raíces que van a determinar una relación directa entre álgebra y aritmética, pues las raíces son números, algunas de las cuales no puede aceptar pues no esta determinada su naturaleza numérica.

Con relación a lo geométrico, como se anotó antes, Cardano usa la geometría para validar las reglas de solución de ecuaciones, la figura solamente como un soporte que brinda elementos intuitivos mediante el gráfico, para representar la fórmula $(u+t)^3$ y facilitar su comprensión, pues de lo contrario se necesitaría una figura tridimensional. Así, se puede deducir que una demostración de este tipo esta bajo la influencia geométrica, pero en realidad no alude a una prueba estrictamente geométrica, su compromiso geométrico se refleja con la figura utilizada, el amarre que todavía se presenta para un desarrollo algebraico independiente, sin embargo hay un intento por hacer una prueba que no dependa estrictamente de la geometría, poniendo en evidencia en cierta forma, que el álgebra también proveía elementos generales para que posteriormente fuera totalmente independiente de la generalidad de la geometría.

Cardano caracteriza explícitamente la naturaleza de los objetos matemáticos con los cuales trabajará, explicando porque cierra su libro con el tratamiento de las ecuaciones cúbicas así: *como la posición se refiere a una línea, el cuadrado a una superficie, y el cubo a un cuerpo sólido, seriamos muy torpes si siguiéramos más allá. La naturaleza no lo permite*. Lo que se convierte en un obstáculo para acceder a una teoría general de las ecuaciones.

Un salto cualitativo en el concepto de ecuación esta dado, en el trabajo de Descartes, donde de una parte se consolida la ecuación general de segundo grado y el álgebra se convierte en una herramienta potente para describir problemas geométricos. Una relación entre geometría y álgebra distinta a la dada en los momentos anterior. Las ecuaciones organizan problemas geométricos y a su vez adquieren una independencia conceptual al llegar a un nivel de generalización, donde se subsumen todos los casos que ellas describen. Se establece una correspondencia entre los elementos que componen las expresiones de las ecuaciones y los elementos de las curvas geométricas.

Descartes requiera del recurso del álgebra para la construcción de los problemas geométricos, para lo cual necesita una designación de las líneas, la clasificación de las curvas y la forma analítica de razonamiento.

Es así como Descartes imprime un nuevo sello al análisis al involucrar esta forma de razonamiento en la producción de ecuaciones a partir de un análisis problémico eminentemente. Esto es posible pues puede dar el mismo estatus a las cantidades conocidas y desconocidas al tratar a todas las magnitudes a través de la representación de éstas por los segmentos; este es uno de los rasgos fundamentales del carácter algébrico del método. Lo que garantiza la operatividad entre esta cantidades y por lo tanto su forma de expresarse mediante dos maneras diferentes y así obtener una expresión que establezca la relación de dependencia de una con otras. Además, de garantizar la existencia de las raíces de la ecuación y la cantidad de ellas. Todo esto forma parte de los aspectos fenomenológicos del concepto de ecuación en Descartes.

La resolución de problemas, aparece como la forma de producción de conocimiento en estos trabajos, no obstante la naturaleza de los problemas y la relación entre la teoría de ecuaciones y estos es diferente. Es importante recordar que la resolución de problemas, en general engloba la prueba y refutación de teoremas. Argumentar la solución y/o verificar que se cumplen las condiciones del problema pone de manifiesto que en los problemas hay prueba.

Hasta aquí sobresalen algunos elementos importantes para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela, de una parte la relación entre magnitudes geométricas, números y álgebra que se expresan de distinta forma en la historia y que pude ser fuente de contextualización de las ecuaciones en la iniciación de su estudio. De otro, la resolución de problemas como ámbito de producción de conocimiento.

El primer aspecto lleva replantearse la forma de asumir la relación entre sistemas concretos y los aspectos sintácticos o de expresión de las relaciones dadas en un mundo sensible, es así como la técnicas de cortar y pegar y completar el cuadrado aparecen en un primer nivel, donde lo concreto se relaciona con las manipulaciones de las magnitudes mismas, como las superficies y la operaciones como añadir y quitar; es decir, las acciones permitidas en la búsqueda de la solución de los problemas representados en esas relaciones cuadráticas, dependen de lo permitido por la geometría de figuras planas. Explorar este tipo de situaciones en la escuela puede permitir una primera significación de la solución de ecuaciones, no obstante es importante introducir actividades y estrategias que tal como se ve en el proceso histórico, lleve a procesos de abstracción de las operaciones, cundo los sistemas de signos así lo permitan.

Otro aspecto importante a resaltar, es que si bien es necesario modificar algunas nociones aritméticas para adquirir un nuevo conocimiento como el algebraico, es el ámbito de lo numérico, como espacio conocido por los alumnos el que propicia un contexto de ecuaciones numéricas que se pueden ir complejizando esa operatividad ya conocida por los estudiantes.

## *4.2 ECUACIONES Y SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS*

El sistema matemático de signos surge en la interrelación con los elementos teóricos del concepto, en este caso en la relación fenómenos – concepto, contenido – expresión, tal como se anoto antes en el marco de referencia. Es decir, los sistemas matemáticos de signos están implicados en la producción de conceptos, en la relación fenómenos-medios de organización, y les dan su existencia material al describirlos y crearlos.

Es así como en la tradición subcientífica, en la escuela escriba y en el álgebra árabe, el lenguaje vernáculo es el vehículo de descripción de fenómenos o problemas que se tratan para su solución por medios geométricos o algebraicos. Sin embargo en Al-

Khwarizmi hay un nuevo vocabulario técnico destinado a designar objetos y operaciones específicos. Recordemos que la naturaleza de los términos primitivos, su carácter monetario, parece develar, que ante la carencia de un sistema de signos más sintético, son un recurso teórico para designar elementos esenciales de una teoría.

Lo que significa que la designación de términos y operaciones están asociadas a unos contenidos que permiten acciones sobre las formas normales determinadas en esta algebra árabe.

En Cardano, los avances en el sistema de numeración decimal y en formas de representación de algunos símbolos de operaciones y relaciones matemáticas permiten que represente las ecuaciones en un lenguaje sincopado. Además, la interacción entre formas algebraicas y magnitudes geométricas esta dada como forma de validar la reglas dadas para la solución de las ecuaciones, donde esta magnitudes describen estas relaciones ligadas a lo dimensional.

En Descartes el lenguaje simbólico aportado por Vieta, que como lo hemos dicho antes, representa una manera de concebir los objetos geométricos, es redimensionado por éste al introducir el concepto de unidad, clasificar las curvas y poner en relación los elementos de las expresiones algebraicas con los elementos de las curvas geométricas y así, poder dar cuenta de problemas geométricos en expresiones algebraicas. Es decir, el sistema matemático de signos del álgebra clásica se pone en correspondencia con el lenguaje de las cónicas y curvas geométricas en general.

Todo lo anterior para poner problemas geométricos en ecuaciones, es decir, en términos algebraicos, alude a esa transición del trabajo con el objeto mismo, que ya se ha visto en el apartado anterior, que tiene su primer acercamiento al determinar los segmentos como la forma general de las magnitudes, y que ahora se trata de romper con este designándolos con letras para hacer un tratamiento que no tiene que volver al objeto sino que permite la manipulación de este a través de sus representación algebraica: proceso de designación de magnitudes a través de las letras. Es así, como el proceso de objetivación de este medio de organización de las ecuaciones para convertirse en fenómeno tiene su expresión en un Sistema de Signos cada vez más abstracto.

Las acciones, que se refiere a lo que el SMS permite hacer, y no las que efectivamente se realizan o se pueden realizar en este caso, el SMS no sólo permiten organizar los fenómenos (igualdad de relaciones determinadas en las curvas geométricas) creando el concepto de ecuación, sino efectuar acciones sobre ellos mismos, que limitaciones de tiempo o de otro tipo no permiten.

Desde el punto de vista didáctico esta forma de emerger formas de representación de las ecuaciones cada vez más abstractas, es fundamental para la construcción escolar del concepto, puesto que las prácticas educativas han instalado como forma de hacerlo partir de la sintaxis propia del algebra para luego irla dotando de contenido ( poner el concepto antes de los fenómenos). Aspecto que en esta perspectiva fenomenológica y según lo muestra este estudio debe de ir a la par de la construcción conceptual pues es fundamental mantener la pareja, contenido – expresión en la constitución de objetos mentales con campos semánticos amplios. Lo que quiere decir que en el proceso de construcción escolar de este concepto las formas de expresión de problemas o relaciones algébricas pasa por el uso de lenguaje numérico, retorico y sincopado en este proceso de producción de saberes algebraicos.

## *4.3 OPERACIONES Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES*

Las operaciones en este proceso tienen una doble significación, una que alude a las transformaciones de los problemas en formas algebraicas canónicas y otra en el proceso mismo de resolución de las ecuaciones. Es así como en los antecedentes del álgebra relaciones aritméticas son expuestas mediante relaciones geométricas para poder dar solución y encontrar la magnitud buscada. Las operaciones tienen significados geométricos en este proceso.

La exposición de al-Khwarizmi evoluciona al mostrar cómo resolver cada una de las formas normales y cómo todos los problemas tratados en álgebra deben ser llevados a una forma normal con un solo tesoro y coeficientes racionales positivos. Estas formas normales se pueden pensar como las únicas ecuaciones permitidas en el libro de al-Khwarizmi. Las operaciones restaurar, reducir, oponer y completar son pues, aplicadas para que la ecuación sea puesta bajo, su forma normal, y expone la solución como un algoritmo para cada clase de problemas. Al-Khwarizmi se encuentra entonces en la situación de escribir que todo lo que revela el álgebra debe de llevar a uno de los seis tipos de formas normales descritos en su libro. Para esto cuenta con un lenguaje que aunque escrito en forma vernácula representa contenidos eminentemente matemáticos. Las operaciones tienen un contenido algebraico fundamental.

Un concepto de que dispone Descartes o al menos el que está antes presente en él no es otro que el antiguo concepto de movimiento continúo sin ninguna consideración cinemática aparente, o no esta revestida de la menos dimensión algebraica. Se observa en contraposición que hasta aquí la ecuación de una curva no interviene para establecer la clasificación, es únicamente más tarde cuando será llamada para describir los elementos de esta clase de curvas, privilegiadas por los algebristas. Esta noción de continuidad de las curvas, es fundamental para la resolución de ecuaciones pues va garantizar que la intersección de las curvas existe y por lo tanto la raíz de la ecuación, como se verá más adelante. De otro lado el método analítico permite poner un problema en ecuaciones (dadas las condiciones descritas antes) y determina la solución de estas mediante intersección de curvas.

Esta manera de concebir las operaciones y utilizar la operaciones nos hacen un llamado para que las acciones en el aula en este proceso de constitución de las ecuaciones como objetos mentales a prestar atención, de una parte a cómo se ponen un problema en ecuaciones, es decir a potenciar el método analítico como forma de razonamiento algebraico y de otra, a cómo se transforman estas expresiones para ser llevadas a formas canónicas generales. Es decir, cómo hacer un salto cualitativo de la expresión que soluciona un problema particular a reconocer los modelos generales que están presentes allí, como las cuadráticas, lineales o cúbicas, con sus correspondientes características y diferentes formas de representación. Este paso es fundamental desde las propuestas de introducir el álgebra desde modelos funcionales y procesos de modelación algebraicas, por decir algo.

## *4.4 NATURALEZA DE LA RAÍCES Y NÚMEROS*

Como lo hemos anotado antes, es en el trabajo de Cardano, sobre la formulación de reglas basadas en las relaciones numéricas de los coeficientes de los términos de la ecuación y las soluciones o raíces de ésta, donde el interés en el número de raíces que resultarán de la solución de la ecuación y la clase de raíz que se obtendrá cobra sentido. Problemas fundamentales, del desarrollo del pensamiento algebraico y de la teoría de ecuaciones, que desbocarán en el teorema fundamental del álgebra, cuando el interés radica en prever cuantas y como serán las raíces, sin importar cuáles son específicamente. Es decir, cuando el problema de determinar las raíces pasa a ser el de anticipar su existencia.

Además, aquí observamos una nueva relación entre aritmética y álgebra puesta en términos de la naturaleza de las raíces, pues representan números. Desde el inicio de este trabajo de Cardano se muestra el reconocimiento de cantidades negativas que surgen de solución de ecuaciones, aunque no se admitan como soluciones, de estas ecuaciones. Califica las soluciones negativas como “ficticias”; en el capítulo III las llama “inútiles y falsas”. Cardano se ve abocado a respetar una concepción relacionada con estos números “no verdaderos”. No obstante, los manipula, opera con ellos y sabe que son el resultado de un proceso o algoritmo aplicado correctamente para obtener la solución de una ecuación. De esta forma, se evidencia como la falta de aceptación y de desarrollo de un concepto más abstracto como es el de los números complejos, hizo que la teoría de Cardano no alcanzara la generalidad que él esperaba y lo condujera a caminos inexplicables y sin una salida de explicación lógica, que obstaculizó el desarrollo de nuevas técnicas, puesto que obtener raíces cuadradas de números negativos en la solución implicaba dejar el procedimiento de resolución incompleto, de tal forma que la regla establecida no ofrecía la posibilidad de encontrar la raíz positiva, cuya existencia muchas veces era evidente al comprobarla mediante una simple sustitución en la ecuación.

En Descartes esta preocupaciones de Cardano sobre la naturaleza de las raíces y su relación con el grado de la ecuación, tienen respuesta más cercanas a lo que hoy conocemos como el teorema fundamental del álgebra y elementos de una teoría general de ecuaciones, tal como se ha expuesto en el capitulo anterior.

Lo anterior trae como consecuencia ver cómo las piezas del rompecabezas empiezan a encajar, en el sentido que las relaciones determinadas entre raíces, grado de la ecuación y coeficientes de las ecuaciones pueden darse por los desarrollos en el SMS, en los fundamentos de la operaciones y todo lo hasta aquí descrito, para dar cuenta de nuevas relaciones entre fenómenos y conceptos, puesto que cada vez esta producción escalonada de estas parejas tienen niveles más abstractos. Es decir que lo que es medio de organización en Cardano es fenómeno en Descartes. Recordemos, que la ecuación general de segundo grado toma su propiedad característica en Descartes. Es así como tenemos, factores lineales relacionados con raíces, formas de factorizar una ecuación en estos factores lineales y nuevos procedimientos y relaciones algébricas valiosas en esta constitución de teoría algebraica.,

Además, en Descartes aparece una forma de relación entre geometría y álgebra. Es aquí, donde desde la perspectiva didáctica se gana en claridad al poder ver el álgebra como una forma de representar curvas geométricas y una relación funcional entre variables que acerca a las ecuaciones como forma de expresión de esas relaciones funcionales. Se amplia el campo semántico de las ecuaciones al describirse esta como $(\ ) = 0$ o también, $(\ ) = (\ )$ y no como simple equivalencia entre expresiones algebraicas que representan relaciones geométricas o numéricas.

## 4.5 ¿QUÉ IMPLICACIONES TIENE ESTOS HALLAZGOS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ECUACIÓN?

Esta pregunta la contestamos desde dos perspectivas interrelacionadas, la investigación reportada en álgebra y la investigación personal realizada a través de trabajos de grado y proyectos de investigación. Con relación a la primera en la presentación del estado del arte se pueden observar propuesta en esta dirección.

Se trata ahora de apreciar cómo se articulan los elementos antes expuestos con el propósito que en el ámbito escolar se constituyan objetos mentales de las ecuaciones un campo semántico amplio.

Si los desarrollos matemáticos que tuvieron lugar en la historia son guías confiables para el desarrollo de la instrucción matemática, entonces parece claro que la introducción del álgebra debería seguir la aproximación de la "resolución de problemas" y enfocarse en la solución de ecuaciones. Otro aspecto importante ha tener en cuenta, enfatiza el hecho que el álgebra se le enseña a estudiantes que ya conocen algo de aritmética, principalmente la aritmética de los enteros, y que ambas se preocupan por las semejanzas y discrepancias de las estrategias del aritmética y el álgebra para manejar tipos de problemas semejantes. Un énfasis en investigación, o en instrucción, en la transición *desde* la aritmética *hasta* el álgebra se tiende siempre a enfatizar las semejanzas entre ellas, las cuasi-invarianzas de la transformación desde la aritmética hasta el álgebra pero no se puede subestimar o ignorar las muy importantes diferencias.

¿Cuáles son los principios que gobiernan el diseño de un currículo según este estudio?

A propósito de esta pregunta, (Wheeler, 1996) afirma:

> La hipótesis de un estado continuo y evolutivo puede ser derivado del principio estimable que cuando uno invita a los estudiantes a aprender debería estar relacionado con lo que ellos ya saben. Pero creo que puede haber una confusión entre dos hipótesis diferentes e independientes. En el área de la enseñanza y del currículo, sugiero que "tomar en consideración lo que saben los estudiantes", es un imperativo, mientras que el uso de un modelo evolutivo es solamente uno entre varias opciones, y no el más plausible.

Lo anterior posibilita una intervención en el aula que involucre procesos en ambos sentidos, la geometría para validar o solucionar problemas algebraicos y el álgebra como herramienta que permite solucionar problemas geométricos, diferenciando el momento de transición a lo algebraico en sí mismo.

Una mirada más amplia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra sobre las problemáticas relacionadas con: La manera de designar los objetos, la historia y evolución del número, las relaciones entre cantidades,  la existencia de las soluciones, los métodos de solución, la generalización y abstracción de ideas simples a conceptos más complejos.

En relación con el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas analíticos en la enseñanza básica secundaria, se puede plantear una propuesta didáctica que permita un acercamiento diferente a los procesos de factorización a través de la solución de ecuaciones, y no simplemente como técnicas descontextualizadas que solo serán útiles a posteriori en la simplificación de expresiones algebraicas racionales. De allí que varios de los métodos y tratamientos para las ecuaciones polinómicas con raíces reales que presenta Descartes, están vigentes y son susceptibles de ser llevados al aula. La factorización se constituye en una herramienta potente para solucionar ecuaciones si se combinan el método de los signos (*cartesiano*) para las raíces reales (por ejemplo, el de las raíces complejas de Euler), lo cual permite acotar y hallar las soluciones a partir de los diversos métodos que para este tema se relacionan en el libro III de *La Geometría.*

En los grados de enseñanza media la identificación entre una ecuación polinómica y una función polinómica, las raíces de la ecuación y los ceros de la función, posibilita unas actuaciones didácticas que involucran diferentes registros de representación del objeto matemático. Por ejemplo para una ecuación con soluciones racionales se puede resolver en primera instancia por radicales verificando el TFA, y luego al convertirla en una función, (la expresión algebraica igualada a un ( ))y por medio de tratamientos gráficos y analíticos hallar los ceros de la función. Pero también se puede recorrer el camino inverso y en los dos casos comparar los resultados.

En los cursos de formación universitaria pone en evidencia la conexión entre el algebra clásica y el álgebra moderna, la cual permanece oculta bajo las definiciones generales de estos tipos de algebras.

En los cursos de álgebra en la enseñanza media no se aborda a profundidad el carácter analítico del álgebra, y a pesar de que hicieron parte de la renovación curricular, en la actualidad no se considera las estructuras algebraicas como objetos de enseñanza en ese nivel; sin embrago en los cursos de álgebra en la formación universitaria es posible presentar un estudio de las estructuras algebraicas en el que la mirada no sólo este centrada en los procesos demostrativos, sino que esta haga explicita la importancia de las relaciones mas allá de la naturaleza de los objetos. Es lo anterior lo que posibilita comprender como dos sistemas matemáticos son, indistinguibles a pesar de que sus objetos y operaciones sean diferentes cuando son estudiados a través de la estructura algebraica que poseen.

Después de estas reflexiones generales presentamos en síntesis algunos trabajos de grado de pregrado y proyectos de investigación y sus resultados en completa correspondencia con los resultados de la fenomenología histórica aquí expuesta y que son ejemplos de las posibles articulaciones entre historia de las matemáticas y didáctica y en los cuales la participación ya sea como investigadora o como tutora de la autora de esta tesis ha sido fundamental para sus desarrollos.

### 4.5.1 Proyecto de investigación: Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación[43]

En este trabajo, se propuso un acercamiento al álgebra elemental en los distintos niveles de la enseñanza básica en términos de traducción de lenguajes: el “habitual”, el “algebraico”, el “aritmético”, el “geométrico” y el de los “modelos” que facilita la actividad matemática como un proceso reversible de generalización y particularización, que estimula y favorece el desarrollo del conocimiento algebraico.

El objetivo general del proyecto que duró dos años era:

Favorecer en los estudiantes un acercamiento significativo y funcional a los conceptos básicos del álgebra escolar a través de situaciones funcionales, de generalización y modelación para el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos y la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Igualmente, a partir de una reflexión sistemática sobre estos procesos de acercamiento al álgebra, aportar elementos teóricos y metodológicos a tener en cuenta en la formación de maestros e investigadores.

Los resultados obtenidos se encuentran estrechamente ligados a los elementos conceptuales que soportan los Modelos Teóricos Locales como metodología de investigación articulada ala teoría de Análisis fenomenológico de Hans Freudenthal y a los propios objetivos del proyecto.

En la investigación reciente en torno a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, existe una tendencia a privilegiar una de las siguientes componentes: los modelos de enseñanza, los modelos de procesos cognitivos y los modelos de competencia formal. Esta situación, que considera las problemáticas enfatizando cada una de las anteriores componentes no permite caracterizar las interrelaciones entre

---

[43] Proyecto de investigación del programa: Estudios Científicos en Educación. Campo de estudio: Educación básica secundaria y media. Contrato Colciencias: RC-N° 076-2002; Código: 1106-11-11391. 2004. Investigador principal: Jorge Arce, coinvestigadores: Ligia Amparo Torres Rengifo y María Amilba Ramírez, asesor externo: Luis Carlos Arboleda A.

.

éstas, impidiendo una descripción más integral de los fenómenos que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina algebraica.

En la perspectiva metodológica propuesta para el presente proyecto, los Modelos Teóricos Locales, el objeto de estudio es considerado desde tres componentes: el modelo de competencia formal, el modelo de enseñanza, el modelo de procesos cognitivos. Estos se ajustan a fenómenos específicos, pero que tienen en cuenta cada una de las componentes anteriores, lo cual da luces acerca de las interrelaciones entre ellas. En los últimos tiempos, algunos investigadores consideran importante la inclusión de una cuarta componente que dé cuenta de los procesos de comunicación matemática que se presentan durante el proceso de enseñanza.

El modelo de competencia formal se construye a partir del estudio histórico y epistemológico de los objetos matemáticos, en este caso de los objetos algebraicos; en este sentido, se consideran los fenómenos que históricamente fueron organizados por los conceptos matemáticos y la manera como ingresan a ser parte formal de una teoría matemática.

Desde la perspectiva histórica asumida por el proyecto, en el estudio histórico-epistemológico se consideraron las problemáticas inmersas en la construcción de los conceptos de ecuación y función y su relación con la constitución del sistema simbólico algebraico y no como la descripción lineal y anecdótica de situaciones y personajes, en relación con la historia del álgebra. El abordar la historia del álgebra de esta manera, posibilitó, por ejemplo, la caracterización de las interrelaciones entre el concepto de número y magnitud y el proceso de construcción de la teoría de ecuaciones y la teoría de funciones. La complejidad de las interrelaciones entre estos elementos, permitió describir las maneras como los procesos de modelación y generalización fundamentan los procesos de pensamiento que se pusieron en juego en la construcción de los conceptos descritos con anterioridad.

Uno de los principales resultados de este proyecto lo constituye precisamente la articulación que se logra entre lo histórico y lo didáctico.

Tales articulaciones surgen cuando, por ejemplo, al examinar las modalidades de generalización que subyacen a momentos históricos claves para el desarrollo de la teoría de las secciones cónicas, representados en particular en los trabajos de Apolonio, Arquímedes, Descartes y Fermat, se muestra que en el siglo XVII se realiza una ruptura esencial con el tipo de generalizaciones que puso en juego la ciencia griega para designar el objeto matemático llamado *cónica* y estudiar nuevas y más fecundas propiedades características de tal objeto. En el estudio de los cambios conceptuales operados sobre el objeto clásico de las cónicas por la cadena de recontextualizaciones que impone una nueva abstracción, hace énfasis en los aspectos asociados al lenguaje del álgebra, y se plantean elementos pertinentes para las reflexiones didácticas sobre las condiciones favorables para la construcción de un lenguaje algebraico en la escuela. Es decir, que comprender las formas de generalización dadas históricamente es importante para comprender el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico en la escuela.

En este sentido, el cambio del pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico, implica superar el mundo de la cantidad para actuar en el mundo de las relaciones. Aspecto este detectado, cuando Descartes trata los segmentos como números, no segmentos como medidas, como cantidades, los llamó segmentos pero de hecho eran números, él no trabajó con una visión Euclidiana del número, sino con una visión moderna de éste. El tratamiento que le dio Descartes a los segmentos es funcional, es relacional, mientras que el tratamiento que se hace en la matemática griega, está en el mundo de la cantidad. Sin embargo, esos nuevos mundos que se construyen sufren todas las cosas anteriores, las vuelve casos particulares de esas generalizaciones nuevas después de una tematización.

Se presenta también, el hecho de que en ese proceso de operatividad con los segmentos, es importante la nominación de las rectas mediante letras, en este caso. Sin embargo, lo que queda claro es que no basta nombrar, nominar o definir un objeto matemático, o elemento de éste para que ya el pensamiento avance. Por lo tanto, el objeto es algo más que designación, el objeto es ante todo la propiedad distintiva que hay que demostrar, que lo exhibe y lo caracteriza.

Es así como en el interior del proyecto de investigación, se reconoce el simbolismo algebraico, como signos de actividades de razonamiento, lo que favorece poder ver lo conceptual que está dentro de lo simbólico y poder determinar diferencias entre lo que se representa a nivel numérico y a nivel algebraico. Es decir reconocer el proceso constructivo en toda su dimensión.

Otro aspecto en este proceso constructivo hacia el álgebra lo representa el papel que juega la expresión analítica ya que posibilita otro tipo de operaciones sobre el objeto matemático construido – e.g. comparar dos parábolas, condicionar el parámetro-, es decir, se ha pasado del mundo de la geometría al mundo del álgebra; en donde no se pierde el referente, pero el objeto no está esencialmente ligado con lo geométrico. La geometría es un referente externo, pero el objeto está viviendo su autonomía en la expresión algebraica. Es importante reflexionar sobre este cambio conceptual, desde la perspectiva didáctica, pues el abandono paulatino del referente o del objeto externo, significa de todas formas, una pérdida de significado que posibilita a su vez una ganancia operatoria y de independencia del concepto en su expresión algebraica. El proceso constructivo hacia esa independencia es de gran importancia, riqueza fenomenológica y preocupación para investigadores y maestros interesados en las problemáticas relativas a la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Por otra parte, otro elemento caracterizador de este proceso de nueva generalización en las cónicas, en el siglo XVII, es como se subsumen los casos particulares en una ecuación universal de segundo grado. Imponiendo condiciones a los coeficientes y a los términos independientes se produce esta o aquella cónica. El objeto ahora no tiene naturaleza geométrica, sino analítica, y el hecho de que todas las clases de ese objeto –sección cónica – están incluidas en una sola expresión matemática, sus expresiones analíticas son casos particulares de una sola expresión matemática.

En síntesis, uno de los resultados importantes del estudio histórico epistemológico lo constituye, tal como se visualiza en el ejemplo anterior, la identificación de problemáticas y procesos históricos que permiten comprender problemáticas didácticas.

Esto es reiterativo en los estudios de otros momentos y problemáticas adelantados en este trabajo, tales como: el papel del desarrollo del concepto de número en la construcción de una teoría de ecuaciones, en el álgebra del renacimiento, particularmente en los trabajos de Cardano. Lo que favorece la reflexión en torno al papel que juega el lenguaje aritmético en la construcción del algebraico;

El modelo de enseñanza se consideró en dos niveles. El primero de ellos, a partir de la caracterización de la manera como se han organizado los conceptos algebraicos en las propuestas curriculares, en los textos, junto con los resultados de las pruebas censales nacionales e internacionales posibilitó la identificación de los elementos que fundamentan el modelo de enseñanza que tradicionalmente funciona en las escuelas para la enseñanza del álgebra. Esta dimensión facilitó identificar, en el contexto colombiano y con mayor precisión elementos claves en el problema. Estos aspectos se relacionan con la consideración del álgebra como un sistema simbólico cuyo aprendizaje implica la memorización y mecanización del manejo operatorio de los símbolos. Es decir, el énfasis en los aspectos sintácticos, con una ausencia total de contextos a partir de los cuales se pueda construir sentido y significado para los objetos y operaciones algebraicas.

Son estos elementos, junto con los resultados del estudio histórico los que permiten tomar distancia de modelo de enseñanza anterior y proponer el que finalmente se asumió en el proyecto. En el cual, se toman las situaciones problemáticas como espacios a partir de los cuales los sujetos que se enfrentan a ellas realizan una esbozo semiótico lógico de ella para tomar una decisión en relación con el sistema matemático de signos que utilizarán en el proceso de solución y que por tanto, movilizan los conceptos y significados que poseen los sujetos y crean las condiciones para construir nuevos. La solución de estas situaciones involucra trabajo de lectura/transformación de los textos matemáticos en procesos de producción de sentido.

De esta manera, el Modelo de Enseñanza puede definirse a partir de la secuencias de situaciones problemáticas. En este orden de ideas, las situaciones problema que se consideran en el proyecto se construyen desde las perspectivas de la Modelación y la Generalización. Cada una de estos procesos comporta unas características teóricas particulares pero que logran articularse alrededor de un eje fundamental en el desarrollo histórico del álgebra: el estudio de la variación y el cambio.

La variación se presenta como un concepto nuclear en un sistema con0ceptual que involucra otros importantes como el de función. Es decir, que el estudio de los patrones de variación entre magnitudes relacionadas o dependientes una de la otra, puede conducir al estudio de los modelos funcionales. Desde esta perspectiva, el álgebra se redimensiona al presentarse como un sistema potente de representación y de descripción de estos fenómenos de variación.

Las anteriores consideraciones plantean entonces que las perspectivas de Generalización y de Modelación pueden articularse alrededor de la perspectiva funcional en la iniciación al álgebra. Este modelo se operativiza, por lo menos en esta fase experimental, en 9 tareas organizadas en tres situaciones de intervención en el aula.

Las situaciones que se diseñaron presentan características que recogen elementos de los diferentes estudios abordados en este proyecto, pero sobre todo son ejemplificaciones de muchas de las situaciones problemas que podría formar parte de la actividad algebraica en la escuela, desde una perspectiva curricular; de tal manera que, uno de los resultados de este trabajo consistió en reconocer esta propuesta como una perspectiva de enseñaza que conjuga muchas de las propuestas presentadas por la comunidad de educadores matemáticos del país a través de políticas educativas expuestas a través de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de calidad en matemáticas.

En relación a la implementación del modelo de enseñanza y al análisis de los procesos movilizados en los estudiantes en la experimentación de este modelo, se reconocen varios desarrollos.

De una parte, que la identificación y operatividad de relaciones entre magnitudes y cantidades, por parte de los estudiantes, en una determinada situación problema, como su expresión en diferentes representaciones, son un nivel importante en la construcción de la sintaxis algebraica, como forma general de expresar un patrón de comportamiento. Lo que significa, que acceder a un nivel operatorio de una relación o patrón, es reconocer el algoritmo que subyace a la relación.

De otra parte, en estos procesos de modelación, desde lo numérico o geométrico, se logró que los estudiantes reconocieran la dependencia entre variables y los0 campos de variación, pero no la clase de variación que esta involucrada en la tarea. Lo que significa que no se llegó a una *conciencia* del tipo de cambio que se da entre las variables, como la razón de cambio.  Esto da cuenta que en este nivel de acercamiento al álgebra, desde esta perspectiva, la variación está en un nivel muy intuitivo y debe movilizarse hacia niveles más abstractos.

También, cabe anotar que, hay muchos casos que los estudiantes expresan la relación en forma general, ya sea en lenguaje natural (uso de cuantificadores), sincopado o simbólico pero no logran usarla a la hora de encontrar el valor numérico de una de las variables, allí expresada, es decir, cuando deben resolver una ecuación con esa expresión. Lo anterior conlleva a dos hechos importantes, el primero reconocer la tensión que se da entre el lenguaje natural y lo simbólico a la hora de expresar una relación, situación cognitiva de gran valor en este proceso constructivo del lenguaje algebraico; y en segundo lugar, reconocer que la no manipulación de las expresiones, lleva al uso de métodos numéricos eminentemente, como el tanteo, uso de operaciones inversas, en la solución de ecuaciones. Esto último parece indicar que se debió al tipo de situación (no recursividad de la variable) que se utilizó en la experiencia.

En forma específica, se logró movilizar el ámbito numérico de pensamiento de los estudiantes como tratamiento fundamental de situaciones donde se exponen relaciones entre cantidades hacia ámbitos donde se hace necesaria la expresión de esas relaciones numéricas de forma más general. Esto significa que las situaciones planteadas al incorporar relaciones funcionales entre magnitudes favorecieron este cambio. Es de anotar que este cambio es un proceso lento y requiere de muchas experiencias de este tipo, por esta razón el nivel de apropiación y manejo de variación, los patrones que involucran las relaciones etc. es aún, en esta etapa, muy intuitivo y operativo.

La forma de expresar esos cambios de tipo conceptual y procedimental se da en varios niveles y expresados en términos de descripciones en lenguaje verbal, sincopado, tabular o algebraico. Esto potencia esta perspectiva que puso énfasis en la representación tabular como mediadora en el paso del lenguaje natural al simbólico, como perspectiva que moviliza más de un registro de expresión. Sin embargo, se reconoce que es necesario el uso de otros registros como el cartesiano, por ejemplo, que permita mayores acercamientos significativos al lenguaje sintáctico del álgebra.

En el proceso hacia el mundo del álgebra se logro que los estudiantes percibieran la variación entre magnitudes y cantidades, describieran esos cambios, operen con el algoritmo que los sustenta, reconozcan la dependencia, caractericen las cantidades (constantes y variables), pero no se llegó que caracterizaran la clase de cambio que se opera cuando una variable afecta otra. Es decir, no se reconoce la razón de cambio entre variables. Aspecto importantísimo en el proceso de modelación y generalización. Lo que significa que este cambio requiere de muchas situaciones, actividades y experiencias que al continuar en esta línea de trabajo, aquí propuesta, se puede lograr.

### 4.5.2 Proyecto de investigación: La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes[44]

Este proyecto tenia como propósito general, Incidir en la formación de los docentes de matemáticas, mediante la elaboración y validación de una propuesta histórica respecto al problema de la constitución de los números reales como objeto matemático.

Los números reales (el continuo numérico **R**) son un concepto fundamentador del cálculo y el análisis, pues se encuentran en la base de nociones claves sobre las cuales se erige el cálculo. Una buena apropiación de este concepto es determinante para la buena formación matemática de ingenieros, matemáticos y licenciados en matemáticas. Sin embargo, **R** se presenta en la escolaridad como un producto acabado al cual se tiene acceso a través de acercamientos formales o intuitivos, potenciados a partir de lo axiomático. A través de este tipo de presentaciones se limitan demasiado las posibilidades que tiene el estudiante de entender la naturaleza y función de las propiedades de **R**.

Es en este sentido que los estudios de corte histórico-filosófico cobran importancia. Además aportan elementos de orden pedagógico, pues ofrecen herramientas conceptuales y procedimentales que los docentes pueden emplear en la enseñanza del concepto.

---

[44] Proyecto de investigación presentado a la Convocatoria Nacional para la Presentación de Proyectos – Año 2005.- COLCIENCIAS. Tema de investigación: Educación y Desarrollo. Campo de estudio: Relaciones entre el sistema nacional de educación y los sistemas nacionales de ciencia, tecnología e innovación. Investigador Principal: Luis Carlos Arboleda Aparicio, Coinvestigadores: Luis Cornelio Recalde, Maribel Patricia Anacona, Gabriela Inés Arbeláez, Edgar Fernando Gálvez, Guillermo Ortiz , Ligia Amparo Torres R., Luz Edith Valoyes y María Rocío Malagón.

.

Dado que en el país existen muy pocas propuestas (documentales o programáticas) que aborden el desarrollo histórico-filosófico de **R** en relación con las prácticas docentes, nos proponemos aportar al respecto, a través de la elaboración y validación de materiales (texto y artículos) y de eventos. Este problema lo abordaremos tomando como base el siguiente interrogante: ¿Qué tipo de problemáticas histórico-filosóficas sobre el proceso de objetivación de **R** son pertinentes en la perspectiva del mejoramiento de la formación matemática de los docentes?

En este sentido, ubicamos el problema de investigación como un problema de indagación histórico-filosófica con fines educativos, el cual se aborda desde tres dimensiones y seis momentos históricos. Las tres dimensiones son:

a) La dimensión histórico-epistemológica de construcción de los reales como objeto matemático,
b) La dimensión educativa que se constituye a partir de la identificación de problemas significativos en la comprensión de los números reales en la educación media y universitaria.
c) La dimensión de análisis de textos de álgebra y cálculo que permitan caracterizar las presentaciones de los números reales en Colombia.

Los cinco momentos históricos del desarrollo de **R**, que vamos a privilegiar sin detrimento de otras aproximaciones, son: Del número como forma de la magnitud (geometría griega, Euclides y Arquímedes), al número como forma de solución de ecuaciones y teoría de curvas algebraicas (Arabes, Cardano y Descartes), al número como forma de la teoría de funciones (Cauchy, Bolzano, Weierstrass), al número como forma de la teoría de conjuntos (Bolzano, Cantor, Dedekind), a los tratamientos aritméticos, lógicos y estructurales del número (Frege, Peano y Russell).

Entre los resultados obtenidos tenemos:

Teniendo en cuenta estos aspectos, el proyecto muestra cómo las expresiones de una cultura matemática elemental sobre R adquirieron estatus universal. No se trata solo de enseñar, por ejemplo, que en el cuerpo ordenado de los números reales toda sucesión de Cauchy converge, sino de mostrar cómo esta propiedad de R conecta con un sistema de axiomas y de definiciones respondiendo a una búsqueda histórica de fijar la naturaleza lógica de la completitud. Esta concepción de historia es un medio útil para los interesados en comprender el funcionamiento de la investigación en matemáticas; es decir, en comprender el entramado de actividades de razonamiento implicadas en los procesos de constitución de los objetos matemáticos y de los números reales en particular.

En este sentido, el proyecto se ha propuesto contribuir a la formación de los docentes de matemáticas mediante la elaboración y validación de un texto que les permita disponer de una información de base sobre momentos históricos significativos en la objetivación de $\mathbb{R}$. Se trata de examinar la transición histórica que lleva del número como forma de la magnitud, al número como forma de solución de ecuaciones, al número como forma de la teoría de funciones, al número como forma de la teoría de conjuntos, a los tratamientos aritméticos, lógicos y estructurales del número.

Un aspecto relevante del proyecto fue encontrar mecanismos apropiados de comunicación con los docentes de matemáticas de la educación media y universitaria que permitieran perfilar aspectos en la enseñanza de $\mathbb{R}$ y que brindaran insumos histórico-epistemológicos sobre la constitución de $\mathbb{R}$ como objeto matemático. Se combinaron dos estrategias de trabajo: un seminario interno del equipo de investigación y una serie de talleres y eventos científicos con docentes de la ecuación media y universitaria.

En el capítulo 3 *Teoría de ecuaciones y concepto de número: el caso del álgebra árabe y del renacimiento* se examinan distintas problemáticas relacionadas con procesos de objetivación de lo numérico a través de la constitución de la teoría de ecuaciones. En un primer momento se estudia, en el trabajo de al-Khwarizmi, la emergencia de este nuevo campo disciplinar de las matemáticas que será designado como Álgebra y que dará inicio a una teoría de ecuaciones con modos particulares de considerar el número y la magnitud. En un segundo momento, se analiza en la obra de Cardano, los procedimientos utilizados en la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado la no aceptación de los números negativos. Se examinan las condiciones históricas de introducción de una teoría de ecuaciones en donde la preocupación no radica exclusivamente en el método de solución sino en la naturaleza de las raíces y el grado de éstas.

### 4.5.3 Proyecto de grado: significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado[45]

Este trabajo se presenta como ejemplo de algunos de los que se ha dirigido la proponente de esta tesis, alrededor de esta problemática.

---

[45] Trabajo de grado realizado por los estudiantes Luz Irene Infante González cód. 0428618, Cristian Andrés Hurtado Moreno cód. 0435737 de la Licenciatura en Educación básica con énfasis en matemáticas del área de Educación Matemática de la Universidad del Valle- 12-2009. Directora del trabajo: Ligia Amparo Torres R.

El propósito de este trabajo fue: Determinar estrategias y recomendaciones para docentes e investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela, a través de la identificación de distintos tipos de significados que poseen los estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria sobre el signo igual, en la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia.

El punto de partida de este trabajo fue reconocer que la introducción al álgebra escolar se puede ver como un proceso que puede tomar distintos caminos en relación con el objeto particular de estudio, entre los cuales se encuentran "las reglas para transformar y resolver ecuaciones (a lo que a menudo se reduce el álgebra en la enseñanza actual), la resolución de problemas específicos o clases de problemas (que históricamente ha jugado un papel importante en el desarrollo del álgebra y su enseñanza), la generalización de leyes que rigen los números (un enfoque muy fuerte en ciertos currículos), la más reciente introducción de los conceptos de variable y función (que históricamente aparecieron mucho más tarde y ocupan una posición de creciente importancia en algunos programas), y el estudio de las estructuras algebraicas (que marcó el currículo escolar de los años sesenta bajo la influencia de las matemáticas modernas)".

En este sentido, algunas investigaciones muestran que las diversas maneras de abordar el álgebra en la escuela, también determinan distintas formas de concebir los objetos algebraicos y por tanto, dan cuenta de diversas dificultades asociadas a estas concepciones. Además, muchos estudios han mostrado las dificultades que presentan los estudiantes en varios niveles escolares con respecto a la resolución de ecuaciones, manipulación de expresiones algebraicas, resolución de problemas tratamiento de conceptos fundamentales como el de variable, el paso del pensamiento aritmético al algebraico, asociado con la noción de igualdad, entre otros. Por este motivo se hace necesario identificar y caracterizar los significados que le dan los estudiantes al signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado, con el propósito de proponer algunas estrategias para la ampliación de su campo semántico y así aportar a la significación del concepto de ecuación en la escuela.

Esta indagación se realiza a través de una prueba que busca validar los aspectos que se han encontrado en las diversas investigaciones alrededor de la problemática, además de generar, a partir de los resultados, unas estrategias y recomendaciones en relación con el tratamiento que favorece la significación del signo igual en la resolución de ecuaciones como equivalencia, las recomendaciones son dirigidas tanto a maestros en ejercicio como a futuros docentes.

Este trabajo muestra los distintos significados que tienen los estudiantes de grado noveno (9º) de la educación básica de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, con relación al signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado. Para lograr este propósito se aplicó una prueba con trece situaciones agrupadas en -dos partes que son aplicadas en sesiones diferentes.

Como ha sido mencionado en el presente trabajo, las distintas concepciones que tienen los estudiantes sobre el signo igual, en la resolución de ecuaciones lineales ha estado sujeta a múltiples dificultades de orden didáctico, reconocidas incluso a través de la historia como lo muestran las diversas investigaciones, no obstante, tales dificultades no se deben exclusivamente a un corte didáctico, siendo necesario reconocer que la naturaleza de los objetos matemáticos proporcionan dificultades distintas a las que pueden surgir desde una perspectiva netamente didáctica. Por tal razón se presenta, un estudio matemático acerca de las ecuaciones y un estudio de la igualdad como concepto matemático desde una perspectiva conjuntista, como relación de clases equivalencia y desde la lógica ecuacional. Sin embargo, antes de llegar a este punto dejaremos por sentado una distinción entre lo que se considera como la igualdad y el signo igual, en tanto, desde una postura exclusivamente matemática el concepto al cual hace referencia es el de igualdad.

Al abordar un concepto u objeto matemático desde una postura tanto didáctica como matemática, éste permite dar cuenta de un sin número de herramientas, procesos y obstáculos necesarios a tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas además, un estudio histórico y epistemológico de ella permite, evidenciar elementos que potencializan y pueden servir como agentes facilitadores a esta tarea.

En este sentido, se presenta un estudio del concepto de igualdad abordado desde dos momentos que se consideran fundamentales en la construcción de este concepto como relación de equivalencia, cabe destacar que aunque el momento principal en este proceso se presenta con Descartes, siendo por tanto uno de los estudiados en esta investigación, no es el único que posibilita tal fin, ya que éste se basa necesariamente en los planteamientos de Euclides, de los cuales hace uso en dos sentidos, uno es para contribuir con los elementos que propone y otro, para rechazar algunos que no le permitirían argumentar la teoría que él postula y que más adelante estudiaremos. Para ello, se presenta a continuación el concepto de igualdad en Euclides rastreado en su obra *Los Elementos* y el concepto de igualdad en Descartes presentado en la *Geometría*[15].

[15] se debe resaltar que ni Descartes en su obra La Geometría ni Euclides en Los Elementos muestran de forma explicita la concepción que poseen de la noción de igualdad, es más, en ninguno de los dos textos mencionados se pretende tal fin, por lo cual lo que aquí se presentara es el rastreo de tal noción que se puede rescatar de los trabajos ahí presentados.

La prueba se presenta en dos apartados. La prueba I esta compuesta por siete preguntas de las cuales cinco son abiertas y dos cerradas, cada una con cuatro opciones de respuesta. Contienen enunciados numéricos, ecuaciones aritméticas y ecuaciones propiamente algebraicas. El campo numérico en el cual se inscribe son los números racionales. En esta primera parte las tres primeras preguntas aluden a igualdades numéricas y evalúan la expresión de un número en diferentes formas operativas.

La pregunta cuatro trata de introducir la noción que una ecuación se puede expresar como otras equivalentes y evalúa la producción de ecuaciones equivalentes a una dada, además este concepto es evaluado en la pregunta siete en la medida en que se deben producir ecuaciones equivalentes que sean intermedias para pasar de una ecuación a otra.

En la pregunta cinco a partir de la solución dada de una ecuación ( $= 5$) se busca que los estudiantes encuentren una de cinco ecuaciones que se presentan, para la cual $= 5$ es solución. Por el contrario, en la pregunta seis se presentan dos ecuaciones a las cuales se les debe dar solución mediante un proceso en el que se produzcan ecuaciones equivalentes.

La parte II de la prueba esta conformada por seis preguntas, tres de ellas son abiertas y tres cerradas, en tres de las preguntas se pide hacer un justificación clara de los procedimientos realizados. En esta prueba se trabajan sólo enunciados algebraicos que son presentados en su mayoría como ecuaciones resueltas con el fin d hacer una observación a los procedimientos realizados, también se muestra una pregunta en forma de conjunto para trabajar otra forma de representación.

Las preguntas uno, tres, cuatro y cinco buscan determinar cuando dos ecuaciones son equivalentes, como es el caso de la pregunta cinco, lo mismo ocurre en la tres donde se deben mostrar las ecuaciones equivalentes intermedias que surgen para pasar de una ecuación a otra, por el contrario, en la primera pregunta lo que se quiere es saber que ecuación no es equivalente a la dada, pero de igual manera poniendo en juego la noción de equivalencia entre ecuaciones y entre expresiones como s el caso de la pregunta cuatro.

Por su parte, la pregunta dos lo que pretende es indagar acerca del manejo que se e da a la propiedad uniforme de la igualdad para producir expresiones equivalentes. Finalmente en la pregunta seis, se da una ecuación resuelta de tres maneras diferentes, en ésta se pretende observar que procedimiento es correcto o incorrecto y por que se considera de esta manera, aquí se pone en juego la noción de igualdad que poseen los estudiantes y la forma de manifestarla al resolver una ecuación.

La prueba en su totalidad es aplicada a estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Pedro Antonio Molina, el propósito de cada uno de los ítems propuestos se hace explicito en el análisis preliminar donde se presenta una descripción general del por qué se hace la pregunta y lo que se espera encontrar con ésta.

Entre los resultados sobresale la falta de significación que poseen los estudiantes del signo igual como relación de equivalencia en los diferentes tratamientos de ecuaciones de primer grado, privilegiando su comprensión como una orden de realizar una acción o simplemente como un símbolo que separa dos expresiones matemáticas, no obstante algunos estudiantes muestran un avance aislado en la conceptualización del signo igual como relación de equivalencia, con lo cual se validan algunos de los resultados obtenidos en investigaciones recientes sobre este campo.

# 5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, M. & Falk, M. (1997). Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santafé de Bogotá. Editorial Universidad Nacional.

Anacona, Maribel. (2003). La historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Bogotá. En: Revista EMA. Vol. 8 No. 1. pp.30-46

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Bell, Alan. (1996). Problem-solving approaches to algebra: two aspects. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Bergé, A. & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.6, Núm.3, pp.163-197. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México. DF.

Brousseau, R., Brown, T. & Johnson, P. (1969). Introduction to ratio and proportion. The Arithmetic Teacher. 16, (2), 89-90.

Campos, Rómulo. (1994). Campos semánticos y el problema del significado en álgebra. En: UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. No 1.p 45-56

Cantoral, Ricardo et al. (2003). Desarrollo del Pensamiento Matemático. Cap. 7. México. Editorial Trillas 225 p.

Cardano, G. (1993). Ars Magna or The Rules of Álgebra. Translated and Edited by T. Richard Witmer. New York, Dover Publications, Inc.

Cardano, Girolamo. (1993). Ars Magna or The Rules of Álgebra. Translated and Edited by T. Richard Witmer. New York Dover Publications, Inc.

Castro, Encarnación. (1997). En: La Educación Matemática en la escuela secundaria. Barcelona, Editorial Horsori. p. 95-122

Charbonneau, L. (1996). From Euclides to Descartes: algebra and its relation to geometry. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Charbonneau, L. 1996. From Euclides to Descartes: algebra and its relation to geometry. En: Approaches to Algebra. Printed in Netherlands, Bednarz et al. (eds). Kluwer Academics Publisher. p.15-38.

Chevallard, Yves. (1985). Le passage de l'Arithmetique a l'Algebrique dans l'Enseignement des mathematiques au college. Premiere Partie. Paris. «petix» nº 5, p. 51-94

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1988). Matemáticas. Marco General. Propuesta de Programa Curricular. Sexto Grado de Educación Básica. Bogotá, D. E.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1989). Matemáticas. Marco General. Propuesta Programa Curricular. Séptimo Grado de Educación Básica. Bogotá D. E.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1990). Matemáticas. Marco general. Propuesta de Programa Curricular. Octavo grado de Educación Básica. Bogotá, D. E.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1993). SABER. Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación. Primeros Resultados: Matemáticas y Lenguaje en la Básica Primaria. Santafé de Bogotá, D. C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1995). Orientaciones para la evaluación y selección de textos escolares. Serie guías. Santafé de Bogotá, D. C.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002). Matemáticas. Programa Nuevo Sistema Escolar. Evaluación Censal de la Calidad de la Educación. 9º Grado Educación Básica.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas. –TIMSS – Santafé de Bogotá, D. C.

Cooney, Thomas, Davis, Eduard J., Henderson, K. B. (1975). 6. Teaching Mathematical generalizations by exposition. Dynamics of teaching secondary. School Mathematics. Houghton Mifflin.

Cooney, Thomas, Davis, Eduard J., Henderson, K. B. (1975).. 7. Teaching Mathematical generalizations by guided discovery. Dynamics of teaching secondary. School Mathematics. Houghton Mifflin.

Díaz, J., Filloy, E., Matos, J. y Gutiérrez, A. (1990). Panel: Investigación en Educación Matemática. En: Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Colección Documentos nº 42. pp.164-184. París: UNESCO.

Edwards, C. H. Jr. (1982). Inconmensurable magnitudes and geometric algebra, number, and limit concepts in Antiquity. The Historical Development of the Calculus. pp.1-13

El Bouazzaoui, H. (1988). L'étude des conceptions de la notion de continuité dans function chez les élèves et les proffeseurs de la fin du secondaire au Maroc (Tesis doctoral). Québec: Universidad Laval.

Enfedaque, Jesús. (1990). De los números a las letras. Revista Suma 5. pp.23-31

Fauvel, J., Maanen, J. (eds.) (2000), History in mathematics education: the ICMI study, Dordrecht: Kluver, pp.63-90, 143-168, 201-232, 291-316.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra: Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. En: UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas No 14.

Filloy, E. (1998). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México, Editorial Iberoamérica. 183 p.

Filloy, E. & Rubio, G (1993a). (1993b). Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic & algebra word problems. En: Ichiei, H.; Keiichi, S. y Fou-Lai, L. (eds), Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, 154-161. Tsukuba, Ibaraki. Japan.

Filloy, E. & Rubio, G (1993a). Family of arithmetic algebra word problems and the tensions between the different uses of algebraic expressions. En: Joanne, R. Y Barbara, J. (eds.). Proceedings of Fifteenth Annual Meeting, North American Chapter of the

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1. 142-148. Pacific Grove, CA, USA.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster.

Gallardo, A. & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético - algebraico. Recherches en didactique des mathématiques. vol. 9. No. 2. p.155-188.

Gardies, Jean-louis. (2001). La Thématisation en Mathématiques. París, En: De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault.

Garnier, C. (Eds.). Construction des savoirs. Obstacles & Conflits. Ottawa: CIRADE. p. 64-75.

Grupo Azarquiel. (1993*).* Ideas y actividades para enseñar el álgebra. Madrid, Editorial Síntesis S.A.

Harel, Guershon, Tall, David. (1991). The General, The Abstract and the Generic in Advanced Mathematics. En: For the Learning of Mathematics, Vol.11.

Heid, Kathleen*. (1996).* Reflections on mathematical modeling and the redefinition of algebraic thinking. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Høyrup, Jens. (1990). »OXFORD« AND »CREMONA«. ON THE RELATION BETWEEN TWO VERSIONS OF AL-KHWARIZMI'S ALGEBRA. Alger. Revised contribution to the 3erd Magheribian Symposium on the History of Arabic Mathematics.

Janvier, C. & Charbonneau, L. et de Cotret, Sophie. (1989*).* Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. En: Bednarz, N. et

Janvier, Claude. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands. p. 225-239

Kieran, C. y Filloy Yague, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En: Enseñanza de las Ciencias. vol. 7(3). p.229-240.

Lakatos, Imre. (1981). Cauchy y el continuo: La importancia del Análisis no Estándar para la historia y la filosofía de las matemáticas. En: Matemática, Ciencia y Tecnología. Parte 1.p. 67-102.

Lee, Lesley. (1996). An initiation into algebraic cultural through generalization activities. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. N° 9.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. Revista EMA. 4(3) p. 232-246. Colombia: Universidad de los Andes. "una empresa docente".

Mason, J. (1999). Rutas y Raíces del álgebra. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Traducción y Edición: Cecilia Agudelo Valderrama.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En: Hierbert J. & Behr Merlyn (Eds.). Number concepts and operation in the middle grades. p.52-92. National Council of Teacher of Mathematics.

Polya, G. (1966). Inducción. En: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, Editorial Tecnos.

Polya, G. (1994). Inducción e inducción matemática. Cómo resolverlo. Sigma: El mundo de las matemáticas. Tomo 5. p.364-378. España: Ediciones Grijalbo. S.A.

Polya, G. (1996). Generalización, especialización, analogía. En: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, Editorial Tecnos.

Polya, G. (1996). Más clases de razones plausibles. 1. Conjeturas y conjeturas. En: Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid, Editorial Tecnos.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En: Rico, ed. La Educación Matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: ICE/Horsori

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la matemática. pp. 109-131. Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, Luis (1996). Elementos de resolución de problemas. Colección Mathema. Granada. Editorial Comare

Puig, Luis. (1994). Semiótica y matemáticas. Eutopías 2ª. Época. Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de Valencia & Asociación Vasca de Semiótica, Vol. 51

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a perspective didactic. En: International Handbook of Mathematics Education. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands. pp.39-54

Radford, L.. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. International Handbook of Mathematics Education. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Radford, L.. (1996). The roles of geometry and arithmetic en the development of algebra: historical remarks from a perspective didactic. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. International Handbook of Mathematics Education. By A.J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.

Rashed, R. 1984. L'idée de l'algèbre chez al-Kwārizmī. En: Entre Arithmétique et algèbre. Recherches sur L'Histoire des Mathématiques arabes. Chapitre I: Les commencements de l'algèbre. Société d'édition. Les Belles Lettres. Paris.

Rojano, T. (1991). El álgebra en el curriculum de la secundaria. La reforma de los 90's. En: Educación Matemática. vol.3, No 3 diciembre. p.4-8.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. En: Enseñanza de las ciencias. Vol 1 No 12.

Rojano, T. y Sutherland, R., (1991). La sintaxis algebraica en el proyecto viético. En: Historia de las ideas algebraicas. Memorias del tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Rojano et al (eds.) p.117-130.

Rosen, F. 1986. The algebra of Mohammed Ben Musa. London. Oriental Translation Fund.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN. (2002). Resultados. Evaluación de Competencias Básicas en Lenguaje, Matemática y Ciencias. Grados séptimo y noveno. Serie Guías. Alcaldía Mayor Bogotá, D. C.

Smith, David Eugene and Latham, Marcia L. (1954). The geometry of René Descartes. Traducción del francés y del latín. New York. Dover Publications, Inc.

Socas, M. Camacho, M., y otros. (1989). Iniciación al álgebra. Madrid. Editorial Síntesis S. A.

Thompson, A. (1984). Teachers' Beliefs and Conceptions: A synthesis of the Research. En: Grouws, D. (Eds.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. p. 127-146. New York: MacMillan Publishing Company.

Torres, L. & Calderón, L. (2000). El dominio de la variable. Variable didáctica en el álgebra escolar. Bogotá. En: Revista EMA Vol.5, No. 3 pp 197-209

Torres, L., Valoyes, E. & Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. Bogotá. En: Revista EMA Vol.7, No. 2 pp 227-246

Vasco, Carlos E. (1983). El álgebra renacentista. 2ª Edición. Santafé de Bogotá, Empresa Editorial Universidad Nacional. 108 p

Vasco, Carlos E. (2002). Siete tensiones irresolubles de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas. Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Educación Matemática. ELHEM 1.Cali. Colombia.

Vasco, Carlos E.. (1990). Algunas reflexiones sobre la Pedagogía y la Didáctica. En: Pedagogía, Discurso y Poder. Santafé de Bogotá. Díaz, M. et al. (Eds.). p 107-220

Vasco, Carlos E.. (1998). Visión de conjunto de la pedagogía de las matemáticas como disciplina en formación. En: Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vo. VII. No 1. Cali. ERM p.75 - 88

Viète, François. (1983). The Analytic Art. Translated by T. Richard Witmer. United States of America. The Kent State University Press.

Waerden, B. L. Van der (Bartel Leenert). (1903). (1980) Mathematics Subject Clasification. (1985) Zürich.

Wagner, Sigrid. Kieran, Carolyn. Editors. (1989). Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Volume 4. United States of America. National Council of Teachers of Mathematics.

Wheeler, David. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for Research and Teaching. International Handbook of Mathematics Education. By A. J. Bishop et al (eds). Kluwer Academic Plublishers, Printed in the Netherlands.