instituto
de educación
y pedagogía

Universidad
del Valle

LA NOCIÓN DE INFINITO EN GEORGE CANTOR. UN ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

MÓNICA ANDREA APONTE MARÍN

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación énfasis en Educación Matemática.

Santiago de Cali

2014

LA NOCIÓN DE INFINITO EN GEORGE CANTOR. UN ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

MÓNICA ANDREA APONTE MARÍN
Código: 1101048

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al
título de Mg. En Educación énfasis en Educación Matemática

DIRECTORA
GABRIELA ARBELÁEZ, PH. D

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación énfasis en Educación Matemática.
Santiago de Cali
2014

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN GENERAL. ____ 6

Capítulo 1. ____ 15

1. CONTEXTUALIZACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DEL TRABAJO ____ 15

1.1 Planteamiento del problema ____ 15

1.2 Justificación ____ 18

1.2.1 Pertinencia de un estudio histórico- epistemológico sobre el infinito ____ 20

1.2.2 Pertinencia del estudio de un curso de teoría de conjuntos ____ 27

1.3 OBJETIVOS ____ 30

1.3.1 Objetivo General ____ 30

1.3.2 Objetivos específicos ____ 30

1.4 METODOLOGÍA ____ 31

Capítulo 2. ____ 34

2. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LOS ELEMENTOS NECESARIOS PARA LA CONSOLIDACIÓN DE UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS EN GEORG CANTOR ____ 34

2.1 La génesis de los fundamentos de la teoría de conjuntos ____ 36

2.2 Conjuntos derivados y cardinalidad ____ 42

2.3 Los transfinitos de Cantor ____ 45

2.3.1 La Noción de número cardinal o Potencia ____ 49

2.3.2 Órdenes Infinitos ____ 53

2.4 Conjunto bien ordenado ____ 55

2.5 Inicios de la topología conjuntista ____ 60

2.6 Las paradojas de la teoría de conjuntos ____ 63

2.7 Lo transfinito en la naturaleza ____ 67

2.8 Axiomatización de la teoría cantoriana ____ 72

2.8.1 El Axioma de Elección ____ 76

Capítulo 3. ____ 82

3. ALGUNAS REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS Y EDUCATIVAS SOBRE LOS PROGRAMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE ____ 82

3.1 Algunas reflexiones sobre la importancia de los análisis históricos y epistemológicos en la Educación Matemática ____ 84

3.2 Algunos estudios sobre concepciones del infinito desde una perspectiva didáctica _____ 86

3.3 Análisis acerca del conocimiento de los objetos matemáticos infinitos _______________ 91

3.4 Consideraciones generales sobre las revisiones de los programas de teoría de conjuntos del IEP de la Universidad del Valle ____ 95

3.4.1 Análisis de las entrevistas realizadas a los docentes ______________________________________ 100

3.4.1.1 Conclusiones de las Entrevistas ____ 105

3.5 Reflexiones sobre algunos obstáculos epistemológicos en la conceptualización del infinito cantoriano ____ 109

Capítulo 4. **____ 117**

4. EL PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS COMO UNA CONTRIBUCIÓN A LOS PLANES DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL IEP DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE __________________________ 117

4.1 Importancia de la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas __________ 118

4.2 La formación de maestros a través de la teoría de conjuntos ______________________ 121

4.2.1 Pertinencia de las nociones conjuntistas que requieren los docentes en formación ____________ 122

4.3 PROPUESTA DE DISEÑO ____ 127

4.3.1 Temas para trabajar en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas _____ 128

4.3.2 Temas para trabajar en la Licenciatura en Matemáticas y Física __________________________ 133

4.4 Metodología para trabajar los cursos ____ 141

4.5 Algunas actividades que se pueden trabajar con los estudiantes, en los cursos propuestos. 143

4.6 Reflexiones de la propuesta ____ 145

5. CONCLUSIONES GENERALES ______________________________ 149

6. REFERENCIAS BIBLIÓGRAFICAS ________________________ 154

RESUMEN.

En el presente trabajo de grado se caracterizó a partir de estudios históricos epistemológicos, el proceso de consolidación del infinito matemático dentro del desarrollo de la construcción de una teoría axiomática de conjuntos infinitos. Con el fin de analizar bajo un análisis histórico de la noción de infinito cantoriano, cuáles son las nociones conjuntistas que le sirven a un futuro profesor de matemáticas; en este sentido, a partir de los análisis se desarrollaron propuestas académicas para los programas de teoría de conjuntos, en pos de una mejora de la enseñanza de la teoría de conjuntos, de futuros Licenciados en Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Palabras Claves: Infinito, Buen orden, Cardinales, Conjuntos, Teoría de Conjuntos, Transfinitos, Ordinales, Cantor, Axioma de Elección, Axioma de Reemplazo, Paradojas, Intuición, Enseñanza, Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN GENERAL.

Dentro de las funciones y acciones que realiza un docente, tal vez la más significativa y retadora es la de la formación, y más aún la de ser un formador de futuros formadores. En este sentido, los profesores debemos enfocar nuestras prácticas hacia procesos significativos; para lo cual es fundamental incorporar herramientas de investigación como son los estudios históricos-epistemológicos sobre la manera como se desarrollan los conceptos, en especial los conceptos matemáticos, pues no podemos intentar enseñar y hablar de algo de lo cual desconocemos su esencia.

El estudio y análisis de aspectos históricos y epistemológicos de objetos matemáticos, aporta elementos que el docente puede considerar en su práctica educativa, tomando como referentes aspectos que giran en torno a distintas concepciones de las matemáticas y la complejidad epistemológica de conceptos matemáticos, en donde se pueden analizar las posibles dificultades que se presentaron en la construcción de éstos. Facilitando al docente una visión más profunda de las matemáticas y de su actividad, de manera que le permita entender la composición, su finalidad y sus relaciones con el entorno (Anacona, 2003). La Educación Matemática, no debe dejar de lado estas reflexiones, pues uno de los principales objetivos es el de ofrecer una adecuada formación matemática a los futuros formadores.

En este sentido, uno de los propósitos de los docentes, debe estar orientado a la contribución de los procesos de comprensión, por lo cual, se considera importante tomar los análisis históricos y epistemológicos acompañados de estudios hermenéuticos, como referentes pedagógicos y filosóficos importantes para el profesor, dado que estos análisis proporcionan métodos para el análisis de los contenidos matemáticos, que permiten dar aportes a nivel curricular en la medida que éstos contribuyen a las reflexiones de cuáles deben ser los conocimientos enseñados en los cursos de formación inicial de un futuro docente, de esta manera los docentes pueden transcender en relación a la significación de nuevos conceptos matemáticos.

Entonces estamos afirmando que es necesario proponer cambios en la forma y el contenido de enseñar, para poder generar acciones transformadoras en relación con los conocimientos adquiridos en el aula de clase, no se puede pretender hacer matemáticas en la una institución educativa, a partir de la transmisión de lecciones acabadas, donde no se contemple la manipulación y la indagación sobre el objeto matemático en estudio[1]; se considera, entonces que es una labor compleja, poder significar objetos matemáticos, dejando de lado aspectos que involucran la sensibilidad del sujeto y apostándole al esquema de una definición como una "receta", sin hacer representaciones esquemáticas y sin tener en cuenta los saberes previos de los educandos, no se debe desconocer además, que en la recepción de la información se requieren de operaciones mentales diferentes según la naturaleza de los objetos, en especial cuando el trabajo es referido sobre los objetos infinitos; operaciones que no son espontaneas y que en general requieren de un esfuerzo adicional. De aquí, que la asimilación de la información no es simplemente una tarea receptiva, sino que debe ser un proceso cosciente, donde el estudiante incluya el reconocimiento de la historia del objeto del cual hasta el momento no se ha percatado, como lo plantea Piaget, (citado en Meirieu, P. 2009, p 60.):

> El sujeto se conoce mal a sí mismo, ya que para explicarse sus propias operaciones mentales, incluso para percibir la existencia de las estructuras que se incluyen en aquellas, tendría que

[1] Esto se puede sustentar desde la concepción kantiana donde se concibe necesario para hablar de un arte de la educación, cambiar lo mecánico en ciencia, de otro modo, la educación jamás sería un esfuerzo coherente, y una generación derribaría lo que hubiera construido.

reconstruir todo un pasado del cual nunca ha tomado conciencia en el mismo momento en que vivía sus etapas.

Podemos decir, que sólo conocemos de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas; así que es pertinente indagar sobre el conocimiento que el docente quiere enseñar, el conocimiento de un objeto implica el poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, o sea mediante la razón; aquí se nos presentan dos tipos de conocimiento un conocimiento empírico y un conocimiento inteligible, pero el conocimiento de un objeto matemático, no lo debemos encasillar a una exclusividad de un tipo de conocimiento, pues en la matemática tenemos objetos a los cuales podemos acceder desde nuestra experiencia sensible, igualmente hay otros que solo son comprensibles en la medida que nos despojamos de una realidad y empleamos unos elevados procesos de abstracción mental, por ejemplo la noción de conjunto cantoriana.

De esta manera, el docente de matemáticas debería involucrar dentro de sus prácticas pedagógicas el empleo de pensamientos metafóricos, entendidos éstos, como interpretación de un campo de experiencias en términos de otros ya conocidos, así, el docente puede indagar sobre la naturaleza de las matemáticas, a partir de las ideas de otras personas, ampliando la visión que a él le pueden otorgar las definiciones, axiomas o porque no un mundo trascedente platónico, con respecto a un objeto matemático, y entonces, poder romper con la enseñanza tradicional, dado que este tipo de pensamientos conducen a que el docente acceda a procesos reflexivos, y se centre en nuevas formas de investigación y profundización sobre lo que enseña.

Podemos afirmar que en el trabajo de grado se propone un tema de investigación de interés para la Educación Matemática, en la medida que potencializa los estudios históricos y epistemológicos como herramientas para construir nuevas propuestas académicas de un curso de teoría de conjuntos, ofrecido a las Licenciaturas en Matemáticas de la Universidad del Valle.

La motivación para desarrollar este trabajo, surgió a partir del trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciada en Matemáticas y Física[2], en el cual, se caracterizó el proceso histórico-epistemológico que da lugar a la formalización del infinito actual en la perspectiva de la Educación Matemática, a través de los elementos fundamentales que rodearon la incorporación de esta noción, en el marco de la teoría aristotélica, la obra de Giordano Bruno y finalmente algunos procesos en la construcción del infinito actual dentro de la matemática apoyándonos en algunos trabajos de Cantor. De esta manera, se pretende complementar dicho trabajo, centrándonos básicamente en el estudio de las obras de Cantor, para caracterizar a partir de estudios históricos epistemológicos, los procesos de consolidación del infinito matemático en el marco de la construcción de una teoría axiomática de conjuntos infinitos.

En este sentido nos proponemos realizar estudios de tipo histórico-epistemológico, en los cuales se describa, explique e identifiquen aspectos fundamentales para la consolidación de la teoría de conjuntos, y a partir de estos análisis determinar los factores condicionantes para la enseñanza de una teoría matemática para docentes en formación.

George Cantor se puede catalogar como el creador de la Teoría de Conjuntos a partir de sus trabajos con el infinito. Podemos decir que en los trabajos de Georg Cantor, se encuentra un

[2]Este trabajo titulado *De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación Matemática* (2008), dirigido por el profesor Fernando Gálvez.

punto culminante dentro de la historia de las matemáticas y es la fundamentación de los números transfinitos, los cuales se presentan como una extensión autónoma y sistemática de los números naturales. Su teoría de conjuntos transfinitos supuso una verdadera revolución en la historia de las matemáticas: estos números lograron eliminar muchos de los prejuicios en torno al infinito actual que tanto se habían cuestionado los filósofos y teólogos a través de los años. En este sentido podríamos afirmar que la teoría de conjuntos o teoría matemática del infinito, fue en gran parte fundada por Cantor a finales del siglo XIX.

Podemos decir que de acuerdo a la tradición histórica, la teoría de conjuntos se desarrolló en las obras más importantes de Cantor, en 1883 escribió los *Fundamentos* de la teoría de conjuntos[3], trabajo en el cual sustenta desde un punto de vista filosófico la necesidad de trabajar con el infinito actual e introduce de manera intuitiva los números ordinales y cardinales transfinitos, de esta manera la teoría de conjuntos es la teoría en la que los procesos infinitos actuales comienzan a tener vida propia. Posteriormente Cantor publica las *Contribuciones*[4] en 1895 y 1897; en este trabajo realiza una presentación intuitiva de la teoría de conjuntos moderna, a partir de extender los fundamentos presentados en los *Fundamentos*, hace una presentación formal de los números transfinitos e introduce los cardinales, además en estos artículos Cantor llama la atención sobre la cardinalidad del continuo.

Cantor prueba que entre los conjuntos de puntos infinitos puede haber diferencias de tamaño[5], es decir, que no todos los conjuntos infinitos de puntos tienen la misma cantidad de elementos. El descubrimiento de los distintos tamaños de infinitos constituye el origen del concepto de

[3] *Grundlagen einer Allgemeinen Mannichfaltigkeitsleherey*
[4] *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*
[5] Se toma como medida de tamaño la intuición finitista de Equipotencia.

potencia, conocido en nuestros días como conjunto de partes, el cual es el primer concepto conjuntista que define este matemático[6].

Cantor, junto con otros matemáticos, estudiaban la representación de las funciones en series trigonométricas; de acuerdo con De la Pava (2010, p.8) Cantor estableció un teorema básico de unicidad para estas series:

> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge a cero para todo x, entonces todos sus coeficientes son cero.

Con este resultado, Georg Cantor inicia sus estudios sobre los conjuntos de puntos donde la convergencia de la serie falla, logrando una caracterización de algunos conjuntos de puntos, y tomando como referencia la noción de derivado de un conjunto, define nuevos conjuntos (De la Pava, 2010, p.8):

> Para una colección P de números reales, sea P' la colección de puntos límites de P y $P^{(n)}$ el resultado de iterar n veces la operación.

A partir de ésta definición Cantor establece que si la serie:

> $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge a cero en todo punto excepto sobre un conjunto P tal que $P^{(n)} = \emptyset$para algún n, entonces todos los coeficientes de dicha serie son cero.

Se ve, entonces como sobre los estudios de conjuntos derivados, Cantor desvía la línea de investigación del análisis e inicia un nuevo reto, que no es propiamente del análisis, sino de otras instancias matemáticas. Percibe entonces, que en el estudio de los conjuntos derivados, se debe extender la noción de número infinito.

[6] La caracterización de este conjunto se desarrolla en el capítulo 2 del presente trabajo.

De esta manera, vemos como inicialmente Cantor no se ocupó de la teoría de conjuntos, sino de temas matemáticos más tradicionales, mostrando ante éstos un espíritu innovador que le hicieron derivar la teoría de conjuntos de otras investigaciones que aparentemente no tenían nada que ver con ella. (Ferreiros, 1991) también destaca que este matemático inició sus investigaciones indagando sobre series trigonométricas, y para ello necesitó presentar una definición de números reales diferentes a las que se trabajaban en aquel entonces. Al respecto, en un artículo que escribe en 1872, sobre la extensión de los números reales mediante la definición de series de números racionales con un límite, se muestra el interés de Cantor por el rigor lógico de las definiciones. El objetivo propuesto de esta investigación es la prueba de un teorema sobre series trigonométricas.

Se puede afirmar entonces, que la teoría de conjuntos desempeña un papel esencial en la organización de los conocimientos matemáticos, citando a (Arrieche, 2002)[7] se puede decir que la noción de "conjunto" y las nociones relacionadas con este concepto forman un puente entre la función cotidiana de la inteligencia y el pensamiento matemático. En este sentido se considera que un buen trabajo en los elementos conjuntistas, junto con todas las ideas derivadas implícitamente de ella, pueden llegar a clarificar o acercarse de una manera más cómoda a las otras ideas elementales y más avanzadas que se encuentran en la matemática. Sin embargo, reconocemos que la Teoría de Conjuntos, no es la única teoría que fundamenta las matemáticas; es más después de aproximadamente 140 años de desarrollo en dicha teoría no se ha podido responder satisfactoriamente cuál es el cardinal de los números reales, Cantor consideraba que era la cardinalidad del aleph uno, mientras que cien años después Woodin y sus seguidores sugieren la cardinalidad aleph dos.

[7] Tomamos como referencia el trabajo doctoral que el profesor Mario Arrieche realizó en el año 2002 en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granda en España, titulado*: La Teoría de Conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*.

Es pertinente mencionar que existen otras teorías diferentes a la teoría de conjuntos, que también permiten constituir los fundamentos de las matemáticas, entre esas teorías, están la Teoría de Categorías con especial interés los Topos, que han dado grandes frutos en las Matemáticas y en las Ciencias de Computaciones, sin embargo estas teorías no han tenido la resonancia que se merecen en los currículos de matemáticas a nivel universitario, motivo por el cual nuestro interés particular, se centra en el estudio de la teoría de ZFC, pues aún los currículos actuales se ven permeados por esta teoría y los desarrollos que se han tenido en ella.

Por lo anterior se quiere establecer una comparación del desarrollo axiomático de esta teoría desde el nacimiento del infinito matemático, con las propuestas académicas que se presentan actualmente en los cursos de formación de teoría de conjuntos de las Licenciaturas en Matemáticas, y así construir nuevas propuestas académicas donde se incorporen elementos fundamentales para un curso de teoría de conjuntos de un futuro docente.

En este trabajo, se realizó en primer lugar, una revisión de algunos antecedentes conceptuales en relación con el concepto de infinito cantoriano; dando una atención especial a los trabajos realizados por Georg Cantor (*Grundlagen* y *Beiträge*), y los análisis de tipo histórico filosófico de los profesores Dauben, J. (1990). *His mathematics and philosophy of the infinite,* y Ferreirós, J. (2006) *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* y Ferreirós, J. (1991) *El nacimiento de la teoría de conjuntos 1854-1908*. En relación con estos estudios y los análisis que se llevaron a cabo, se examinaron las propuestas de los programas de teoría de conjuntos del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para confrontar en parte el desarrollo de estos cursos con la propuesta de Cantor y Zermelo-Fraenkel sobre la conceptualización y formalización necesaria que se requiere en un curso de teoría de conjuntos y de esta manera poder alcanzar un pensamiento matemático superior a falta del estudio de los conjuntos infinitos.

Capítulo 1.

1. CONTEXTUALIZACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DEL TRABAJO

En este capítulo, se muestra de manera general los intereses a la problemática de investigación que inicia en el marco de la preparación del trabajo de grado para la maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática en el año 2011, en este sentido describiremos la génesis del problema, los objetivos y la metodología seguida en la investigación.

1.1 Planteamiento del problema

La noción de *infinito* forma parte de nuestra cotidianidad y expresa significados diversos en nuestra consciencia, que en la mayoría de los casos suelen diferir de los específicamente matemáticos. Y pese a la falta de sustento empírico que se tiene sobre ésta, su existencia no se discute en virtud de que en la actualidad ella posee una estructura formal que la respalda, la cual ha sido fruto de un largo proceso de evolución histórica y filosófica.

Se reconoce corrientemente que los antiguos griegos establecieron en sus contribuciones matemáticas y filosóficas la dicotomía infinito potencia-actual. Aspectos como lo cíclico, por ejemplo, llevaron a pensar en la inagotabilidad del tiempo. El infinito también se encontraba inmerso en aspectos de orden cosmológico, teológico y matemático; de esta manera Aristóteles en su estudio sobre la naturaleza (*Physis*) se interrogará por el ser del infinito, sustentando filosóficamente la existencia del infinito potencial, y estableciendo la imposibilidad del infinito actual con razones de orden lógico-filosófico, dado que el infinito solo puede existir como atributo y no como principio.

El desarrollo del infinito actual se plantea históricamente de manera distinta; emerge como concepto perturbador y conflictivo, pero en niveles de razonamiento muy especializados como la filosofía, la ontología, la matemática, etc. No obstante, la reflexión académica sobre el infinito potencial, es decir su conceptualización teórica, es lo que permite la aparición del infinito actual, al menos como punto de discusión: la imposibilidad cosmológica del infinito actual (Aristóteles), y posteriormente el debate sobre anterioridad lógica del uno sobre el otro.

Lo anterior tiene como consecuencia la aceptación explícita de conjuntos actualmente infinitos por parte de George Cantor, cristalizándose el intento de formalización matemática del infinito actual. Gracias a los trabajos de Cantor, se da una ruptura sustancial en la historia del pensamiento matemático[8] en la cual se evidencia, que para poder acceder de manera intuitiva a esta noción, es necesario un ejercicio exigente de abstracción mental. En este sentido, el infinito cantoriano ocupa un lugar esencial en la historia de la matemática, este ha sido fundamental para el crecimiento de las matemáticas en el siglo XX, y podemos decir que pese a la fundamentación matemática que posee, él continua siendo un concepto misterioso y mal comprendido en la actualidad.

Es pertinente estudiar la manera como Cantor generalizó la teoría de conjuntos, pues ésta se desarrolla bajo la idea de que los conjuntos son colecciones infinitas permitiendo el surgimiento

[8] Se hace referencia a la existencia de las actividades intelectuales, que nacen como procesos racionales donde se alcanza una formación matemática más completa que permitan contextualizar conocimientos de la matemática.

de paradojas, que condujeron a la explicitación de axiomas como el de elección y de reemplazo, para una consistencia de la teoría. Ahora bien, podemos plantearnos cuestiones sobre si es posible que sean estos axiomas los que permitan comprender el infinito cantoriano, y con ello validar el estudio de una teoría de conjuntos, además cómo puede afectar el estos no aparezcan dentro de un curso de teoría de conjuntos. A partir de estos cuestionamientos se buscaran reflexiones desde las obras de Cantor, y su correspondencia con Dedekind, Hilbert y Zermelo, en cuanto a la importancia de una fundamentación de la teoría de conjuntos, para acceder a la matematización del infinito.

Así, la siguiente propuesta se sustenta desde el siguiente interrogante: *¿Cómo se aborda la noción de conjuntos cantoriano, en los cursos de teoría de conjuntos del Instituto de Educación y Pedagogía, de la Universidad del Valle?* Y en este sentido indagar *¿cuál es la importancia que ésta tiene en el desarrollo del pensamiento matemático para un futuro licenciado?*

Vemos que el problema tiene un interés que se puede calificar de práctico para un profesor, en la medida que se indaga sobre el papel que juega la noción de infinito matemático en un curso de teoría de conjuntos; en este sentido se está preguntando implícitamente sobre cuáles son los contenidos matemáticos que se deberían enseñar a los docentes en formación, dentro de un curso de teoría de conjuntos, y si realmente los cursos que se trabajan a nivel universitario son cursos que le sirven a un futuro profesor de matemáticas.

1.2 Justificación

Dentro de la historia de la matemática es pertinente la realización de estudios en torno al cómo, y por qué Cantor introdujo de manera formal el infinito dentro de las matemáticas, permitiendo esto el desarrollo de una teoría acerca del tamaño de las colecciones infinitas y una aritmética infinita, que sirvió a una generalización de la aritmética ordinaria, es así como un estudio histórico del surgimiento del infinito en Cantor, nos permitirá analizar de manera particular cómo se puede sustentar el desarrollo del pensamiento matemático a través del desarrollo de fundamentos axiomáticos como los que encontramos en la teoría de conjuntos actualmente.

En este sentido, en el trabajo de grado de la maestría en Educación Matemática, se espera dar cuenta de un estudio histórico del surgimiento de la noción de infinito actual, como una consecuencia fundamental para la sustentación del levantamiento de una teoría axiomática de conjuntos; se buscará mostrar los principales resultados históricos que indujeron a la formalización del concepto dentro de la matemática, ligando estos resultados a las reflexiones en el campo educativo, pues consideramos que en el reconocimiento de las exigencias académicas que demanda la conceptualización de la noción, se pueden reconocer aspectos esenciales para un desarrollo adecuado de cursos como los de teoría de conjuntos ofrecidos en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Se tiene entonces, que la importancia de este tipo de estudios en historia de la matemática contribuye en la práctica educativa, en la medida que proporciona reflexiones hacia la exploración de un desarrollo adecuado del pensamiento matemático, dentro de cursos de educación superior, buscado favorecer en cierta medida la adquisición de conceptos matemáticos abstractos como el infinito y que suele generalmente ser en muchas ocasiones, mal interpretado y trabajado en el aula de clase.

De este modo, este trabajo pretende ser el punto de partida, para futuros estudios en cuanto a la pertinencia de las temáticas abordadas en cursos fundamentales dentro del proceso de formación profesional de un Licenciado en Matemáticas en la Universidad del Valle, constituyéndose así en un punto de reflexión para el campo de la Historia y la Educación Matemática en nuestro país. Además es importante, reconocer y analizar los cursos de teoría de conjuntos, como elementos estructurales y esenciales para un desarrollo pertinente de los demás cursos en formación matemáticas en las licenciaturas.

Así pues, tenemos que es necesario una fundamentación conjuntista sólida en los futuros licenciados; esta fundamentación no puede desechar el concepto más importante de la teoría de conjuntos: la noción de conjunto cantoriano. Porque la teoría de conjuntos, en realidad, es *teoría* en la medida que se consideran y axiomatizan los *conjuntos infinitos*. Entonces, pasar por alto una reflexión sobre el infinito en un curso de formación de teoría de conjuntos, constituiría un despropósito con el mismo espíritu de la teoría. Por otro lado, se justifica que un análisis de este objeto en los programas ofrecidos en estos cursos del IEP de la Universidad del Valle, puede propender en una reforma de los mismos, en pos de una mejora de la enseñanza de la en los futuros Licenciados.

1.2.1 Pertinencia de un estudio histórico- epistemológico sobre el infinito

A lo largo de la historia el concepto de *infinito* se presenta como misterioso y perturbador dentro de las matemáticas, podemos decir que desde nuestra cotidianidad éste expresa significados diversos en nuestra consciencia, que en la mayoría de los casos suelen diferir de los específicamente matemáticos. Y pese a la falta de sustento empírico para la noción de infinito, su existencia no se discute en virtud de que en la actualidad ella posee una estructura formal que la respalda, la cual ha sido fruto de un largo proceso de evolución histórica y filosófica.

La mayor parte de la matemática relacionada con lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, se reduce a un conjunto de especulaciones en torno a algunas ideas de Aristóteles como la relación entre punto y recta, la naturaleza de lo inconmensurable, las paradojas de Zenón, la existencia de lo indivisible y la potencialidad y actualidad de lo infinito.

Parece claro que desde sus orígenes el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad de carácter divino. Se puede decir que solo hasta Bernhard Bolzano en el siglo XIX se logran dar las bases para la construcción de la teoría de conjuntos, lo que induce a un tratamiento para la formalización de la noción de infinito actual[9]. Bolzano en su obra las *paradojas del infinito*, defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos

[9]Sin embargo no hay que olvidar a otros filósofos y científicos, anteriores a Bolzano, que en sus trabajos encontraron situaciones paradójicas en torno a la noción de infinito, entre ellos Galileo en sus discursos y demostraciones matemáticas sobre dos ciencias nuevas. Obra en la cual pone en tela de juicio los adjetivos "más grande", "más pequeño", o "igual", en relación a las magnitudes infinitas. Pues en el diálogo entre Simplício y Salvácio, Galileo concluye que al comparar "conjuntos infinitos" (como el de los números cuadrados y sus raíces [naturales]), se llega a que "la totalidad de los cuadrados no es menor a la totalidad de los números, ni superior a estos". Aspecto que, para Galileo, al igual que en el análisis de Bolzano, resulta paradójico.

conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Bolzano no encontró problema en aceptar que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición de conjuntos infinitos: *Un conjunto es infinito si se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio*, fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind[10].

Hacia la segunda mitad del siglo XIX, Georg Cantor, se apoya en los trabajos de Bolzano, para buscar aclaraciones acerca del infinito actual, sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, aclaraciones acerca de lo que es el continuo; pues uno de los objetivos de su obra era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito actual, dado que si los conjuntos infinitos se comportaban de manera diferente a los conjuntos finitos no significa que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente; además pensaba que sin ellos era imposible entender una realidad física, surgiendo así la necesidad de sustentar matemáticamente la noción de infinito.

A partir de los estudios realizados por Cantor, "podríamos inferir que el acta de nacimiento de la teoría de conjuntos transfinitos lleva la fecha del 7 de diciembre de 1873" Ferreiros (2006, p. 12), cuando él logra demostrar, en una carta a Dedekind, uno de los resultados más importantes de su trabajo: que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales, $\mathbb{R}$ es un conjunto no-numerable. Poco después Cantor logra la demostración de este teorema, dada una sucesión cualquiera de números reales del intervalo (0,1), demuestra la existencia de números reales no contenidos en dicha sucesión,

[10]La autoría de la definición también es un hecho históricamente controversial. Fue enunciada explícitamente por Dedekind, pero Cantor se reclama el hecho por cuanto considera que ya aparece de manera implícita en sus artículos (Recalde, 2005, p. 1).

ahora bien, si $\mathbb{R}$ fuera numerable, existiría una sucesión que contuviera a todos los números de [0,1], lo cual negaría el resultado anterior (Ferreiros, 1991, p. 211).

Cantor le presentó a Dedekind la demostración del teorema anterior, a finales de 1873. Dedekind envió una versión simplificada de la demostración que al parecer es la versión publicada en Cantor-Dedekind 1937, (Ferreiros 1991, p. 211). Sin embargo no se trata aún de la conocida prueba diagonal; ésta aparece luego en 1890. Podemos decir, quizás que fue este resultado, el que llevó al autor a la conclusión de que la noción de infinito no es unívoca, es decir que no existía una sola clase de infinito. Además, la noción de infinito, lejos de lo que pensara la tradición aristotélica, deja de ser una idea vaga en virtud de los límites de la representación mental. "Con este resultado, posiblemente Cantor se abrió paso a la formalización del infinito actual, él establece que hay diversos "tamaños" u "ordenes" del infinito, diferentes cardinalidades infinitas" (Ferreiros, 1991, p. 212).

De otro lado, tradicionalmente se ha intentado identificar el infinito actual con Dios, de manera que más allá de lo infinito estaba lo absoluto. Cantor consideraba tres contextos donde surge el concepto de infinito actual, en estos contextos podemos notar que Cantor, también establece una representación de carácter divino para concebir este tipo de infinito:

> (…) primero cuando es realizado en la forma más completa, en un ser independiente de otro mundo, en Dios, al cual llamo el infinito absoluto o simplemente absoluto; segundo cuando ocurre en lo contingente, en el mundo físico; tercero cuando la mente lo aprehende en abstracto como una magnitud matemática, número, o tipo de orden. Quiero hacer un claro contraste entre el absoluto y lo que yo llamo transfinito, es decir, los infinitos actuales de las dos últimas clases los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por tanto relacionados con lo finito. Cantor, citado en (Ferreiros, 2006, p. 32).

En otras palabras, propone un esquema tripartito: *finito, transfinito, absolutamente infinito*[11]. Es importante resaltar que años más tarde Cantor se ve forzado a cambiar un elemento importante de esa posición filosófica: tras hallar los vacíos que dan lugar a las paradojas conjuntistas, admite que el infinito absoluto no es *actual* sino *potencial* (Ferreirós, 2006, p. 33).

Retomando un poco lo mencionado anteriormente sobre la distinción entre dos infinitos actuales, se puede decir que esa diferencia la realiza Cantor como una medida que le permite salirle al paso a una objeción de origen filosófico-teológico contra la matemática transfinita.

Cantor, en los *Fundamentos,* definió consistentemente los números transfinitos y construyó una teoría matemática, intentando siempre demostrar que en los números transfinitos no existe ninguna contradicción oculta. Él afirma que las objeciones en torno a los números infinitos se fundan siempre en peticiones de principio, es decir, se presupone que deben poseer ciertas propiedades que contradicen su naturaleza, y que son propias de los números finitos; ahora bien, por sí mismos esos números no conllevarían a ninguna inconsistencia Cantor, citado en (Ferreiros, 1991, p. 258). En este sentido Cantor concluye:

> A la idea de no considerar lo infinitamente grande solo en forma de aquello que crece ilimitadamente –y en la forma íntimamente relacionada de las series infinitas convergentes, introducidas por vez primera en el siglo diecisiete-, sino determinarlo también mediante números en la forma definida de lo completamente infinito, me he visto forzado por la lógica –en el curso de muchos años de esfuerzos científicos- casi contra mi voluntad, porque entraba en contradicción con tradiciones valiosas para mí; y por esa razón no creo que pueda hacerse valer contra ella argumentos que no estuviera en condiciones de refutar. Cantor, citado en (Ferreiros, 1991, p. 258).

[11]Aquí Cantor distingue también dos géneros de infinitud (propia o actual) muy diferentes, los cuales son lo transfinito y lo absolutamente infinito (Ferreiros, 2006, p. 33).

Así, él pide que la introducción de los números transfinitos se juzgue en relación a las nuevas nociones establecidas, a partir de la coherencia entre los nuevos números y los antiguos, y teniendo en cuenta la utilidad que éstos tienen realmente para la matemática. De esta manera, Cantor presenta las ideas para justificar la introducción de los ordinales transfinitos, y la forma de en qué se definen las clases numérica.

En un análisis sumamente detallado de las múltiples manifestaciones de Cantor, con respecto a lo transfinito y lo absoluto, Jane, citado en (Ferreiros, 2006, p. 70), llega a la conclusión de que Cantor concebía antes lo *absoluto* como un infinito actual, o dominio real de magnitud o potencia máxima. Después, pasa a entender lo absoluto como algo irremediablemente *potencial*, *abierto* e *incompletable*. En 1883 y en 1897 Cantor pensaba que lo absolutamente infinito no es determinable matemáticamente, pero sus razones inicialmente eran de un carácter teológico, mientras que las finales son también matemáticas.

También se debe tener en cuenta que uno de los problemas centrales de la teoría de Cantor era demostrar que la potencia de cualquier conjunto tenía que ser un *aleph*. Para ello no era suficiente, la definición incorporada en primera instancia por él. Para evitar contradicciones, Cantor expulsa aquellas agrupaciones portadoras de inconsistencia. En primer lugar, define una multitud consistente si no lleva a contradicciones. Las colecciones inconsistentes las caracterizaba de la siguiente manera:

> Una colección constituida de tal forma que la "unificación" de todos sus elementos en un todo lleva a contradicción, Cantor las llamó *infinito absoluto* o *colecciones inconsistentes*. (Recalde, 2005, p. 4).

De esta manera, Cantor intentaba evitar el problema diferenciando multitudes *consistentes* e *inconsistentes* y restringiendo la palabra conjunto para las consistentes. Un aspecto que llama la atención de la teoría de Cantor después de evidenciar las paradojas, es su rechazo a las cantidades infinitamente pequeñas; cuestión que parecía contradecir su concepción misma del infinito actual. Esto se puede notar en una carta a Weierstrass donde comenta:

> Los números lineales, no cero,ς (resumiendo, números los cuales pueden ser pensados como longitudes de una línea recta, acotados y continuos) los cuales serán más pequeños que cualquier número arbitrario, no existen, esto es, ellos contradicen el concepto de número lineal. (Recalde, 2005, p. 4).

Aquí la inconsistencia tiene que ver con el hecho de que los infinitesimales no cumplen el principio de Arquímedes (Recalde, 2005, p. 4). Argumentación que se antoja poco definitiva por cuanto los números transfinitos negaban de plano la noción común 5[12]. Según Cantor, la cuestión era que el principio de Arquímedes no era un axioma sino un teorema de la teoría de números reales. De esta forma, los infinitesimales no tenían mucha importancia teórica pues carecían de una estructura propia como cuerpo teórico matemático.

Así pues, en el desarrollo inicial de la teoría de conjuntos, Cantor no trabajó explícitamente a partir de axiomas, a pesar que el análisis de sus demostraciones indica que casi todos los teoremas demostrados por él pueden derivarse de tres axiomas: (i) el axioma de extensionalidad (ii) el axioma de abstracción; (iii) el axioma de escogencia. Entre estos axiomas, se tiene que el axioma (ii)[13] presenta alguna confusión, dado que en 1901 Bertrand Russell descubrió que de este axioma podía desprenderse una contradicción, considerando el conjunto de todas las cosas que

[12] El todo es mayor que una de sus partes.
[13] El axioma de abstracción afirma que dada una propiedad, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente aquellas entidades que tienen la propiedad.

tienen la misma propiedad de no ser elementos de sí mismas.

Entonces, el problema proviene de la definición misma de conjunto como colección arbitraria de elementos dada por Cantor; en el artículo de Math Annalen de 1895, Cantor presenta la siguiente descripción o definición de conjunto:

> Por un conjunto entendemos toda agrupación de M en un todo de objetos determinados y bien diferenciados m, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (que son llamados los "elementos" de M). En signos expresamos esto así: $M = \{m\}$. (Cantor, 1895, p.387).

Vemos como con esta descripción de conjunto, por parte de Cantor, se pone de manifiesto la naturaleza extensional de los conjuntos, se puede interpretar la "agrupación de un todo" al considerar los sistemas acabados, el "objeto determinado" en el sentido que no se aceptan imprecisiones y "bien diferenciados" en la medida que existen criterios para poder discernir a los objetos entre sí.

Cuando Cantor trata de definir explícitamente un conjunto, utiliza los siguientes términos: "Multiplicidad que puede considerarse como unidad", "Reunión de un todo", "Colección de elementos definidos". Conocida esta definición, se obtienen las nociones de conjunto finito e infinito, la introducción de las operaciones y otros conceptos inmediatos. Cantor no se detiene en esta caracterización, pues como explicaciones se encuentran las expresiones "por medio de una ley", "elementos definidos", de donde se observa que al poder considerar esa totalidad como una unidad, una ley o una propiedad, son estas las características de lo que se entiende por conjunto. Es decir las ideas conjunto-propiedad están es correspondencia biunívoca.

Este aspecto lo trató de formalizar Frege en su axioma de abstracción, el cual ya estaba presente en la mente de Cantor. “Subyacente a este modo de considerar los conjuntos está la firme creencia de Cantor y Frege en la existencia del mundo matemático en donde los conjuntos existen de forma autónoma e independiente: el matemático se limita a describir, mediante la teoría de conjuntos, un mundo oculto por el momento pero poco a poco va trayendo a la luz” (Requena, citado en Arrieche, 2002, p. 23).

Podemos decir que después de Cantor uno de los matemáticos que más se involucró en el desarrollo de la teoría de Conjuntos fue Richard Dedekind; para él la matemática se consideraba constituida en un edificio matemático sobre fundamentos conjuntistas. Además el álgebra, análisis y la geometría las consideraba constituidas sobre bases conjuntistas. En 1888 escribió *Was sind und was sollen die Zablen?* (¿Qué son y para qué sirven los números?); en esta obra hace una construcción de los números naturales a partir de nociones conjuntistas abstractas de conjuntos y aplicación.

Considerando todos los elementos conceptuales que empiezan a emergen con el desarrollo de la conceptualización del infinito matemático, es que justificamos como indispensable una reflexión de la manera como este concepto se trabaja dentro de un curso de formación para un futuro docente de matemáticas.

1.2.2 Pertinencia del estudio de un curso de teoría de conjuntos

Por otro lado, podemos decir de acuerdo a las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la Teoría de Conjuntos, que la enseñanza de las nociones conjuntistas ha sido un tema muy complejo dentro de la Educación Matemática. Se puede ver como a comienzos del siglo XX se produce en los educadores matemáticos una gran preocupación por la enseñanza de las matemáticas. En la década de los años cincuenta, cuando se produce el lanzamiento del primer Sputnik por los rusos, se conmociono el mundo, y se generan grandes debates sobre la educación, para estas nuevas transformaciones en los sistemas educativos, se tiene como eje central a las matemáticas, por ser vistas como pilar para el desarrollo científico y tecnológico.

En (Arrieche, 2002) se menciona que se presentaron dos grandes cambio curriculares en el currículo de matemáticas, en las escuelas secundarias a lo largo del siglo XX; uno que se produjo a principios del siglo y otro en la década de 1960. Felix Klein fue el pionero y defensor de la primera reforma, menciona que la filosofía que este matemático manejaba estaba centrada a desarrollar la imaginación geométrica y el pensamiento funcional. Y es en la década de 1960 cuando el grupo Bourbaki se hace cargo del liderazgo traspasado por Klein, produciéndose lo que se conoció como la reforma de las matemáticas modernas, la filosofía de los Bourbaki consistía en que la base de la enseñanza estaba en la noción abstracta de estructura, basada en la teoría de conjuntos. Las principales innovaciones en la matemática moderna estaban centradas en mayores niveles de rigor en la lógica, mayores niveles de abstracción de las ideas matemáticas.

Según (Freudenthal, 1983, p. 34), el significado de la teoría de conjuntos para los innovadores de las matemáticas tuvo gran importancia en la matemática avanzada. Señalaba que “en la enseñanza de las matemáticas los conjuntos se usan virtualmente sólo como una herramienta lingüística donde algunos predicados son reemplazados por su extensión”. Al respecto (Arrieche,

2002) comenta que los conjuntos que se enseñan en las matemáticas escolares de hoy no son un dispositivo organizador para los fenómenos matemáticos, sino un objetivo para ellos mismos.

A partir de la revolución de las matemáticas modernas, se puede decir que los diseños curriculares de las instituciones educativas de educación básica y media, han querido suprimir la teoría de conjuntos; esto nos llevaría a pensar que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros debe ser nulo, dado que no se tienen que enseñar esos contenidos. Sin embargo, esto nos genera una incertidumbre, ¿será necesario prescindir de la teoría de conjuntos cuando se trabajen con sistemas numéricos, relaciones y funciones, etc.? Es más, el sólo hecho de no contemplar los conjuntos dentro del proceso de formación docente, ¿no generaría una limitación a la ampliación de los conocimientos sobre los temas más avanzados de matemáticas?, sobre los que se supone que son los que debe explicar en el ejercicio de su profesión.

Finalmente se puede mencionar a otros investigadores, como Zaskis y Gunn (1997), que han examinado varios argumentos en pro y en contra de la enseñanza de los conjuntos a maestros en formación. La mayoría de los temas para los maestros en formación, como formas geométricas y transformaciones, números racionales, introducción a la teoría de números, y análisis de datos se relacionan de algún modo a los temas incluidos en el currículo de la escuela elemental. Pero los conceptos de la teoría de conjuntos parecieran ser la excepción, pues al parecer en los planes de estudios de los maestros de primaria, según estas investigaciones, no se contemplan los conjuntos para ser enseñados en las escuelas. Sin embargo, desde nuestra óptica se debe considerar importante para una fundamentación matemática, que permita extender aún más sus horizontes sobre los temas que se espera que ellos puedan enseñar.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

El objetivo general de nuestro trabajo consiste en investigar aspectos de tipo histórico y epistemológico sobre la génesis de la teoría de conjuntos con el fin de contribuir a las reflexiones educativas sobre la pertinencia de los cursos de teoría de conjuntos en los planes de formación de maestros, en este sentido el objetivo general propuesto es: Realizar un análisis histórico-epistemológico, para explicitar el papel que las nociones básicas de teoría de conjuntos, deben desempeñar en los planes de formación de futuros Licenciados en Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Para alcanzar el objetivo general, nos plantearemos los objetivos específicos que se describen a continuación.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Estudiar las obras de los *Fundamentos* y *Contribuciones* de Cantor, como referentes obligados en la contribución de aspectos matemáticos y filosóficos para la consolidación del infinito actual.

2. Analizar aspectos históricos y epistemológicos que fundamentan el infinito cantoriano, en relación al desarrollo de un pensamiento matemático avanzado.

3. Indagar sobre la importancia del axioma de elección y de reemplazo dentro de una teoría axiomática de conjuntos.

4. Contribuir desde la historia de las matemáticas, a las prácticas educativas en torno a la formación de futuros docentes, a partir de un análisis de los programas de los cursos de Teoría de Conjuntos del instituto de Educación y pedagogía de la Universidad del Valle.

Es importante reconocer que los maestros en formación requieren de un dominio teórico de los contenidos matemáticos, entre ellos de las nociones conjuntistas, para esto es necesario un estudio sobre los aspectos epistemológicos de la Teoría de Conjuntos, su origen, desarrollo, evolución y su papel en la Matemática y en la Educación Matemática, en la medida que contribuya a la formación de docentes.

En este sentido es que justificamos que no basta con mostrar el estudio histórico-epistemológico, desligado de una reflexión educativa, por lo cual será fundamental realizar análisis acerca del papel de la Teoría de Conjuntos en los procesos de formación de maestros y evidenciar si realmente lo que se está trabajando en estos planes de formación son cursos de teoría de conjuntos o son una simple aproximación intuitiva a la misma, en este sentido es que se da una pertinencia para pensar en adecuaciones de las temáticas abordadas en estos programas de formación.

1.4 METODOLOGÍA

En el aspecto metodológico que se llevará a cabo en este trabajo y teniendo en cuenta las metodologías trabajadas en la historia de la matemática, se propone un análisis histórico-epistemológico con la finalidad de dar cuenta sobre la manera como se constituye el concepto de infinito matemático en Cantor, buscando aclarar algunos procesos que condujeron a que el infinito se convirtiera en un objeto matemático y en este sentido como este se puede volver en un objeto de enseñanza a través de cursos de matemática superior, como los cursos de Teoría de Conjuntos.

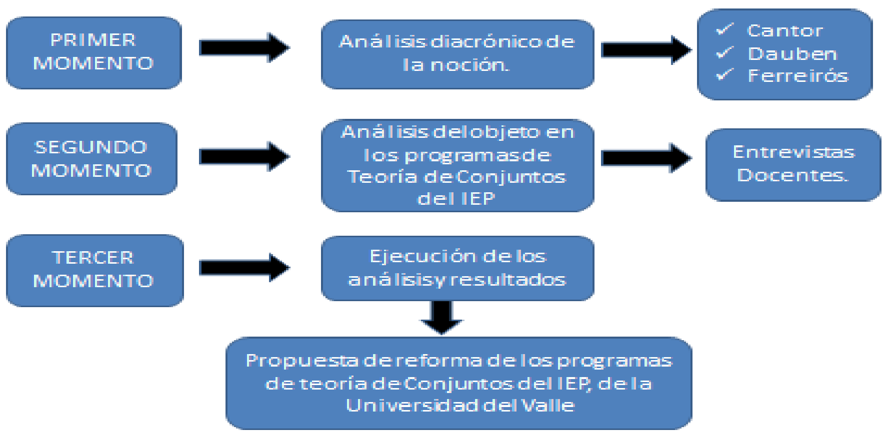
En este sentido, se realizará un recorrido teórico tomando como referente especial las obras de (Dauben, 1990), (Ferreirós, 1998), (Ferreirós, 2006), (Cantor, 1895) y (Cantor, 1897) para determinar los fundamentos matemáticos necesarios en el surgimiento del concepto. A partir de los resultados de estos análisis se estudiaran los programas de teoría de conjuntos, propuestos en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, esto con el fin de poder caracterizar si existe una estructura formal, de acuerdo a la teoría de conjuntos cantoriana, para abordar o intentar desarrollar las nociones conjuntistas en los programas de formación de docentes. Se propone también dentro de la metodología la recolección de información por medio de unas entrevistas realizadas a los docentes encargados de desarrollar estos cursos, en el IEP de la Universidad del Valle, de esta manera, se buscará realizar un trabajo monográfico a través de un análisis diacrónico del concepto, que se complementarán con estudios hermenéuticos.

Finalmente lo que se busca es ofrecer una reflexión en el marco de la Educación Matemática, observando que la representación formal y axiomática del concepto es la síntesis, pero a la vez la negación, de una ardua actividad histórica, y que por tanto su enseñanza[14] no debe obviar su accidentalidad, aunque el infinito actual se muestre como un concepto perturbador, éste es

[14]Cuando se habla de enseñanza, se están considerando el proceso de transmisión del concepto, en cursos de educación superior, como Teoría de Conjuntos, ofrecido a los estudiantes de Licenciaturas en Matemáticas de la universidad del Valle.

necesario en los procesos concernientes a las actividades de matemática avanzada y por tanto no debe escaparse su naturaleza histórica, especialmente en la enseñanza de los cursos de Teoría de Conjuntos.

Podemos decir, entonces que el plan de trabajo de esta investigación se divide en tres momentos, los cuales se han venido desarrollando durante el periodo 2011-2012, como se ilustran en el esquema:



Estos momentos se verán reflejados en los capítulos del trabajo, así el capítulo 2 corresponde al primer momento de la investigación, el capítulo 3 al segundo momento y el capítulo 4 al tercer y último momento de la investigación.

Capítulo 2.

2. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LOS ELEMENTOS NECESARIOS PARA LA CONSOLIDACIÓN DE UNA TEORÍA GENERAL DE CONJUNTOS EN GEORG CANTOR

En este capítulo se analizan algunos aspectos de las dos obras principales de Cantor los *Fundamentos* y las *Contribuciones*. Es válido afirmar que fue Cantor el que revoluciono la historia y filosofía del pensamiento matemático con su gran invención de la teoría de conjuntos, especialmente en la introducción del infinito a las matemáticas dentro de la consolidación de los números transfinitos, en este sentido se puede hablar de un antes y un después en la historia de la matemáticas, pues atreverse a enumerar y contar lo infinito represento para Cantor un gran paso arriesgado y polémico, especialmente por la vinculación y el proceso de aceptación del infinito actual.

Se debe resaltar, que dentro de los procesos de fundamentación matemática del infinito actual, como mencionamos en el capítulo I, fue Bolzano uno de los matemáticos que realizó grandes contribuciones a la conceptualización del infinito matemático, especialmente en su obra *Las Paradojas del Infinito,* la cual constituye la primera crítica directa a la concepción dominante del infinito potencial. La obra de Bolzano (1851) es la primera que se atreve a efectuar un tratamiento eminentemente matemático del infinito y donde es visto como el objeto central de un estudio, presentándose en este sentido un cambio de actitud frente a la tradición aristotélica del infinito; Bolzano no destierra el infinito actual, sino que lo retoma a pesar de su carácter paradójico, por tanto el infinito actual y sus propiedades dejan de ser contradictorias para tornarse paradójicas, él da un rechazo a las explicaciones que se dan sobre el infinito, sobre todo las que ven al infinito como cantidad variable, lo cual le permite generar una posibilidad de comparar los conjuntos infinitos.

En este sentido, Cantor se ve influenciado por la obra de Bolzano, afirmando que en esta “se encuentra una discusión correcta en muchos aspectos sobre el infinito impropio matemático” (Cantor 1883, p. 103). Aunque Cantor va más allá de las reflexiones de Bolzano, al tomar un conjunto infinito para especificar los conjuntos infinitos de puntos como un todo en un intervalo infinito, así el concepto de punto de acumulación se constituye en un soporte para la teoría de conjuntos Cantoriana. A partir de éste, Cantor definiría más adelante los conjuntos derivados; se puede decir, además, que el teorema de Bolzano-Weierstrass fue la clave para demostrar que $\mathbb{R}$ no es equipotente con $\mathbb{N}$. Con esto, Cantor se aleja de la creencia, que había perdurado durante más de veinte siglos, y que establecía la existencia de un sólo infinito inalcanzable y virtual, y en este sentido desarrolló una teoría acerca del tamaño de las colecciones infinitas y una aritmética infinita, que de alguna manera sirviera como una generalización de la aritmética ordinaria.

Así, la teoría de conjuntos de Cantor, como menciona Lavine, (1994), se generaliza de tal manera que incluye la totalidad de las matemáticas, volviéndose crucial para la filosofía de las matemáticas y las matemáticas. Además esta teoría se desarrolla a partir de la idea de que los conjuntos (las colecciones) pueden ser contados. De los estudios que realiza Cantor sobre las series trigonométricas en 1870, se evidencia un fuerte interés por los conjuntos arbitrarios de números reales, el estudio que realiza de las series trigonométricas lo conduce a esta progresión de "índices" transfinitos[15]:

$$0, 1, \ldots, \infty, \infty+1, \infty+2, \ldots, \infty.2, \ldots, \infty.3, \ldots, \infty^2, \ldots, \infty^3, \ldots, \infty^\infty, \ldots, \infty^{\infty^\infty}, \ldots$$

En este sentido los inicios de la teoría de conjuntos cantoriana, son un "intento" de desarrollar las consecuencias de la progresión en especial para los conjuntos de los números reales, así la teoría de conjuntos, es una teoría de las colecciones que pueden ser contadas utilizando los índices (los números ordinales finitos y transfinitos como él los llamo), vemos entonces que Cantor trata a sus colecciones infinitas como si fueran finitas.

2.1 La génesis de los fundamentos de la teoría de conjuntos

Cantor no era el único ni el primero en trabajar aspectos relacionados a los conjuntos. Se observa que en la década de 1870 y 1880 ya se tenían varios trabajos sobre álgebra, teoría de números y análisis, en los cuales se destacaron cuestiones conjuntistas, principalmente los trabajos de R. Dedekind, H. Weber, G. Peano, Bois-Reymond, U. Din y J. Harnack; sin embargo los trabajos de Cantor tenían un sello particular, pues el matemático buscaba aclaraciones del infinito en acto, en aspectos filosóficos y matemáticos; en este sentido se cuestiona sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, evidenciándose así que el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos estuvo fuertemente influenciada por el carácter y los intereses de quien más contribuyó a su desarrollo.

[15] Estos índices son concebidos como números que cuentan las iteraciones de una operación, específicamente de la operación de conjunto derivado de Cantor. Podemos afirmar además que Cantor da sentido a los puntos suspensivos de la manera en la que tal vez nosotros lo hacemos: asimilando las progresiones infinitas representadas por ellos a las progresiones indefinidamente grandes.

De acuerdo a los trabajos de Cantor, para el desarrollo de la teoría de conjuntos la obra clave fue los *Fundamentos*, en ella se estructura la teoría sobre la noción de infinito actual; esta incorporación del infinito actual le permitía a Cantor extender el concepto de número más allá de los niveles existentes. En la obra se encuentra una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito, resultando así una de las mayores invenciones de la imaginación matemática; parafraseando a Ferreirós (2006): los *Fundamentos* para Cantor, representan el momento de madurez y autonomía de la teoría de conjuntos transfinitos.

En los *Fundamentos* se ofrece una nueva conceptualización del infinito. Ya antiguamente se presentaron nociones filosóficas y matemáticas polémicas, con respecto al infinito, con las paradojas de Zenón y las consideraciones aristotélicas del infinito potencial y actual, especialmente con la exclusión de las matemáticas del infinito actual o en acto, pues éste tradicionalmente se identificó con Dios, o un más allá, es decir más allá de lo infinito se encontraba lo absoluto, asignándole así un carácter divino, pero con el trabajo de Cantor estas concepciones se modificarían tratando de llegar un proceso global de conceptualización del concepto.

Cantor comienza estudiando los conjuntos de puntos, el de los números racionales y el de los reales, buscando diferencias relevantes entre ambos conjuntos, en relación de que los números reales son continuos y los racionales no. En 1874, en su artículo sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos, Cantor demuestra que los números racionales pueden ser puestos en correspondencia biunívoca uno a uno con los números naturales, mientras que no puede hacerse lo mismo con los números reales, estableciendo que el conjunto de los números racionales tiene el mismo tamaño que el de los naturales, sin embargo el conjunto de los números reales es mayor que el de los números racionales. En este sentido, se dice que la teoría de conjuntos transfinitos nació hace aproximadamente 140 años, como mencionamos en el capítulo anterior el "acta de nacimiento" de la teoría de conjuntos transfinitos lleva la fecha del 7 de diciembre de 1873, con la demostración de la imposibilidad de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales.

> **Teorema (Cantor):** *El conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *no es numerable* (Cantor 1874, p.117).
>
> Suponiendo que lo fuera, existiría una sucesión que contendría todos los números reales de [0,1]: $w_1, w_2\ w_3\ldots, w_n,\ldots$ (I)
>
> Considerando un subintervalo cualquiera (α, β) de (0,1), definiremos sobre la base de la sucesión (I) un número real de (α, β) no contenido en (I). Sean α´y β´ los dos primeros números de la sujeción (I) que están dentro de (α, β), y sea α´< β´ (renombrándolos si es preciso); sean α´´y β´´ los dos primeros números de (I) que están dentro de (α´, β´), y sea α´´< β´´. Por construcción, α´´ sigue a α´ en la sucesión (I), y β´´ sigue a β´; además, α´< α´´ y β´´<β´. Empleando repetidamente el mismo procedimiento, obtendremos una secuencia de intervalos cerrados encajados [α, β], [α´, β´], [α´´, β´´],…Ahora cabe considerar dos casos:
>
> O bien el número de intervalos es finito, siendo el último $[\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}]$; en el interior de éste hay a lo sumo un número de la serie (I), de modo que podemos tomar en dicho intervalo un número **η** no contenido en (I).
>
> O bien el número de intervalos encajados es infinitamente grande. En este caso, los números α, α´, α´´,… forman una sucesión monótona creciente y acotada, que tiene un determinado limite α^{∞}. Lo mismo vale para los números β, β´, β´´,…dado que forman una sucesión monótona decreciente y acotada, siendo su límite β^{∞}. Ahora pueden distinguirse dos casos: en el primero, $\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$, como "sucede siempre con la colección *(w)* de todos los números algebraicos"; la construcción anterior es tal que el intervalo $[\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}]$ excluye al menos los 2(n-1) primeros miembros de la sucesión (I), de manera que el número $\boldsymbol{\eta}=\alpha^{\infty}=\beta^{\infty}$ no puede estar contenido en la sucesión inicial. En el segundo caso, podría ser que $\alpha^{\infty}<\beta^{\infty}$, y entonces ningún número **η** del intervalo $[\alpha^{\infty}\ldots\beta^{\infty}]$ está contenido en la sucesión (I). (Ferreiros, 1991, pp. 211-212).

La anterior es una demostración demasiado dispendiosa que más tarde será reemplazada por otra más sencilla, la famosa demostración de la diagonal o método de diagonalización:

Supongamos que los números reales en el intervalo (0, 1) tienen la misma potencia que los números naturales. Eso significa que existe una función biyectiva entre los naturales y los reales, y por lo tanto, la totalidad de los reales del intervalo en cuestión se pueden listar en una sucesión de la forma:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$$

Dado que cada uno de estos números están ubicados en el intervalo (0,1) quiere decir que su expansión decimal consta de la parte entera igual a cero, por lo cual se los puede representar de la siguiente manera:

$$r_1 = 0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$$

$$r_2 = 0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$$

$$r_3 = 0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots a_{3n} \ldots$$

.

.

.

$$r_{\mathrm{n}} = 0.a_{\mathrm{n}1}\ a_{\mathrm{n}2}\ a_{\mathrm{n}3} \ldots a_{\mathrm{n}n} \ldots$$

.

.

.

Se supone que en la lista se encuentran la totalidad de los reales del intervalo (0, 1). Sin embargo, formemos el número real,

$$b = 0.b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_{1n} \ldots$$

tal que, $b_i \neq a_{ii}$, para todo i. Se tiene que, por definición, $b_i \neq r_i$, para todo i, lo cual contradice el hecho de que en la lista se encontraban “todos” los reales del intervalo (0, 1). (Recalde, 2005, p. 10).

Vemos que Cantor empieza a enfrentarse a los primeros inconvenientes para hablar de una caracterización de los conjuntos infinitos, pues descubre, a partir de la no-enumerabilidad de $\mathbb{R}$, que hay distintos tipos de infinito, es decir no hay un único infinito. Además, la noción de infinito, lejos de lo que pensara la tradición aristotélica, deja de ser una idea vaga en virtud de los límites de la representación mental. Con este resultado de Cantor se abre paso a la formalización de la idea desde un punto de vista matemático; Cantor establece que hay diversos "tamaños" u "ordenes" del infinito, diferentes cardinalidades[16] que son además infinitas (Ferreirós, 1991, p. 212). La siguiente cuestión investigada era ver si es posible poner los puntos de un plano en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta.

En 1878 Cantor publicó un resultado donde muestra que es posible poner los puntos de un plano, en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta, anunciando también que todo conjunto infinito de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca, o con los números naturales o con los reales, sin posibilidades intermedias; sin embargo esto no lo logró demostrar de manera adecuada, convirtiéndose en algo inalcanzable para Cantor. El problema al que se está enfrentando Cantor es el problema de la Hipótesis del continuo (H.C), el cual enunció por primera vez de la siguiente manera: "cualquier conjunto infinito de números reales debe tener o la potencia de los números naturales o la potencia de $\mathbb{R}$" (Cantor, 1978). Cantor no pudo demostrar este problema, porque era imposible hacerlo, con las concepciones que él manejaba en ese momento. Años después se logró demostrar que ésta proposición era independiente de los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel.

Dentro del proceso de caracterización Cantor llama al infinito actual *infinito propio*, un infinito que era completamente determinado y que era justificado en trabajos de función analítica de variable compleja:

[16] En (Ferreirós, 2006, p. 13): Se dice que dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad, es decir son equipotentes, si y sólo si existe una aplicación f de A en B que es biyectiva (una correspondencia uno a uno entre los elementos de A y B).

> (…) imaginar, en el plano que representa la variable compleja, un único punto situado en el infinito (esto es, un punto infinitamente distante pero definido) y examinar el comportamiento de la función en el entorno de ese punto, igual que en el entorno de otro punto cualquiera. (Ferreirós, 2006, p. 86).

De esta manera, si se piensa el infinito situado en un punto completamente determinado, da paso a la aparición y justificación del infinito desde una mirada matemática, desligándolo un poco de la justificación filosófica, pues en el entorno del punto distante, la función está mostrando los mismos comportamientos que en otro punto ubicado dentro de la región finita. Aunque si se piensa y muestra el infinito como una cantidad variable y finita que crecía o decrecía más allá de todos los límites, pero que continua siendo finita, este infinito será distinto al *infinito propio*, y se denomina *infinito impropio*, así se puede hablar matemáticamente de dos formas de ver y caracterizar el infinito

Dentro del desarrollo de la teoría cantoriana, se pueden señalar tres momentos claves sobre el perfeccionamiento de la misma, en un primer momento se centró en el estudio de las potencias infinitas, hasta formular la famosa hipótesis del continuo (H.C), posteriormente se dedica a una consolidación de la teoría de conjuntos derivados conectados éstos con la noción de potencia, básicamente como un puente o medio de estudio del continuo y sus subconjuntos, por esta vía desarrolla la idea de los números ordinales transfinitos desplazando su interés a una teoría de conjuntos bien ordenados.

2.2 Conjuntos derivados y cardinalidad

Durante el periodo de 1878 Cantor se centró en estudios sobre los procesos de derivación, estos estudios le permiten desarrollar la teoría topológica de conjuntos de puntos, de esta manera presenta a la comunidad matemática la idea de derivados de orden infinito, para caracterizar los conjuntos derivados, introduce "símbolos de infinitud"[17] que son el germen de los números ordinales transfinitos y define los conjuntos derivados de orden superior. Para introducir los nuevos conjuntos derivados él señala que los sucesivos derivados de un conjunto P están unos incluidos en otros:… $P^{(n)} \subseteq \dots \subseteq P'' \subseteq P'$

Así el proceso de derivación va eliminando puntos pero no añade puntos que no estuvieran contenidos en P' (Ferreirós, 1991, p. 245). El primer derivado infinito se define como la intersección de derivados de orden finito:

$$P^{(\infty)} = \cap \left(P', P'' \dots P^{(n)} \dots\right) = \cap \left(P^{(n)}, P^{(n+1)} \dots\right)$$

El proceso de derivación continuará con $P^{(\omega+1)} \dots P^{(\omega+n)} \dots$, y como $P^{(\omega)}$ tiene también un derivado de orden ω, se designa con $P^{(\omega 2)}$; prosiguiendo se logra alcanzar todos los derivados cuyo orden sea múltiplo de ω, así como los de orden ω^2, ω^3,…, $n_0\, \omega^m + n_1\, \omega^{m-1} + \dots + n^m$,…,$\omega^\omega$ y así sucesivamente[18]

[17]En el proceso de caracterización de los conjuntos derivados, tenían como base los conjuntos de puntos y sus propiedades, y los números transfinitos aparecían con meros símbolos, sin carácter objetivo, este es el motivo de que Cantor se refiriera a ellos con el nombre de "símbolos de infinitud". (Ferreirós, 1991, p. 245).

[18] Cantor, citado en (Ferreirós, 1991, p. 245): "Vemos aquí una generación dialéctica de conceptos, que lleva siempre más allá, y que al hacerlo permanece libre de cualquier arbitrariedad, necesaria y consecuente en si misma (Cantor 1879/84, p.148)".

De ese proceso podemos ver que unos derivados se definen de la forma habitual $P^{(n+1)} = (P)^{(n)\prime}$) y otros constituyen la intersección de una infinidad de conjuntos. Estos dos principios serán el antecedente de los principios empleados por Cantor para definir los ordinales transfinitos.

Sin embargo, las discusiones clásicas en torno al infinito no se limitan a la cuestión de la aceptabilidad del concepto, ni a si se puede concebir un número infinito. Hay que tener presente que la aceptación de esta noción pone en juego la infinitud de Dios o cuestiones sobre si el mundo está compuesto de infinitas partes, y si es infinito en su extensión espacial; en otras palabras, cuestiones de orden filosófico y metafísico, como se mencionó en el capítulo I. Estos problemas y otros puramente matemáticos, procedían del intento de conceptuar de manera inexorable la noción de continuo, a la cual Cantor logra ofrecer una argumentación sumamente rigurosa y aclaratoria en relación al infinito.

La identificación tradicional del infinito con Dios sugería que, al someter a consideración matemática el infinito actual, se estaría tratando de "determinar" lo divino mediante nuestros conceptos. Y los teólogos medievales, cristianos o no, habían afirmado que a Dios sólo cabe representarlo mediante atributos negativos (diciendo por ejemplo que es infinito, intemporal, o que su poder no conoce ningún límite –la omnipresencia se entiende también como un predicado negativo). Caracterizar a Dios de manera positiva, digamos, asignándole un número transfinito a su poder, sería una terrible herejía (Ferreirós 2006, p. 33). Sin embargo Cantor, señala que el dominio transfinito no agota el infinito actual, por lo cual para él no debe identificarse el transfinito con lo absoluto:

> Los transfinitos son más parecidos a lo infinito, en la medida en que admiten plena determinación y son caracterizables por el pensamiento humano. Lo absoluto elude en cambio toda determinación: lo divino puede a lo sumo reconocerse, pero nunca conocerse; lo absoluto está estrictamente más allá de lo transfinito Cantor, citado en (Ferreirós, 2006, p. 34).

Se nota así, que para Cantor los conjuntos transfinitos están representados en la naturaleza física y en la mental, a diferencia de lo absolutamente infinito que no es posible, determinable o conocible en toda su plenitud. El infinito absoluto es el absoluto, por definición, lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. Es el grado máximo de independencia, autonomía y completitud. En la categoría de infinito absoluto o absoluto entran Dios, el último ordinal y la clase de todos los conjuntos. “Para Cantor, desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la búsqueda de Dios”. (Ortiz, 1994, p. 67).

Por otra parte, Cantor señaló que los números transfinitos nos llevan más y más lejos, indefinidamente, conduciéndonos a cardinalidades infinitas cada vez mayores. No hay un máximo en la progresión de los ordinales, ni en la de las potencias, por lo que debe decirse que la “totalidad” de los números transfinitos (y de las potencias) son de carácter absolutamente infinito. De allí que se pueda inducir que, para Cantor, tanto el infinito actual de la matemática como el infinito físico actual, constituían lo transfinito. A diferencia del infinito absoluto, inalcanzable, existe una infinidad de infinitos, los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto, relacionados con lo finito. Por eso se puede ver, al infinito absoluto como una aproximación de la naturaleza de Dios pero, inversamente, la indeterminabilidad de Dios habrá de aplicarse también a esas totalidades absolutamente infinitas: “las colecciones de “todos” los ordinales transfinitos y “todas” las potencias (o cardinales transfinitos), ya no son comprensibles para el pensamiento matemático” (Ferreirós, 2006, p. 34).2

2.3 Los transfinitos de Cantor

Para Cantor incorporar los números transfinitos en la matemática era tan legítimo como fue la incorporación de los números irracionales, dado que ambos son definidos en función de conjuntos infinitos y por procedimientos similares, por lo tanto, ontológicamente, su estatus era el mismo.

Durante los años de 1879 a 1897, Cantor determina los elementos conceptuales que le permiten instaurar los cardinales y ordinales transfinitos. Apoyándose en el teorema de Bolzano-Weierstrass, clasifica los conjuntos infinitos de puntos en intervalos acotados, en este sentido el concepto de punto de acumulación constituye el soporte de la teoría de conjuntos, a partir de este concepto Cantor define los conjuntos derivados:

1. Se denomina P´ el conjunto de puntos de acumulación de P o primer derivado
2. Se denomina P´´ el conjunto de puntos de acumulación de P´ o segundo derivado; y así sucesivamente…
3. P^n es el conjunto de puntos de acumulación de P^{n+1} o enésimo derivado.

Posteriormente Cantor define lo que son los conjuntos de primera especie, como aquellos conjuntos para los cuales existe un *n*, talque $P^n = \emptyset$, y cuando se daba que $P^n \neq \emptyset$, los llamaba de segunda especie.

La aparición de los números transfinitos, se da por primera vez, en un corto artículo de 1880 (Recalde, 2004), donde Cantor enunciaba el trasfondo de los números infinitos a partir de los conjuntos derivados de segunda especie. Citando a Cantor en (Recalde, 2004) se tiene:

> [...] una generación dialéctica de conceptos que continúa siempre adelante, y está así libre de cualquier ambigüedad.

Esa generación dialéctica partía de la propiedad de los conjuntos P de segunda especie mediante el siguiente planteamiento:
Si $P^n \neq \emptyset$, para todo n, se puede definir, $P^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$. Si $P^\infty \neq \emptyset$ es infinito se puede definir la cadena:

$$P^\infty, P^{\infty+1}, P^{\infty+2}, \dots, P^{\infty+\infty}$$

Cantor, comprendió más adelante que la designación de los conjuntos a partir de P^∞ exigía la ampliación el universo de los números de contar más allá de los naturales. En las *Contribuciones* Cantor, definió los números transfinitos, y estableció que la introducción de estos nuevos números transfinitos, se realizara con respeto a las nuevas colecciones instauradas, conservándose la coherencia entre los nuevos números y los que se tenían anteriormente, así logra justificar la incorporación de los ordinales transfinitos, además manifiesta que:

La totalidad de los *números cardinales finitos* v nos proporciona el ejemplo más cercano de un conjunto transfinito; al número cardinal asociado a él lo llamamos 'Álef cero', en símbolos $\aleph_0$, así que establecemos

$$\aleph_0 = \{\bar{\bar{v}}\}$$

Que $\aleph_0$ es un número *transfinito*, es decir, que no es igual a *ningún* número *finito* μ, se sigue del hecho simple, de que si se añade un nuevo elemento e_0 al conjunto $\{v\}$, el conjunto unión ($\{v\}$, e_0) es equivalente al que lo originó $\{v\}$. Porque se puede pensar una relación recíproca unívoca entre ambos, donde el elemento e_0 se asocia al elemento 1 del segundo y el elemento v del primero al elemento $v + 1$ del segundo. Entonces $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ [...]
El número $\aleph_0$ *es mayor que cualquier número finito* μ: $\aleph_0 > \mu$.

Esto se sigue, considerando, de que $\mu = \left(\overline{\overline{1,2,3,\dots,\mu}}\right)$, ningún subconjunto de (1, 2, 3,. . .μ) es equivalente al conjunto $\{v\}$ y (1,2, 3,. . ., μ) es él mismo un subconjunto de $\{v\}$.
Por otro lado $\aleph_0$ es *el menor número cardinal transfinito*. Si α es un número cardinal transfinito distinto de $\aleph_0$, entonces se cumple $\aleph_0 < \alpha$
Esto se basa en el siguiente teorema:

A. '*Todo conjunto transfinito T tiene un subconjunto con número cardinal* $\aleph_0$'.

Demostración: Si se ha eliminado, mediante alguna regla, una cantidad finita de elementos $t_1, t_2, \dots, t_{v-1}$ de T, siempre queda la posibilidad de eliminar otro elemento tv. El conjunto $\{t.\ v\text{-}1\}$, donde v representa un número cardinal finito arbitrario, es un subconjunto de T con número cardinal $\aleph_0$, pues $\{\overline{\overline{tv}}\}\ \{\bar{\bar{v}}\}$. (Cantor, 1895, p.426).

En la demostración del teorema A interviene una forma débil del axioma de elección; específicamente, el axioma de elección numerable, según el cual, cualquier familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección. Tal axioma implica que cualquier conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable. De acuerdo al pensamiento de Cantor quien escribía que conjunto es: *"todo Muchos que puede ser pensado como Uno"* (Ferreirós, 2006, p. 155), se puede entender entonces, que un conjunto transfinito determinado por un *infinito propio*, es una composición entre lo ilimitado y lo limitado, en el sentido de que son infinitos y están determinados y definidos. Ahora bien, es pertinente indagar la manera como estos conjuntos se encuentran definidos de acuerdo a la teoría cantoriana. Cantor define los números infinitos a través de dos "principios de generación"[19] los cuales permiten proseguir indefinidamente el proceso de formación de números hacia lo suprafinito[20] llegando a cifras de nuevos números como $\omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n$, ante estos dos principios de generación se opone un tercer principio, el cual denomino "principio de restricción" o limitación, dados estos tres principios se pueden consolidar los transfinitos de Cantor.

En el *primer principio de generación* se da paso al número siguiente o sucesor, en este sentido se está garantizando que la existencia a través del proceso de creación de un sucesor es la misma que interviene en la producción de la serie de los números naturales, que otorga un sucesor (α+1) para todo α. Lo anterior recuerda la definición de Euclides del número como colección de unidades. El *segundo principio de generación* es un poco más complejo surge de una sucesión de números ordinales sin elemento mayor, en la cual se permite crear un nuevo número que será considerado como límite de aquellos números y será definido como el número inmediatamente mayor a todos aquellos.

[19] Hay que tener en cuenta que los dos primeros principios son diferentes en el orden lógico, pues el primero es eminentemente constructivo, pero el segundo no: establece la existencia de un número mayor que cualquiera de los que se hayan construido vía primer principio.

[20] Cantor presenta los nuevos números de una forma puramente constructiva, o más bien puramente intuitiva: no explicitaba de ninguna manera los supuestos implicados en la nueva noción, limitándose a señalar dos principios que permiten la construcción mental de los ordinales transfinitos. (Ferreirós, 1991, p. 260).

De acuerdo con el principio de generación, que da el sucesor (α+1) para todo α, y tras todos estos, por el segundo principio, viene ω*2:

$$\omega*2\ldots., \omega*2+n,\ldots \omega*3,\ldots \omega*n\ldots.$$

Y tras todos los ω*n+m el proceso continua

$$\omega^2,\ldots \omega^2+ \omega*n+m,\ldots \omega^3, \omega^n+ \omega^{n-1}*m,+\ldots+, r,\ldots \omega^\omega,\ldots,$$

Se prosigue con números como ω elevado a ω omega veces, y mucho más allá, *ad suprafinitum* y *ad absolutum* (Ferreirós, 2006, p. 41). Se nota así que el primer principio garantiza la existencia de un sucesor, y el segundo garantiza que dada una sucesión cualquiera de números ordinales, que crece sin tener un máximo, existe un nuevo número ordinal que es inmediatamente el siguiente de la sucesión. Entonces, los dos principios justifican la introducción de los números transfinitos, que ya habían aparecido, pero como meros índices de procesos de derivación: ω, $\omega 2$,…, ω^2,…, ω^ω,…, por el segundo, y por el primero $\omega+1$, $\omega 2+n$, $n_0\omega^m + n_1\omega^{m-1} + n_{m-1}\omega + n_m$.

Luego, al menos el proceso de formalización de los ordinales, mediante los dos “principios de generación” tiene cierta justificación en la mentalidad matemática clásica. Pero de esto, se desprende un proceso que parece interminable y en el cual parece que se corre el peligro de perderse en lo ilimitado. Cantor nos muestra que tomada una sucesión cualquiera que crece sin un máximo, se puede crear un número ordinal que será el siguiente de la sucesión. Él reconoce la fuerza de estos dos principios y más si se trabaja con ellos de manera combinada por lo cual se hace necesario tener un tercer principio llamado *principio de restricción,* que permite establecer, el conjunto de ordinales a los que Cantor llama clases numéricas, las cuales admiten definir cardinalidades sucesivas, por las limitaciones impuestas.

2.3.1 La Noción de número Cardinal o Potencia

El *principio de restricción* nace a través del concepto de potencia. Como se observa en una carta del 5 de noviembre de 1882 a Dedekind, tomada de (Ferreirós, 2006, p. 226):

> (…) Si aplico a ω la adición de una unidad, igual que antes a *v*, obtengo un nuevo número ω+1, el cual expresa que primero se ha puesto ω, *luego* se ha añadido la unidad y se ha reunido con ω en un nuevo número. Llamo a la transición del nuevo número *v* o ω al *inmediatamente* siguiente el *primer momento de generación*; por el contrario, la transición de un conjunto sucesivo de números enteros, que no tiene ningún máximo, al inmediatamente mayor que todos ellos, la llamo el *segundo* momento de generación.
> La formación del número ω sucede pues gracias al segundo momento de generación, la del número ω+1 gracias al primero.
> Si ahora se aplica repetidamente ambos momentos de generación, se llega a una extensión de nuestra serie numérica que avanza en sucesión determinada: 1, 2, 3,… *v*,… ω, ω+1,…, 2ω, 2ω+1,…, μω+*v*,…λ $\omega^2 + \mu\, \omega + v$,…, $\sigma\, \omega^k + \rho\omega^{k-1} \ldots + \mu\omega + v$,…etc. etc. La primera impresión que esta sucesión causara en Ud. Será que uno no ve como podría llegar al continuarla a algún tipo de clausura, cosa que sin embargo sería necesaria si es que aquello debe suministrarnos una *nueva* potencia *determinada*, y concretamente la potencia de la *segunda* clase, inmediatamente siguiente a la potencia de la primera clase.

Se tiene entonces, que para Cantor el concepto de potencia es la generalización del número de elementos de un conjunto, o número cardinal, en este sentido consideraba que a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, el concepto de potencia fue quizás uno de los conceptos más importantes introducidos por Cantor dentro del proceso de caracterización de conjuntos infinitos, este concepto viene a solucionar el problema de comparar conjuntos con el mismo número de elementos. El matemático toma de Steiner el término potencia, quien la empleaba en referencia a coordinaciones proyectivas biunívocas. Cantor define esta noción de la siguiente manera:

> Si dos variedades bien definidas M y N se pueden coordinar entre sí unívoca y completamente, elemento a elemento (lo que, si es posible de una manera, siempre puede suceder de muchas otras), permítase que empleemos en lo que sigue la expresión de que estas variedades tienen igual potencia, o también que son equivalentes. (Ferreirós, 1991, p. 236).

A partir de esta definición, Cantor presentaba resultados elementales que más adelante se convertirían en teoremas. Por ejemplo, afirmaba que si M y N no tienen igual potencia, entonces M es equivalente a una parte de N -la potencia de M es menor que la de N- o N es equivalente a una parte de M -la potencia de M es mayor que la de N-. De allí pasaba a considerar una serie de ejemplos de potencias; en primer lugar las potencias de variedades finitas, que coinciden con el número de sus elementos, esto le permitía establecer una propiedad un poco intuitiva de las potencias infinitas, que tradicionalmente se había considerado paradójica[21]: aunque una parte de una variedad finita M tiene siempre menor potencia que M, “esta relación desaparece totalmente en las variedades infinitas, es decir, las que constan de una variedad infinita de elementos”. (Ferreirós, 1991, p. 236).

Tomando el principio de restricción, el cual permite instaurar las clases numéricas, se puede decir que el concepto fundamental para lograr la diferenciación de las clases, es el de potencia, cuando establece un cierto tipo de cotas que permiten diferenciar las distintas clases, al respecto escribe:

> Definimos por tanto la segunda clase de números (II) como la colección de todos los números α que se pueden construir con la ayuda de los dos principios de generación y que se suceden en

[21] Aquí se puede ver que desaparece la noción común quinta de Euclides: *El todo no siempre es mayor que la parte*.

> sucesión determinada: ω, ω+1,…, $v_0\ \omega^{\mu}+v_1\ \omega^{\mu-1}+\ldots+v_{\mu}$,…, ω^{ω},..., α,…, la cual está sometida a la condición de que todos los números que preceden al número α, de 1 en adelante, forman un conjunto de la potencia de la clase numérica (I).

Se ve como el concepto fundamental para diferenciar las clases es el de potencia. En la carta que envía el 5 de noviembre de 1882 a Dedekind, surge la necesidad del principio de limitación por medio del concepto de potencia, además trata de darle un tratamiento de números reales de segunda especie a los objetos ω, ω+1,…, porque con ellos se podía establecer una extensión de los números infinitos, a pesar de que estos números no cumplían con las propiedades de los números finitos. Es importante considerar que el hecho de que ω y ω+1 sean dos números ordinales distintos pero con la misma cardinalidad, lo que conduce a una diferencia importante entre números finitos y transfinitos. En los finitos no hay diferencia entre su ordinal y su cardinal, en los infinitos sí.

En este sentido, Cantor no solo probó que las potencias de las clases de números I y II son diferentes, sino que la potencia de los números de clase II es precisamente la que sigue a la potencia de los números de clase I. la demostración de que las potencias de (I) y (II) se siguen inmediatamente una a la otra, sin que exista ninguna otra potencia entre ellas, tomada de (Ferreirós, 2006, p.130), expuesta de la siguiente manera:

> Sea Ω el primer número de la tercera clase numérica (III); todos los números α´del conjunto (α´) son entonces menores que Ω, puesto que aquel está incluido en (II).
> Pensemos ahora en los números α´ordenados según su magnitud; sea α_{ω} el más pequeño de ellos, $\alpha_{\omega+1}$ el siguiente en magnitud, y así sucesivamente. Así se obtiene el conjunto (α´) en la forma de un conjunto "bien ordenado" α_{β}, donde β recorre números de nuestra sucesión numérica ampliada a partir de ω; evidentemente β se mantiene siempre menor o igual que α_{β} y puesto que $\alpha_{\beta} < \Omega$, también $\beta < \Omega$. El número β no puede en consecuencia sobrepasar la clase numérica (II), sino que permanece dentro del dominio de ésta. De ahí que solo puedan suceder tres casos: o bien β se mantiene por debajo de un número especificable de la sucesión ω+υ, y entonces (α´) es un conjunto

> finito, o β adopta todos los valores de la sucesión $\omega+\upsilon$, pero se mantiene por debajo de un número especificable de la sucesión (II), y entonces (α') es obviamente un conjunto de la *primera* potencia; o, en tercer lugar, β toma también valores arbitrariamente grandes den (II), y entonces β recorre todos los números de (II); en este último caso la colección (α_β), esto es, el conjunto (α'), tiene evidentemente la potencia (II); como queríamos demostrar.

Los números de la primera clase tenían la potencia de $\mathbb{N}$ ($\aleph_0$) y los de la segunda la de $\aleph_1$, y sucesivamente, en este sentido, los esfuerzos de Cantor se centran en establecer cuál es la hipótesis del continuo, supone que la hipótesis del continuo era equivalente a la de la segunda clase (sin embargo esto no lo logró demostrar). De esta manera, el tercer principio instaura el enlace entre ordinales transfinitos y cardinales: del mismo modo que el cardinal de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$, es decir, por él se establecen conjuntos ordinales a los que Cantor llama clases numéricas, los cuales permiten definir una serie de cardinalidades sucesivas. Esto se realiza mediante la condición de cardinalidad.

Es así como los números de la primera clase son todos aquellos tales que el conjunto de sus antecesores es finito, como los naturales y la potencia de esa primera clase es la primera potencia transfinita, aleph cero $\aleph_0$. Los números de la segunda clase son todos los que tiene un conjunto de antecesores enumerable de la potencia $\aleph_0$, éste es el caso de ω, ω^2, etc. Y la potencia o cardinalidad de la segunda clase en su totalidad es la segunda potencia $\aleph_1$. La tercera clase es el conjunto de los ordinales cuyos antecesores forman un conjunto de la potencia $\aleph_1$ y esta clase tiene la potencia $\aleph_2$, y así sucesivamente. Estas denominaciones están justificadas porque puede mostrarse que $\aleph_1$ es la potencia inmediatamente siguiente a $\aleph_0$. (Ferreirós, 1991, p. 261).

A continuación de las potencias finitas, viene la de menor potencia infinita, que es la de $\mathbb{N}$. Sin embargo, el concepto general de potencia o cardinalidad de un conjunto sólo queda definido en 1878, en un artículo que demostraba la existencia de correspondencias biunívocas entre $\mathbb{R}$ y cualquier espacio euclideo $\mathbb{R}^n$. De esta manera, es que llega a concebir infinitos como un todo, y demuestra que hay infinitos más grandes que otros. También establece que los principales conjuntos infinitos conocidos tenían sólo dos potencias: o eran equipotentes a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{R}$. Sin embargo, quedaban algunas cuestiones abiertas ¿existían potencias intermedias?, ¿existían potencias mayores? Los esfuerzos de Cantor se centraron en adelante en responder la pregunta ¿Cuál es la potencia del continuo? Se verá cómo, con la idea de los ordinales transfinitos, Cantor intenta encontrar respuestas a algunas de estas cuestiones, pues la pregunta en cuanto a la potencia del continuo no se podrá determinar, como mencionamos anteriormente.

2.3.2 Órdenes Infinitos

En 1879 Cantor definió que dos conjuntos son de la misma potencia si pueden ser puestos en correspondencia biunívoca. Destaco que el concepto generaliza al de número entero, y que la potencia puede ser considerada “como un atributo de cualquier colección bien definida, cualquiera que sea el carácter de sus elementos”. En 1880 publicó por primera vez sus símbolos transfinitos para la iteración de conjuntos derivados: $\infty^{\infty^3} + 1$, etc. Al respecto decía: “Vemos aquí una generación dialéctica de conceptos, la cual siempre puede continuar más y más lejos, por lo que está libre de cualquier arbitrariedad” (Cantor, 1895).

Hacia el año de 1882, Cantor para separar sus números ordinales transfinitos de la noción de incremento sin límite – simbolizada por ∞ en el análisis- comenzó a utilizar el símbolo ωen vez de ∞. Posteriormente introduce lo que iba a convertirse en la distinción entre los números cardinales y los ordinales. Los conjuntos *(a_1, $a_{2,}$…) y (b_2, $b_{3,}$…, b_1)* tienen la misma potencia o cardinalidad, pero sus numeraciones, sus órdenes, son diferentes.

El primero de estos conjuntos tiene orden ω, mientras que el segundo tiene orden $\omega + 1$; el mismo conjunto puede ser numerado o contado de más de una manera. Considérese por ejemplo *(a_1, $a_{2,}$…)* y *(a_2, $a_{3,}$…a_1)*. Si un conjunto es finito solo se le puede dar un orden, aun cuando se puede decidir que el elemento del conjunto ocurre en qué punto del orden, de manera que coinciden los números ordinales y los cardinales finitos. Cantor definió las operaciones de adición y multiplicación en los números ordinales, y esto forma parte de la justificación de considerarlos *números* (Lavine, 1994).

En los *Fundamentos* Cantor, declaró por primera vez que existen muchas magnitudes infinitas: mostro como producir un conjunto de potencia mayor que los números naturales, es decir el conjunto de todos los números ordinales de la potencia de los números naturales. La demostración que ofreció es una clara generalización de la que utilizó para demostrar que existen más números reales que números racionales. Denominó (I) a la potencia de los números naturales y (II) a la nueva potencia, la potencia (III) es la potencia del conjunto de todos los números ordinales de la potencia (II) y así sucesivamente (Lavine, 1994).

La demostración de que las potencias son distintas no proporciona vía alguna para hacer contacto con la potencia de los números reales. Hasta donde Cantor sabía todas las potencias que había construido eran más pequeñas que las de los números reales, e incluso totalmente incomparables a las de los números reales. Cantor hizo una suposición inicial en los

Fundamentos, la cual garantiza que las nuevas potencias fueran comparables con las de los números reales. De acuerdo con Cantor, esto aseguraba que la potencia de los números reales pudiera ser menor, igual o mayor que la de cada una de las nuevas potencias, pero no dijo cual, quizás porque no se sentía plenamente seguro de su nuevo supuesto. De hecho, en cierto momento a Cantor le preocupó que la potencia del continuo no fuera comparable con ninguna de las potencias infinitas (Hallett, 1984, pp.42, 73, 76-77).

2.4 Conjunto bien ordenado[22]

Antes de caracterizar los conjuntos bien ordenados, Cantor realiza estudios sobre los tipos de orden de los conjuntos simplemente ordenados, en este sentido en las *Contribuciones* denomina a un conjunto M *"simplemente ordenado"* cuando entre sus elementos m se rige un determinado orden jerárquico, en el cual de cada dos elementos m_1 y m_2, toma uno el rango inferior y el otro el rango superior. En este sentido podemos ver, que la noción actual de conjunto totalmente, o linealmente ordenado como un conjunto M dotado de una relación binaria $\leq$ reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa (para cada $x, y \in M, x \leq y \; o \; y \leq x$) es equivalente a la de Cantor.

Uno de los hechos cruciales y determinantes para la teoría de Cantor, era que todo conjunto pudiera ser bien ordenado, como resaltaba en los *Fundamentos*, de sus grandes logros se tiene

[22] Se entiende por conjunto bien ordenado a todo conjunto bien definido cuyos elementos están ligados entre sí, por sucesiones determinadas y precisas, de acuerdo con la cual hay un primer elemento del conjunto, y a cada elemento le sigue otro, de igual manera a todo conjunto arbitrario finito o infinito de elementos le corresponderá un determinado elemento inmediatamente siguiente a todos ellos en la sucesión. Adaptado de (Cantor, 1883, p. 168).

que los ordinales transfinitos daban lugar a la noción de número ordinal de elementos de una variedad finita bien ordenada, de esta manera el concepto de conjunto bien ordenado aparece como fundamental para toda la teoría de conjuntos , en este sentido el matemático se propone justificar verdaderamente la introducción de los ordinales transfinitos como verdaderos números, Cantor plantea tres argumentos, (Ferreirós, 2006, p. 47):

> 1°) entre ellos pueden definirse operaciones aritméticas, las cuales siguen reglas análogas a las del álgebra habitual, 2°) son susceptibles de una interpretación perfectamente natural e interesante, tiene una referencia clara en términos de conjuntos infinitos bien ordenados, y 3°) es posible extender la teoría de números a este nuevo dominio.

De estos argumentos podemos decir, que cada ordinal transfinito representa el ordenamiento de los elementos de un conjunto bien ordenado, es decir de un conjunto A ordenado de modo que tanto A como cualquiera de sus subconjuntos tienen un primer elemento, lo que significa que los elementos están articulados entre sí por una sucesión determinada con precisión, de acuerdo con la cual hay un primer elemento, y a cada elemento, le sigue otro elemento, además todo subconjunto arbitrario de elementos finito o infinito le corresponde un elemento determinado que será el sucesor inmediato a todos ellos[23]. Esto es fundamental en la medida que Cantor años más adelante, abandona los principios de generación, y solo toma como punto de partida los conjuntos bien ordenados, en el libro 12 de las *Contribuciones* (Cantor, 1892, p. 420) define formalmente los conjuntos bien ordenados como:

> "*Bien ordenado*" llamamos a un conjunto simplemente ordenado, cuando sus elementos *f crecen en una sucesión determinada* a partir de un menor elemento f_1, de tal forma que se satisfacen las dos condiciones siguientes:
> I. "*Existe en F un elemento jerárquicamente menor* f_1."

[23] Dos conjuntos bien ordenados tienen igual *enumeración* cuando hay una coordinación biunívoca entre ellos, el término enumeración se emplea como traducción a la expresión empleada por Cantor: *Anzahl*, que hace alusión al número ordinal finito o transfinito de un conjunto bien ordenado.

II. “*Si F' es un subconjunto de F y F tiene uno o más elementos de mayor jerarquía que todos los elementos de F', entonces existe un elemento f ' en F, que es el menor que sucede a todos los elementos de F', de tal suerte que no existe un elemento en F tal que, según el orden, esté entre F' y f '.*”

De esta manera se tiene, que un conjunto bien ordenado según el trabajo de Cantor de 1883, es un conjunto bien definido en el que los elementos están relacionados entre sí mediante una sucesión determinada dada, tal que (i) hay un primer elemento del conjunto; (ii) cualquier elemento singular (a condición de que no sea el último de la sucesión) es seguido por otro elemento determinado; y (iii) para cualquier conjunto de elementos finito o infinito deseado existe un elemento determinado que es su sucesor inmediato en la sucesión (salvo que no exista absolutamente nada en la sucesión que los siga a todos ellos). En este sentido como se mencionó anteriormente el concepto de conjunto bien ordenado que usamos actualmente es equivalente al definido por Georg Cantor.

De otro lado, como se había mencionado antes, los dos principios de generación y el principio de limitación, constituyen un intento para caracterizar el proceso que generó los símbolos transfinitos, y que por otra parte, según (Lavine, 1994), la noción de buen ordenamiento aísla los rasgos clave de la sucesión generada utilizando los dos principios. Cantor consideró al proceso con el que a un conjunto cualquiera se le da la forma de conjunto bien ordenado, como una manera de “contar” los elementos del conjunto, en este sentido al contar un conjunto se produce una buena ordenación en él, y así mismo si un conjunto está bien ordenado se puede “contar” siguiendo el buen orden, por ende los números transfinitos son aquellos que pueden ser contados es decir aquellos que pueden ser numerados por un ordinal o que están bien ordenados.

Ahora bien, Cantor nos presenta otro nuevo concepto el de *enumeración*[24], cuando nos manifiesta que dos conjuntos "bien ordenados" tiene la misma *enumeración* (con respecto a las sucesiones dadas) cuando es posible una coordinación biunívoca entre dos elementos cualesquiera de un conjunto y los correspondientes elementos de otro conjunto, en ese sentido se deduce que los dos conjuntos bien ordenados son del mismo tipo, entiéndase del mismo tipo (o del mismo número) a aquellos conjuntos bien ordenados que permiten relacionar entre sí sus elementos biunívocamente, se entiende por número el signo o la noción para un tipo determinado de conjunto bien ordenado.

Es importante considerar como algo esencial del concepto del buen orden, la manera simple como se pueden obtener las operaciones fundamentales de los números enteros ya sean estos finitos o infinitos determinados, como se presenta a continuación:

> Sean dados por de pronto dos conjuntos *bien ordenados* M y M_1 cuyas enumeraciones correspondan a los números α y β, entonces $M+M_1$ es también un conjunto *bien ordenado*, el cual surge si ponemos el primero el conjunto M y a continuación de él el conjunto M_1 y lo unimos con aquél. Al conjunto $M+M_1$ le corresponde por tanto, con respecto a la sucesión resultante de sus elementos, un número determinado como enumeración, llamaremos a este número la suma de α y β y lo designaremos por $\alpha+\beta$. Vemos inmediatamente que si α y β no son ambos finitos, entonces $\alpha+\beta$ es en general diferente de $\beta+\alpha$. Ya con la adición, la ley *conmutativa* deja pues de ser válida en general. Resulta tan simple formar el concepto de la suma de varios sumandos en una determinada secuencia, donde la secuencia misma puede ser propiamente infinita, que no necesita aquí entrar en más detalles. (Cantor, 1883)[25].

Luego el concepto de conjunto bien ordenado, será considerado por Cantor como un principio lógico o ley del pensamiento, dado que para él siempre existirá la posibilidad de poner cualquier conjunto bien definido en la forma de un conjunto bien ordenado, además de la misma manera

---

[24] Tomado de la definición que presenta Cantor en el libro 2 de los *Fundamentos*, traducción de (Ferreirós, 2006, p.88).

[25] En (Ferreirós, 2006, p. 91).

que si $a < b$, y $f(a) < f(b)$, definiéndose los transfinitos ordinales por similitudes de conjuntos ordenados, los principios intuitivos que se emplean en ocasiones son superfluos, esto se puede ampliar un poco más a partir del teorema de buen orden[26] formulado por Cantor, en este sentido, se puede ver que en el pensamiento de Cantor todos los conjuntos pueden ser "contables", pues esa ley del pensamiento le garantizaría que las potencias crecientes de las clases de números ordinales son todas las potencias transfinitas, asegurando la comparabilidad de cardinales, en este mismo sentido establece la única diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos, los conjuntos infinitos pueden ser enumerados de varias maneras, de otro lado los conjuntos finitos solo pueden ser enumerados de una manera.

A partir de esa caracterización, muestra que para los conjuntos infinitos existe una cierta conexión entre la potencia del conjunto y la enumeración de sus elementos determinada por la sucesión dada, es decir que cada potencia está coordinada con un número, en este sentido la teoría de las potencias por parte de Cantor se basa fuertemente en su teoría de los números ordinales. Sin embargo no se debe obviar que estos resultados están conectados con la hipótesis del continuo, aunque como se mencionó anteriormente este problema quedo sin resolver, convirtiéndose quizás el teorema del buen orden en una "laguna de la teoría cantoriana" como expresa (Ferreirós, 2006), se puede notar además que esta "laguna" queda solucionada más adelante con los trabajos de Zermelo donde el teorema de buen orden se basa en el axioma de elección.

[26] "La noción de conjunto bien ordenado muestra ser fundamental para toda ocasión de variedades. En un tratado posterior volveré al hecho de que siempre es posible poner a todo conjunto bien definido en la forma de un conjunto bien ordenado, lo que constituye, según me parece, una ley del pensamiento especialmente notable por su validez general, básica y rica en consecuencias" (Cantor, 1883, p.169).

2.5 Inicios de la topología conjuntista

La motivación de Cantor para los estudios de la topología conjuntista estaba directamente relacionada con la teoría de cardinales, y en último término con la hipótesis del continuo. Cantor retoma las discusiones de tipo filosófico que se han dado en torno a la cuestión sobre qué es un continuo: la disputa entre los partidarios de Aristóteles, para quienes el continuo es divisible indefinidamente, los de Epicuro, quienes aseguran que se compone de átomos finitos y la opinión de Tomás de Aquino, quien afirmaba que no se compone de partes. A partir de estas discusiones, Cantor afirmaba que no se había llegado al fondo de la cuestión, y que por tanto todos estos filósofos preferían eludirla elegantemente:

> Solo me veo obligado a desarrollar la noción de continuo de la manera sobriamente lógica en la que he de concebirlo, y como lo necesito en la teoría de variedades, con toda la brevedad y solo en relación a la teoría de conjuntos matemática. Esta empresa no me ha resultado fácil por la razón de que entre los matemáticos a cuya autoridad me remito de buen grado, ni uno solo se ha ocupado del continuo con precisión, en el sentido en el que lo necesito yo aquí Cantor, citado en (Ferreirós, 1991, p. 250).

Se puede pensar que Cantor no entra en disputa quizá porque su punto de vista conjuntista acepta de antemano la idea de que el continuo ésta compuesto de puntos. Ahora bien, el tema de la definición del continuo fue discutido también en tres cartas de 1882 enviadas a Dedekind:

> Un intento de generalizar su noción de cortadura, y servirme de ella para la definición general del continuo, no quiso salir bien. Por el contrario, mi punto de partida, "las series fundamentales numerables (así llamo ahora a las series en que los elementos se cercan infinitamente *unos* a *otros*), me pareció acomodarse de forma natural al intento. Cantor, citado en (Ferreirós 1991, p. 250).

Por lo tanto, el enfoque de Dedekind está demasiado centrado en las peculiaridades de $\mathbb{Q}$, por lo que presupone un conjunto totalmente ordenado. Por el contrario, Cantor quería una definición de continuo aplicable a espacios métricos, lo que requiere de ideas de un carácter más topológico como las que intervienen en las sucesiones fundamentales (condición de Cauchy). De allí que una de las cuestiones a resolver fuera la caracterización completa del continuo; de esta manera Cantor pregunta en una carta a Dedekind si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y uno de sus lados. El 20 de junio de 1877, plantea la siguiente demostración, (Recalde, 2005, p. 12):

> Sean $0 \leq x \leq 1$ entonces $x = 0.\ \alpha 1\ \alpha 2\ \alpha 3...$
>
> $0 \leq y \leq 1$ $\qquad\qquad y = 0.\ \tau 1\ \tau 2 \tau 3...$
>
> Siendo $0 \leq \alpha v \leq 9$ y $0 \leq \tau v \leq 9$.
>
> Tomamos un par (x, y) cuyas componentes se representarán por la forma anterior; se define la imagen
>
> $$z = 0.\ \alpha 1 \tau 1 \alpha 2 \tau 2...$$
>
> $$0 \leq z \leq 1$$

Pero esta representación presentaba un error: la doble representación de fracciones decimales como, por ejemplo, X = 0.4000… y X = 0.3999…; darían lugar a dos imágenes distintas. Solo hasta el 25 de junio de 1877 Cantor logra una demostración completa, planteando el teorema de forma general (Recalde 2005, p. 12):

> ***Teorema:*** una multiplicidad de *e* dimensiones puede ser puesta en correspondencia biunívoca con una multiplicidad continua de una dimensión.
>
> Para el caso de R^2 y se puede ver que Cantor demuestra la correspondencia biunívoca entre $I \cap (0,1)$ y $I\ x\ I \cap [(0,1)\ x\ (0,1)]$, donde I corresponde al conjunto de los números irracionales y (0, 1) al intervalo de los números reales comprendidos entre 0 y 1. Y demuestra la correspondencia biunívoca entre $I \cap (0,1)$ y (0,1).
>
> Para la primera parte Cantor parte de un antiguo resultado de fracciones continuas, según el cual todo número irracional entre 0 y 1 se puede representar de una manera completamente bien determinada por la fracción:

$$e=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\begin{matrix}.\\.\\.\\\cfrac{1}{\alpha_v+\cfrac{1}{\alpha_{(v+1)}+\begin{matrix}.\\.\\.\end{matrix}}}\end{matrix}}}}$$

Donde cada $\alpha_v \in \mathbb{N}$.

Sean e_1, e_2 dos magnitudes independientes entre sí, tales que

$$e_1 \in I \cap (0,1),\ e2 \in I \cap (0,1)$$
$$e_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13},\ldots \alpha_{1v},\ldots)$$
$$e_2 = (\alpha_{21}, \alpha_2, \alpha_{23},\ldots \alpha_{2v},\ldots)$$

Definimos el número irracional: $\delta = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22},\ldots \alpha_{1v}, \alpha_{2v},\ldots)$

Sabemos que $\delta \in I \cap (0,1)$ puesto que:

$$\delta=\cfrac{1}{\alpha_{11}+\cfrac{1}{\alpha_{22}+\cfrac{1}{\alpha_{33}+\ldots\cfrac{1}{\alpha_{1v}+\ldots\cfrac{1}{\alpha_v+\ldots}}}}}$$

La imagen de (e_1, e_2) será δ. Para un δ determinado se puede hallar la preimagen (e_1, e_2). En este caso no se presenta el obstáculo de la segunda demostración, pues no aparecen ceros en las sucesiones tomadas. Para la segunda parte, se toman los racionales del intervalo (0,1) en una sucesión: r_1, r_2, r_3,..., r_v,...

Si $e \in (0, 1) \cap I$, entonces, e es diferente de r_v para todo v = 1,2,...
Tomamos la sucesión $\{c_v\}$ de números irracionales tal que:

$$c_v < c_{v+1} \text{ y } \lim_{C\to\infty} v = 1$$

Sean $B = \{t \,/\, t \in (0, 1), t \neq c_v, v = 1, 2,...\} = (0, 1) - \{c_v\}$, y $A = (0, 1) \cap$ I.

Entonces existe $f\colon B \rightarrow A$, tal que f es biunívoca. Veamos esto sea $t \in B$: Si $t \neq r_v$, $v = 1,2,...$, entonces $f(t) = t \in A$, pues $t \in$ I. Si existe v tal que $t = r_v$, entonces $f(t) = c_v$. Recíprocamente, sea $e \in A$:

Si existe v tal que $e = c_v$, entonces, $f -1 (e) = r_v \in B$.
Si e diferente de e_v para todo v, entonces, f -1$(e) = e \in B$.
Por lo tanto el conjunto I ∩ Q es equipotente con el conjunto I.

Es importante destacar que en su demostración de la correspondencia biunívoca entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, Cantor plantea al menos dos posiciones: en primer lugar, se manifiesta preocupado por la cuestión de la veracidad de los enunciados matemáticos, refiriéndose a aquellas hipótesis habitualmente asumidas como obvias, sin que nadie haya asumido la responsabilidad de validarlas en un sistema axiomático. En segundo lugar, dentro de su empeño por comprender la estructura del continuo lineal, Cantor delimita un nuevo campo de estudio que se revelará de una riqueza sin igual en los períodos subsiguientes: *la teoría de los espacios topológicos.*

2.6 Las paradojas de la teoría de conjuntos

Parece ser que en el año de 1896, Cantor entendió que su definición de conjunto, como una colección arbitraria de elementos discernibles por la intuición, daba lugar a contradicciones. Pero fue solo a comienzos de 1897 cuando lo comunicó a Dedekind y Hilbert. La principal paradoja, la cual aparecía al suponer que la colección de todos los ordinales transfinitos es un conjunto (paradoja de Burali-Forti[27]), y que lo mismo pasa si se toma la colección C de todos los conjuntos como un conjunto, y se le asigna un número cardinal α.

Si designamos como β a $|\wp(C)|$[28], partes de C, $\wp(C)$, por la inecuación fundamental de la teoría de conjuntos tenemos que: $\alpha < \beta$. Por otro lado, $\wp(C) \subseteq C$, entonces $\alpha \geq \beta$, lo que contradice lo anterior. Aunque en 1895, Cantor se anticipa a la paradoja de Burali-Forti, planteando el siguiente razonamiento:

> Sea Ω la colección de todos los números ordinales. El conjunto bien ordenado Ω tiene asociado un número ordinal δ, el cual debe ser mayor que cualquier ordinal en Ω; pero como $\delta \in \Omega$, entonces $\delta < \delta$. (Recalde, 2005, p. 3).

El descubrimiento de las antinomias aportaba algo más, la imposibilidad de concebir esos infinitos absolutos como un subgénero del infinito actual. Pero de todos modos, Cantor disponía de un marco de ideas previo, que le permitió reaccionar con naturalidad ante lo que eran contradicciones estrictas. Empezó negándole estatus de conjunto a colecciones arbitrariamente grandes como las anteriores. Para ello introdujo los dos siguientes teoremas, (Recalde, 2005, p. 4):

> **Teorema 1:** El sistema Ω de todos los números ordinales es una colección absolutamente infinita e inconsistente.
>
> **Teorema 2**: El sistema Γ de los alephs es absolutamente infinito e inconsistente.

[27] Burali-Forti en 1897, fue el primero en señalar la imposibilidad de definir un último ordinal correspondiente al orden de todos los números ordinales, ya que, por ejemplo, si tal ordinal Ω existiera, entonces inmediatamente tendríamos $\Omega+1$. (Recalde, 2005, p. 3).

[28] Dado un conjunto A y denominando $\wp(A)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, se cumple que $\wp(A)$ tiene más elementos que A. simbólicamente: $|\wp(A)| < |A|$, donde $|\wp(A)|$ y $|A|$ representan la cardinalidad de A y $\wp(A)$ respectivamente.

Puesto que Cantor había argumentado que a todo número ordinal corresponde un número cardinal distinto, del hecho de que el sistema de todos los números ordinales es una multiplicidad inconsistente y absolutamente infinita, se seguía que el sistema de todos los números cardinales que corresponde a los números ordinales también es una multiplicidad inconsistente y absolutamente infinita, en (Lavine, 1994) menciona que este argumento guarda cierta relación con el posterior axioma de reemplazo: “el rango de una función en un conjunto es un conjunto”.

En el capítulo I, mencionamos la definición de conjunto presentada por Cantor en el artículo de Math Annalen de 1895, como colección arbitraria de elementos, en este sentido, decimos que el problema proviene de la definición misma de conjunto que Cantor presentó. Partiendo de esta concepción, es posible distinguir dos tipos de conjuntos: aquellos que no se pertenecen a sí mismos y otros que se pertenecen a sí mismos.

En el año de 1895, cuando Cantor desarrolló los argumentos que acabamos de mencionar, Bertrand Russell exhibió su disertación, la cual fue publicada posteriormente bajo el título de “An Essay on the Foundations of Geometry, en 1897”, Lavine (1994, p. 72), a partir de la definición cantoriana de conjuntos, Russell, definió un conjunto A de la siguiente manera: $A = \{x$ / *x no se pertenece así mismo*$\}$ de manera simbólica: $\{x \in x \leftrightarrow -(x \in x)\}$, ante esto Russell se pregunta ¿El conjunto A se pertenece a sí mismo?, a lo cual la paradoja se genera si suponemos que el conjunto A se pertenece a sí mismo. Pues al ser A un elemento de A, y dado que en A están los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, el conjunto A no se pertenece. De otro lado, si A no pertenece a A, tendríamos que A es un elemento del mismo A. En conclusión: A es un conjunto que se pertenece y no se pertenece a sí mismo; pero por el principio de no contradicción esto no puede darse.

Es así como Russell determinó: la paradoja del ordinal máximo y la paradoja del cardinal máximo. La paradoja del ordinal máximo es ésta:

> La clase de todos los números ordinales está aparentemente bien ordenada, así que tiene un numero ordinal como tipo de orden, el cual debe ser el ordinal máximo. Pero no puede existir un número ordinal máximo, puesto que cada número ordinal puede ser incrementado por 1. (Russell, 1903, p.23)

Es clara la similitud entre este argumento y el que Cantor utilizó para demostrar que los números ordinales forman una multiplicidad inconsistente. Esta paradoja llegó a ser conocida como la paradoja de Burali-Forti, (Moore & Garciadiego, 1981), citados por (Lavine, 1994, p.77), por otro lado, tenemos la otra paradoja, la del cardinal máximo:

> La clase de las clases no puede ser mayor que la clase de los individuos, puesto que está contenida en esta última. Pero la clase de las clases es la clase de todas las subclases de la clase de los individuos, y el argumento de la diagonal de Cantor muestra que ésta es mayor que la clase de los individuos. (Russell, 1903, pp.366-367)

Ésta es la llamada "paradoja de Cantor", quizás porque se basa en el argumento de Cantor; en otras palabras el argumento de Cantor demuestra que no existe un número cardinal máximo; pero la cardinalidad de la clase de todos los individuos debe ser el número cardinal máximo, puesto que todas las demás clases están incluidas en ésta. Aunque es notorio que la paradoja de Russell aparentemente es la de mayor importancia, por ser más directa que las otras, se puede pensar que en cierto sentido, la paradoja del cardinal máximo ya incluye la paradoja de Russell.

A pesar de la discusión que originan estas paradojas, debe quedar claro que Cantor, al introducir los números ordinales transfinitos, por lo menos a un nivel intuitivo, dispone de un nuevo dominio donde aplica, desarrolla y explorara sus ideas. Pues hasta entonces, Cantor sólo podía pensar en conjuntos de números, de puntos o de funciones, pero al investigar los ordinales acabaría haciéndose evidente la necesidad de imponer restricciones a la teoría de conjuntos, a pesar de que esto diera origen a incontrolables contradicciones. Como comenta (Ferreirós, 2006, p.73), acerca de lo que dice el informe de Bernstein:

> (…) Cantor dio a conocer su manera de imaginarse un conjunto: elevó bien alta su colosal figura, describió con el brazo extendido un gesto magnífico, y dijo con una mirada dirigida a lo indeterminado: "Me imagino un conjunto como un abismo".

Se puede ver que Cantor creía firmemente en el reprocesamiento y la propia regla simple de la sucesión de conjuntos, que implica nada más que una mirada atrás a los predecesores de un conjunto, y abre la posibilidad a un aumento de los posibles conjuntos tan formidables, que hace que los números naturales parezcan diminutos a pesar de su carácter de infinitud, además se puede pensar que con esta definición de conjunto, Cantor se aleja un poco de la visión lógica de los conjuntos, y emplea una visión o concepción más platónica, al considerar a los conjuntos como algo abismal.

2.7 Lo transfinito en la naturaleza

Como se puede observar a lo largo de este documento, lo peculiar de las matemáticas de Cantor estaba en su interés por ciertas cuestiones abstractas, que pueden calificarse de filosóficas: el análisis del infinito y el continuo. Las decisiones de un hombre como Cantor, sugieren una historia personal en la que participa activamente una o varias inquietudes filosóficas, de allí que desde su época como estudiante se interesará por la filosofía de Spinoza, (Ferreirós, 1991, p. 329), donde el infinito desempeña un papel central; se trata de un sistema especulativo que considera todo lo que existe como atributos y modos de una única sustancia, Dios o la naturaleza, que es absolutamente infinita. Teniendo en cuenta que estos intereses venían desde antes de su madurez, cabe pensar que tuvieron algo que ver con la dirección que tomó su investigación matemática, como lo sugiere la siguiente cita:

> Además me estoy ocupando de las aplicaciones de la teoría de conjuntos a la teoría natural de los organismos, a la que no se pueden aplicar los tradicionales principios mecánicos […] Para ello debían ser creados medios matemáticos totalmente nuevos, que en lo esencial se encuentran ya en las partes de la teoría de conjuntos desarrolladas por mí. Con estas ideas de una profundización precisa en la esencia de todo lo orgánico me ocupo desde hace ya 14 años; constituyen la auténtica motivación por la que he afrontado, y en este espacio de tiempo no he perdido de vista ni un minuto, la empresa fatigosa, y que promete poco agradecimiento, de la investigación de los conjuntos de puntos. (Schoenfilies, citado en Ferreirós, 1991, pp. 330-31).

Según esto, Cantor se ocupaba de cuestiones conjuntistas como base para una nueva explicación de la naturaleza, pero el trabajo que muestra una revelación de los verdaderos intereses filosóficos y especulativos de Cantor es *Grundlagen einer allgemeinen mannigfltigkeitslehre* (1883). Hablando de las ideas de Spinoza y Leibniz dice:

> Las dificultades principales de los sistemas de los dos pensadores recién citados, sistemas que son externamente de distinta naturaleza están muy emparentados, se puede acercar a una solución a través del camino iniciado por mí, y algunas de ellas pueden incluso resolverse y explicarse satisfactoriamente ya ahora. Son estas dificultades las que han dado ocasión al criticismo posterior, que con todas sus ventajas no me parece ofrecer una compensación suficiente por la obstrucción del desarrollo de las teorías de Spinoza y Leibniz. Pues hasta el momento no ha comenzado siquiera a aparecer, junto a o en lugar de la explicación mecánica de la naturaleza, que dentro de su esfera ha tenido a su disposición todos los medios y ventajas del análisis matemático –pero cuya parcialidad e insuficiencia han sido suscitadas tan apropiadamente por Kant-, una explicación *orgánica* de la naturaleza, equipada con el mismo rigor matemático, que fuera más allá de aquella, según creo, solo

> se le podrá abrir camino retomando y desarrollando los trabajos y esfuerzos de aquéllos (Cantor, 1883)

Cantor se encontraba en la búsqueda de una superación de la explicación mecánica a favor de una explicación orgánica; por otro lado, en trabajos posteriores desarrolla algunas hipótesis para la nueva visón de la naturaleza. En el terreno de la física rechaza la hipótesis atomista[29] y considera que los últimos elementos de la materia se dan en número actualmente infinito; para estos elementos simples acoge el nombre de "mónadas o unidades"[30]. Él asume la existencia de dos tipos de mónadas las corpóreas y las etéreas, y plantea su primera hipótesis relacionada con su teoría conjuntista: *el conjunto de las mónadas corpóreas es numerable, mientras que el de las mónadas etéreas tiene la segunda potencia, esto es la del continuo* (Cantor 1895, p. 276) en una segunda hipótesis presentada en el mismo artículo, éste emplea una descomposición de los dos conjuntos de mónadas –etéreas y corporales- en cinco partes disjuntas:

> (…) tratará en primer lugar de decidir si quizá a las cinco partes esencialmente distintas, en que según esto aparece la materia corporal y la etérea en cada momento temporal […] pueden corresponder también modos de acción o de manifestación de la materia esencialmente distintos, como estados de agregación, diferencias químicas, luz y calor, electricidad y magnetismo. (Cantor, 1895).

La confianza de Cantor, en la aplicabilidad de su teoría de conjuntos a la explicación de la naturaleza está directamente relacionada con su platonismo y su visión metafísica de la relación entre el "mundos de las ideas" y la realidad natural. En una nota de los *Fundamentos* se puede ver que Cantor presentaba una visión platónica de Conjuntos:

[29] "Suponer que los últimos elementos de la materia, propiamente simples, se dan en número actualmente infinito, y respecto a lo espacial han de considerarse totalmente inextensos y rigurosamente puntuales" (Cantor, 1895) citado en (Ferreirós 1991, p. 331).
[30] (Ferreirós 1991, p.331) cita a (Cantor, 1895) Donde explicita una serie de atributos de las mónadas. Como precedentes de la hipótesis monadológica.

> Entiendo por variedad o conjunto, en general, toda multitud que puede pensarse como unidad, es decir, toda colección de elementos definidos que pueden reunirse en un todo por medio de una ley; y con esto, creo definir algo emparentado con el *είδος* o *ίδέα* platónico, así como lo que Platón llama *μιχτόν* en su dialogo "Filebo, o el sumo bien […] El propio Platón indica que estas nociones son de origen pitagórico […]" (Cantor, 1883) citado en (Ferreirós 1991, p. 332).

Es así como los conjuntos transfinitos existen en el mundo de las ideas o dicho de otra manera en la mente divina, en la medida que se trata de nociones posibles o consistentes, dotadas de realidad inmanente, y del paso de este tipo de realidad a la presencia en el mundo natural resulta sencillo para Cantor:

> Desde la base totalmente realista, pero a la vez no poco idealista, de mis consideraciones, no admite para mi ninguna duda que estas dos formas de realidad siempre se encuentren, en el sentido de que una noción que haya que caracterizar como existente en el primer sentido, cuya determinación constituye generalmente una de las tareas más fatigosa y difíciles de la metafísica […]
>
> Esta conexión entra ambas realidades tiene su auténtica razón en la unidad del todo, al que nosotros siempre pertenecemos. (Cantor, 1883) citado en (Ferreirós 1991, p. 331).

Para Cantor, era casi trivial que la teoría de conjuntos transfinitos se ocupara de algo que existe en la realidad: el infinito está en todas partes, en Dios, en la naturaleza que nos rodea e incluso en nuestra propia alma.

Tomando como referencia lo mencionada en el transcurso de este capítulo, es claro que aunque las teorías de Cantor recibieron numerosas críticas entre sus contemporáneos especialmente por Poincaré y Kronecker, en su defensa él eligió las armas de la discusión filosófica, revelándose con esto una tendencia profunda de su mentalidad especulativa.

Ante esto, podemos decir que el desarrollo conceptual del infinito actual se manifiesta con dificultad en el hombre, apareciendo inmerso en situaciones conflictivas, se puede inferir quizás que este emerge con una anterioridad lógica (quizás ontológica)[31], sobre el infinito potencial; la ontológica en virtud de la necesidad de *"ir más allá"*, la preeminencia lógica se da en el momento en que Cantor supone que *existe* la menor cota superior de ordinales transfinitos después de los naturales (cuando afirma la existencia de ω), y en el momento de asumir como *necesario* el tercer principio de generación. Teniendo en cuenta que tanto uno, como otro, emergen por necesidad de trascender lo potencial. De allí, que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas en donde esté presente el infinito potencial.

Ahora bien, aunque hoy en día el infinito tiene un papel esencial e incuestionable en la matemática, podemos decir que a pesar de la matematización que se tiene gracias a los trabajos de Cantor y Dedekind en la teoría de conjuntos, los problemas que acarrea esta noción no han desaparecido en el decurso de la re-construcción conceptual durante un proceso de aprendizaje; pues se considera que para poder acceder de manera satisfactoria a este concepto es necesario realizar un proceso exigente de abstracción. Se accede a esta noción, como lo plantea Cantor, de una manera intuitiva. Éste es quizá uno de los mayores obstáculos que permitan acceder a la noción de infinito actual, dado que la visión de infinito en la mayoría de los hombres está asociada a la ausencia de limites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un

[31]Si se puede localizar, por biparticiones, una infinidad (potencial) de puntos sobre un segmento, es porque en el segmento hay una infinidad (actual) de tales puntos. Esta tesis es sostenida por algunos matemáticos e historiadores como (A. Koyré, 1961) y (R. Thom, 1992).

proceso que se repite o que progresa indefinidamente (infinito es lo que no tiene fin), es decir, la noción de infinito potencial.

2.8 Axiomatización de la teoría cantoriana

La idea de una teoría axiomática para las ciencias procede de Aristóteles, para quien todo conocimiento científico propiamente se establece por inferencia deductiva a partir de principios de dos clases, a saber, conceptos que no se definen y aseveraciones que no se demuestran científicamente. Podemos afirmar que el hecho de que todo conjunto pueda ser bien ordenado es fundamental para los desarrollos de los procesos de axiomatización de la teoría cantoriana. Sin embargo no se deben obviar los problemas que generó este principio, en la medida que él mismo sugiere la posibilidad de demostrar que el conjunto de los números reales puede ser bien ordenado, problema presentado por Hilbert en el segundo Congreso Internacional de Matemáticas de 1900. En este sentido, era necesario resolver los problemas que acontecía el principio del buen orden.

Para esto fue fundamental el trabajo desarrollado por Zermelo, él se propone sentar una base axiomática a la teoría de conjuntos de Cantor, con el fin de fundamentarla y evitar paradojas, creía que las paradojas se derivan de los principios de la teoría de conjuntos, especialmente de la definición de conjunto, en este sentido se puede decir que la teoría de conjuntos cantoriana alcanza su proceso de complementación, cuando Zermelo establece una serie de axiomas cuya labor era restringir estos principios lo suficientemente para excluir todas las contradicciones o tomarlas lo suficientemente amplias para conservar todo lo que tenga valor en esta teoría y así permitir en cierta medida rehacer los resultados de Cantor y Dedekind, que estaban siendo tan cuestionados con el problema de las paradojas. En este sentido Zermelo plantea al respecto:

> (…) me propongo mostrar cómo toda la teoría creada por G. Cantor y R. Dedekind se puede reducir a unas pocas definiciones y a "siete" principios o "axiomas", aparentemente independientes entre sí. (Zermelo, 1908) citado en (Ferreirós, 1991, p.354).

Normalmente una teoría axiomática se refiere a uno o más conjuntos de objetos, cuyos atributos y relaciones son caracterizados por los axiomas, pero como la teoría de Zermelo intenta caracterizar justamente el atributo del ser de un conjunto no puede invocarlo de entrada al acotar su tema, nuestro Zermelo empleará los números cardinales y sus productos, funciones que van de sus conjuntos a sus elementos, conjuntos bien ordenados y el axioma del conjunto potencia, también se dio a la indagación sobre la teoría de los números naturales de Dedekind, de acuerdo con (Ferreirós, 1991) se puede inferir que la labor de Zermelo fue todo un éxito, donde una de las principales aportaciones, la publicó en los *Math Annalen* allí demostró el teorema del buen orden[32].

Los aportes de Zermelo no solo se reducen al planteamiento de siete axiomas y a unas pocas definiciones, sino que también presenta algunos teoremas importantes para la consolidación de la teoría, entre esos el teorema donde se afirma que cualquier conjunto tiene menor cardinalidad que el conjunto de sus partes: $|A| < |P(A)|$. Así, dado un conjunto infinito W, obtenemos $|W| < |P(W)| < |P(P(W))|$, etc., donde se deduce que hay una cantidad de cardinales o números cardinales distintos; y dada la importancia de este resultado para la teoría axiomática de conjuntos, Zermelo lo denomina teorema de Cantor.

[32] Si todo conjunto puede ser bien ordenado, entonces todos los cardinales infinitos son alephs. (Ferreirós, 2006).

Además con los axiomas que propone, es suficiente para él una fundamentación de la matemática clásica en su conjunto, él siempre estuvo motivado a construir un sistema axiomático para la teoría de conjuntos, pues ésta era la que orientaba los procesos de fundamentación de la matemática, como lo deja ver en su artículo de 1908:

> La teoría de conjuntos es la rama de las matemáticas cuya tarea consiste en investigar matemáticamente las nociones fundamentales de “número”, “orden” y “función”, tomadas en su forma más simple y primitiva, y desarrollar a partir de ellas los fundamentos lógicos de la aritmética y el análisis, así pues constituye un componente indispensable de la ciencia de las matemáticas. (Ferreirós, 2006, p. 280).

Para alcanzar este objetivo de la fundamentación de las matemáticas, era necesario restringir cualquier amenaza que se presentará en la teoría de conjuntos, en este sentido evitar las “antinomias” que se encontraban en los principios de la teoría, por ende consideraba que la definición de conjunto de Cantor como “una colección de objetos determinados y bien distinguidos por nuestro pensamiento formando un todo”, necesitaba de alguna manera algún tipo de restricción, de esta manera intenta mostrar como toda esta teoría desarrollada por Cantor se puede simplemente reducir a siete “principios” o axiomas, de los cuales algunos de ellos garantizan la existencia de conjuntos, el primero es el *Axioma de Extensionalidad*: este axioma afirma que si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces son iguales, también nos está diciendo en cierta medida que lo que caracteriza a un conjunto son sus elementos, de otro lado se encuentra el *Axioma de Separación*: este axioma nos dice que para cualquier propiedad (expresada por $\varphi(x)$) y cualquier conjunto A existe un subconjunto de A formado por los elementos que verifican esa propiedad.

El *Axioma de Separación*, de acuerdo con (Ferreirós, 2006) es más bien "impotente". En este sentido necesitaba ser complementado con otros principios independientes de la existencia de conjuntos. Por lo cual formuló los otros cinco axiomas que aseguraran la existencia de conjuntos, los que se reconocen como básicos son el *Axioma del Conjunto Potencia*: este plantea que si M es un conjunto entonces existe el conjunto $\wp$ (M) que contiene todos y sólo los subconjuntos de M y el *Axioma de Unión*: el cual garantiza que dada una familia de conjuntos M existe un conjunto $\cup$M que contiene todos y solo los elementos de M. El último axioma de existencia condicional es el *Axioma de Elección*[33]: en el cual se plantea que dado un conjunto M cuyos elementos son conjuntos no vacíos y distintos entre sí, su unión $\cup$M contiene al menos un subconjunto S_1 que tiene un y sólo un elemento en común con cada elemento de M. En otras palabras nos está presentando que para todo conjunto de conjuntos no vacíos hay una función que va de cada uno de los conjuntos no vacíos a uno de sus elementos, con este supuesto es que intenta demostrar el principio del buen orden, como se intentará presentar más adelante.

Finalmente plantea dos axiomas más de existencia, uno es el *Axioma del Conjunto Vacío*: donde se garantiza la existencia de un conjunto que no contiene ningún elemento y por último se tiene el *Axioma del Infinito*[34]: con este axioma se tiene la existencia de un conjunto que tiene infinitos elementos, pues se garantiza la existencia de al menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío, y que con cada elemento *a* contiene también el conjunto $\{a\}$.

[33] Zermelo pretendía emplear este axioma, junto con el axioma de potencia $\wp$(M), para probar que M puede ser bien ordenado.

[34] De acuerdo con (Ferreirós, 2006), se tiene que Zermelo indicó que este axioma se debió básicamente a los trabajos de Dedekind.

2.8.1 El Axioma de Elección

Como se ha mencionado, vemos que fue crucial y constitutivo para la teoría de Cantor que resultará válido el principio del buen orden, es decir que todo conjunto puede ser bien ordenado. Con la aparición del axioma del conjunto potencia, se había vuelto un poco cuestionable el principio del buen orden, pues se puede decir que era necesario demostrar que el conjunto potencia de un conjunto bien ordenable también es ordenable, en este sentido se debía resolver el problema de llegar a una noción de conjunto viable con la cual se pudiera formular la teoría de conjuntos.

En (De la Pava, 2012) menciona, que Cantor hizo referencia al Axioma de Elección por primera vez, en los *Fundamentos*, cuando observo que siempre resultaba posible poner cualquier conjunto bien definido en la forma de un conjunto bien ordenado; en este sentido, para Cantor, el Axioma de Elección, en su versión de Principio del buen orden, es algo intrínseco a la esencia de los conjuntos. Sin embargo, este postulado, aunque visto como fundamental y evidente, generó un análisis más profundo a partir de la sucesión de los alephs de Cantor.

Como hemos mencionado, el trabajo de Zermelo presuponía cierta familiaridad con la teoría de conjuntos de Cantor, él empleo los números cardinales y sus productos, funciones que van de conjuntos a sus elementos, conjuntos bien ordenados y el axioma del conjunto potencia, e introduce un “supuesto” que más adelante denomino el *Axioma de Elección,* según el cual para todo conjunto de conjuntos no vacíos hay una función que va de cada uno de los conjuntos no vacíos a sus elementos, y utilizo este supuesto para demostrar el principio de buen orden.

Al tener un conjunto *M*, Zermelo aplica el axioma de elección al conjunto de sus subconjuntos para obtener una función Υ. Cuando *m* es cualquier subconjunto no vacío de *M*, Zermelo denomino $\Upsilon(m)$ al elemento elegido de *m*. definió Υ-conjunto como un subconjunto S bien ordenado de *M* tal que cada elemento de *a* de S es el elemento elegido del conjunto de elementos de S que no precede a *a*. posteriormente definió un elemento Υ-elemento como un elemento de cualquier Υ-conjunto, y demostró que el conjunto L_Υ de Υ-elementos es un Υ–conjunto, por lo que está bien ordenado, también demostró que L_Υ = M, por lo que *M* está bien ordenado. En apoyo del supuesto, dijo que es un "principio lógico", destaco a manera de ejemplo que se puede utilizar para demostrar que si un conjunto, es descompuesto en partes, entonces no hay más partes que los elementos del conjunto. Este resultado de Zermelo provoco muchas críticas, Bernstein y Shoenflies objetaron la demostración de que L_Υ = M; Poincaré objetó la definición de L_Υ; Peano, Borel, Lebesgue y Baire objetaron el supuesto.

Es importante recalcar que el Axioma de Elección se venía empleando de manera implícita en el análisis y en investigaciones de Cantor y Dedekind, este se implementaba como herramienta para la constitución de las clases numéricas de Cantor, en donde es necesario que existan conjuntos a los que les corresponde cada ordinal transfinito, de igual manera el axioma fue observado y rechazado por Peano en 1890, Bettazi en 1896 y Beppo Levi en 1902[35]. Sin embargo el axioma no se tematiza como una teoría hasta que Zermelo lo incorpora en la axiomática, en el trabajo de Zermelo se presentaban unos aspectos especiales en la medida que se trataba de un axioma puramente existencial, como puede observarse en la siguiente cita:

> La presente demostración descansa sobre […] el principio de que también para una totalidad infinita de conjuntos existe siempre condiciones mediante las cuales a cada conjunto le corresponde

[35]Sobre este tema se puede consultar (Ferreirós, 1991), capítulo. XI.

> uno de sus elementos, o expresado formalmente, que el producto de una totalidad infinita de conjuntos, cada uno de los cuales contiene al menos un elemento, es distinto de cero. Este principio lógico no puede reducirse a otro más simple, pero es aplicado inconsistentemente en números de deducciones matemáticas. Por ejemplo la valides general del teorema que dice que el número de partes en que se divide un conjunto es menor o igual al número de sus elementos, no puede demostrarse de otra manera pensando que cada una de sus partes consideradas está coordinada con uno de sus elementos. (Zermelo, 1908) citado en (Ferreirós 1991, p.356).

Se evidencia así, como con este trabajo de Zermelo el tipo de matemática abstracta característica de la teoría de conjuntos. Se puede decir que en el momento en que se reproduce la teoría intuitiva de conjuntos, es cuando el Axioma de Elección se constituye en un objeto matemático, pues se garantizaba la existencia del mismo bajo el hecho de que el axioma es "intuitivamente evidente" y "necesario" para las matemáticas, además destaca que la demostración del mismo se podía llevar en un sistema libre de todas las paradojas conocidas. Básicamente se puede afirmar que el Axioma de Elección está justificado por la idea que se puede seleccionar arbitrariamente los elementos de un conjunto, en este sentido para Zermelo es inevitable su utilización[36].

En el artículo de *Investigations in the Foundations of Set Theory I* en (Heijenoort, 1967), Zermelo enuncio en 1908 siete de los axiomas de la teoría de conjuntos moderna, entre ellos el Axioma de Elección:

> ***Axioma IV***: Si T es un conjunto cuyos elementos son todos conjuntos no vacíos y mutuamente disjuntos, su unión ∪T incluye al menos un subconjunto S_1 teniendo uno y sólo un elemento en común con cada elemento de T.
> Podemos expresar este axioma diciendo que es siempre posible escoger un único elemento de cada elemento M, N, R,… de T y combinar todos los elementos escogidos m, n, r,… en un conjunto S_1. (Zermelo, 1908)

[36]Según (Lavine, 1994, p. 128): *la noción de una función es una sucesión arbitraria de valores no sujetos a una ley común*.

En (De la Pava, 2012) se observan además algunos enunciados equivalentes al Axioma de Elección:

1. Existe una función de elección para cada sistema de conjuntos.
2. Cada partición tiene un conjunto de representantes.
3. Si $\langle X_i | i \in I \rangle$ es un sistema indexado de conjuntos no vacíos, entonces hay una función f tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.
4. (Lema de Zorn) Si cada cadena en un conjunto parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.
5. Todo conjunto se puede bien ordenar (principio de buen orden).

Para demostrar que el axioma tiene razón de ser intrínseca, es decir para demostrar que es "intuitivamente evidente", Zermelo manifiesta que este ya había sido utilizado con gran éxito por muchos matemáticos, además que si un principio, posiblemente utilizado en varias formas, es aplicado de manera independiente y sin cuestionamientos por muchos matemáticos, esto seguramente puede demostrar que el principio es autoevidente, la autoevidencia es un fenómeno psicológico, o probablemente psicológico, pero:

> No importa si esta autoevidencia es hasta cierto punto subjetiva, seguramente es una necesaria fuente de principios matemáticos, incluso si no es una herramienta para demostraciones matemáticas. (Zermelo, 1908a, p.187).

Es importante reconocer que aunque, históricamente, se suele aceptar que muchos de los principios matemáticos son considerados como autoevidentes, estos podrían no serlo tanto, como ocurre con el Axioma de Elección y el de Reemplazó, ambos axiomas podrían no ser evidentes para algún ser humano. Otro aspecto importante sobre este axioma de acuerdo a la concepción de (Zermelo, 1904, p.516) es que como "principio lógico no puede derivarse de otro más simple, pero se aplica universalmente sin titubeos en el razonamiento matemático".

Vemos que para establecer como un teorema lo que Cantor había llamado una ley del pensamiento, Zermelo tiene que invocar un principio lógico que no figura en los escritos de Aristóteles, ni en las obras de Frege o de Boole. La adopción de cualquiera de los dos como principio que no se demuestra permite demostrar el otro. El Teorema del Buen Orden se infiere del Axioma de Elección. El Axioma de Elección se deduce del Principio del Buen Orden.

En este sentido, es importante reconocer que las axiomáticas modernas son reformulaciones de la axiomática de Zermelo en las que se realizan precisiones sobre los fundamentos: la aceptación del Axioma de Elección, la claridad con lo que se entiende por conjunto bien definido, aceptar la hipótesis del continuo o no, han generado sistemas axiomáticos construidos sobre la base de la axiomática de Zermelo. El propósito de estos sistemas, es restringir los fundamentos para excluir las contradicciones y ambigüedades, pero teniendo en cuenta que tales restricciones deben preservar los resultados de valor de la teoría de conjuntos. La noción de cardinalidad, el conjunto de partes y el teorema de Cantor son unos de esos resultados, cabe resaltar que el teorema es fundamental para la construcción de una teoría de conjuntos. Finalmente se infiere que tanto el Axioma de Elección como el de Reemplazo son principios autoevidentes acerca de los conjuntos, y esta autoevidencia constituye una parte importante de nuestros fundamentos para aceptarlos.

De acuerdo al análisis presentado a lo largo de este capítulo, podemos inferir que se nos hace natural reconocer y afirmar que las matemáticas actuales implican el infinito, nuestras matemáticas tienen un fuerte compromiso con la existencia de objetos infinitos, actualmente se demuestran teoremas donde se afirma la existencia de objetos infinitos, se estudian y enseñan propiedades acerca de objetos infinitos, en este sentido es pertinente indagar la manera como se realizan estos acercamientos a los objetos infinitos, en especial como se contempla desde la teoría de conjuntos cantoriana.

Tenemos además como elementos relevantes ciertos compromisos que conciernen al infinito: existen colecciones combinatorias actualmente infinitas, esencialmente existe algún conjunto que servirá como los números naturales y existe algún conjunto que servirá como potencia de este, el cual nos da los números reales. Todos tienen conjunto potencia, en ese sentido se tiene al menos cierto conocimiento autoevidente aparentemente inmediato y claro a cerca de las propiedades de las colecciones combinatorias actualmente infinitas, lo más sorprendente es que estas obedecen al axioma de elección y de remplazó. Ahora bien, a partir de este análisis histórico-epistemológico, es pertinente examinar las propuestas de los programas de teoría de conjuntos del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para determinar si en el desarrollo de estos cursos se siguen las delimitaciones presentadas en la propuesta de Cantor y Zermelo-Fraenkel sobre la conceptualización y formalización necesaria para caracterizar los conjuntos infinitos.

Capítulo 3.

3. ALGUNAS REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS Y EDUCATIVAS SOBRE LOS PROGRAMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS DEL INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

La matemática mantiene la distinción entre las dos concepciones de infinito: la primera como la ausencia de límites o de fronteras, la falta de conclusión de un término o de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente, literalmente lo que no tiene fin o que siempre se puede continuar. A este tipo de infinito es lo que se le ha llamado infinito potencial. La segunda concepción del infinito, está asociada a la idea de totalidad en acto, o infinito actual, el cual ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas modernas a través de la teoría de conjuntos, como se mostró en el capítulo anterior con los trabajos de Georg Cantor a finales del siglo XIX.

En el segundo capítulo de este trabajo vimos cómo el desarrollo del infinito actual emerge como concepto perturbador y conflictivo pero en niveles de razonamiento muy especializados como la filosofía, la ontología, la matemática, etc. se ha mostrado que el infinito actual como objeto matemático es el resultado de un complejo proceso histórico, en el cual han participado otras modalidades de pensamiento. También nos permite afirmar que su representación formal y axiomática es la síntesis, pero a la vez la negación, de una ardua actividad histórica, y que por tanto su enseñanza debe obviar su accidentalidad; pero a la vez, afirmamos que esta accidentalidad explica en gran parte su naturaleza.

Generalmente, el infinito se presenta a través de metáforas didácticas basadas en conjuntos "muy grandes". Esto permite afianzar la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano, sin embargo, podría ser inoperante en la perspectiva de nuestro objeto matemático. La ambigüedad en el lenguaje hace que el concepto del infinito siga siendo un concepto vago e intuitivo, casi siempre ligado a la definición de infinito potencial, lo que se parece muy poco a la idea matemática de infinito como unidad total[37].

Como lo hemos visto, el concepto de infinito como unidad (infinito actual) se ha utilizado a través de la historia para explicar interrogantes de tipo teológico; por ejemplo, el concepto de Dios, como ente infinito absoluto e inalcanzable[38]. Pero en la enseñanza de la matemática no se trabaja mucho la noción de infinito actual, aun cuando aparezca como un aspecto tangencial ligado a la naturaleza de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, estudiados desde la primaria.

La construcción del infinito como procesos inalcanzables (el infinito de Aristóteles) no es suficiente para explicar por qué $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$ son equipotentes y en cambio $\mathbb{R}$ tiene una cardinalidad mayor[39]. Frente a esto adquieren sentido algunos interrogantes: ¿tienen los docentes la suficiente claridad del término infinito para ofrecer una explicación adecuada de esta noción, es decir, que dé cuenta de la diferencia entre la concepción común del concepto y el concepto formal matemático? ¿En qué momento de su formación se debe situar al estudiante frente al concepto matemático de infinito actual? ¿Será necesaria esta aclaración?

---

[37] Por ello es pertinente preguntarse, que tan pertinente es reforzar durante los primeros años de escolaridad la idea de infinito potencial como la noción absoluta de infinito.
[38] Como se trabajó en el capítulo II, Cantor postulaba la existencia de un infinito absoluto inalcanzable por cualquier tipo de extensión realizada sobre los ordinales transfinitos; a este infinito podemos decir que Cantor lo identificó con Dios.
[39] Este es un hecho fundamental que justifica la necesidad de aclarar en algún momento la idea del infinito actual.

Las teorías del aprendizaje desarrolladas en las últimas décadas hacen énfasis en la necesidad de estudiar las concepciones primigenias de los estudiantes sobre los diferentes objetos de conocimiento. Éste estudio sería el punto de partida de la enseñanza, como menciona (Waldengg 1996, pp.107-122), para que “el aprendizaje sea significativo es necesario partir de estas concepciones e interactuar con ellas para luego entrar a enriquecerlas o modificarlas”. Pero para el caso que nos ocupa podríamos pensar, si los conocimientos que poseen los estudiantes son suficientes para realizar un acercamiento a los objetos infinitos desde la teoría cantoriana.

3.1 Algunas reflexiones sobre la importancia de los análisis históricos y epistemológicos en la Educación Matemática

En (Sfard, 1991) se menciona, que de acuerdo a las últimas investigaciones en relación con las dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, el problema de la *impermeabilidad* de las personas con las matemáticas sigue constituyendo una cuestión desafiante y molesta. Ello vislumbra que es necesario enfocar los esfuerzos no solo en los procesos cognitivos, sino también en la singularidad de las nociones matemáticas. (Valencia, 2009, p. 180) afirma en este sentido que es claro que los primeros son fundamentales, pero en su generalidad, no permiten apreciar cómo intervienen en el aprendizaje de los objetos matemáticos *particulares.* Ante esto surge la necesidad por indagar sobre cuestiones epistemológicas más básicas en cuanto a *la naturaleza del saber matemático*.

De otro lado también se reconoce que en la teoría desarrollada por Yves Chevallard, sobre la transposición didáctica y la antropología didáctica, existen algunos indicadores sobre el tipo de historia y análisis epistemológico que puede servir como herramienta para las investigaciones didácticas. En ésta teoría se evidencia el papel central que ocupa la epistemología de las matemáticas en los análisis didácticos, que pone de relieve la problemática que genera el *saber* cómo componente de la terna didáctica: saber-profesor-alumno.

En este sentido podemos decir, que es la reunión de diversos factores entre los que se encuentran los procesos cognitivos y el análisis epistemológico, lo que permite acercarse a una explicación sobre la cuestión del aprendizaje de los objetos matemáticos. Así, parafraseando a (Kaput, 1979), (Sfard, 1991) menciona que:

> Parece que la comprensión psicológica al interior de la naturaleza de los conceptos matemáticos es lo que necesitamos para entender a profundidad los procesos psicológicos en los cuales emergen tales conceptos. En el tipo de investigación sugerido, el análisis epistemológico y ontológico del ―universo completo, atemporal y formal del saber [matemático] ideal arrojaría esperanzadoramente una luz sobre las raíces de esta confusión abrumadora la cual muy a menudo parece reinar en ―el universo orgánico, interior y procesual del saber humano

Es claro entonces, que existe un fuerte vínculo entre el análisis cognitivo y epistemológico en relación con los objetos matemáticos. Vínculo que fue puesto en evidencia por (Brousseau, 1976), en tanto que afirma que la epigénesis de los objetos matemáticos constituye el modelo más apropiado para explicar la ontogénesis de estos, es decir, en la apropiación del individuo de los objetos matemáticos. Brousseau, también le da un fuerte valor al análisis epistemológico en relación al rastreo de los *obstáculos epistemológicos* que participan en la emergencia de los objetos matemáticos.

Se argumenta además, que desde la teoría de Yves Chevallard existe la necesidad de dar cuenta del proceso de constitución del saber sabio, como componente del proceso de transposición didáctica, allí se evidencia la importancia del análisis epistemológico en la didáctica (Bobadilla 2012, p. 218). Se llama la atención sobre la obligación, que tiene el investigador en didáctica, de analizar el complejo proceso que va desde la producción de saber en la comunidad matemática hasta su enseñanza. Eso obliga a extender el alcance de la epistemología. Pues ésta, no sólo se debe ocupar de la producción del saber, sino de su aplicación, enseñanza y transposición. El objeto de estudio de la antropología (o epistemología) de las matemáticas no serán "las matemáticas" como saber, sino de manera englobante las *prácticas sociales con matemáticas* (Chevallard, 1991, p. 174).

En este sentido, se considera pertinente reflexionar sobre las características de los estudios históricos - epistemológicos que apunten a clarificar ese proceso, que va desde la producción de saber hasta su enseñanza, permitiendo aclarar la dependencia mutua entre los modelos de construcción de saber matemático y los análisis didácticos, por ende nos daremos a la tarea de visualizar cuales son los contenidos curriculares (saberes) propuestos para enseñar, en los cursos de Teoría de Conjuntos del IEP de la Universidad del Valle.

3.2 Algunos estudios sobre concepciones del infinito desde una perspectiva didáctica

Existe una necesidad de trabajar con la noción de infinito matemático en virtud de los contenidos de las matemáticas; es importante recalcar que éste se emplea sin una presentación o caracterización específica, como si formara parte del sentido común. De alguna manera podría sorprendernos que los jóvenes presenten dificultades para comprender o resolver situaciones que involucran colecciones infinitas, pues, desde muy temprano, los niños se encuentran con experiencias donde se pone en juego la noción de infinito. Aunque se considera que este tipo de experiencia se ajusta a la intuición sensible y permanece en ese estado en la mayoría de los casos en quienes no necesitan un alto conocimiento matemático, (Monaghan 2001, p. 239).

Numerosos estudios han puesto en evidencia que en los últimos años de la educación secundaria y universitaria, los estudiantes se encuentran con serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con situaciones que implican la noción de infinito[40]. Los resultados de esos estudios muestran que las concepciones de los estudiantes sobre el infinito, en la mayoría de los casos están asociadas al rechazo a la posibilidad de obtener una colección infinita; lo cual indica que aun cuando los estudiantes rechacen la existencia de colecciones infinitas, ante la presencia de una colección dada como infinita, ellos tienden a aceptarla pero la asimilan al todo absoluto; esta asimilación conduce a pensar que todos los conjuntos potencialmente infinitos deberían tener siempre el mismo número de elementos, y, por lo tanto, no podrían existir distintas colecciones infinitas en el mismo conjunto, o un infinito mayor que otro.

También se presenta el caso, de que a muchos de los estudiantes les resulta un poco complejo concebir un conjunto infinito diferente al conjunto de los números naturales, como afirma (Waldegg, 1996, p. 112) Los racionales se conciben como un dominio igual y no habría diferencia entre la recta real y la recta racional. Como consecuencia todos los puntos de la recta estarían asociados a números racionales, y los números irracionales no tendrían una realidad dentro del universo numérico.

[40] Nos apoyaremos en las investigaciones realizadas por (Waldegg, 1996): *Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del Infinito Actual*); (Monaghan, 2001): *Young Peoples´Ideas Of Infinity*, y (Montoro & Scheuer, 2003): *Pensando El Infinito. Concepciones de estudiantes universitarios*.

De lo anterior se desprende, que tampoco se manifiesta la identificación punto-número en la recta, que muchas veces se toma como intuitiva o evidente (incluso en los libros de texto). Por lo tanto, muchos alumnos piensan que sí es posible poner en relación los elementos de un conjunto (o de una parte de él) con los números naturales; luego para ellos se puede afirmar que el conjunto es infinito[41]. Finalmente, algunos estudiantes piensan que los conjuntos infinitos son todos iguales, o que nunca pueden ser iguales. Cuando piensan que dos conjuntos son iguales, es porque realizan una comparación entre ambos conjuntos; para el caso cuando se comparan dos conjuntos infinitos existe un grado de complejidad cuando se trata de un conjunto acotado y otro no acotado, pues la concepción de infinito potencial es un obstáculo para comparar correctamente estos dos conjuntos, dado que la infinitud potencial aparece como evidente en el conjunto no acotado, pero permanece oculta en el conjunto acotado, produciéndose así una renuncia ante el problema.

De acuerdo a estas concepciones que poseen los estudiantes podemos decir que cuando el estudiante se enfrenta por primera vez a los conjuntos infinitos, debe aceptar como primera condición que *el todo pude ser igual a la parte* (algo que se rechazó por casi 20 siglos), lo que representa una verdadera contradicción a su intuición. De allí que el papel que la teoría de conjuntos juega en las matemáticas, como organizador del cuerpo teórico, no es del todo evidente cuando se trata del conocimiento escolar.

Las raíces del conflicto se deben buscar en el hecho de que los esquemas intelectuales de los sujetos están construidos, la mayoría de las veces, a partir de situaciones empíricas y se trata de

[41] Esta conclusión se obtuvo simultáneamente de las investigaciones de (Waldegg, 1996 p.109) y del estudio de (Montoro & Scheuer, 2003 p. 11).

extender estos esquemas a las situaciones infinitas; este es el origen de grandes contradicciones y problemas conceptuales en los estudiantes. Lo que se debe hacer es replantear la forma en que se pueda representar estos conceptos de infinitud, que permitan realmente alejar al concepto de una realidad sensible, pues tal vez la mejor manera de representarlo es apelando a las instancia lógicas del sujeto. Para lo cual se considera esencial explicar la naturaleza del infinito en la tradición dominante de las matemáticas actuales: la tradición que acepta la teoría de conjuntos de Cantor y Zermelo y hace uso frecuente de las ideas conjuntistas, puesto que las matemáticas están comprometidas con los conjuntos infinitos.

Por otra parte en (Hauchart & Rouche, 1987) se narran discusiones acerca del infinito, como caso particular están las “paradojas”[42] de Zenón y el debate de Parménides entre la verdad de la razón y la verdad sensible, en el sentido que se afirma que muchos estudiantes manifiestan que aceptan que calculando hay algo por recorrer pero que debería de existir un momento en el cual Aquiles alcance a la tortuga[43], por ejemplo. Se considera que gran parte de la dificultad de la construcción conceptual por los estudiantes se deba a la presencia del infinito actual, (Fischbein, 2001) muestra una serie de ejemplos de influencia tácita que los modelos mentales ejercen en la interpretación de los diversos conceptos matemáticos que entran en el dominio del infinito actual, y estos modelos son los que provocan interpretaciones erróneas, contradicciones y paradojas que generalmente no se logran controlar de manera consiente.

[42] Zenón propuso un cierto número de paradojas, cuatro de las cuales tratan sobre el movimiento. Se dice que con ellas pretendía defender a su maestro Parménides, que había sostenido que el movimiento o el cambio en general es imposible, y también que trataba de atacar a los pitagóricos, que creían en unidades extensas pero indivisibles, los puntos de la geometría. Las cuatro paradojas planteadas sobre el movimiento son distintas, esto debido a las dos concepciones opuestas que habían en ese tiempo a cerca del espacio y del tiempo: una que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo-liso-, y la otra, que el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistía en una sucesión de minúsculos saltos espasmódicos. Los argumentos de Zenón están dirigidos en las dos críticas, las dos primeras paradojas contra la primera y las otras dos contra la segunda.

[43] Estamos haciendo referencia a la segunda paradoja de Zenón, la paradoja de Aquiles y la tortuga, Aristóteles: “Afirma que el objeto que se mueve más lentamente no puede ser alcanzado por el más rápido ya que el perseguidor debe llegar más primero al punto del cual partió el perseguido, de manera que el más lento necesariamente esta siempre en cabeza.” Aristóteles dice entonces que si el objeto que se mueve lentamente cubre una distancia finita, puede ser superado por la misma razón que daba al responder a la primera paradoja, la paradoja de la Dicotomía.

En el trabajo de (Tsamir & Tirosh, 1999) se muestra cómo se pueden aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes, en relación con las representaciones de conjuntos infinitos, para aumentar la conciencia sobre las contradicciones en sus razonamientos, llevándolos hacia el uso de correspondencias biunívocas como único criterio para la comparación de cantidades infinitas, de igual manera (Garbin, 2005) muestra como inciden, no siempre de manera positiva, los contextos las representaciones y los diferentes lenguajes de la matemática sobre la percepción del infinito y sus consecuentes razonamientos asociados a este tema, en estudiantes de 16 y 20 años. En particular muestra las incoherencias de los estudiantes que evocan inconscientemente imágenes contradictorias sobre la misma situación representada en registros semióticos diversos, tendiendo a confundir las representaciones con el concepto en juego. En esta investigación se muestra la forma en que los estudiantes hacen que convivan contemporáneamente imágenes formales (infinito formalizado) con imágenes informales (infinito perceptivo) de la misma situación cognitiva dentro de la transición del infinito potencial al infinito actual.

Una conclusión clara de las reflexiones y resultados presentados es que el infinito matemático presenta dificultades para concebirse como un objeto de conocimiento que las personas pueden construir a partir de su interacción con el ambiente físico y cultural. Tanto el análisis histórico de este concepto realizado en este trabajo como el análisis de resultados de la investigaciones antes señaladas, indican que para que el infinito se convierta en una entidad acerca de la cual es posible pensar y operar, es necesario la intervención de complejos procesos representacionales, los que a su vez requieren la participación en contextos educativos que implique altos niveles de abstracción.

De esta manera, el supuesto de que el infinito actual sea algo accesible directamente, puede convertirse en un serio obstáculo para favorecer la comprensión de este concepto matemático: Para promover que los estudiantes puedan apropiarse de este concepto y así logren ir más allá en su representación intuitiva, es indispensable que la enseñanza matemática prevea entre sus metas una explicitación de las nociones que atañen al infinito matemático; es claro que no se trata de presentar la formalidad matemática a nivel de enseñanza primaria y secundaria, sino de ampliar la concepción usual del infinito.

Además, es necesario dejar claro al estudiante que la manera de pensar en procesos que involucran al infinito es diferente a la manera en que se conciben los fenómenos finitos. Esto permite justificar por ejemplo (a un nivel intuitivo) por que una suma infinita de números positivos en algunos casos es infinita y en otros un número finito. Lo recomendable en este caso es indicar al estudiante que la forma (intuición o lógica) en que se perciben los procesos finitos no se puede aplicar en general cuando se encuentra involucrado un proceso infinito.

3.3 Análisis acerca del conocimiento de los objetos matemáticos infinitos

Es pertinente preguntarnos cómo podemos tener conocimiento de los objetos matemáticos infinitos a pesar de su carácter abstracto y de su relación tan distante con la experiencia. El hecho de que los objetos infinitos sean abstractos y distantes de la experiencia, crea una evidente dificultad epistemológica, producto de la distancia existente entre las matemáticas y la experiencia, desde la concepción de (Paul Benacerraf, 1973, p. 409) se concibe lo abstracto en matemáticas como:

> El concepto de verdad matemática, como se explicó, debe formar parte de una explicación global del conocimiento, de tal manera que nos explique cómo obtuvimos el conocimiento matemático que tenemos. Una semántica aceptable para las matemáticas debe aceptarse a una epistemología aceptable.

Se puede pensar, que basta con explicaciones satisfactorias de las verdades matemáticas, para que se pueda gestar la posibilidad de que esas verdades sean conocibles. La pregunta que nos precede a esto será entonces ¿qué es una explicación satisfactoria? y ¿es acaso posible lograr explicaciones satisfactorias sobre el infinito cantoriano en un curso de teoría de conjuntos? Ahora bien, podríamos afirmar que para explicar el infinito, bastaría con comprender lo que es "finito" y entender el significado de la palabra "no", así se explica lo "no finito", pero se conoce que no es suficiente que partiendo de nuestras experiencias de lo finito, se infiera a partir de esto nuestro significado de lo infinito.

Russell había definido lo que significa que dos clases sean del mismo cardinal utilizando correspondencias biunívocas, (Lavine 1994, p. 204), no realizaba la distinción entre clases finitas e infinitas, en este sentido se define los números infinitos más o menos por inducción, esta idea persistió hasta que Russell en 1957 junto con Whitehead señalaron que:

> La aritmética cardinal usualmente es concebida en asociación con los números *finitos,* pero sus leyes generales también son válidas para los números infinitos, y se pueden demostrar muy fácilmente sin hacer ninguna referencia a la distinción entre lo finito y lo infinito. (Lavine, 1994, p. 204)

Se podría pensar entonces que todo conocimiento acerca de las propiedades del infinito está constituido por el conocimiento general de lo finito, sin embargo no debemos obviar que tenemos conocimientos concernientes a las propiedades del infinito que no son obtenibles de ese modo, entre los cuales están los axiomas de elección y de reemplazo, que mencionamos en el capítulo anterior, así que estos conocimientos no pueden generarse siempre a partir de una definición negativa de lo finito. También se podría pensar que una teoría sobre el tamaño de lo indefinidamente grande, podría llegar a servir como una base intuitiva para la fundamentación de la comprensión del infinito, pues como menciona (Lavine, 1994) “se puede intentar ver que los axiomas de la teoría de conjuntos son extrapolaciones de principios concernientes al tamaño indefinidamente grande”. Esta afirmación la podemos poner en relación con la distinción que hace Cantor entre lo transfinito y lo absolutamente infinito, que será en este caso la contraparte extrapolada de la distinción entre lo finito y lo infinito.

Aunque no se puede afirmar si realmente Cantor se apoyó en una imagen consiente de lo indefinidamente grande, si desarrollo una progresión transfinita[44], en la cual se puede pensar que da un sentido a los puntos suspensivos, en la medida que se asimilan las progresiones infinitas representadas por ellos a las progresiones indefinidamente grandes, en este sentido decimos que Cantor pensaba en los conjuntos en términos de lo que su Dios pudiera hacer con ellos.

De otro lado, es pertinente mencionar que algunas investigaciones en Educación Matemática, han señalado cual puede ser el tipo de conocimiento que tienen los estudiantes sobre los objetos infinitos. No es de extrañar que en la práctica docente notemos las diferencias que existen entre los conceptos concebidos y los conceptos formulados por la Matemática formal. Es durante la década de los años 70 y los primeros años de los 80, cuando se empieza a detectar esta diferencia. (Tall & Vinner, 1981), definieron lo que se conoce como “esquema conceptual”. Inicialmente ellos describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como

[44] Se tiene la siguiente progresión transfinita: $0, 1, \ldots, \infty, \infty+1, \infty+2, \ldots, \infty.2, \ldots, \infty.3, \ldots, \infty^2, \ldots, \infty^3, \ldots, \infty^\infty, \ldots, \infty^{\infty^\infty}, \ldots$

toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática, y explican que el esquema conceptual no necesariamente es coherente en todo momento, en este sentido en (Garbin & Azcárate, 2001, p. 173) se concluye que "los estudiantes pueden pensar imágenes contradictorias en momentos diferentes".

Es usual que en nuestra labor como docentes, se trabaje con estudiantes que se acerquen al no formalizado; en este sentido la intuición que ellos tienen es la que entrará en juego antes y después de formalizarse el objeto matemático, hemos mencionado que el concepto del infinito es contradictorio y complejo. Fischbein (1982) manifiesta que el concepto aristotélico del infinito (infinito potencial) es el que más responde a una interpretación intuitiva del infinito, mientras con el infinito actual no ocurre lo mismo.

> Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea recta que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado "conductual". Una operación potencialmente infinita también tiene un significado "conductual" (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento). Un infinito actual no tiene un significado "conductual", por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva. (Garbin & Azcárate, 2001).

En este sentido es importante reconocer que existe una limitada comprensión y significación a la formalización del infinito cantoriano, ahora bien si realmente se desea que los estudiantes alcance un grado de significación de este objeto matemático, no se debe obviar el verdadero papel que éste juega en los cursos de teoría de conjuntos. Para lo cual es necesario que en estos cursos se forme un lenguaje matemático que contribuya a la significación de este objeto, también es pertinente analizar el programa curricular que se está empleando en estos cursos, pues algunos investigadores como (Tall, 1990) han evidenciado que las inconsistencias en la secuencia de presentación de un tema en el currículo matemático, es una de las causas de las principales inestabilidades en las estructuras matemáticas de los estudiantes. A continuación intentaremos realizar un breve análisis sobre los programas curriculares que se manejan en las Licenciaturas en Matemáticas en el IEP de la Universidad del Valle.

3.4 Consideraciones generales sobre las revisiones de los programas de teoría de conjuntos del IEP de la Universidad del Valle

La revisión de los programas curriculares de Teoría de Conjuntos, ofrecidos para la Licenciatura en Matemática y Física y Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, contempló el periodo comprendido entre los años 2004 hasta 2011, a partir de la exploración, obtenemos en términos generales algunas características principales con respecto a cada programa.

El Programa de *Lógica y Teoría de Conjuntos* (405069M), ofrecido para la Licenciatura en Matemáticas y Física, cuenta con una intensidad horaria de 4 horas de clase presencial semanales, lo cual implica un estudio de ocho horas de estudio individual en la semana por parte de los estudiantes. Cabe resaltar que este programa no ha sufrido cambios en cuanto a su enfoque durante los años del 2004 al 2010, en este sentido, se sigue conservando la misma descripción, objetivos y contenidos, se observan algunas variaciones en la metodología y evaluación dependiendo del docente a cargo.

Ahora bien, este curso de acuerdo a su organización temática pretende realizar un estudio detallado de los elementos de lógica proposicional y de predicados, y así iniciar a los estudiantes en los métodos de demostración. A partir de ese estudio se introducen las nociones claves (básicas) de la Teoría de Conjuntos, y sus operaciones, posteriormente se prevé estudiar los conceptos de relaciones y funciones, para finalizar con un estudio de la noción de equipotencia y cardinalidad de conjuntos finitos.

De otro lado el programa de *Teoría de Conjuntos* (405098M) ofrecido para el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, tiene como prerrequisito el curso de Elementos de Lógica Matemática. El curso cuenta con una intensidad horaria de 4 horas semanales, lo que implica 8 horas de estudio semanal individual por los estudiantes. En ese curso se busca formar en los elementos básicos de la teoría de conjuntos, desde un estudio de los axiomas de ZF, fundamentalmente el axioma de extensión (extensionalidad) y el axioma de elección, para dar paso al álgebra de conjuntos; a partir de allí se da paso al estudio de las relaciones y funciones, con esto se busca un acercamiento breve a la cardinalidad de conjuntos, para estudiar los conjuntos finitos y enumerables, el curso finaliza con un acercamiento a los sistemas numéricos, es decir con la construcción, propiedades y operaciones de los conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$), aunque el cuerpo numérico de los reales se presenta más a manera de información general. Cabe resaltar que este programa no ha sufrido modificaciones y cambios desde el 2004.

A continuación, se ilustra con un cuadro comparativo los contenidos y/o temáticas de los cursos de Teoría de Conjuntos de las Licenciaturas en Matemática ofrecidos por el IEP de la Universidad del Valle.

Lic. Matemáticas y Física (3487)	Lic. En Educación Básica con énfasis en Matemáticas (3469)	Comparación
Lógica proposicional ➢ Proposiciones y Argumentos lógicos ➢ La sintaxis de la lógica proposicional ➢ La Semántica: asignaciones de verdad ➢ Validez de los razonamientos en Lógica proposicional	No se enseña en este curso lógica proposicional	La Lic. En Educación Básica abarca los temas de Lógica proposicional en el curso del primer semestre llamado: Elementos de lógica matemática.
Lógica de predicados ➢ La simbolización el Lógica de predicados ➢ La cuantificación de predicados ➢ Validez de razonamientos el Lógica de predicado	No se enseña en este curso lógica de predicados.	La Lic. En educación básica abarca los temas de lógica proposicional en el curso del primer semestre llamado: Elementos de lógica matemática.
Álgebra de Conjuntos ➢ El concepto de conjunto ➢ Operaciones con conjuntos ➢ El conjunto potencia ➢ Sobre la existencia de conjuntos	**Conjuntos y Axiomática de Conjuntos.** ➢ Elementos de un conjunto ➢ Operaciones con conjuntos ➢ Paradojas de la TC ➢ Axiomática ZFC	Se evidencia la falta de estudio y rigurosidad en el programa de Lógica y Teoría de Conjuntos, acerca de la fundamentación en cuanto a una teoría axiomática como la ZF, así mismo el no estudio del

	➢ El axioma de elección ➢ Conjunto Universal	axioma de elección, que es fundamental para la consolidación de la teoría cantoriana.
Relaciones y Funciones ➢ Pares ordenados ➢ Relaciones ➢ Clases de relaciones: equivalencia y orden ➢ El concepto de función ➢ La biyección y el isomorfismo	**Relaciones y Funciones** ➢ Relaciones: dominio, rango, composición e inversa ➢ Relaciones de orden y de equivalencia ➢ El concepto de función: composición e inversa ➢ Cardinalidad de conjuntos	En el programa de Teoría de Conjuntos no se analiza el concepto de pares ordenados, y en el de Lógica y Teoría de Conjuntos se obvia el estudio sobre la cardinalidad de conjuntos.
Conjuntos Finitos e Infinitos Cardinalidad de conjuntos Los números Naturales Cardinalidad de N Conjuntos numerables y no numerables	**Los Números Naturales** Definición de los números naturales N Principio de Inducción Matemática Orden en N Operaciones en N **Los Números Enteros y Racionales** Construcción de los enteros Z Operaciones en Z Inmersión de N en Z Construcción de los racionales Q Operaciones en Q Inmersión de Z en Q **Introducción a los Números Reales** Cortaduras de Dedekind en TC Construcción de R por cortaduras Operaciones en R Inmersión de Q en R Cardinalidad de Q y R	Los enfoques son distintos mientras uno busca un acercamiento a la cardinalidad el otro, intenta realizar un acercamiento a la construcción y operaciones de los sistemas numéricos.

Se puede determinar entonces, que básicamente ambos cursos, en cuanto a los contenidos teóricos que aparecen en sus programas buscan familiarizar a los estudiantes con los conceptos elementales de la teoría de conjuntos, relaciones y funciones, aunque es importante resaltar que en el curso de *Lógica y Teoría de Conjuntos* (405069M), los conceptos de teoría de conjuntos se muestran de una manera más general, mientras que en el curso de *Teoría de Conjuntos* (405098M) ofrecido para los estudiantes de la Lic. En Educación Básica con énfasis en Matemáticas, en el contenido curricular se evidencia un acercamiento al desarrollo de la axiomática al estilo ZF que junto con el axioma de elección constituyen el fundamento de la teoría cantoriana, empleándose de esta manera un lenguaje formal de la lógica de predicados de primer orden, mostrándose con esto que el curso pretende acercarse al desarrollo de una teoría de conjuntos axiomática, partiendo desde un enfoque intuitivo pero considerando entre sus objetivos el desarrollo de una estructura formal de la teoría, sin embargo se considera pertinente ampliar un poco más la reflexión y estudio hacia los números cardinales y ordinales, que no aparece referenciada como contenido en el programa.

En cuanto al programa de *Lógica y Teoría de Conjuntos*, se evidencia un acercamiento intuitivo a la teoría, en este sentido de acuerdo a los análisis históricos trabajados en el segundo capítulo, se puede decir que es necesario e importante ahondar más en la axiomática ZF, que como se mencionó anteriormente es la clave para la consolidación de la teoría de conjuntos cantoriana. También es necesario resaltar que se evidencia una falta de estudio al concepto de cardinalidad y aritmética ordinal.

Ahora bien, teniendo presente que los contenidos que aparecen en un programa no siempre son los que se enseñan ni trabajan en él, es importante contrastar un poco el contenido temático propuesto en los programas curriculares de los cursos de teoría de conjuntos con los contenidos que realmente se enseñan en estos cursos, para ello se llevó a cabo una serie de entrevistas con algunos profesores del Instituto de Educación y Pedagogía del área de Educación Matemática y de la facultad de Ciencias del departamento de Matemáticas, de la Universidad del Valle, que han trabajado en estos cursos durante los últimos 5 años.

3.4.1 Análisis de las entrevistas realizadas a los docentes

El propósito inicial de estas entrevistas era profundizar en los aspectos sobre la manera en que se trabaja en los cursos de teoría de conjuntos ofrecidos a los programas de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física, de la Universidad del Valle aspectos que no están clarificados en los programas de los cursos. Para lo cual se entrevistaron 5 docentes, que han orientado éstos cursos para los programas ofrecidos por el área de Educación Matemática del IEP, de los docentes entrevistados se tienen que dos docentes pertenecían al IEP y tres de ellos al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle, los tres docentes entrevistados del departamento de matemática, son dos docentes que bajo la vinculación de hora cátedra han estado orientando durante los últimos cuatro semestres los cursos de Elementos de Lógica Matemática (405047M), Teoría de Conjuntos (405098M) y Lógica y Teoría de Conjuntos (405069M), ofertados por el IEP, para los programas de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física; y un docente nombrado del departamento de Matemáticas, que ha orientado en algunas ocasiones los cursos de Lógica y Teoría de conjuntos (405069M) y de Análisis I (111034M) en el programa de la Licenciatura en Matemáticas y Física del IEP. Los objetivos específicos pretendidos con la realización de la entrevista consistieron en obtener información sobre: la opinión de los docentes en cuanto a la importancia de los cursos de teoría de conjuntos para la formación de futuros docentes, los conocimientos matemáticos que son abordados en los cursos, y las dificultades e inconvenientes que ellos han presentado en la ejecución de los cursos.

A continuación presentamos el guión de entrevista utilizado, formulando las preguntas de acuerdo a los objetivos propuestos y una síntesis de las principales respuestas dadas por los docentes:

Primer objetivo: *Conocer la opinión de los docentes sobre la importancia de la teoría de conjuntos para la formación de futuros docentes*. Respecto a este objetivo se formularon las siguientes preguntas:

• ¿Crees que la teoría de conjuntos es útil para la formación de maestros?, ¿Y para su desempeño profesional?

• ¿Consideras que los contenidos presentados en los programas de los cursos de *Teoría de Conjuntos* y *Lógica y Teoría de Conjuntos* son pertinentes para una adecuada formación de un futuro docente?

• ¿Consideras que el tiempo que está contemplado, para enseñar los contenidos de los cursos de teoría de conjuntos, es suficiente para que los estudiantes asimilen eficientemente los conceptos trabajados en el curso?

Con respeto a este primer objetivo todos los docentes están de acuerdo que un curso de teoría de conjuntos es fundamental y útil para la formación profesional de un futuro docente, especialmente porque este tipo de cursos contribuye a la preparación y fundamentación matemática de un futuro profesor; sin embargo manifiestan que hay problemas en cuanto a la presentación de los contenidos que aparecen en los programas, mencionan que estos son pertinentes pero no suficientes, además aseguran que de acuerdo a la asignación del tiempo trabajado en el curso, éste no es suficiente para que los estudiantes logren asimilar los contenidos trabajados en los cursos.

Segundo objetivo: *Indagar sobre los conocimientos matemáticos que son abordados en los cursos*. A este fin se propusieron las siguientes cuestiones:

• ¿Los contenidos propuestos en los programas de *Teoría de conjuntos* y de *Lógica y teoría de conjuntos*, son abarcados en su totalidad?

• ¿Desde tu experiencia como docente consideras pertinente el contenido temático del curso?

• ¿Cuáles son los conceptos que más trabajan en los cursos?

• ¿Consideras que los estudiantes llegan a los cursos con los conocimientos previos adecuados para un trabajo formal dentro de los elementos conjuntistas?

• ¿De qué manera presentas o introduces la axiomática de ZFC?

• ¿Enseñas el axioma de elección, y el de reemplazo? ¿Trabajas el concepto de buen orden?

• ¿Realizas un acercamiento al estudio de los conjuntos numerables y no numerables?

• ¿Cuál es el propósito fundamental de cada curso, desde tu experiencia?

Con respeto a este segundo objetivo, los docentes que han trabajado el curso de *Lógica y Teoría de Conjuntos,* mencionan que nunca logran abarcar los contenidos propuestos en su totalidad, ellos manifiestan que para la primera parte del curso concerniente a los conceptos de lógica se llevan mucho tiempo, además aseguran que los elementos de lógica que se contemplan en el curso son fundamentales, motivo por el cual deciden dedicar un buen tiempo y trabajo en este aspecto, lo que hace que no se pueda trabajar con profundidad los elementos de la teoría de conjuntos. De acuerdo a las respuestas, se tiene además que los docentes que han orientado el curso de *Teoría de Conjuntos* y el de *Lógica y Teoría de Conjuntos,* consideran que los estudiantes no llegan con los suficientes prerrequisitos para los cursos, por lo cual recurren a emplear un acercamiento intuitivo para presentar los elementos de la axiomática de ZFC, manifiestan que aunque en ocasiones han querido hacer un acercamiento formal a estos elementos, los estudiantes no lo comprenden porque carecen de fundamentos en los procesos de demostración matemática. En el curso de *Teoría de Conjuntos* trabajado con los estudiantes de la Lic. En educación Básica, trabajan el axioma de elección, el de reemplazo y el principio de buen orden, pero desde un punto de vista intuitivo, estos conceptos no son trabajados en el curso que se ofrece a la Licenciatura en Matemáticas y Física, para este curso se trabaja los elementos de la lógica proposicional y de predicados, y seguidamente las operaciones con conjuntos sin tomarse mucho tiempo en esta parte, pues los docentes consideran que lo relevante está más en el trabajo con respeto a los conceptos de relaciones y funciones y es a esto lo que dedican el mayor tiempo.

Tercer objetivo: *Conocer las dificultades e inconvenientes que ellos presentan como docentes, en la ejecución de los cursos*. Las preguntas formuladas para este propósito fueron:

• ¿Consideras que los cursos se encuentran programados en el semestre adecuado para los estudiantes?

• ¿Consideras que la intensidad horaria ofertada por cada curso es la adecuada?

• ¿Crees que los contenidos propuestos en los programas son pertinentes?

• ¿Cuáles son los temas o contenidos que tienen mayor dificultad para los estudiantes, de acuerdo a tu experiencia como docente?

• ¿Qué cambios le realizarías a los cursos?

Los docentes manifiestan que los cursos están bien ubicados semestralmente, pero que el problema radica en los conocimientos con los cuales los estudiantes llegan al curso, ante esto sugieren que se revisen los contenidos trabajados en los cursos de los primeros semestres en especial de los cursos de Matemática Fundamental, para los estudiantes de la Lic. En Matemáticas y Física, y los contenidos de los cursos de Números y Operaciones, e Introducción al Álgebra, para los estudiantes de la Lic. En Educación Básica con énfasis en Matemáticas. De los cambios que realizarían a los cursos esta aumentar el número de horas asignadas, otro cambio fundamental es la separación del curso de *Lógica y Teoría de Conjuntos* en dos cursos uno de Lógica Matemática y otro de Teoría de Conjuntos, pues realmente argumentan que nunca se puede enseñar adecuadamente en el tiempo previsto los contenidos propuestos, al final o se trabaja un buen curso de Lógica y no se hace Teoría o cuando trabajan los elementos de la Teoría de Conjuntos, no trabajan casi los elementos de la Lógica como están contemplados en el programa.

3.4.1.1 Conclusiones de las Entrevistas

De acuerdo a las entrevistas realizadas se puede concluir que los docentes que han trabajado estos cursos, consideran que es necesario una reformulación al contenido temático abordado, esto lo sustentan teniendo presente la formación que se desea en los estudiantes, en este sentido, es fundamental revisar los prerrequisitos que se necesitan para los cursos, por lo cual es necesaria una reflexión sobre la pertinencia de la ubicación semestral de los cursos de acuerdo a la malla curricular que tienen los estudiantes, en sus respectivos programas de formación.

Los docentes que han ofrecido el curso de *Teoría de Conjuntos*, para la licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas consideran que de acuerdo al contenido temático propuesto en el programa es necesario, que los estudiantes requieran una madurez mental mucho mayor, pues muchos de los contenidos necesitan procesos de rigor en la medida que se espera de acuerdo al programa trabajar aspectos concretos de la axiomatización de la teoría cantoriana con la axiomática de ZF, y en ocasiones los estudiantes desconocen incluso los métodos de demostración que se emplean en matemáticas, pues no han tenido previamente una preparación adecuada en aspectos formales de matemáticas, en este sentido el acercamiento a los aspectos axiomáticos se termina trabajando en aspectos netamente intuitivos, con poco rigor, el concepto de infinito se aborda a través de la inducción matemática pero se excluye una profundización sobre la diferenciación entre el infinito actual y el potencial, en este sentido, podríamos inferir que el curso en realidad no contempla realmente un estudio a los aspectos centrales de la teoría de conjuntos, de acuerdo a lo consignado en el capítulo II, pues la mayor parte del trabajo del curso la dedican los docentes a las construcciones de los números naturales y posteriormente la construcción de los enteros y racionales, por lo general la última unidad que concierne a la construcción de $\mathbb{R}$ nunca se alcanza a trabajar por cuestiones de tiempo, y si en ocasiones se aborda solo se maneja de manera muy superficial, pues los estudiantes no tienen buenos fundamentos en matemática como para seguir las demostraciones y discursos que este tema conlleva.

Ahora bien, en cuanto a los docentes que han trabajado el curso de *Lógica y Teoría de Conjuntos*, para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física, consideran urgente una reforma curricular, en la medida que el curso de acuerdo a su organización temática pretende realizar un estudio detallado de los elementos de la lógica proposicional y de predicados, y así acercar a los estudiantes en los métodos de demostración, matemáticos, a partir de este estudio se introducen las nociones claves (básicas) de la teoría de conjuntos, y sus operaciones, cabe resaltar que no se logra un acercamiento formal y riguroso a la teoría en la medida que los estudiantes carecen de muchas bases conceptuales en cuanto a los procesos de formalización dentro de la matemática, en este sentido el trabajo con los objetos matemáticos de la teoría de conjuntos, se realiza de manera intuitiva en la mayoría de los casos, además que dentro del curso no está contemplado el trabajo del axioma de elección, ni de reemplazo[45], por lo cual en no se puede hablar de una verdadera teoría de conjuntos, pues como mencionamos en el capítulo II de acuerdo al análisis histórico se evidencia que si dentro de la teoría de conjuntos se excluye de ella el axioma de elección, a pesar de todo el carácter controversial y polémico que este encierra en sí mismo, no se tiene realmente una teoría de conjuntos cantoriana.

Cabe mencionar que en el programa del curso se propone un estudio a los conceptos de relaciones y funciones, la noción de equipotencia y cardinalidad de conjuntos, conjuntos numerables y no numerables, los cuales en la mayoría de los casos no se logran abarcan plenamente y con profundidad, esto se debe al diseño del programa temático ofrecido para el curso, pues como está contemplado se prevé para un solo semestre la realización de dos cursos uno de lógica y otro de teoría de conjuntos, lo cual es desbordante de acuerdo al tiempo con el cual se cuenta en el semestre, que en promedio contempla 17 semanas incluyendo la evaluación de los conceptos trabajados.

[45] Es importante reconocer que en un curso básico de conjuntos este axioma es fundamental y necesario para demostrar es decir, justificar formalmente el teorema general de Recursión para ordinales, lo que garantiza la buena definición de las operaciones de ordinales y por ende las de los cardinales.

Es importante resaltar que los aspectos esenciales y principales de la axiomática de ZF, no se pueden trabajar con profundidad, generando esto un estudio muy intuitivo y escueto sobre los objetos sobresalientes de la teoría, ante esto la mayoría de los profesores consideran, que el propósito básico del curso más que ahondar sobre los verdaderos aspectos matemáticos que gestan la teoría de conjuntos cantoriana, lo que se prevé es mostrarles a los estudiantes un acercamiento intuitivo a los sistemas numéricos, quedándonos allí una pregunta para tener en consideración qué es lo que realmente se requiere para la formación superior de un futuro docente de matemáticas, y si no se abarca realmente aspectos esenciales de la teoría cantoriana, con lo cual la teoría de conjuntos dejaría de ser teoría, no es más pertinente replantear los programas curriculares, buscando quizás una reflexión y acercamiento intuitivo a la teoría y no pretender la formación plena en ella.

Se concibe fundamental una renovación y cambio curricular[46] en los programas de Teoría de Conjuntos ofrecidos en el IEP para las Licenciaturas en Educación Matemática, en la medida que es urgente reflexionar sobre cuál es el tipo de conocimiento matemático que necesita un docente en formación y en ese sentido que se debe llevar al aula. A partir del análisis histórico se evidencian algunos obstáculos epistemológicos en la matematización del infinito actual, estos obstáculos constituyen entonces una dificultad a superar en los programas de formación ofrecidos a los estudiantes de las licenciaturas en matemática.

[46] Entiéndase renovación curricular como toda generación de acciones pedagógicas, que permiten de una u otra manera la reflexión sobre las posibles formas alternativas de entender los procesos de enseñanza y aprendizaje y la misma constitución del conocimiento matemático.

Se puede decir que es pertinente reconocer los obstáculos epistemológicos, ya que ellos surgen, emergen y se deben superar dentro de todo proceso de aprendizaje a través de la confrontación entre las adquisiciones de los nuevos conocimientos y las antiguas que se tuviesen al respecto de estos, en este sentido es necesario analizar que no basta con presentar programas curriculares donde los contenidos temáticos se organicen con una secuencia lineal, pues lo que se suele presentar es simplemente trozos de un saber institucionalizado.

3.5 Reflexiones sobre algunos obstáculos epistemológicos en la conceptualización del infinito cantoriano

Es usual que se tengan modelos del infinito como procesos sin fin, aceptándose el infinito en su sentido potencial ligado básicamente a la numerosidad de los naturales (como el conjunto infinito por excelencia) hallado a partir de la inducción, podemos inferir que este obstáculo no se aborda realmente en los cursos de Teoría de Conjuntos pues los acercamientos hacia los conjuntos infinitos se realizan la mayoría de los casos por procesos inductivos.

Otro aspecto obstáculo epistemológico se presenta con la aceptación del axioma euclidiano que caracteriza el todo como mayor que la parte, característica de los conjuntos infinitos, este axioma, se constituye en uno de los obstáculos necesarios de superar, a fin de comprender una de las características fuertes de los conjuntos infinitos.

Por otra parte no se pueden obviar los problemas que pueden llegar a generarse al hablar de “lo mismo” y “cuantos”, se ha definido que dos conjuntos son equivalentes por cardinalidad si se puede establecer una correspondencia uno a uno y sobre entre ellos, y el cardinal de un conjunto es la característica que tienen en común con todos los conjuntos con los es equivalente y que lo distingue de ellos con los que no lo es para lo finito; en este sentido se podría anotar que se tiene una experiencia con los números del conteo en el infinito, esta diferencia puede verse como un obstáculo ante la ausencia de nombres cotidianos para designar "cuántos hay", pues el hecho de reconocer la igualdad por biyección no es visto como posibilidad de asignar el cardinal, incluso es menos posible pensarse en diferentes cardinales infinitos.

En este sentido, se puede decir que el efecto del hundimiento de los cardinales transfinitos, se puede dar en la medida que se asuma que todos los conjuntos infinitos tengan el mismo número de elementos, de lo que se puede inferir que no es posible determinar un orden, en la medida que solo existiría uno el infinito, así pues se tendría un nuevo obstáculo ligado a una imposibilidad de aceptar y reconocer como nuevo conocimiento, la existencia de otros números transfinitos, y reconocer la existencia de una regla diferente a la de una adición para construir el siguiente número, una regla que realmente constituya y ordene.

Uno de los mayores obstáculos que se presenta tiene que ver con la negación de la noción común 5 de Euclides, "El todo es mayor que su parte": esto representa un fenómeno clásico conocido en la literatura como una *dependencia*, en este caso una dependencia de la cardinalidad de la "magnitud" de los conjuntos numéricos, por ejemplo dado que el conjunto de los números pares es un subconjunto del conjunto de los naturales, se cree que el primero debe estar constituido por un número menor de elementos, otro ejemplo si se tienen dos segmentos que no se sobreponen, tienen más puntos el segmento de longitud mayor. Este fenómeno de *dependencia* se encuentra en las investigaciones de (Arrigo & D´Amore, 1999, 2002) con estudiantes suizos e italianos de la escuela secundaria superior, también éste fenómeno de dependencia de cardinales transfinitos de hechos relacionados con medidas, ya había sido identificado por Fischbein, Tirosh & Hess desde 1979, y había sido discutido por Tall en su artículo de 1980.

Por otra parte (Sbaragli, 2004, 2006) estudia cómo se encuentra radicada la presencia de la dependencia en los profesores de primaria y secundaria, tanto en el ámbito geométrico como en el aritmético, que sucede debido a la generalización, forzada y falsa, de lo que se ha aprendido acerca de la correspondencia biunívoca en casos finitos y su aplicación a casos infinitos. Uno de los fenómenos más fuertes de la *dependencia* en el ámbito geométrico se vincula con la idea de segmento concebido como un collar de perlas, es decir el segmento considerado como hilo-segmento formado por perlas (puntos) en contacto una con la otra. Este modelo se basa en misconcepciones sobre el punto matemático, considerado como ente, que tiene una dimensión y unas formas determinadas, así como ideas erróneas relacionadas con la topología de la recta. (Arrigo, D´Amore & Sbaragli, 2011, p. 129).

Otro fenómeno que se tiene, es el de aplastamiento, que consiste en la convicción de que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad, es decir que todos los conjuntos se pueden poner en correspondencia biunívoca entre ellos. Este es un debate fuerte y denso, y durante mucho tiempo fue causa de malentendidos y controversias entre los más grandes estudiosos de la antigüedad, como se mostró en el segundo capítulo, donde se evidencia que solo se alcanza su conciencia matemática hacia finales del siglo XIX. Pues bien las investigaciones nos muestran que el debate continúa en el ámbito didáctico, con la dificultad que presentan los estudiantes, para pasar de lo denso a lo continuo y para entender como en lo denso hay digamos más huecos, que espacios llenos para pasar al continuo. Este fenómeno fue mostrado por (Waldegg, 1993) y (Tsamir & Tirosh, 1994), mediante el análisis de las intuiciones y las representaciones que se hacen los estudiantes en sus intentos por establecer una correspondencia biunívoca entre conjuntos infinitos, además, el aplastamiento ha sido tratado con base en algunos aportes de la escuela de Tel Aviv, con (Fisbein, Jehiam & Cohen, 1994, 1995), quienes mostraron las dificultades de los estudiantes para pasar de lo denso a lo continuo, revelando las dificultades que se tienen, incluso con los estudiantes de último año de secundaria en el intento de construir correctamente la idea de número irracional.

Es importante notar que la literatura ha referido a que una vez que los estudiantes aceptan que los conjuntos como $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ deben tener la misma cardinalidad, resulta muy frecuente generalizar que todos los conjuntos infinitos tienen necesariamente la misma cardinalidad, mis concepciones que como se muestra en (Arrigo & D´Amore, 1999, 2002) y (Sbaragli, 2006), no depende solo de un obstáculo epistemológico, sino también de obstáculos didácticos.

Tanto el fenómeno del *aplastamiento* como el de *dependencia*, se basan en la generalización a los casos infinitos de todo lo que se ha aprendido acerca de la correspondencia biunívoca en los casos finitos (Arrigo, D´Amore & Sbaragli, 2011, p. 131). Por otro lado, (Bagni, 2001) muestra como la diferencia entre la concepción potencial y actual del infinito y del infenitesimo se debe considerar en un sentido amplio, ya que refleja elecciones filosóficas que van mucho más allá de las bien importantes implicaciones didácticas, el autor muestra que la concepción potencial de infinito e infinitésimo se puede reconducir fácilmente a la descripción de un proceso, mientras que la concepción actual de los mismos se refiere más exactamente a un objeto.

En este sentido (Fischbein, 1998) cita un ejemplo en el que presenta la forma en que el infinito potencial es aceptado de manera intuitiva entre los estudiantes de secundaria y los primeros años de universidad, a diferencia del infinito actual:

> (…) la investigación nos ha mostrado que, mientras un infinito potencial puede ser entendido, comprendido, aceptado, captado intuitivamente, como un proceso ilimitado, un infinito actual no puede ser captado intuitivamente como una cantidad determinada. Por esta razón, los problemas que contienen operaciones con infinitos actuales conllevan a profundas dificultades intuitivas" (Fischbein, Tirosh, Hess, 1979)

Todas las investigaciones presentadas, tienen como objeto demostrar que la presencia de obstáculos epistemológicos bloquea o inhibe las intuiciones primarias de los estudiantes, intuiciones erróneas que resultan ser análogas a las encontradas en la historia de la matemática y que permiten explicar algunas de las dificultades que se pueden presentar en el proceso de aprendizaje. Estos obstáculos son los que se pueden rastrear en la historia de los conceptos mismos, cuando se identifica una ruptura o un cambio de concepciones, y en consecuencia no son más que un espejo de los obstáculos que se encuentra el estudiante durante la adquisición del conocimiento.

A partir de estos resultados, se demuestra que tanto desde el punto de vista histórico como desde lo relacionado con el aprendizaje de los conceptos de infinito matemático, la evolución del concepto actual es muy lenta, a menudo sucede de manera contradictoria, y se da solo gracias a un proceso de sistematización y maduración cognitiva de los aprendizajes.

Sabemos que el obstáculo epistemológico, entendido en el sentido clásico de (Brousseau, 1983), es un conocimiento estable que funciona bien en ámbitos anteriores, pero que crea problemas y errores cuando se lo intenta adaptar a nuevas situaciones. Por tanto un obstáculo epistemológico debe entenderse como un conocimiento, no como ausencia del mismo; no obstante es un conocimiento que bloquea posteriores conocimientos sobre el mismo tema, cuando se intenta ampliarlo. En (Arrigo & D´Amore, 1999) se afirma que para superar tal obstáculo es necesario un nuevo aprendizaje y en (Tasmir, 2000) se destaca que las dificultades para conceptualizar correctamente el infinito no están solo entre los estudiantes, sino entre los docentes y docentes en procesos de formación, de allí la necesidad de tener más en cuenta este contenido temático en la formación, evidenciando los obstáculos didácticos y considerando el papel central de la intuición, así como la importancia de los aspectos históricos, como la clave de lectura para la comprensión de temas temáticos.

Podremos inferir entonces que si el infinito se usa solo como adjetivo, será difícil de tratar como sustantivo, de este modo se refuerza la visión potencial dejando de lado la actual; otro ejemplo si por infinito se entiende algo muy grande, ese algo será transformado en un número natural con evidentes contradicciones, incluso si infinito se entiende como ilimitado, resultara difícil admitir más adelante a un objeto limitado pero infinito, como el conjunto ordenado de puntos de un segmento, finalmente, si el infinito se equipara con lo indefinido, adquirirá un significado negativo o evasivo.

Decir que un conjunto es infinito si está formado de infinitos elementos ciertamente no puede considerarse una definición, como mencionan (Arrigo, D´Amore & Sbaragli, 2011), por el hecho de que el mismo adjetivo aparece tanto en el definiendum como en el definiens y, entonces, resultamos en un círculo vicioso. Recordemos que una definición de infinito es la de Cantor-Dedekind: “un conjunto es infinito cuando puede ponerse en correspondencia biunívoca con una parte propia”. A partir de la historia de la matemática: esta decisión parte de la conciencia de tener que erradicar las convicciones influenciadas por obstáculos epistemológicos.

También es pertinente resaltar, que el tratamiento de los conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (que es lo que se busca finalmente dentro de los cursos de teoría de Conjuntos ofrecidos por el IEP para las Licenciaturas en Matemáticas), puede llegar a reforzar la idea de que un subconjunto propio tiene menor cardinal que dicho conjunto. Pero no se reconoce la posibilidad de ser diferentes en una medida pero iguales en otra (el problema de la cardinalidad).

Para finalizar podríamos decir, que es primordial incorporar también dentro de las temáticas en la formación de profesores, los obstáculos epistemológicos que se generan con la matematización del infinito actual, con esto se quiere insistir en que la formación de los futuros profesores de matemáticas requiere del abordaje tanto del contenido matemático (epistemológico), como de las posibles explicaciones, significaciones, comprensiones que los estudiantes y docentes puedan tener en algún momento especifico, y que pueden corresponder a obstáculos epistemológicos.

No debe obviarse además, que siempre es importante para un curso de teoría de conjuntos presentar un análisis más o menos formal y riguroso sobre los conceptos de número y de infinito; se sustenta esta afirmación de la consideración que la práctica matemática ha sufrido transformaciones desde el siglo XIX, por ejemplo cuando una demostración a partir de supuestos explícitos se convirtió en una condición suficiente para considerar verdadero un teorema. Ahora bien, ¿por qué debemos considerar a los conjuntos infinitos de las matemáticas como conjuntos completos actualmente infinitos, y no simplemente como conjuntos potencialmente infinitos, es decir objetos incompletos que son íntimamente incrementables? Una razón para esto es que los conjuntos obedecen el axioma de extensionalidad, de hecho se puede afirmar que para considerar los conjuntos infinitos como actualmente infinitos, es necesario definir un número real como la mínima cota superior de un conjunto acotado de números reales. Pero la mínima cota superior de un conjunto acotado de números reales, bien puede ser un miembro del conjunto. Así, la usual definición de la mínima cota superior seria inadecuada si el conjunto fuera potencialmente infinito. En este sentido el principio de que los conjuntos son actualmente infinitos debe aplicarse a los conjuntos en general, no solo a los conjuntos de los números reales.

Capítulo 4.

4. EL PAPEL DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS COMO UNA CONTRIBUCIÓN A LOS PLANES DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL IEP DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

A lo largo de este capítulo se intentará estudiar el papel que juega la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas, anudado[47] al análisis histórico-epistemológico que se desarrolló en los capítulos anteriores, con el fin de justificar que para la formación matemática de un futuro docente, es necesario contemplar el estudio de las nociones básicas de la teoría de conjuntos; pues ésta se concibe como fundamental en la organización de los conocimientos matemáticos, especialmente por el papel de las nociones conjuntistas que se requieren en las diversas construcciones de los conjuntos numéricos. (Saenz, Arrieta & Pardo, 1988) indican que la teoría de conjuntos produce dentro de las matemáticas más que un cambio de contenidos, un cambio de lenguaje: el lenguaje conjuntista, así las rectas de plano son consideradas como conjuntos de puntos, los números, las clases de equivalencia, etc.

La importancia de la teoría de conjuntos dentro de la matemática como un lenguaje unificador, propicio la reforma de la enseñanza de las matemáticas conocida como “matemática moderna”, en la cual se dio un fuerte énfasis a los contenidos conjuntistas en los contenidos de educación básica y media, modificando contenidos de programas, textos y metodologías, por un poco más de dos décadas. Sin embargo, después de la gran difusión a nivel internacional de esta reforma en

[47] El estudio se desarrolla con respecto a las conclusiones obtenidas en los capítulos previos, en la medida que se justifica que los análisis de tipo histórico-epistemológico contribuyen a la educación matemática, para clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos y así poder estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos objetos.

la década de los 80 se habla sobre el "fracaso de la matemática moderna" (Sierra, 1989). Además es pertinente reconocer, que a pesar de la importancia que se le otorga a la teoría de conjuntos para la enseñanza de las matemáticas, también se produjeron muchas críticas en su enseñanza para la educación básica y media, entre los críticos se encontraban grandes matemáticos como: Feynman (1965), Kline (1973), Freudenthal (1983), etc. y en consecuencia de las críticas realizadas se decide suprimir los contenidos conjuntistas en estos niveles.

Sin embargo, actualmente varios países continúan presentando un estudio de la teoría de conjuntos en los currículos de matemáticas para la formación de maestros, como ocurre en Colombia, en los programas curriculares para la formación de licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas, y los licenciados en matemáticas y física, del IEP de la Universidad del Valle, programas enmarcados a la formación de docentes de matemática de educación básica y media.

En este sentido es que se pretende estudiar, cuál es el papel que la teoría de conjuntos juega en los procesos de formación, con el fin de presentar una propuesta para la enseñanza de la misma en los planes de formación de docentes de matemáticas del IEP de la Universidad del Valle.

4.1 Importancia de la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas

Se puede inferir a partir de nuestra experiencia, primero como estudiantes de matemáticas y en segundo lugar como profesores, que los contenidos de la teoría de conjuntos son una herramienta fundamental para el estudio de la matemática, dado que los conjuntos son los que en cierta medida han ayudado a renovar los fundamentos de las matemáticas. En este sentido para que un futuro licenciado de matemáticas pueda comprender con mayor facilidad los contenidos de los otros cursos de formación matemática avanzada como son: cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, álgebra moderna, álgebra lineal, análisis matemático, topología y geometría diferencial, etc. que conforman los currículos de las licenciaturas en educación básica y educación media, deben entonces poseer por lo menos las nociones básicas de la teoría elemental de conjuntos.

Es importante tener presente, la manera como aparecen los conceptos conjuntistas. A partir de las matemáticas tradicionales, se resalta que al inicio Cantor no se ocupó fundamentalmente de la teoría de conjuntos, sino de temas matemáticos más tradicionales, con lo cual logra revolucionar las matemáticas al hacer derivar de la teoría de conjuntos otro tipo de investigaciones que aparentemente no tenían que ver con ella. De esta manera la noción de conjunto se revelo como una noción básica de las matemáticas, en la medida que sobre ella es que logra definir las nociones de números cardinales y números ordinales.

Ahora bien, según (Ferreirós, 1998), a partir de la segunda mitad del siglo XIX, la noción de conjunto fue esencial para la nueva consideración del álgebra que se estaba planificando e incluso para la nueva comprensión de los fundamentos de la geometría; en este sentido, la teoría tiene un carácter fundacional de la matemática en general, también (Godement, 1974) señala que sin las nociones de conjunto y de función no se puede hacer nada en matemática y con ellas por el contrario se puede hacer todo.

> Actualmente se considera a la teoría de conjuntos (salvo, tal vez, las partes de la teoría de conjuntos que son todavía muy discutidas; en particular, la teoría de números transfinitos) como la base sobre la cual se apoyan las diversas ramas de las matemática" (Santorino, 2000, p. 63), citado por (Arrieche 2002, p. 83)

Se considera, entonces, que la teoría de conjuntos es clave para entender muchos de los avances de la matemática y las mismas aplicaciones que ésta ha tenido en otras ramas de la ciencia; en este sentido es que se considera indispensable establecer la matemática sobre bases más sólidas, por ende en la enseñanza de las matemáticas se deben de contemplar el trabajo con estos elementos fundacionales de la matemática que se encuentran en la teoría de conjuntos[48].

En la introducción del texto de (Dedekind, 1888) ¿Qué son y para qué sirven los números?, Ferreirós[49] menciona que las teorías de Dedekind propusieron basar la fundamentación del sistema numérico en la teoría de conjuntos; así pues, los números naturales quedan caracterizados como conjuntos dotados de ciertas operaciones internas que le confieren una estructura algebraica particular, además los demás tipos de números se obtendrán por construcción de conjuntos hasta que se alcance el cuerpo de los números complejos, y las operaciones se desarrollarían sobre la base de un sucesor por extensiones progresivas.

El papel desarrollado por Dedekind dentro de la teoría de conjuntos es fundamental, en la medida que para él toda la matemática pura se puede considerar como un edificio construido sobre fundamentos conjuntistas (Ferreirós, 1993), este matemático elaboró las definiciones conjuntistas básicas de los conjuntos de los números naturales, enteros racionales y reales.

---

[48] (Klimovsky, 1993, p.12), citado por (Arrieche, 2002), menciona que: "*no es posible comprender cómo se investiga en matemática y en que consiste, sin entender qué son los conjuntos y que propiedades tienen".*

[49] José Ferreirós, realiza la traducción e introducción del texto de R. Dedekin: ¿Qué son y para qué sirven los números?, a través de la alianza editorial, en 1998.

En este sentido, “Dedekind tuvo una gran influencia en que todas las ramas de la matemática se hayan impregnado de la nociones de la teoría de conjuntos” (Arrieche, 2002, p.83). Una razón más por la cual se puede ver porque en la actualidad los contenidos que conforman el currículo de matemáticas en distintos niveles educativos involucran, implícita o explícitamente nociones conjuntistas básicas, como caso particular se ven los programas de formación de maestros de matemática del IEP y los documentos oficiales del MEN (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas).

Por ende, se considera que los futuros docentes de matemática requieren de un manejo adecuado de los contenidos elementales que se incluyen en los niveles de educación básica y media, uno de los cuales es el estudio de los conjuntos numéricos (números naturales, enteros, racionales y reales) y sus operaciones aritméticas.

4.2 La formación de maestros a través de la teoría de conjuntos

Aunque después de la implementación de las matemáticas modernas en 1960 y las críticas realizadas por muchos matemáticos para suprimir su estudio de los planes curriculares de la primaria y secundaria, de los libros de texto de matemáticas escolares, incluso (Zazkis & Gunn, 1997), citados en (Arrieche, 2002), resaltan que ni siquiera en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática del National Council of Teacher Mathematics (NCTM, 1989) se mencionaron conceptos de teoría de conjuntos. Se puede decir que estas posiciones no fueron suficientes para abolir por completo la teoría de conjuntos de los currículos de los cursos de matemática, especialmente de los cursos que se proponen a un nivel universitario.

En esta medida podemos decir, que la teoría de Conjuntos continua presentando un papel fundamental dentro de la matemática y dentro de la formación de docentes de matemática, en particular en Colombia, pues es notorio encontrar que en casi todos los cursos ofrecidos para los maestros en formación matemática se ofrece un tema introductorio a la teoría de conjuntos, en estudios realizados por Zazkis y Gunn (1997) se evidencia como la mayoría de los textos de matemáticas para los maestros en formación, tienen incluido un capítulo sobre teoría de conjuntos. Destacando además, que la mayoría de los temas habituales para los docentes en formación, son el estudio de los números naturales, las formas geométricas y transformaciones, los números racionales, la teoría de números, el análisis de datos, temas que están relacionados con la educación básica y media.

Se considera así, que los conceptos de la teoría de conjuntos son una preparación para los fundamentos de las matemáticas, y en este sentido una base para que los maestros logren ampliar los conceptos que se esperan sean los enseñados.

4.2.1 Pertinencia de las nociones conjuntistas que requieren los docentes en formación

Se resalta, que los futuros docentes de Educación Básica y Media tienen que enseñar implícita o explícitamente nociones conjuntistas como los números naturales, racionales, reales, sus relaciones y operaciones, el estudio de procesos infinitos, la probabilidad, etc. y esto se ve contemplado en los Estándares Curriculares de Matemática. En este sentido es que se justifica, enseñar a los futuros docentes de matemática, las nociones conjuntistas básicas, aunque sea de una forma intuitiva o informal. Pues como se menciona en los Lineamientos Curriculares (1998, p.16) desde la década de los 80 se empezó a reconocer a nivel mundial que el énfasis dado en la matemática básica a lo estructural había sido exagerado y de consecuencias negativas, y es a raíz de esto que se busca resaltar el valor de lo empírico y lo intuitivo en los procesos de construcción matemática de la escuela.

> En los estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (NCTM, 1989), sentido numérico es: “una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número” (MEN; 1998, p. 38)

Es importante observar, que aunque no se busque explícitamente enseñar las nociones conjuntistas en su estructura formal, aun los Estándares Básicos de Matemáticas, buscan fortalecer y desarrollar ciertos pensamientos matemáticos a partir del estudio implícito de elementos que pertenecen a la teoría de conjuntos, como se puede ver en las figuras 1 y 2 a partir de la visualización de la coherencia vertical y horizontal, que proponen los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se ilustrará además de manera esquemática, los estándares relacionados con nociones conjuntistas, con el objetivo de mostrar cuales deberían ser los conocimientos mínimos a los cuales deben acceder los docentes en formación de matemáticas, para desempeñarse en la escuela colombiana, se debe entender la coherencia vertical está dada por la relación de un estándar, con los demás estándares del mismo pensamiento en otros conjuntos de grados, y la segunda por la relación que presenta un estándar determinado con los estándares de otros pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (MEN, 1998, p. 78).

Figura1: Ilustración de las competencias buscadas para la formación de la educación básica.

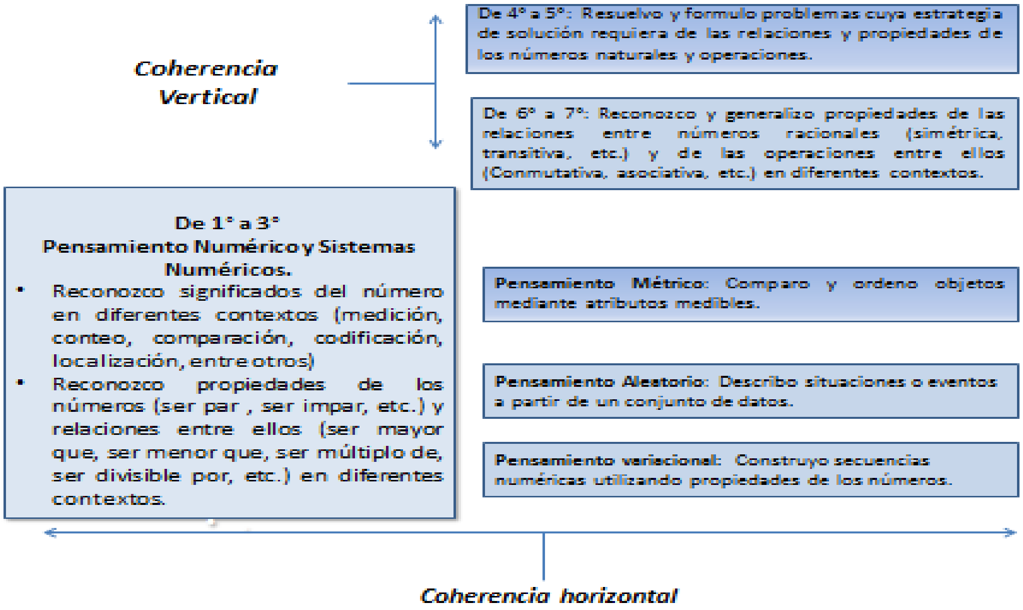
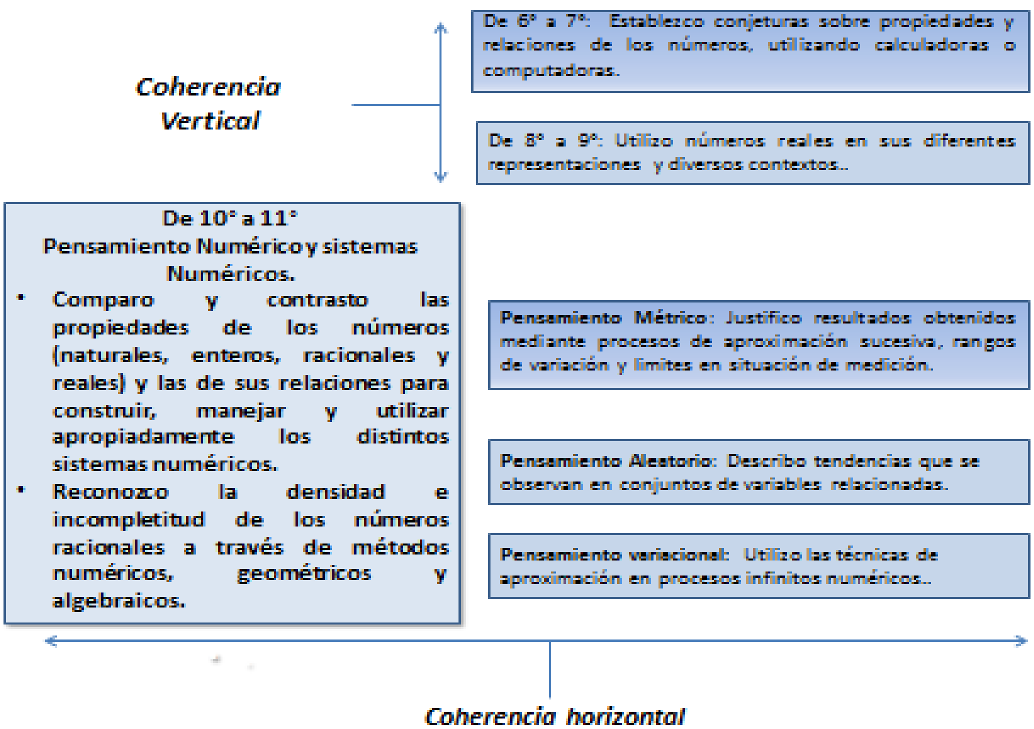


Figura2: Ilustración de las competencias buscadas para la formación de la educación media.



De acuerdo a esta representación esquemática, podemos observar que a medida que los estudiantes avanzan en sus procesos de educación, la complejidad de sus conocimientos no se evidencia solamente en aspectos formales a la disciplina, sino también el tipo de procesos generales de la actividad matemática; se pretende que en la medida que los estudiantes dispongan de mejores comprensiones conceptuales, podrán desarrollar procesos con mayor complejidad y se podrán enfrentar a niveles de mayor abstracción mental.

Se justifica también, que para los profesores en formación es necesario conocer los enfoques de construcción de los números, en los cuales se encuentran los conceptos básicos de la teoría de conjuntos y las nociones relacionadas con las relaciones y funciones, pues como se menciona en los estándares básicos:

> (…) el desarrollo del pensamiento numérico exige dominar progresivamente un conjunto de procesos, conceptos proposiciones, modelos, teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan.

En este sentido, resulta posible y deseable una propuesta educativa para los cursos de Teoría de Conjuntos, como una contribución a los planes de formación de docentes del IEP de la Universidad del Valle. Especialmente si se tienen en cuenta que estos docentes serán los encargados más adelante de enseñar los números naturales, etc., los cuales son el primer contacto de los niños con la matemática, surgen entonces como una consecuencia obvia que los futuros maestros de primaria deben poseer conocimientos matemáticos sólidos sobre dichos números, y por tanto conocer las nociones básicas de teorías de conjuntos involucradas en la diversas construcciones, que estos manejan[50].

> El paso del concepto de número natural al número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número.

Es importante tener presente que los números no deben confundirse con los conjuntos, y que cada número no se puede identificar con una colección de conjuntos coordinables, ni como una propiedad de los conjuntos coordinables entre sí. Se debe reconocer que los cardinales de los conjuntos, su numerosidad, son la razón de ser de los números. Se podría pensar de hecho que los cardinales finitos son atributos de los conjuntos que forman un sistema naturalmente ordenado. Ellos son un ejemplo de los infinitos posibles, del tipo estructural que designamos como números naturales.

Cabe resaltar además, que cuando un docente de matemáticas intente explicar que son los números naturales, se puede encontrar con grandes dificultades, como menciona Dedekind, dificultades que se encuentran cuando introducen las nuevas definiciones de sistema finito e infinito, en la medida que se intente construir la aritmética de los números sobre este fundamento.

Los Estándares Curriculares de Matemáticas, plantean el desarrollo de los procesos curriculares y organización de actividades centrales en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las

[50] Existen diferentes construcciones de los números elaboradas por autores interesados por los fundamentos de la matemática como Frege, Dedekind, Peano, y también otras con un enfoque más constructivista como las de Weyl y Lorenzen.

operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

Dichos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. Por ejemplo, para el estudio de los números racionales y reales, de la medida de magnitudes y cantidades continuas. Estas extensiones sucesivas de los sistemas numéricos y de sus sistemas de numeración representan una fuerte carga para estudiantes y docentes y una serie de dificultades didácticas para estos últimos.

4.3 PROPUESTA DE DISEÑO

Se podría considerar que el papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros no es importante en la medida que los contenidos de la teoría no aparecen como temáticas para ser enseñadas en la educación Básica y Media; sin embargo, de acuerdo a lo que se pretende alcanzar con los Estándares Curriculares, nos resulta difícil imaginar que los futuros maestros en formación puedan prescindir de los elementos conjuntistas cuando tengan que estudiar y enseñar por ejemplo los sistemas numéricos, y otros contenidos matemáticos que requieran de estos conceptos para ser estudiados y enseñados.

Además es importante considerar los conceptos de la Teoría de Conjuntos como un complemento importante sobre los fundamentos de la matemática, extendiendo los horizontes matemáticos de los maestros en formación más allá de lo que se espera que ellos enseñen. En esta propuesta para la enseñanza de la teoría de conjuntos para docentes en formación nos enfocaremos en el análisis histórico-epistemológico presentado en el capítulo II y en la reflexión educativa presentada en el capítulo III, pues son estos análisis y reflexiones los que ayudan a clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos en cuestión y los diversos significados que estos tengan en distintos contextos.

A continuación, se mostraran las propuestas temáticas, para los cursos de Teoría de Conjuntos de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y la Licenciatura en Matemáticas y Física, del IEP, de la Universidad del Valle.

4.3.1 Temas para trabajar en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Se puede decir, que los objetivos pretendidos con los temas propuestos para un curso intuitivo[51] de Teoría de Conjuntos para estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica, estarán delimitados al conocimiento de una teoría intuitiva de conjuntos; en este sentido se espera que los estudiantes puedan reconocer los elementos de un conjunto por comprensión, definir la propiedad característica de un conjunto determinado por extensión, identificar y trabajar correctamente con las operaciones de: unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica, relaciones de inclusión entre conjuntos, etc. y un tema central de acuerdo a lo que se propone en

[51] Se sugiere hablar de un curso intuitivo, en la medida que la estructura temática como tal no abarca realmente todos los temas concernientes a la teoría de conjuntos, de acuerdo a lo analizado en el capítulo II, pero se considera importante que al menos se dé un acercamiento intuitivo a las principales nociones de la teoría y que serán fundamentales para la comprensión de los sistemas numéricos.

los Lineamientos Curriculares es la construcción de los números naturales $\mathbb{N}$ y enteros $\mathbb{Z}$. (reconocemos con esto que el número es una propiedad de los conjuntos).

En este sentido, se proponen dos objetivos esenciales; un objetivo que tiene como prioridad dar a los alumnos elementos básicos de teoría de conjuntos, que servirán a la formación matemática, pero para la presentación de estos elementos básicos es fundamental la realización de una adecuada contextualización histórica y filosófica acerca de los elementos más significativos para la consolidación de la teoría de conjuntos. Se puede decir también que un objetivo inicial del curso es aclarar los malos entendidos y prejuicios sobre los dos conceptos indefinidos: objetos de la teoría de conjuntos (conjuntos y no conjuntos) y la relación de pertenencia. La distinción conjunto-clase y aclaración de paradojas. El otro objetivo es construir los números naturales y los números enteros. Pues es fundamental que un futuro docente de matemática tenga un adecuado manejo de los sistemas numéricos, y para la educación básica se da prelación al trabajo con los números naturales y enteros.

Para la propuesta de este curso, dirigido a los estudiantes de Licenciatura en Educación Básica, se recomienda que estos estudiantes se encuentren cursando el tercer semestre de su formación profesional; esto con el fin de que los estudiantes ya se hayan enfrentado a unos cursos previos de su formación matemática, que en parte contribuyan a la formación de un pensamiento matemático avanzado, así cuando se enfrente al curso tendrá un mejor grado de madurez intelectual, en la medida que han pasado por cursos de formación previa como Elementos de Lógica Matemática, Geometría I y Geometría II, Historia de las Matemáticas Griegas, y Matemáticas Fundamentales.

Este curso es de carácter obligatorio, se propone con una intensidad de 5 horas semanales, equivalentes a 80 horas semestrales, el número de créditos contemplados para el curso es de 5, se plantea como prerrequisito para matricular el curso que los estudiantes hayan cursado y aprobado los cursos de Elementos de Lógica Matemática y Matemáticas Fundamentales ofrecidos en el IEP, para esta carrera, el nombre que se propone para el curso es: **Elementos Generales de Teoría de Conjuntos**. A continuación se presenta la propuesta del curso con el número de horas, los contenidos y/o temáticas, las sugerencias bibliográficas y justificación de cada una de las unidades para ser abordas.

Número de Horas	**Unidades Temáticas.**	**Justificación.**	**Sugerencias Bibliográficas.**
25	**1. Aportaciones Históricas en el surgimiento de la teoría de conjuntos.** 1.1 La teoría de conjuntos como teoría del infinito actual. 1.1.2 El debate filosófico entre el infinito potencial vs. el actual. 1.2 Los comienzos de la teoría de conjuntos. 1.2.1 El problema de la no numerabilidad del conjunto $\mathbb{R}$. 1.2.2 Demostración de la no numerabilidad de $\mathbb{R}$. 1.3 La emergencia de las paradojas en la teoría	Se considera importante y relevante el estudio de las temáticas propuestas en esta primera unidad, en la medida que al ofrecer a los estudiantes acercamientos a los procesos históricos y críticos con enfoques epistemológicos que permitieron la consolidación de la teoría de conjuntos, contribuye a un futuro docente en la adquisición de instrumentos críticos, que más adelante le permitirán generar herramientas para	Amor J. A. (1993). “Paradojas, intuición y lógica”, Revista Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, No. 29. Aponte, M. (2008). Trabajo de grado: De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

	de conjuntos. 1.3.1 La paradoja de Russell. 1.4 Consolidación de la teoría de conjuntos. 1.4.1 Respuestas a las paradojas. 1.4.2 El teorema del Buen Orden de Zermelo. 1.4.3 Presentación intuitiva de los transfinitos cardinales y ordinales. 1.4.4 Presentación intuitiva del Axioma de Elección. 1.5 Crisis en los fundamentos en la historia de las matemáticas. 1.5.1 El proyecto logicista. 1.5.2 El proyecto formalista. 1.5.3 El Proyecto intuicionista.	acercarlo más a un saber académico, y poderlo comunicar con mayor certeza. Además esta unidad introductoria tiene como propósito mostrar a los estudiantes una historia de obstáculos y dificultades que se presentaron en la consolidación de la teoría, para que los futuros docentes puedan reflexionar sobre lo que se enseña y lo que se aprende. Y fundamentalmente enseñar un concepto que se supone obvio y natural y por ende nunca es enseñado el concepto de infinito matemático.	Bolzano, B. (1851). Las paradojas del infinito. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1991 Carroll, L. (2002), El Juego de la Lógica y otros Escritos, Madrid: alianza. D´Amore, B. (1996). El infinito: historia de conflictos y sorpresas. En. Épsilon (España), 36, pp. 341-366 Recalde, L. (2005). Notas del curso de historia de las matemáticas. Universidad del Valle, Cali-Colombia.
15	**2. Algunos elementos básicos de la teoría de conjuntos.** 2.1 Aclaraciones sobre el concepto de conjunto. El lenguaje de la teoría de conjuntos. 2.2 .Construcción de conjuntos. ¿Cómo	El propósito de esta unidad es ofrecerles a los alumnos los elementos básicos de la teoría de conjuntos que les sirvan en su formación teórica. En este sentido se pretende aclararle a los	Di Prisco, Carlos Augusto. (1997). Una Introducción a la Teoría de Conjuntos. Primera Edición. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia. Universidad de Campinas (Brasil). Karel Hrbacek and Thomas Jech**. (**1999)

	construimos conjuntos? 2.2.1 Noción de conjunto. Noción de pertenencia a un conjunto. Notación 2.3 Relaciones entre conjuntos $\cup, \cap, \subset, -$ Unión e intersección generalizadas. 2.4 Diagramas de Venn y diagramas de Euler. Representación de operaciones.	estudiantes los malos entendidos y prejuicios sobre los dos conceptos indefinidos: objetos de la teoría (conjuntos y no conjuntos) y la relación de pertenencia.	Introduction to Set Theory. Third Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc. Muñoz, José M. (2002) Introducción a la Teoría de Conjuntos. Cuarta Edición. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia
20	**3. Álgebra de Conjuntos.** 3.1 Par ordenado y producto cartesiano. 3.2 Relaciones, Particiones y Funciones. 3.2.1 Relaciones de orden y de equivalencia. 3.2.2 Funciones: inyectivas, biyectiva, sobreyectivas, monótonas, etc. 3.3 Órdenes parciales totales y buenos.	En esta tercera unidad se pretende dar un acercamiento al estudio de elementos esenciales y fundantes de la teoría de conjuntos como son los conceptos de par ordenado, producto cartesiano, las relaciones de orden y los órdenes parciales, en este sentido se desea formar a los estudiantes con un lenguaje más formal en matemáticas y brindarle elementos para para clarificar conceptos como los de relaciones y funciones, temáticas que trabajar en cursos previos de su formación profesional.	Amor, J.A., (2000) “La teoría de conjuntos en el siglo XX”, Miscelánea Matemática No.31. Jech, T., Set Theory, (1978). Boston: Academic Press. Muñoz, José M. (2002) Introducción a la Teoría de Conjuntos. Cuarta Edición. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia

20	**4. Construcción de los Números Naturales y los Números Enteros.** 4.1 Definición y construcción de los ℕ. 4.2 Teorema de Recursión para números naturales. 4.3 Aritmética de los naturales ℕ. 4.4 Construcción de los enteros ℤ. 4.5 Operaciones en ℤ. 4.6 Inmersión de ℕ en ℤ.	El principal propósito de esta última unidad es construir los números naturales y los números enteros, en este sentido que los estudiantes se puedan fundamentar en la construcción de dos de los sistemas numéricos básicos: los naturales y enteros, y de esta manera otorgarle a los estudiantes elementos matemáticos, históricos y didácticos, que le permitan orientar la comunicación de estas nociones en los diferentes años de su formación básica.	Arrieche, M. (2002). La Teoría de Conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática. Tesis Doctoral del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España. Di Prisco, Carlos Augusto. (1997). Una Introducción a la Teoría de Conjuntos. Primera Edición. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia. Universidad de Campinas (Brasil). Karel Hrbacek and Thomas Jech**. (**1999) Introduction to Set Theory. Third Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc.

4.3.2 Temas para trabajar en la Licenciatura en Matemáticas y Física

Considerando que los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, no tienen un acercamiento previo a los estudios de la lógica proposicional y de predicados, lo cual es un poco complejo, pues el manejo del lenguaje lógico es fundamental para un futuro docente de matemáticas. Reconociendo que intentar articular dos cursos en uno solo, es algo muy ambicioso, de acuerdo a las temáticas que ambos abordan y el poco tiempo del que se dispone en el semestre, se recomienda entonces ofrecer un curso donde se contemple la enseñanza de los principales conceptos de teoría de conjuntos que un docente de formación matemática para la educación media requiere. Para esta propuesta, y pensando que es deseable que aparte de que los estudiantes conozcan los elementos básicos de la teoría de conjuntos y los sistemas numéricos, se propone realizar una última unidad con un acercamiento aunque sea intuitivo a la aritmética cardinal y ordinal transfinita y al axioma de elección, pues estos conceptos serán requeridos por ellos en los cursos siguientes de formación matemática avanzada.

Además como los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física necesitan un acercamiento un poco más formal a los conceptos conjuntistas, en la medida que este curso es la antesala a los otros cursos de formación matemática superior, como son los cursos de Álgebra Moderna, Análisis Matemático y Topología y Geometría Diferencial, proponemos, que en el curso se oriente al estudiante al concepto de demostración; este curso se recomienda para trabajarlo en tercer semestre, después que los estudiantes hayan cursado y aprobado los cursos de Matemática Fundamental (se espera que en este curso se contemple aspectos centrales de la lógica de predicados y de primer orden) y Geometría I, que de alguna manera inician el lenguaje formal de las matemáticas.

El objetivo principal, es dar a los alumnos elementos básicos de teoría de conjuntos que les sirvan en su formación matemática. Dos de los elementos principales el manejo claro del axioma de elección a través de la implementación de la axiomática ZFC, y los conceptos de relaciones y órdenes. Un objetivo inicial es aclarar los malos entendidos y prejuicios sobre los dos conceptos indefinidos: objetos de la teoría (conjuntos y no conjuntos) y la relación de pertenencia. La distinción conjunto-clase y aclaración de las paradojas presentes en la teoría. Otro objetivo es construir los números naturales, enteros y racionales y brindar un acercamiento a la construcción de los números reales.

El curso que se propone es de carácter obligatorio; se plantea con una intensidad de 5 horas semanales, equivalentes a 80 horas semestrales, el número de créditos contemplados para el curso es de 5, el nombre que se propone para este curso es: **Introducción a la Teoría de Conjuntos**. A continuación se presenta un cuadro con el número de horas, los contenidos y/o temáticas y la justificación de cada una de las unidades para ser abordas en este curso.

Número de Horas	Unidades Temáticas.	Justificación.	Sugerencias Bibliográficas.
11	**1. Introducción: Reflexiones Históricas en el surgimiento de la teoría de conjuntos.** 1.1 La teoría de conjuntos como teoría del infinito actual. 1.1.2 El debate filosófico entre el infinito potencial vs. el actual. 1.2 Los comienzos de la teoría de conjuntos. 1.2.1 El problema de la no numerabilidad del conjunto $\mathbb{R}$.	Se considera importante el estudio de las temáticas propuestas en esta primera unidad, en la medida que al ofrecer a los estudiantes acercamientos a los procesos históricos y epistemológicos que permitieron la consolidación de la teoría de conjuntos, buscando en este sentido contribuir a un futuro docente en la adquisición de instrumentos críticos, que más adelante le permitirán generar herramientas para	Amor J. A. (1993). “Paradojas, intuición y lógica”, Revista Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, No. 29. Aponte, M. (2008). Trabajo de grado: De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación Matemática.

	1.3 La emergencia de las paradojas en la teoría de conjuntos. 1.3.1 La paradoja de Russell. 1.4 Consolidación de la teoría de conjuntos. 1.4.1 Respuestas a las paradojas. 1.4.2 El teorema del Buen Orden de Zermelo. 1.5 Introducción a los transfinitos Ordinales y Cardinales.	acercarlo más a un saber académico, y poderlo comunicar con mayor certeza. Se desea además que los estudiantes comprendan el carácter paradójico que se presenta en la teoría de conjuntos. Además tener una reflexión en cuanto a la enseñanza del infinito matemático.	Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Bolzano, B. (1851). Las paradojas del infinito. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1991. D´Amore, B. (1996). El infinito: historia de conflictos y sorpresas. En. Épsilon (España), 36, pp. 341-366. Ferreirós, J. (1991). El nacimiento de la teoría de Conjuntos, *1854-1908*. En: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, pp. 205-366. Quine, W. (1941), Russell's Paradox and Others, USA: The Technology Review. Recalde, L. (2005). Notas del curso de historia de las matemáticas.

			Universidad del Valle, Cali-Colombia.
22	**2. Álgebra de Conjuntos.** 2.1 Aclaraciones sobre el concepto de conjunto, conjunto y no conjunto. El lenguaje de la teoría de conjuntos. 2.2 Construcciones de conjuntos. El conjunto universo 2.3 Un acercamiento intuitivo a la axiomática al estilo ZF 2.3.1. axioma del conjunto vacío 2.3.2. axioma de extensionalidad 2.3.3 axioma de comprensión. 2.3.4 axioma de pares. 2.3.5 axioma de unión y de potencias. 2.4 Operaciones con Conjuntos. 2.5 Órdenes parciales totales y buenos.	El propósito de esta unidad es ofrecerles a los alumnos los elementos básicos y fundamentales de la teoría de conjuntos que les sirvan en su formación académica. En este sentido se pretende acercar a los estudiantes de una manera intuitiva a los elementos que se consideran en la axiomática de ZF y en este sentido mostrara como se superan las paradojas y contradicciones de la teoría ingenua de conjuntos, aspectos que se trabajarían en la unidad 1, con la introducción de la axiomática al estilo ZF, se espera que los estudiantes reconozcan esta axiomática como un fundamento riguroso de la teoría de conjuntos, también que identifiquen la pertinencia del trabajo con operaciones con conjuntos, para conectar	Amor, J.A., (2000) "La teoría de conjuntos en el siglo XX", Miscelánea Matemática No.31. Di Prisco, Carlos Augusto. (1997). Una Introducción a la Teoría de Conjuntos. Primera Edición. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia. Universidad de Campinas (Brasil). Karel Hrbacek and Thomas Jech. (1999) Introduction to Set Theory. Third Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc. Muñoz, José M. (2002) Introducción a la Teoría de Conjuntos. Cuarta Edición. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia.

		estos conceptos a los conceptos de ordenes parciales. En esta segunda unidad se realizará un tratamiento más formal a las nociones conjuntistas, claro esta que la manera como se prevé introducir estos conceptos apela a unos acercamientos intuitivos, para que los estudiantes conceptualicen los nuevos principios.	
22	**3. Relaciones y Funciones.** 3.1 Pares ordenados y producto cartesiano. 3.2 Relaciones, Particiones y Funciones. 3.2.1 Relaciones de orden y de equivalencia. 3.2.2 Operaciones con relaciones: inversa de una relación, composición de relaciones. 3.3 Funciones: inyectivas, biyectiva, sobreyectivas, monótonas, etc. 3.4 Cardinalidad.	En esta tercera unidad se ofrecerá un estudio a los conceptos de relaciones y funciones, con el propósito de presentar un acercamiento intuitivo a los conceptos de cardinalidad y Equipotencia entre dos conjuntos, concepto fundamental dentro de la consolidación de la teoría cantoriana.	Karel Hrbacek and Thomas Jech**. (**1999) Introduction to Set Theory. Third Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc. Jech, T., Set Theory, (1978). Boston: Academic Press. Muñoz, José M. (2002) Introducción a la Teoría de Conjuntos. Cuarta Edición. Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia

	Equipotencia de dos conjuntos. Teorema de Cantor, conjuntos finitos y conjuntos infinitos.		
25	**4. Conjuntos numerables y no numerables.** 4.1 Definición y construcción de los $\mathbb{N}$. 4.2 Principio de inducción. 4.3 Orden en $\mathbb{N}$. El axioma del infinito 4.4 Construcción de $\mathbb{Z}$. 4.5 Inmersión de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$. 4.6 Construcción de $\mathbb{Q}$. 4.7 Inmersión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. 4.8 Introducción a la construcción de $\mathbb{R}$ por cortaduras. 4.9 Inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. 4.10 Cardinalidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. 4.11 El axioma de Reemplazo. 4.12 El axioma de Elección.	El principal propósito de esta última unidad es construir los números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$) dado que es fundamental y esencial que los docentes en formación reconozcan los procesos de construcción de los sistemas numéricos, y todos los armazones conceptuales que se encuentran inmersos en estos procesos. También se considera fundamental introducir a los estudiantes a la presentación de los axiomas de Elección que junto con la axiomática al estilo ZF, se constituyen en uno de los fundamentos de las matemáticas, como mencionamos en los capítulos II y III, y el axioma de Reemplazo que se hace necesario para justificar de una manera formal el	Dedekind, R. (1888). ¿Qué son y para qué sirven los números? [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998. Di Prisco, Carlos Augusto. (1997). Una Introducción a la Teoría de Conjuntos. Primera Edición. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia. Universidad de Campinas (Brasil). Ferreirós, J. (2006). Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta. Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. En: Editorial Crítica, Barcelona. Karel Hrbacek and Thomas Jech**.** **(**1999) Introduction to Set Theory. Third

		teorema de recursión para ordinales. Finalmente se desea dar a manera de introducción, más como reflexión un acercamiento a los transfinitos Ordinales y Cardinales, esto con el fin de que los estudiantes establezcan las distinciones al menos básicas entre los números cardinales y los ordinales, distinción que se considera clave para justificar la matematización del infinito actual. Cabe resaltar que consideramos que fundamental la construcción de $\mathbb{R}$ especialmente para que los estudiantes tomen conciencia de las problemáticas que hay en la consolidación de este sistema numérico.	Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc. Lipschutz, Teoría de Conjuntos y Temas Afines, serie Schaums McGraw-Hill.

Básicamente lo que se busca con las temáticas de estos dos cursos es que la teoría de conjuntos permita describir determinadas situaciones y actividades, no como una teoría formalizada, sino más intuitiva. Pues el reto es desarrollar conceptos y relaciones tan básicas como el concepto de conjunto, los conceptos de relaciones y funciones, que en la mayoría de las veces se tienen contempladas bajo ideas confusas.

Ahora bien, se caracteriza bajo la enseñanza de una teoría intuitiva, en la medida que se puede considerar la intuición como una característica inherente al ser humano, se puede pensar que con este tipo de cursos los estudiantes se acerquen a las nociones de conjunto, funciones, en especial la función biyectiva, que comprendan los principales aspectos desde un enfoque histórico-epistemológico que se presentan en la consolidación de la teoría de conjuntos cantoriana, con todos los problemas y entramados paradójicos que se envuelven en la teoría, además que logren habilidades para conocer la construcción conjuntista de los números naturales y enteros y ver ahí su cardinalidad, también que logren manejar de algún modo la noción matemática de igual, menor o mayor entre cardinalidades de conjuntos infinitos. Y especialmente logren darse cuenta de nociones tan claves como la relación parte-todo, conjunto universal, la noción de infinito, que siempre se revelan de una forma paradójica o que bien nuestra razón o intuición yerran en algo esencial para comprenderlas.

4.4 Metodología para trabajar los cursos

De acuerdo a las reflexiones presentadas en el capítulo III, consideramos que la metodología escogida para la propuesta de estos cursos no puede ser otra que aquella que favorezca la interacción comunicativa entre el docente y los estudiantes, en este sentido se sugiere ubicarse en un paradigma comunicativo, subrayando una perspectiva centrada en la acción, es decir en la realización de tareas significativas y motivadoras que estimulen en los estudiantes el aprendizaje por las cuestiones conjuntistas.

De esta manera, se está reconociendo al alumno como uno de los ejes centrales del curso y se espera que las concepciones o intuiciones que ellos manejen con respecto al infinito sean tenidas en cuenta al momento de presentar las temáticas propuestas en la primera unidad de ambos cursos, pues lo que en ocasiones un docente puede catalogar como error de un estudiante a veces no es otra cosa que un intento del estudiante por intentar cuadrar concepciones precedentes en situaciones nuevas. Además como menciona (Bobadilla, 2012), citando a (Foucault, 1969): El saber no entra tan sólo en las demostraciones; puede intervenir igualmente en ficciones, reflexiones, relatos, reglamentos institucionales y decisiones políticas.

En este sentido, esta metodología pretende llevar a los futuros docentes en formación a conocer que los procesos históricos presentes en la construcción de una teoría tan delicada como lo es la teoría de conjuntos, les proporcionará criterios para reconocer situaciones que en ocasiones son estigmatizadas banalmente como errores y punto sin escapatoria.

Ahora bien, se menciona que este tipo de metodología, donde se propicia la comunicación, debe favorecer el aprendizaje significativo; en este sentido, se espera que lo que se plantea en la clase sea en su mayoría de interés para el alumno; así pues los objetivos, tareas, actividades, deberían hacer parte de las necesidades de los alumnos, pues como menciona D´Amore (1999) todo lo que nos interesa se inserta en un campo y en unos esquemas de conocimientos anteriores y es precisamente ahí donde se deben incidir los nuevos conocimientos y experiencias para que el aprendizaje sea realmente significativo.

Sin embargo, reconocemos que hay algunas temáticas en las cuales los estudiantes realmente se estén enfrentando por primera vez en su proceso de formación académica, para esto sugerimos que sea el docente quien presente las ideas principales del tema a tratar sobre la base de una lectura previa por parte de los estudiantes, es importante que los estudiantes lleguen a la clase al menos con unas ideas intuitivas o “ingenuas” sobre el tema de estudio, porque son ellos quienes realmente deben asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, después de todo el aprendizaje es una creación para quien lo alcanza.

4.5 Algunas actividades que se pueden trabajar con los estudiantes, en los cursos propuestos.

Al trabajar la matemática desde la perspectiva histórica, epistemológica y didáctica, es posible obtener un notable cambio de convicciones en los futuros docentes. Es por ello que se debería comenzar desde la escuela primaria, con una oportuna educación sobre el manejo de los conjuntos infinitos, y para que esto sea posible es necesario una adecuada preparación para los futuros docentes de educación primaria y educación media, en este sentido dentro de los cursos básicos de formación de docentes como caso particular el curso de teoría de conjuntos, se les debe permitir a los estudiantes conocer algunas diferencias básicas en comparación con el mundo finito. De allí, que dentro de los posibles objetivos fijados para trabajar en el diseño de las actividades se pueden considerar los siguientes:

- Lograr un rompimiento con la supuesta necesidad de lo finito.
- Saber transferir las correspondencias biunívocas de lo infinito al infinito.
- Percibir el rol del infinito tanto en el ámbito geométrico, como en el ámbito numérico.
- Reconocer el papel de las paradojas en la Teoría de Conjuntos como elementos esenciales para la conceptualización de las nociones conjuntistas.
- Caracterizar los métodos empleados por Cantor y Dedekind en la fundamentación matemática del infinito para adecuarlos a actividades del aula de clase.
- Involucrar reflexiones filosóficas e históricas en la presentación de las temáticas.
- Permitir a los estudiantes avanzar hacia la esencia y encanto de las matemáticas.

En este sentido se sugiere, realizar actividades donde se involucre la correspondencia biunívoca entre dos segmentos de longitudes diferentes, de la cual se deduce que los segmentos vistos como conjuntos de puntos tienen la misma cardinalidad. O la demostración de Cantor en la cual se menciona que el conjunto de puntos internos de un cuadrado es equipotente al conjunto de puntos de un lado del cuadrado, de la cual se puede deducir que estos dos conjuntos son equipotentes.

También se pueden diseñar actividades, que involucran representaciones teatrales donde se tenga como elemento articulador la problemática que se presenta en las paradojas y la caída de la noción Euclidiana: “El todo es mayor que las partes”, para esto se recomienda consultar los trabajos de (D´Amore, 1987): Qualcosa di maggiore del cielo, (D´Amore & Arrigo, 1993): Infiniti; (Arrigo & D´Amore, 1999): “Lo vedo ma non ci credo…”. Ostacoli epiustemologici e didattici al proceso di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l´infinito attuale) y (Arrigo, D´Amore & Sbaragli, 2011): Infinitos infinitos, etc.

Se pueden finalmente, tener en cuenta algunas propuestas de actividades para trabajar con los estudiantes, entre ellas está las preguntas de repuestas abiertas en las cuales los alumnos tienen o bien que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar la verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones, o resolver problemas. De otro lado es fundamental, la continua evaluación a los estudiantes, en este sentido se sugiere evaluar a los alumnos con respecto a los significados que ellos atribuyan a los conceptos de conjuntos, subconjuntos, intersección, complementario, aplicación y relación de equivalencia, etc.

4.6 Reflexiones de la propuesta

La formación matemática de los futuros docentes, requiere del estudio de nociones básicas de la teoría de conjuntos, especialmente por el papel tan importante de las nociones conjuntistas en la consolidación de los sistemas numéricos, en este sentido es importante reorganizar los planes curriculares de acuerdo a las necesidades de los docentes. Es pertinente que la formación matemática de los futuros docentes se les enseñe aunque sea un procedimiento semiformal sobre los conceptos de la teoría de conjuntos y las nociones relacionadas con relaciones y funciones, pues serán esenciales para ampliar los conocimientos en la construcción de los sistemas numéricos.

Es pertinente reconocer, que a pesar de las críticas que se realizaron sobre la reforma de las matemáticas modernas no se debe elegir la vía de la exclusión de los contenidos conjuntistas de los planes de formación de docentes, y más aun de los currículos de primaria y secundaria, pues a pesar de reconocer que si se generaron muchas dificultades con esta reforma, no se debe ignorar la importancia de la teoría de conjuntos para la matemática, especialmente en la significación de contenidos matemáticos que involucran implícita o explícitamente nociones conjuntistas, como los números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, funciones, probabilidad, etc. se justifica además que la enseñanza de estas nociones se haga de manera intuitiva o informal, en la medida que de acuerdo a los análisis históricos-epistemológicos podemos ver que para hablar de una verdadera teoría de conjuntos se debe estudiar realmente toda la teoría de los conjuntos infinitos, lo cual es muy complejo de llevar a cabo en un solo curso, y si en un curso de teoría de conjuntos no se considera el trabajo con conjuntos infinitos no debe hablarse de una verdadera formación conjuntista.

Dentro de los contenidos conjuntistas a enseñar se deben considerar el contenido matemático “conjuntos y operaciones” que permite un acercamiento a nuevos conceptos y reglas matemáticas, garantizando de una u otra manera acercarse a un lenguaje conjuntista el cual puede ser unificador de distintas ramas de la matemática, las actividades que permitan mostrar a los estudiantes situaciones donde se requiera determinar el cardinal de conjuntos o subconjuntos, pueden permitirle a los estudiantes una potencial utilidad del lenguaje conjuntista.

Por otra parte, los contenidos matemáticos “funciones, composición y función biyectiva” se caracterizan por la gran utilidad que presentan para la matemática y áreas afines, en especial, para la aritmética, el cálculo y el álgebra. Y no debe obviarse que estas nociones son indispensables para definir el concepto de cardinal de un conjunto, resolver ecuaciones, problemas cotidianos de aplicaciones económicas, físicas, biológicas, etc. con estos contenidos podemos estudiar tipos especiales de funciones como la función identidad, función valor absoluto, función racional, etc., y así mismo se pueden clasificar las funciones en inyectivas y sobreyectivas, conceptos fundamentales para un docente de matemáticas.

También se valida la pertinencia del contenido matemático de “relaciones” en la medida que éste también es de utilidad para el estudio de otros contenidos matemáticos, sirve entre otras cosas para realizar particiones a determinados conjuntos y dotarlos de una estructura de orden (parcial o total), así como para definir otros conceptos matemáticos, el concepto de relación de equivalencia es muy relevante para el estudio de los conceptos de números naturales, y la construcción de los conjuntos numéricos: Naturales, Enteros, Racionales y Reales. Además está involucrado en el teorema fundamental del álgebra, el cual establece que toda relación de equivalencia definida sobre un conjunto A determina una partición sobre A, y recíprocamente, toda partición de un conjunto A determina una relación de equivalencia sobre este conjunto.

También consideramos fundamental y esencial las temáticas abordadas en la primera unidad de cada programa del curso, en la medida que se le presenta a los alumnos algunos elementos fundantes de la consolidación de la teoría de conjuntos. De otro lado no se debe ignorar de acuerdo a lo expuesto en el capítulo III que si no hay una confrontación con las ideas erradas que presenten los estudiantes acerca del infinito, esto puede ser un obstáculo para los estudiantes cuando se enfrentan a un estudio específico, donde el infinito debe concebirse de manera actual. Las dificultades en la comprensión del infinito matemático no se deben solo a obstáculos epistemológicos, sino a obstáculos didácticos generados por las ideas erróneas de los docentes, de allí la necesidad de introducir esta temática en la formación de docentes, a fin de evitar la formación de modelos incorrectos y permitir a los docentes conocer los aspectos históricos y epistemológicos del saber.

5. CONCLUSIONES GENERALES

En el desarrollo de este trabajo hemos descrito nuestra investigación sobre el papel que los aspectos históricos y epistemológicos tienen en el desarrollo de los conceptos conjuntistas. Al describir nuestro problema de investigación hemos indicado que nos interesamos no solo por los aspectos históricos y epistemológicos en el desarrollo de la teoría de conjuntos, sino por fortalecer los procesos de formación de futuros docentes de matemática, de allí que el trabajo propone la necesidad de modificar los programas de los cursos de teoría de conjuntos del IEP de la Universidad del Valle, con el objetivo de contribuir en el fortalecimiento de la enseñanza de las nociones conjuntistas en los futuros docentes, y de brindar aportes a la Educación Matemática desde posturas histórico-epistemológicas.

De acuerdo a lo realizado a lo largo de este trabajo, podemos aseverar que la noción de conjunto era básica en el pensamiento de Cantor y sobre ella se definieron otras de mucha trascendencia para la matemática, como son la de número cardinal y la de número ordinal. Este trabajo también, nos permitió obtener fundamentos teóricos sólidos sobre la importancia que tiene la teoría de conjuntos para el desarrollo de la matemática. Mostrándose esto último, en su utilidad para introducir las nociones de número cardinal, número ordinal, la teoría del infinito actual, el desarrollo de los números ordinales transfinitos y su importancia para la teoría de funciones.

También hay que decir que la teoría de conjuntos se puede ver como un intento por definir el infinito, diferenciando entre el infinito potencial y el actual, lo que se considera como uno de los grandes logros del intelecto humano, razón por la cual planteamos que si se desea verdaderamente enseñar lo que es el infinito se debe realizar a través de un curso de teoría de conjuntos.

La concepción del infinito potencial ha sido predominante antes de la aparición de la teoría de conjuntos, la cual, permite entender el infinito potencial como ilimitación, como la posibilidad de extender indefinidamente una magnitud dada o de disminuirla. Sin embargo, cuando decimos que el conjunto de los números primos es infinito o que el conjunto de los puntos de una recta es infinito empleamos la noción de infinito actual, noción fundamental para la caracterización de la teoría de conjuntos cantoriana, y para la matemática.

En este sentido, un aporte significativo de la teoría de conjuntos es permitirnos poder hablar de colecciones infinitas de elementos, como objetos con entidad propia, por más que sus elementos sean infinitos, a pesar de que nosotros somos finitos y nunca podamos llevar a cabo la enumeración completa de sus elementos. "El hecho de que se pueda reunir una infinidad de elementos en un conjunto y hablar de propiedades de ese conjunto como hablábamos de las propiedades de las colecciones finitas, es decir, como si se tratara de entidades sobre las que podemos decir algo significativo e interesante, es lo que indica que un cambio importante se ha producido en la concepción del infinito con la aparición de la teoría de conjuntos. Si el tema del infinito siempre fue una fuente de discusiones filosóficas inagotables, ahora, a partir de la teoría de conjuntos, esta discusión se ha nutrido de nuevos elementos" (Sartorio, 2000, p.71), citado en (Arrieche, 2002, p.54).

A pesar de que las antinomias y el axioma de elección produjeron mucha controversia, podemos decir que la teoría de conjuntos se fue abriendo camino de una manera irresistible.

Matemáticos de las nuevas generaciones, tales como Hurwitz, Hadamard, Minkowski y Hilbert, usaron la teoría de conjuntos para desarrollar nuevas ramas de la matemática, como la teoría de funciones reales, la topología o el análisis funcional. Los franceses Borel, Baire, Fréncher y Lebesgue, aplicaron la teoría de conjuntos al estudio de las funciones reales. Por lo tanto, decimos que Cantor abrió el campo de los conjuntos infinitos (de lo transfinito) a la investigación matemática.

En el estudio sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos hemos evidenciado la importancia de esta teoría para las matemáticas, en la medida que ella se convierte en una generalización de la aritmética ordinaria, dado que se concibe a partir de la idea de que los conjuntos pueden ser contados, de esta indagación histórica podemos resaltar la pertinencia de estudiar los conjuntos de puntos como los números racionales y el de los reales, pues es fundamental poder observar que a partir de la no-numerabilidad de $\mathbb{R}$, la noción de infinito dejo de ser una idea vaga, transformando la tradición aristotélica que se tenía hasta el momento.

Se reconoce también como un elemento esencial para consolidar una adecuada teoría de conjuntos, tener un reconocimiento de los momentos que permiten el desarrollo de la teoría de conjuntos, el primer momento concerniente al estudio de las potencias infinitas, hasta que se formula la Hipótesis del continuo, luego la consolidación de los conjuntos derivados anudados a la noción de potencia, como un medio de estudio del continuo, para desarrollar la idea de los ordinales transfinitos. Además es indispensable observar como con el apoyo del teorema de Bolzano-Weirstrass se logró clasificar los conjuntos de puntos en intervalos acotados, lo que constituye el concepto de punto de acumulación como un elemento fundamental en el soporte de la teoría de conjuntos, dado que es con este concepto que se definen los conjuntos derivados, que posteriormente le permitirán a Cantor enunciar el trasfondo de los números infinitos.

Es fundamental, dentro de un curso de teoría de conjuntos caracterizar el concepto de potencia, este es uno de los conceptos más importantes introducidos por Cantor en el proceso de caracterización de los conjuntos infinitos, es con este concepto que queda resuelto el problema de comparar conjuntos con igual número de elementos, además que es un concepto fundamental para lograr la diferenciación de las clases numéricas; al igual que el concepto de conjuntos bien ordenados, dado que justifica la introducción de los ordinales transfinitos como verdaderos números.

Vemos entonces, que la teoría de conjuntos, se ha desarrollado a través de problemas fundantes en el desarrollo de la misma, los cuales no deben de ser desconocidos para el maestro que desea enseñar matemáticas, se infiere además que este estudio nos permitió reconocer los fundamentos teóricos que se deben tener presente al momento de ofrecer un curso de teoría de conjuntos, evidenciándose así algunas de las problemáticas que se presentan en los cursos de teoría de conjuntos que se ofrecen el IEP, en la medida que no se contempla el desarrollo histórico de las nociones conjuntistas para la articulación de algunos de los contenidos, además se excluyen del estudio nociones tan fundamentales como el Axioma de Elección, axioma sin el cual la teoría de conjuntos cantoriana carece de sentido.

Con la propuesta del curso estamos garantizando que las nociones conjuntistas desempeñen un papel prioritario en la formación de un futuro docente en la medida que se propone un acercamiento intuitivo pero a la vez formal sobre las nociones elementales de la teoría de conjuntos, en este sentido consideramos que su aprendizaje requiere un estudio tanto dirigido como autónomo, para que se origine un aprendizaje significativo.

Finalmente podemos decir, que este trabajo hace parte solo de unos de los peldaños por construir para intentar dar aportaciones a los problemas que atañen las nociones conjuntistas, como problema abierto dejamos la elaboración de un módulo de estudio de teoría de conjuntos para la formación de docentes, modulo que contemple el diseño de situaciones didácticas, también queda abierto como problema de investigación la evaluación de la propuesta presentada para los cursos, otro problema es el análisis de los libros de texto con los que se trabajan los cursos de teoría de conjuntos, análisis que se puede realizar teniendo presente el estudio histórico-epistemológico y didáctico que se desarrolló en los capítulos I, II y II de este trabajo.

Como reflexión es indispensable reconocer, que la enseñanza de las matemáticas prevea entre sus metas para los primeros años de formación de un licenciado en matemáticas estudios que conciernan al infinito matemático, desde nuestro punto de vista creemos que una estrategia exclusiva que concierne al infinito matemático se encuentra en la adecuada planificación de un curso de teoría de Conjuntos, y así promover a que los estudiantes se apropian más de un concepto que parafraseando a Borges es el concepto corruptor y desatinador de los otros: *El infinito*.

6. REFERENCIAS BIBLIÓGRAFICAS

AMOR J. A. (1993). "Paradojas, intuición y lógica", Revista Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, No. 29.

ANACONA, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. *EMA, 8* (1), 30-46.

APONTE, M. (2008). Trabajo de grado: *De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación Matemática.* Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

ARTIGUE, M. (2000). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones y los cambios curriculares?* En R. Cantoral (Ed.), El futuro del cálculo infinitesimal. 93-115. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

ARRIECHE, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.* Tesis Doctoral del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

ARRIGO, G & D´AMORE, B. (1999). *"Lo vedo ma non ci credo…." Ostacoli epistemologici e didattici al proceso di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l´infinito attuale*. L´insegnamento della matemática e delle scienze integrate. 22b, 5, 465-494.

ARRIGO, G; D´AMORE, B & SBARAGLI, S. (2011). *Infinitos Infinitos, Historia Filosofía y Didáctica del infinito*. Traducción Jiménez Alejandro. Editorial magisterio, Bogotá, Colombia.

BAGNI, G. (2001). *Infinito e infinitésimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore*. Bollettino dei docenti di matemática. 42, 9-20.

BARROW, J. (2005). *The infinite Book*. Pantheon books, New York.

BENACERRAF, P. (1983). *What numbers could not be*. En P. Benacerraf y H. Putnam (Eds.), *Philosophy of mathematics. Selected reading*, 2nd edition (pp. 272-294). Cambridge: Cambridge University Press.

BOBADILLA, M (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico*. Tesis presentada para optar al título de Doctor en Educación. Doctorado interinstitucional en Educación, Universidad del Valle.

BOLZANO, B. (1851). *Las paradojas del infinito*. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1991.

BROUSSEAU, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. In: Revue Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 4 N° 2, pp. 165-198. La Pensé Sauvage Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1976). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas*. En: *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* Vol 4, Nº2 pp. 105-198. 1993

CANTOR, G. (1845-1918). *Recuel d´articles 1889. Georg Cantor: Ouvres traduites en française.* Tomado de Gallica Bibliothèque Numérique [Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France]

CANTOR, G. (1895). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito*. Traducción y comentarios: Bares J y Climent J, 1983.

CANTOR, G. (1895). *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I, Mathematische Annalen 46*, pp. 481-512. Reimpreso en Cantor 1932b, PP.321-351, y traducido en Cantor 1915.

CANTOR, G. (1897). *Beiträge zur Begründung del Transfiniten Mengenlehre*. Parte II. En: *Mathematische Annalen* 49, pp. 207-246.

CHEVALLARD, Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* IREM d'Aix de Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1997). *Familière et problématique, la figure du professeur*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 17 (3): 17-54.

DAUBEN, J. (1990). *His mathematics and philosophy of the infinite.* Princeton university press.

DI PRISCO, C. (1997). Una Introducción a la Teoría de Conjuntos. Primera Edición. Centro de Lógica, Epistemología e Historia de la Ciencia. Universidad de Campinas (Brasil).

D´AMORE, B. (1996). *El infinito: historia de conflictos y sorpresas.* En. Épsilon (España), 36, pp. 341-366.

D´AMORE, B. (1999). *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull´apprendimento della matemática. L´insegnamento della matemática e delle scienze integrate*. 22a 3, 247-276. Un amplio resumen en español: *Resúmenes de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autónoma de santo domingo Republica dominicana 12-16 Luglio 1999, 27. Traducción completa en español. *La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos del aprendizaje de las matemáticas*. Relime, México D. F, 3,3, 2000, 321-338.

DE LA PAVA, V (2010). *Los Trabajos de Cantor y la Teoría de Conjuntos como Rama de las Matemáticas: La hipótesis del Continuo y el Axioma de Elección*. Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en matemáticas, Departamento de matemáticas, facultad de ciencias, Universidad del Valle, Colombia.

DEDEKIND, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

FERREIRÓS, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de Conjuntos, 1854-1908*. En: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, pp. 205-366.

FERREIRÓS, J. (1998). *El enfoque conjuntista en matemática*. La Gaceta, 3:389-412.

FERREIRÓS, J. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. *Escritos y correspondencia selecta.* Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. En: Editorial Crítica, Barcelona.

FEYNMAN, R. (1965). *New textbooks for the new mathematics*. Engineering and Science, 28: *9-15.*

FISCHBEIN E, (1998). *Conoscenza intuitive e conocenza logica nell´attivita matemática*. Bolonia: Pitagora.

FISCHBEIN E, (2001). *Tacit Models and Infinity*, en: Educational Studies in Mathematics, 48: 309-329.

FISCHBEIN E, JEHIAM R. & COHEN D. (1994). *The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles*. Proceedings of the XVIII PME. Lisboa. 2, 353-359.

FISCHBEIN E, JEHIAM R. & COHEN D. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*. Educational studies in mathematics. 29, 29-44

FISHBEIN E, TIROSH D. & HESS P. (1979).*The intuition of infinity*. In: Educational Studies in mathematics, 10, pp 3- 40.

FOUCAULT, M. (1969). *L'archeologie du savoir. Traducción al español: La arqueología del saber*. España: Editores siglo XXI.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

GARBIN, S. (2005). *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. 8(2), 169-193

GODINO, J. D. Y BATANERO, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3): 325-355.

GODINO, J. D. Y BATANERO, C. (1997). *A semiotic and anthropological approach to research in mathematics education*. Philosophy of Mathematics Education Journal, 10. Recuperado el 7 de mayo 2012 de: URL: http://ww.ex.ac.uk/local/PErnest/pome10/art7.htm

GODEMENT, R. (1974). *Algebra*. Madrid: Tecnos.

HALLETT, M. (1984). *Cantorian set Theory and Limitation of Size*. Clarendon Press, Oxford.

HAUCHART, C. & ROCHE, N. (1987). *Apprivoise l´infini*. Louvain-la-Neuve; Gen-Ciao.

HEIJENOURT, J. (1967). *From Frege to Gödel.* A source book in Mathematical Logic, 1879-1931. Harvard University Press. 1967.

HELLER, M. Y WOODING, W. (2011). *Infinity New Research Frontiers*. Cambridge University press.

JECH, T. (1978). Set Theory. Boston: Academic Press.

KAREL HRBACEK & THOMAS JECH. (1999) Introduction to Set Theory. Third Edition. Revised and Expanded. Marcel Dekker, Inc.

KILPATRICK, J, RICO, L. y SIERRA, M. (1994). *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

KITCHER, P. (1988). *Mathematical naturalism*, en William Aspray y Phil Kitcher (comps), *History and Philosophy of Moder Mathematics*, núm. 11 de Minesota Studies in the Philosophy of Sciencie, University of Minnesota Press, Mineapolis, Minnesota, pp. 293-325.

KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* I Alianza, editorial SA. Madrid.

LAVINE S, (1994). *Understanding the infinite*. Harvard University press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

LIPSCHUTZ. (Sf). Teoría de Conjuntos y Temas Afines, serie Schaums McGraw-Hill.

MEIRIEU, P. (2009). Aprender, sí. Pero ¿Cómo? (pp. 52-80). Ediciones octaedro, s.l. Barcelona.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas.* Santa fé de Bogotá, MEN. Panamericana Formas e impresos. Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2008). *Estándares Básicos de Calidad. Área de Matemáticas*. Santa fé de Bogotá, MEN. Panamericana Formas e impresos. Colombia.

MONDOLFO, R. (1952). *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*, en: Ediciones Imán, Buenos Aires, pp.13-181.

MONAGHAN, J (2001). *Young Peoples 'Ideas Of infinity,* en: Educational Studies in Mathematics 48:239-357.

MONTORO VIRGINIA Y SCHEUER NORA, (2003). *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios,* en: Publicaciones de la Universidad Nacional de Comahue, Argentina.

ORTIZ, J. (1994). *El Concepto de Infinito*. En: Publicación de la Asociación Matemática Venezolana, Boletín No 2, Vol. I.

RECALDE, L. (2005). *Notas del curso de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle, Cali-Colombia.

RECALDE, L. (2004). *La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.* En: Matemática Enseñanza Universitaria, n° 1, Vol. XXII. Recuperado el 5 mayo de 2013 de URL: http://hdl.handle.net/10893/1726

RICO, L. & SIERRA, M. (1997). *Antecedentes del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Ed.), Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación matemática (pp.17-75). Madrid: Síntesis.

RUSSELL, B. (1903). *Los principios de la matemática*. [Traducción de Juan Carlos Grimberg]. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

SANZ, I., ARRIETA, M., & PARDO, E. (1988). *Por los caminos de la lógica: Lógica y conjuntos en EGB*. Madrid: Síntesis.

SANCHEZ, C. (2007). *Contribuciones a la fundamentación de la teoría de números transfinitos. Una introducción*. En: Mathesis III, pp. 345-385.

SBARAGLI, S. (2004). *Le convinzioni degli insegnanti sull´infinito matemático. Tesi di Dottoratto di ricerca.* Universidad komenského di Bratislava director Ivan Treskansky, advisor bruno D´Amore. Versión en italiano y en inglés disponioble en el sitio: htt: // math.unipa.it/~ grim/tesi_it.htm.

SBARAGLI, S. (2006). *Primary School Teachers´ beliefs and change of beliefs on Mathematical infinity*. Mediterranean journal for Research in Mathematics education. 5, 2, 49-76.

SIERRA, M. (1989). *La reforma de la enseñanza de las matemáticas después de la segunda guerra mundial: Aportación del Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (C.B.P.M.)*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

SFARD, A. (1991). *Sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas: Reflexiones sobre procesos y objetos como caras diferentes de la misma moneda.* Traducción Libre realizada por: Edgar Alberto Guacaneme Súarez del texto: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics 22: 1-36 Klower Academic publisher, 1991.

TALL, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*. Focus on Learning Problems in Mathematics. 12, 3-4, 49-64.

TALL D, & TIROSH D. (2001). *Infinity- the never- ending straggle*. In: Educational Studies in mathematics studies 48 (2 y 3), pp. 129-136

THOM, R. (1970). *¿Son las matemáticas "modernas" un error pedagógico y filosófico?* En J. Piaget y otros (Eds.), *La enseñanza de la matemática moderna* (115-129). Madrid: Alianza Editorial, 1978.

TSAMIR, P. (2000*).* *La comprensione dell´infinito attuale nei futuri insegnanti*. La matemática e la sua didattica. 2, 167,-207.

TSAMIR, P. & TIROSH, D. (1999). *Consistency and representations: the case of actual infinity*. Journal for research in Mathematics Education. 30, 2, 213-219.

VALENCIA, S. (2009). *La objetivación de procedimientos matemáticos el caso del argumento diagonal*. Trabajo de Grado de la Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Colombia.

WALDEGG, G. (1996). *Identificación De Obstáculos Didácticos En El Estudio Del Infinito Actual***,** en: Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1, núm. 1. pp. 107-122.

WOJCIECHOWSKA, A. (1998). *Reforma del curriculum en matemáticas ¿Más allá de la revolución imposible?* Revista de Estudios del Curriculum, 1 (4): 101- 113.

ZAZKIS, R. y GUNN, CH. (1997). *Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions*. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16 (1): 133-169.

ZERMELO, E. (1908a). *A new proof of the Possibility of a Well- Ordering*. 1908. En: HEIJENOORT (1967)

**ZERMELO, E. (1908*). Investigations in the foundations of set theory I.* En: VAN