

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UNA PROPUESTA INSTRUCCIONAL EN TORNO A
LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL GRADO SÉPTIMO EN LA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA SAN VICENTE**

MARTHA JANETH CORRALES CASTAÑO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA I.E.P.
MAESTRÍA EDUCACIÓN ENFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2013**

**ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UNA PROPUESTA INSTRUCCIONAL EN TORNO A
LOS NÚMEROS RACIONALES EN EL GRADO SÉPTIMO EN LA INSTITUCIÓN
EDUCATIVA SAN VICENTE**

MARTHA JANETH CORRALES CASTAÑO

**Proyecto Para Optar al Título de Magíster en Educación
Énfasis en Educación Matemática**

Director

EVELIO BEDOYA MORENO *Ph.D*

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA I.E.P.
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ENFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI**

2013

DEDICATORIA

A TODOS LOS QUE CON SU VIDA CONTRIBUYEN A LA
PLENITUD DE LA MIA.
A MIS PADRES JOEL ANTONIO Y LUZ MERY, A MIS HER-
MANAS, A MIS SOBRINOS.
A MIS HIJOS LESLY VANESSA Y SAMUEL.
A MI ESPOSO CARLOS HUMBERTO, POR SU
CARIÑO, POR SU PACIENCIA, POR SU IMPACIENCIA Y SU
ALEGRIA,....POR COMPARTIR SU VIDA CON MIGO.
A TODOS ELLOS, ESTE REGALO QUE LES DEBO, SIN ELLOS
NADA SERIA IGUAL.

AGRADECIMIENTOS

A todas las personas que participaron e hicieron posible este proyecto:

El tutor de mi tesis Doctor Evelio Bedoya Moreno por su sabiduría, apoyo y comprensión

El Doctor Luis Rico y Pedro Gómez por su valiosa información.

A la institución educativa san Vicente por su colaboración.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA	5
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	6
1.1.1. Formulación del problema	9
1.2. JUSTIFICACIÓN	10
1.3.1. Objetivo General	12
1.3.2. Objetivos Específicos	12
CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA CURRICULAR	13
2.1. CONCRECIÓN CURRICULAR	14
2.1.1. Contextos de Concreción	16
2.2. ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO	26
2.2.1. Modelo Local	28
CAPÍTULO 3: MARCO CONCEPTUAL	29
3.1. FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS	30
3.2. COMPETENCIAS PROFESIONALES	31
3.3. COMPONENTE DE PLANIFICACIÓN DOCENTE	33
3.4. CONOCIMIENTO Y ANÁLISIS DIDÁCTICO	34
3.4.1. Análisis Didáctico (AD)	36
A. Análisis de Contenido (AC)	37
B. Análisis Cognitivo (ACg)	56
C. Análisis de Instrucción (AI) primera parte	66
D. Análisis de Instrucción (AI) segunda parte	73
3.5. ANTECEDENTES	76
CAPÍTULO 4: METODOLÓGIA	80
4.1. DISEÑO DEL PROYECTO	83
4.1.1. Enfoque metodológico	83
4.1.2. Estructura y fases del proceso	84

4.1.3. Duración de la aplicación	87
4.1.4. Prueba de diagnóstico	88
4.1.5. Recogida de información	89
4.1.6. Contextos y participantes	91

CAPÍTULO 5: LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO, ANÁLISIS DIDÁCTICO Y DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS 95

5.1. ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO PARA EL DISEÑO DE LA UD	96
5.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO (AD)	97
5.2.1. El Análisis de Contenido (AC)	98
5.2.2. Análisis Cognitivo (ACg)	119
5.2.3. Análisis de Instrucción (AI) I parte	128
5.2.4. Análisis de Instrucción (AI) II parte	133

CAPÍTULO 6: DESARROLLO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN GRADO SÉPTIMO 134

6.1. DESCRIPCIÓN DE LOS CONTENIDOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	136
6.2. DESCRIPCIÓN DE LAS SECCIONES PROPUESTAS	139

CAPÍTULO 7: REFLEXIONES FINALES Y RECOMENDACIONES 143

7.1. CONCLUSIONES GENERALES	143
7.2. RECOMENDACIONES	143

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 157

8.1. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA	157
8.2. BIBLIOGRAFÍA EN RED	160
8.3. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA	161

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Contextos de Concreción	15
Figura 2.2. Organización de los Estándares de Matemáticas	20
Figura 3.1. Proceso de elaboración de la Unidad Didáctica	38
Figura 3.2. Proceso de Modelización	51
Figura 5.1. Modelo local de OC	97
Figura 5.2. Diagrama de la estructura del AC de los números racionales	106
Figura 5.3. Esquema Conceptual	108
Figura 5.4. Los Sistemas de Representación de los Números Racionales	109
Figura 5.5. Modelos de áreas	110
Figura 5.6. Modelos lineales	111
Figura 5.7. Repartición de conjuntos	111
Figura 5.8. Recta Numérica	112
Figura 5.9. Armonigrama	112
Figura 5.10. Tangrams	112
Figura 5.12. Análisis Fenomenológico de los Números Racionales	114
Figura 5.12. Rectángulo sombreado	115
Figura 5.13. Forma Gráfica de los Caminos de aprendizaje	123
Figura 5.14. Materiales y Recursos	129

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Estándares curriculares del Grado Séptimo (7º)	23
Tabla 4.1. Descripción de la aplicación de la propuesta didáctica por sesiones y bloques	87
Tabla 4.2. Información general de la Institución Educativa San Vicente	91
Tabla 4.3. Características principales de la Institución Educativa San Vicente	93
Tabla 5.1. Capacidades previstas	120
Tabla 5.2. Dificultades y errores	127

ANEXOS

Anexo 1. La UD de los números racionales
Anexo 2. Contexto (PEI) de la Institución Educativa San Vicente
Anexo 3. Análisis de resultados de la experiencia
Anexo 4. Diario del estudiante
Anexo 5. Prueba de diagnostico
Anexo 6. Prueba final
Anexo 7. Lista de control para la unidad didáctica
Anexo 8. Planillas de observación para caminos de aprendizaje
Anexo 9. Capacidades
Anexo 10. Dificultades y Errores
Anexo 11. Análisis de Resultados
Anexo 12. Resultados
Anexo 13. Tabla de Resultados

RESUMEN

En este documento se presenta el informe del Proyecto de Sistematización de Experiencias (PSE), sobre una propuesta de unidad de organización y concreción curricular y didáctica (“Unidad Didáctica”) en torno a una estructura conceptual asociada al tema de los “números racionales”; correspondiente al grado séptimo (7º) de educación básica, en el contexto de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira, en la cual labora la autora de este trabajo.

Para la realización del PSE, se tomó como referencia las propuestas teóricas de los “Organizadores del Currículo” de Rico (1998) y de los “Modelos Locales de los Organizadores” de Bedoya (2002, 2011), desarrollados en el contexto de los trabajos del grupo de investigación y formación de docentes PNA –Pensamiento Numérico y Algebraico- de la Universidad de Granada, España. En síntesis, estos autores proponen que el conocimiento didáctico base de la formación profesional del profesor de matemáticas en torno a un contenido o tópico matemático, se fundamenta en determinados organizadores curriculares como la misma estructura conceptual, los fundamentos del currículo, los estudios históricos de la matemática orientados a su didáctica, la fenomenología didáctica y la modelación, etc., los cuales se operacionalizan y aplican a través de actividades de análisis didáctico en los contextos curriculares nacional, institucional y del aula, y se concretan en la elaboración de unidades didácticas para la enseñanza, aprendizaje y evaluación de dichos contenidos.

Teniendo en cuenta los anteriores referentes teóricos, me he propuesto llevar a cabo un análisis curricular y didáctico, como estrategia de Sistematización de mi práctica como docente en el grado séptimo (7º), en relación con el proceso sistémico

institucional referido a la estructura conceptual del tema de los “números racionales”; esta experiencia se concretó en el desarrollo, implementación y análisis de una “unidad didáctica”, lo cual permitió articular y coordinar de manera sistemática dos tipos de experiencias formativas (conceptual y procedimental, o de planeación y ejecución) que en la práctica resultan necesariamente complementarias, aun a pesar de las tensiones dialécticas que se puedan presentar entre los dos tipos de procesos.

Palabras claves: Conocimiento didáctico, Organizadores del Currículo, Modelo local de los organizadores, “números racionales”, unidad didáctica.

GLOSARIO

Análisis Didáctico: Se refiere a un procedimiento, sobre la base de los organizadores del currículo, el cual le permite al profesor de matemáticas (u otra área) diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. El análisis didáctico, está conformado a su vez por diferentes procedimientos según las diferentes dimensiones de la noción de currículo.

Currículo: De manera general, se entiende como el conjunto de conocimientos y actividades que estructuran y se estructuran en un plan integral de formación, el cual contempla, explícita o implícitamente, los siguientes elementos: a) El conjunto de personas a formar (profesores y estudiantes); b) El tipo de formación que se quiere proporcionar; c) La institución social en la que se lleva a cabo la formación; d) Las necesidades que se quieren cubrir; y e) Los mecanismos de control y valoración.

Organizadores del Currículo: Fundamentos conceptuales y metodológicos de los criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos; criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; para la decisión de prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos; y, finalmente, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores.

Unidad Didáctica: Una unidad didáctica es una estructura pedagógica de trabajo cotidiano en el aula; es la forma de establecer explícitamente las intenciones de enseñanza-aprendizaje que van a desarrollarse en el medio educativo. Es un ejercicio de planificación y concreción curricular y didáctica, realizado explícitamente, con el objeto de conocer el qué, quiénes, dónde, cómo y porqué del proceso educativo, dentro de una planificación estructurada del currículum.

INTRODUCCIÓN

Este Proyecto de Sistematización de Experiencias (PSE) sobre el desarrollo de una Unidad Didáctica (UD), en torno al tema de los “números racionales”, se llevó a cabo como requisito de trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática en la Universidad del Valle. El interés que despierta en nosotros es el de estudiar alternativas didácticas que ayuden a los profesores a superar posibles dificultades en la comprensión de los números racionales y así mejorar las competencias que un profesor debe conocer y manejar para el diseño de unidades didácticas.

La línea de esta investigación es la Didáctica de la Matemática (DM), la cual, tiene una incidencia directa en la formación inicial de los profesores de matemáticas de la educación secundaria; e igualmente esta formación, se relaciona con una “intervención orientada por objetivos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, y que incluye todas las formas de preparación del profesor y de su desarrollo profesional” (Krainer, 2008); nos proponemos, como dice Lupiáñez (2009) a un “cambio en las orientaciones curriculares”, la cual “necesita de una reorganización adecuada y coherente de la formación del profesorado que en última instancia son los que llevarán a cabo esas nuevas orientaciones”. A partir de la información anterior y siguiendo con esta misma línea los “programas de formación inicial” de profesores de matemáticas deben posibilitar que los futuros profesores, a través del desarrollo de diferentes formas de su participación práctica, “mejoren y amplíen su comprensión de las nociones y representaciones matemáticas, desarrollen comportamientos específicos y destrezas de razonamiento pedagógico” (Llinares, 1999). Los entornos de aprendizaje de programas de formación (García, 2000) deben ayudar a los futuros profesores de matemáticas a: cuestionar sus

creencias previas, ampliar y mejorar su comprensión de las nociones matemáticas escolares, desarrollar conocimiento de contenido pedagógico ligado a las nociones matemáticas escolares, generar destrezas cognitivas y procesos de razonamiento pedagógico, e incrementar los procesos de reflexión. Además, una de las principales líneas del PNA consiste en la concepción del futuro profesor de matemáticas como un profesional formado y reflexivo, con dominio de las matemáticas escolares tanto en el conocimiento base como en habilidades y destrezas.

De acuerdo con todo lo dicho anteriormente, se ha propuesto en este trabajo abordar la doble estrategia formativa de fundamentar conceptual y metodológicamente el Proceso de Sistematización de mi práctica como docente, desde las perspectivas teóricas mencionadas antes, y, por otro lado, elaborar, implementar y analizar una propuesta de concreción curricular y didáctica para el contexto del aula del grado séptimo (7°) en la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira. Igualmente, y en el contexto en el cual emerge la investigación y dadas las características de sistematicidad y rigor de un trabajo de este enfoque, éste puede constituirse en un significativo referente como propuesta de formación inicial y permanente de profesores de matemáticas de educación secundaria, en relación con la enseñanza, aprendizaje, evaluación y desarrollo de los “números racionales” en dichos grado de escolaridad. Además, y de acuerdo con el modelo curricular y didáctico propuesto, esperamos estar contribuyendo a mejorar la calidad de la actividad matemática en el aula, toda vez que este propende por el trabajo y desarrollo de la autonomía intelectual frente a los procesos de comprensión o aprendizaje por parte de los estudiantes.

Este proyecto se desarrolló desde los presupuestos metodológicos de la Investigación Acción (IA), la cual se presenta como una metodología de investigación orientada hacia el cambio educativo y se caracteriza entre otras cuestiones por ser un proceso que: según Kemmis y MacTaggart (1988); (i) Se construye desde y para la práctica; (ii) pretende mejorar la práctica a través de su transformación, al mismo tiempo que procura comprenderla; (iii) demanda la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas; (iv) exige una actuación grupal por la que los

sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación; (v) implica la realización de análisis crítico de las situaciones, y (vi) se configura como una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión. Estas características se acomodan significativamente a nuestros propósitos, para los desarrollos de las fases de análisis, como de la “unidad didáctica”.

Este informe del PSE el cual se concreta en el desarrollo de un plan de formación y de concreción curricular y didáctica se organiza en seis capítulos. En el Capítulo 1, se formula, contextualiza y justifica el problema como estrategia de recuperación descriptiva, narrativa y reflexiva de la experiencia, objeto de sistematización. Igualmente se presentan los propósitos generales y específicos del problema.

Los capítulos 2, 3 y 4 corresponden a la fase del análisis del PSE. Así, en el capítulo 2 se presentan el Marco de referencia (contextos y antecedentes) y el capítulo 3 el marco conceptual del proyecto. En particular se presentan las propuestas teóricas de los “organizadores del currículo” (Rico, 1997a) y de los “modelos locales de organizadores” (Bedoya, 2002, 2011). En el capítulo 4, se presentan tanto el Marco como el diseño Metodológico, con el cual se desarrolló el PSE. En síntesis, para el desarrollo del Proyecto propuesto se propuso un diseño particular que articula aspectos de las metodologías de investigación cualitativa y descriptiva de estudio de caso y de Investigación–Acción Participativa (I-A-P). El carácter recursivo y cíclico de este diseño se desarrolló en varias fases y sub-fases y se aplicó en el curso 2011-2012 de séptimo grado de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira.

El Capítulo 5, corresponde propiamente dicho con la fase de análisis del PSE. Contiene la descripción detallada del modelo de análisis didáctico (AD) adaptado para este trabajo. Este proceso consta de: un Análisis Didáctico de Contenido (AC), que en este trabajo tiene por finalidad estudiar los “números racionales” en sus diversos significados que se le atribuyen, desde cuatro contextos, la Didáctica de la Matemática (DM) y atendiendo principalmente a las siguientes dimensiones del significado de un concepto matemático: la estructura conceptual, los sistemas de representación y modelación y el Análisis Fenomenológico. El Análisis Cognitivo

(ACg) se ocupa de estudiar las dimensiones relacionadas con el aprendizaje del concepto. Abarca el estudio de las finalidades en el grado séptimo (fines, objetivos y capacidades), así como las limitaciones de aprendizaje, es decir, las dificultades y los errores que conlleva a la enseñanza y aprendizaje de los Números Racionales. El Análisis de Instrucción (AI) primera parte, se enfoca en las diferentes actividades y tareas que se desarrollan dentro del aula para la enseñanza del concepto. Finalmente el Análisis de instrucción (AI) segunda parte, se enfoca en la forma de evaluación de dicho concepto.

Los capítulos 6 y 7 corresponden a la “fase final” de potenciación del PSE. En el Capítulo 6, se formula y describe el proceso de implementación y reflexión de la “unidad didáctica” concebida como un dispositivo de organización, ejecución y análisis de los aspectos y concreciones curriculares referidas al contenido matemático que nos ocupa. Y en el Capítulo 7, se exponen las últimas reflexiones del PSE, considerando las siguientes categorías de organización: Formación Profesional, Competencias profesionales, CDC y Análisis didáctico, diseño o desarrollo de UD, el diseño metodológico del PSE y las Recomendaciones del Proyecto.

Finalmente se presenta las referencias bibliográficas que se utilizaron a través de las diferentes fases del trabajo.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA

La planificación curricular y didáctica es una de las más significativas e importantes competencias profesionales de los profesores, ya que les permite guiar y tomar decisiones a la hora de realizar su actividad docente. Este proceso exige no solo tener en cuenta determinados referentes curriculares institucionales, sino también tomar decisiones sobre el proceso didáctico instruccional en el cual se concretan estos referentes. En particular y como lo expresa Rico (1997):

“Cuando un profesor inicia la puesta en práctica de las directrices curriculares con un grupo concreto de alumnos, necesita tomar una serie de decisiones de carácter general. Estas decisiones se concretan mediante: criterios y organización de los contenidos; criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos y, finalmente, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores y las dificultades.”

Sin embargo, a pesar de la gran importancia que tiene para el profesor y también para el estudiante el desarrollo adecuado de estas actividades, en general, el primero suele realizarlas de manera no sistemática, lo mismo que el desarrollo del proceso de formación permanente que se requiere para mejorar su práctica “mediante procesos de ensayo y error” (Rico, 1998).

La mayoría de los autores del Grupo PNA que trabajan en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas -FPM-, coinciden en proponer el análisis didáctico y el diseño de unidades didácticas como estrategias adecuadas tanto

para mejorar la formación y competencias profesionales de planificación, programación y concreción de las propuestas curriculares en el aula de clase, como para el desarrollo del currículo y las prácticas por parte del profesor (Rico, 1998; Campanario y Moya, 1999; Bedoya, 2002). Se concluye entonces que esta alternativa conceptual y metodológica la proponen estos autores como estrategia para intentar dar respuesta organizada y sistemática, a las demandas y necesidades educativas relacionadas con los procesos instruccionales o de enseñanzas eficientes de las matemáticas en los distintos niveles o contextos escolares.

Teniendo en cuenta la importancia y pertinencia que tiene en el ámbito del Grupo PNA el tema de la planificación curricular y didáctica por parte de los profesores y las opciones que de manera teórica y en relación con otros contenidos y en otros contextos educativos e institucionales, han desarrollado y propuesto en el marco de la teoría general de los organizadores del currículo (Rico, 1997, 1998) y de los modelos locales de los organizadores del currículo (Bedoya, 2002, 2011), me he propuesto realizar el presente Proyecto de Sistematización de Experiencias(PSE) relacionado con la apropiación y utilización de estos referentes teóricos para el diseño, implementación y evaluación de una propuesta de unidad de análisis curricular y didáctico en torno al tema del sistema (estructura conceptual) de los “números racionales” en el grado 7°, en el contexto de la Institución Educativa San Vicente del Municipio de Palmira.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Formación Inicial del Profesorado de Educación Secundaria ha sido y sigue siendo un tema controvertido en el terreno educativo en relación al modelo, la duración de los estudios, el nivel académico, los contenidos y, en general, la formación de profesores según los diferentes niveles en los que ha de actuar. En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se ha planteado este tema en diferentes contextos y documentos (Lineamientos, 1998; Estándares, 2006): el trabajo de la enseñanza ha cambiado dramáticamente en los últimos 30 años,

población diversa, integración de discapacitados, la tasa de natalidad, las políticas de una mejor educación para un amplio rango de estudiantes, especialmente para familias de bajos ingresos; todo esto ha dejado un profundo desajuste entre las necesidades de aprendizaje, los requerimientos de los alumnos actuales y las competencias con que cuentan los profesores de secundaria tras su paso por las universidades y los institutos de formación docente. Igualmente, las políticas de educación exige a los profesores que enseñen a todos y además que tengan éxito (Gallego, 2005).

Actualmente, desde la enseñanza de la matemática: la “formación de los profesores de matemáticas, debe ser entendida como un proceso a través del cual un sujeto se hace profesional en el campo disciplinar específico de la educación matemática”, (Edwards, 1995; Feinman-Nemser, 2008; Korthagen y Kessels, 200; Laursen, 2007; Marcelo, 2009). En todo caso, se plantea que esta formación se debe basar en el desarrollo de determinados conocimientos, habilidades y competencias. Estos temas de la formación profesional de los profesores de matemáticas y el desarrollo de conocimientos, habilidades y competencias matemáticas y didácticas son centrales en las agendas investigativas de muchos grupos nacionales e internacionales en los campos de la Didáctica de las Matemáticas (DM) y la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM) (Rico, et al, 2008; Gómez, et al, 2008).

Adicionalmente, podemos argumentar que la tarea asistencial que constituye la docencia, atiende a estudiantes que son sujetos únicos, distintos y cambiantes, tanto por su individualidad, como por las condiciones socioculturales en las que se ubican. Ello hace que el profesor deba disponer de principios de actuación versátiles que le permitan adaptarse a situaciones y sujetos cambiantes. Para ello el profesor tiene que sumergirse en un proceso de desarrollo profesional, es decir, de formación continua en el ámbito de formación inicial, de acuerdo con Perrenoud (2001), “*la formación con base en competencias conlleva a integrar disciplinas, conocimientos, habilidades, prácticas y valores*”. Siguiendo a Martín del Pozo y De Juanas (2009), compartimos con Tardif (2004) que las competencias desarrolladas en el proceso de

Formación Inicial de Profesores deben entenderse y adquirirse en estrecha relación con la práctica profesional de los maestros de los colegios. Entre otras razones, porque en la formación inicial se pretende que los futuros profesores se vayan acostumbrando a la práctica profesional de los maestros en activo, no desde el punto de vista de reproducir dichas prácticas sino de analizarlas con fundamento teórico.

En este contexto y desde un punto de vista funcional de la formación del profesor, la competencia de planificación de la enseñanza resulta clave tanto como contenido u objetivo de dicha información, como objeto de estudio y conocimiento. Los autores anteriormente mencionados proponen la realización de un análisis didáctico (AD) y la elaboración de Unidades Didácticas¹ (UD) en torno a un contenido matemático escolar (CME) determinado, como una estrategia adecuada para el desarrollo de la formación y de las competencias profesionales de los docentes (Rico, 2005).

Igualmente, un profesor debe de tener unas competencias profesionales, de las cuales una de las características más destacadas es que el profesor sepa relacionar los distintos conocimientos matemáticos a la vez y que según Shulman (1996), todo señala que el profesor debe de tener un conocimiento en el contenido, un conocimiento curricular y conocimiento didáctico del contenido. Muchas veces el problema de cómo organizar las actividades de una clase concreta, anteriormente se hablaba de preparar clases, o programar la clase y en este sentido se mostraban a los futuros profesores de matemáticas como meros fines instructivos en la enseñanza de las matemáticas, con lo que la fase preactiva de la instrucción pasa a ser un depósito de materiales y un guión de desarrollo de contenidos a aprender, incluyendo una relación de ejercicios para ejemplizar lo explicado.

En forma general, la competencia de planificación es una de las competencias clave en el ejercicio de la profesión de los docentes, no sólo en razón que les permite anticipar y organizar el trabajo a realizar, sino también debido a que este proceso es transversal y articulado de todo el SD, que el profesor debe realizar y debe regirse por:

¹ En el Anexo 1, se encuentra la UD de los Números Racionales, desarrollada para este trabajo de investigación.

1. El profesor requiere una Formación.
2. Esa Formación profesional se concreta en unos conocimientos básicos y en el desarrollo de unas competencias generales y en unas competencias específicas.
3. Una de estas competencias específicas es la de la planificación del currículo en torno a los CME.
4. Muchos autores plantean de manera general el (AD), como parte del mejoramiento de dichas competencias.

La competencias de planificación curricular y didáctica nos muestra un camino a seguir tanto en la formación de profesores como de una mejor planificación de actividades concretas en el aula, desde este aspecto surgen preguntas como: ¿Qué clases de acciones de carácter formativo debe realizar un profesor para acceder a los conocimientos, resultados y propuestas de grupos (PNA) y autores en el ámbito de la DM y la FPM, de tal manera que permitan desarrollar competencias didácticas de planificación (curricular y didáctica) y de instrucción?; ¿cómo deberíamos planificar los saberes y competencias, de tal manera que se puedan desarrollarse en los estudiantes y asegurar el logro de los objetivos de aprendizaje?

La importancia de este Proyecto de Sistematización de Experiencias estriba en tomar en cuenta la competencia de planificación (curricular y didáctica) por parte del profesor de matemática de la educación secundaria como una posibilidad de cambio en la enseñanza, lo cual podría ayudar a establecer otras interacciones en el aula para favorecer la enseñanza de los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira.

1.1.1. Formulación del Problema

La información que aportan a la planificación docente los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines publican, se muestran claramente insuficientes para llegar al nivel del aula y decidir

acerca de qué debe aprender un alumno o alumna de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo cada día (Rico, Marín, Lupiáñez, Gómez, 2008).

En nuestro caso, como el propósito de la planificación curricular y didáctica, es el de aportar al desarrollo de las competencias profesionales a los futuros profesores, los cuales puedan guiar y tomar decisiones en su actividad docente, surge la siguiente pregunta general que orienta este estudio:

¿Qué conocimientos –conceptuales y procedimentales– de carácter matemático y didáctico que constituyen la competencia de planificación curricular o didáctica, se deben utilizar o tener en cuenta para realizar un análisis didáctico que conduzca al desarrollo de una unidad didáctica en torno al tópico de los “números racionales” para el grado séptimo 7º de educación básica en la institución educativa San Vicente?

1.2. JUSTIFICACIÓN

La investigación que se presenta en este documento, se centra en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, como señala Krainer (2008): *“la formación puede orientarse hacia perfeccionar las creencias de los profesores, su conocimiento y su práctica, y aumentar su motivación, su autoconfianza y su identidad como profesores de matemáticas y, lo más importante, contribuir al desarrollo efectivo y cognitivo de sus escolares”*; igualmente en la planificación docente, como señalan Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008): *“la planificación docente es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que ésta menos desarrollada en los planes de formación de profesores”*.

Este trabajo surge inicialmente de la preocupación general como docentes del grado séptimo (7º), de mi propia experiencia y necesidad como profesora en el aula de clase, de aumentar la motivación de mis estudiantes² por esta asignatura, así

² A lo largo de este trabajo voy a utilizar el término estudiantes, para referirme de forma general al colectivo de alumnas que forman parte el grado Séptimo (7º) de la Institución Educativa San Vicente, y de este modo, contribuir a la fluidez de la lectura del documento.

como mejorar su aprendizaje. De ese contacto o vivencias con el alumnado, se ha observado un denominador común, que se puede establecer debido a las diferentes carencias que se detectan tanto en las herramientas que tienen los profesores a la hora de realizar la planificación (curricular y didáctico) y de instrucción o de las competencias instruccionales (o de gestión y desarrollo de la enseñanza de las clases); así como también encontramos que los actuales programas de aula de los profesores de matemáticas no logran responder satisfactoriamente a las necesidades de nuestro sistema educativo, lo que hace pertinente reconocer que el conocimiento pedagógico de los contenidos debe mejorarse. Por otro lado, también se ha observado en un alto porcentaje de los estudiantes la falta de interés por aprender los contenidos que la “escuela” les brinda, que suele venir acompañada de dificultades de aprendizaje. Claro, que este desinterés no se refiere únicamente a nuestra área, sino que más bien se produce en general, a lo largo de las demás asignaturas, y es un sentimiento percibido por muchos docentes. En el caso de las matemáticas, hemos encontrado en gran parte de los discentes una acusada falta de motivación que, unida a una imagen distorsionada de esta materia, les lleva a considerarla como aburrida, difícil y desconectada del mundo real.

Para mejorar un poco estas carencias, la DM desde diferentes escuelas y propuestas, en particular la propuesta teórica de los Organizadores del Currículo (OC) del grupo PNA han venido desarrollando conocimientos (conceptuales y procedimentales) y propuestas para la formación de profesores de matemática y el desarrollo de competencias profesionales.

En este proyecto nos interesa reflexionar (Sistematizar) sobre la competencia de planificación (curricular y didáctica) del profesor, adicionalmente el de contribuir a esta línea de interés. Entendiendo competencia en la literatura de Tejada (1999) como: *“El conjunto de conocimientos procedimientos y actitudes combinados, coordinados e integrados en la acción adquirido a través de la experiencia (formativa y no formativa) que permite al individuo resolver problemas específicos de forma autónoma y flexible en contextos singulares”* (p. 28).

1.3. OBJETIVOS

A la vista de la definición del problema y la pregunta del problema de los apartados anteriores, en este Proceso de Sistematización de Experiencias se propone:

1.3.1. Objetivo General

Identificar y presentar algunos conocimientos didácticos en torno a un contenido matemático específico –el sistema de los números racionales en el grado séptimo 7- que sostienen la competencia de planificación curricular didáctica o instruccional por parte de los profesores de matemáticas en ese grado escolar y que se concretan en la propuesta de una unidad didáctica referida a este CME.

1.3.2. Objetivos Específicos

A continuación, describimos los objetivos específicos que sustentan el diseño de la propuesta:

- ❖ Implementar un modelo local de análisis didáctico identificando algunos conocimientos didácticos claves del contenido, que permitan caracterizar la competencia de planificación curricular, didáctico y lo instruccional de un docente en torno al CME de los números racionales en el grado séptimo.

- ❖ Concretar, organizar o estructurar lo anterior en una UD concebida como la concreción de la planificación y la competencia.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA CURRICULAR

En este Proceso de Sistematización de Experiencias (PSE) del docente, para situarnos en un contexto de prácticas, donde básicamente se pueda documentar y fundamentar las reflexiones sobre estas, ha sido necesario o conveniente considerar el currículo no como un concepto abstracto (Gimeno Sacristán, 1995), sino como un proceso o sistema dinámico, cultural y conceptual, objeto de estudio en tanto “*es un modo de organizar las prácticas educativas*” (p.14), tanto de carácter formativas de docentes y estudiantes, como didácticas o instruccionales. De acuerdo con esto, para poder reflexionar sobre un currículo determinado se necesita tener una teoría o un marco conceptual de referencia que permita contestar de manera fundamentada los interrogantes, de la misma manera explicar o interpretar sus componentes y relaciones y dotarlo así de significados y sentidos para él o los docentes. Asimismo y de acuerdo con Rico (1998), el sistema conceptual y procedimental que denominamos como currículo, viene a constituirse en un primer “*organizador*” para la actividad profesional del docente. De hecho, éste y otros autores del grupo y la línea internacional de investigación sobre la formación profesional del docente y el desarrollo profesional y curricular PNA (Pensamiento Numérico y Algebraico), conciben y proponen el currículo como un proceso de planificación de una formación determinada para unos estudiantes y docentes también determinados, y un contexto o escenario de actuación que viene a ser el aula de clases (Rico, 1997; Castro, 2001; Bedoya, 2002; 2004, 2012).

De manera general, estos autores proponen que para organizar y concretar la reflexión sobre este plan, hay que considerar los cuatro interrogantes siguientes:

1. ¿Qué es y en qué consiste el conocimiento?
2. ¿Cómo se concibe el aprendizaje?

3. ¿Cómo se concibe la enseñanza?
4. ¿Qué es y en qué consiste la utilidad del conocimiento?

Así como las cuatro categorías de conocimientos y prácticas siguientes:

1. Objetivos
2. Contenidos
3. Metodología
4. Evaluación (criterios e instrumentos)

Tanto las anteriores categorías como los anteriores interrogantes se deben considerar de modo sistémico, dinámico y estructurado (Vasco, 2010; Bedoya, 2012). Complementariamente, este último autor basándose en la propuesta teórica de Rico (1997) sobre “*los organizadores del currículo*”, con el fin de localizarla y concretarla en un contexto y objetivo determinado, propone considerar “*modelos locales*” de estos organizadores del currículo, los cuales determinan a su vez, modelos locales de análisis y concreción didáctica adecuados al contexto institucional, subjetivo (profesores y estudiantes) y de aula en el cual se desarrollan las actividades docentes (Bedoya, 2002).

2.1. CONCRECIÓN CURRICULAR

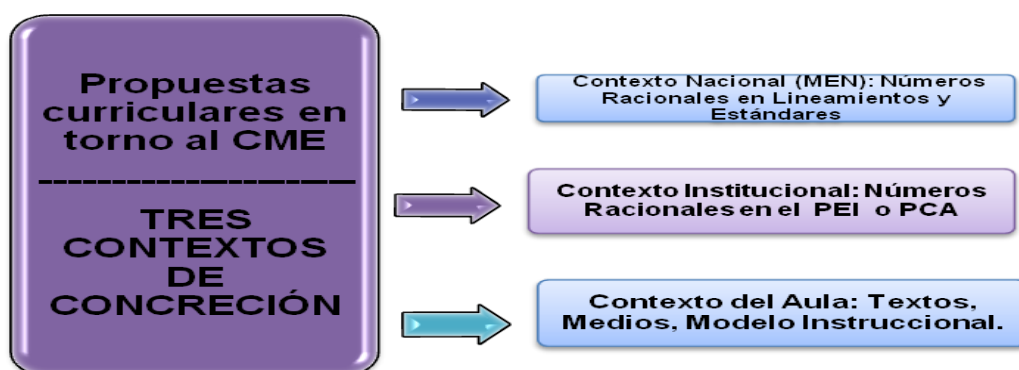
Una primera decisión de concreción curricular en el presente trabajo consistió en elegir como conocimiento y contenido disciplinar matemático el “*Sistema de Números Racionales*” (SNR) a nivel de grado séptimo (7°) de enseñanza básica, debido principalmente a que corresponde con mi desempeño actual como profesora de matemáticas de la Institución Educativa San Vicente del Municipio de Palmira.

A continuación se van a presentar las revisiones y reflexiones documentales curriculares, conceptuales y procedimentales (metodológicas) teniendo muy en cuenta las cuatro cuestiones (interrogantes) y categorías mencionadas en el apartado anterior, sin seguir un orden predeterminado, y teniendo como mira la concreción en los respectivos modelos locales, curriculares y de análisis didáctico de acuerdo con la propuesta de Bedoya (2002).

En el presente trabajo, se consideraron como referencia y aproximación curricular general e inicial, tres contextos (niveles) de concreción y reflexión sobre el CME en el currículo: MEN, PEI y Aula; concebido como proceso de planificación de una formación, los cuales se ilustran esquemáticamente en la Figura 2.1.

Una revisión y “recuperación” rápida de las prácticas y experiencias en relación con cada uno de estos tres contextos, guiados por las cuatro cuestiones y categorías, e igualmente manteniendo como referencia conceptual los desarrollos del grupo PNA, en particular los relativos a los organizadores del currículo que van a constituir el modelo local; nos permite inferir que el estudio (tanto la comprensión, como la enseñanza) de los números racionales, de sus estructuras y subestructuras presentan importantes problemas, obstáculos o dificultades (Rico y Sáenz, 1982).

Figura 2.1. Contextos de Concreción



Dichos autores, basándose en su investigación, plantean que buena parte de la responsabilidad en relación con estos problemas recae sobre los profesores de enseñanza primaria, para los que proponen mejorar su preparación o formación tanto inicial como permanente, en relación con los siguientes tópicos: una construcción del

concepto de número racional desde perspectivas cognitiva y didáctica segura, lo que implica un dominio e integración de sus diferentes significados; incorporación de nuevas y múltiples especificidades simbólicas, operatorias, sistemáticas, relacionales, estructurales y de representación; paralelamente, y desde la reflexión personal sobre sus prácticas y experiencias como docentes en formación, han de revisar sus conocimientos y concepciones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos de enseñanza y sobre sus procesos de comprensión y aprendizaje, así como el sentido de estos términos en relación con el conocimiento matemático y el papel que juegan los modelos de enseñanza y aprendizaje (modelos didácticos), y los diferentes sistemas de representación y procesos de visualización y modelación.

Todo lo dicho anteriormente nos muestra el interés de un docente preocupado por mejorar los resultados y la calidad de su enseñanza, e igualmente nos muestra el interés en ampliar y mejorar también su propia formación en relación con lo primero, por una parte la gran complejidad de la problemática, y por otra parte el carácter sistémico y especializado (profesional) de un proceso de formación exigido por dicha realidad. Buscar o intentar dar respuestas a estas exigencias, junto con la expectativa de obtención de resultados traducidos en propuestas curriculares e instruccionales concretas para el maestro y el aula de clases, es decir pensar un plan de formación teórica y desarrollo instruccional, constituye el propósito general del proyecto de sistematización de experiencias que me propuse realizar como estudiante de la Maestría en Educación Matemática.

2.1.1. Contextos de Concreción

Las leyes de educación desarrollan en sus textos los ideales vigentes, las pretensiones y los modelos, trazando directrices metodológicas, planteando objetivos de cara a la consecución de la construcción del paradigma de sociedad que en ese momento es considerado como deseable. Pero desde lo vertido sobre el papel a lo desarrollado de forma efectiva en las aulas existe un largo camino que es necesario definir primero para poder recorrerlo después.

Desde las leyes a las aulas, el camino se traza a través de tres niveles, conocidos como Contextos (Niveles) de Concreción Curricular, y que se describen a continuación:

I. Contexto Nacional (MEN): Estándares y lineamientos curriculares

También llamado el primer nivel de concreción y el más general ya que constituye la política trazada por el Estado a través del Ministerio de Educación. Es además, donde se señalan las intenciones educativas, orientaciones, planteamientos metodológicos y se plantea grosso modo los elementos curriculares, como Objetivos Generales, definiciones de las Áreas, Objetivos Generales de éstas, bloques de contenidos, etc.

Dentro de estos encontramos los estándares curriculares, los cuales son criterios que hacen referencia a una meta que expresa, en forma observable, (a) lo que el estudiante debe saber, es decir, los conceptos básicos de cada área, así como (b) las competencias, entendidas como el saber hacer, utilizando esos conceptos. Esto deja claro, que las competencias desempeñan un papel importante en el desarrollo funcional del conocimiento matemático (Lupiáñez, 2008). En Rico y Lupiáñez (2008a) se describen tres enfoques posibles para las matemáticas en la escuela, estos son: Enfoque instrumental o tecnológico; Enfoque estructural o técnico; y Enfoque Funcional. Estos enfoques dan pie a diferentes modelos de currículo, que nos muestran otras opciones para los planes de formación, según los conocimientos de los mismos.

Desde la perspectiva de los Lineamientos Curriculares propuestos por el MEN y teniendo en cuenta las nuevas visiones del ser humano en su relación con el conocimiento, la sociedad y la cultura el quehacer matemático se entiende como una actividad que socialmente debe ser compartida. El Conocimiento Matemático (CM) es el resultado de una evolución histórica influenciada por diferentes culturas y distintas circunstancias sociales y culturales, que sigue estando en constante evolución y sujeto a los cambios sociales, culturales, científicos y tecnológicos.

Avances significativos en la disciplina se han alcanzado por caminos distintos, en diferentes momentos, ámbitos de trabajo y culturas.

En consecuencia la educación matemática deberá contribuir al conocimiento cultural propio del entorno del individuo y potenciar en él habilidades que le permitan aportar desde su cultura a las discusiones en el ambiente de clase. Aparte de proporcionar una formación técnica y científica, la educación matemática, deberá contribuir a la formación de un ciudadano crítico y brindar herramientas suficientes para que el individuo tome posición frente a sus actividades diarias y de carácter científico. Es de anotar que en los lineamientos curriculares se reconoce que el conocimiento matemático potencia el desarrollo del pensamiento, que existe un núcleo básico de conocimientos al que debe acceder todo ciudadano y que son las situaciones problemáticas, el contexto principal del hacer matemático escolar.

A continuación miraremos brevemente los tópicos que hacen parte del contexto nacional (MEN):

A. Estándares

En Matemáticas los estándares se encuentran organizados de acuerdo con los componentes del área: (1) pensamiento numérico y sistemas numéricos, (2) pensamiento espacial y sistemas geométricos, (3) pensamiento métrico y sistemas de medidas, (4) pensamiento aleatorio y sistemas de datos, (5) pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos y (6) procesos matemáticos referentes al planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático y comunicación matemática.

Cualquiera sea el currículo que adopte la institución dentro de su plan de estudios, así como los mecanismos que opte para implementarlo, la enseñanza de las matemáticas debe cumplir los propósitos generales siguientes: 1) Generar en todos los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas y estimular en ellos el interés por su estudio; 2) Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de la matemática e, igualmente, la

capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas; 3) Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real; 4) Suministrar a los estudiantes el lenguaje apropiado que les permita comunicar de manera eficaz sus ideas y experiencias matemáticas; 5) Estimular en los estudiantes el uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas; y 6) Retar a los estudiantes a lograr un nivel de excelencia que corresponda a su etapa de desarrollo.

Las normas colombianas que definen, regulan y dan pautas para el diseño del currículo en los diferentes centros educativos del país son: 1) Ley General de Educación, Ley 115 de 1994; 2) Decreto 1860 de 1994; 3) Resolución 2343 de 1996; 4) Decreto 1290 de 2009; 5) Lineamientos curriculares de cualquier área, en nuestro caso de Matemáticas; y 6) Estándares básicos de competencias en diferentes áreas, en nuestro caso particular en Matemáticas.

B. Lineamientos curriculares en Colombia

En los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se proponen una serie de elementos para el mejoramiento del currículo de las matemáticas escolares; en los que se resalta la importancia de los contenidos básicos, las situaciones problema como contextos para el aprendizaje y la movilización de procesos matemáticos generales. Este trabajo centrará su atención en lo que son las situaciones problema, procurando mostrar como en una intervención pedagógica basada en este enfoque aparecen implícitos los conocimientos y el desarrollo de procesos de pensamiento.

En relación con los lineamientos curriculares, también se tienen en cuenta los cinco procesos generales que se contemplan: Formular y Resolver Problemas; Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad; Comunicar; Formular, Comparar y Ejercitar Procedimientos y Algoritmos. En todas las áreas curriculares pueden considerarse procesos semejantes y en cada una de esas áreas estos procesos tienen

peculiaridades distintas y deben superar obstáculos diferentes que dependen de la naturaleza de los saberes propios de la respectiva disciplina.

Figura 2.2. Organización de los Estándares de Matemáticas



C. Estándares y actividad matemática en el aula

En concordancia con la Ley 115 de 1994, donde se estableció los fines de la educación, se definió un conjunto de áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y dejó abierta la posibilidad de introducir asignaturas optativas,

pertinentes y necesarias de acuerdo con las características locales donde se desarrolla la acción escolar. De la misma manera, la Ley dio autonomía a las instituciones educativas para definir, en el marco de lineamientos curriculares y normas técnicas producidas por el MEN, su propio PEI.

El punto de partida fueron los lineamientos curriculares referidos anteriormente, estos procesos están muy relacionados con las competencias en su sentido más amplio, pues se pretende que los estudiantes se vuelven matemáticamente competentes, al desarrollar cada uno de los procesos generales, mientras van pasando por los distintos niveles de competencia.

D. Estructura de los estándares básicos de competencias en matemáticas

Siguiendo (MEN, 2006, p.76), aquí se seleccionan algunos niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamiento matemático, comentados anteriormente: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. El conjunto de estos estándares debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se desarrollan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo.

Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y procedimental. Ahora, la manera en que está formulado cada estándar es el siguiente: Aparecen cinco columnas encabezadas por el tipo de pensamiento respectivo y los sistemas asociados a él, se refieren también a la siguiente estructura (MEN, 2006, p.77):

Procesos Generales ↔ Conceptos y Procedimientos Matemáticos ↔ Contextos

La estructura anterior, es evidente en tanto los cinco procesos generales que se proponen en los Lineamientos Curriculares para toda actividad matemática y que se

describieron anteriormente, constituyen las actividades intelectuales que van a permitir a los estudiantes alcanzar y superar cada nivel en las competencias. De igual manera, los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la práctica y la formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y procedimental. (MEN, 2006, p.77).

i) Coherencia Vertical y Horizontal

Por la complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas se exigen en los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento entre conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados. Aunque ambas coherencias tienen el mismo contenido matemático, lo que varía en la coherencia vertical, es la complejidad y precisión del proceso matemático entre un grado y otro de enseñanza.

ii) Estándares curriculares de matemáticas para el grado 7º.

Los cinco tipos de pensamiento descritos en los lineamientos curriculares anteriormente (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y variacional), a partir de su construcción y articulación de los mismos posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas desarrollen el pensamiento lógico, de racionalidad y de argumentación. En nuestro trabajo tomamos como referencia dos de los pensamientos (el numérico y el aleatorio) para trabajar en el análisis de instrucción, los cuales observaremos en la tabla siguiente:

Tabla 2.1. Estándares Curriculares del Grado Séptimo (7º)

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS
<ul style="list-style-type: none"> • Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. 	<ul style="list-style-type: none"> • Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones: (Diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
<ul style="list-style-type: none"> • Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los naturales a la representación decimal usual de los racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. 	<ul style="list-style-type: none"> • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contexto HOTMs. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
<ul style="list-style-type: none"> • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.
<ul style="list-style-type: none"> • Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de

	datos (diagramas de barras, diagramas circulares.)
<ul style="list-style-type: none"> • Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares.)
<ul style="list-style-type: none"> • Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. 	<ul style="list-style-type: none"> • Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
<ul style="list-style-type: none"> • Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Uso modelos (diagramas de árbol) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
<ul style="list-style-type: none"> • Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.

II. Contexto Institucional (PEI)

La ley y la actualización curricular se concretan en el establecimiento educativo, en el Proyecto Educativo Institucional (PEI), es decir, es la adecuación de la política nacional a las condiciones de cada institución.

El desarrollo de este nivel corresponde a los equipos docentes, que deben adecuar los planteamientos del Diseño Curricular a las características idiosincrásicas de cada centro, contextualizando y detallando cada norma prescriptiva según el entorno en que se van a desarrollar de forma efectiva los procesos de enseñanza. De este modo, se da a los centros una cierta autonomía para elaborar sus propias normas de organización y funcionamiento, que quedan para ser resultado del trabajo en equipo de los profesores, en coherencia con el contexto y sus necesidades específicas, identidad propia, etcétera.

En nuestro caso, se concretan dentro de los indicadores del logro, del grado séptimo (7°) para el área de matemáticas, de la I.E. San Vicente.

III. Contexto del Aula:

En esta concreción los referentes curriculares nacionales (MEN), que se han enlazado a las condiciones institucionales en el PEI, deben aterrizar en el aula de clase mediante:

1. **Planificación por bloques curriculares**, adecuados a las condiciones y realidades de la comunidad, institución y grupo de niños de cada año.
2. **Plan operativo anual de aula**, en el que se establecen las metas que la institución pretende concretar durante un año lectivo.
3. **Planes de clase**, en los que se detallen las actividades organizadas dentro de un proceso de construcción del aprendizaje, en un tiempo determinado, con los recursos que se utilizarán, las actividades de evaluación que se realizarán para verificar el desarrollo de los aprendizajes y el logro de las destrezas al finalizar la clase.

En nuestro caso atendemos al orden desarrollados dentro de los diferentes Textos de matemáticas de Séptimo, en especial para los Números racionales encontramos el siguiente orden:

1. Fracción
2. Fracción equivalente
3. Orden de fracciones
4. Amplificación
5. Fracción propia
6. Fracción Impropia
7. Representación de las fracciones

8. Operaciones básicas entre números racionales
9. Fracciones decimales
10. Fracciones decimales exactas
11. Decimal periódico puro
12. Periodo
13. Fracción generatriz
14. Orden en los decimales
15. Operaciones básicas de los decimales

2.2. ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO

Según Bedoya (2002), para realizar el diseño, planificación y desarrollo de una propuesta curricular o de una UD no se debe reducir solo a la selección y secuenciación de un conjunto de conceptos y procedimientos sobre unos tópicos matemáticos determinados, “Sino que incorpora otras transformaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y que a la vez lo enriquecen” (Segovia y Rico, 2001). En esta línea de ideas, Coll (1998) propone considerar cuatro “organizadores fundamentales de contenido” (hechos, conceptos, procedimientos y principios); y cinco categorías relacionales, que pueden presentarse entre distintos elementos de estos organizadores de contenidos, y que son pertinentes con las decisiones y prácticas instruccionales, o sea, para la “organización y secuenciación de la enseñanza: relaciones de requisitos de aprendizaje, relaciones de procedimientos, relaciones de organización y coordinación, relaciones de principios y relaciones de atributos”.

Por su parte, Rico (1992; 1997a, b; 1998), basándose en los estudios del grupo PNA, concluye y propone la necesidad de una reformulación innovadora y local del currículo de matemáticas. Considerando nuevos organizadores para los diferentes niveles de concreción. Esta noción es una herramienta conceptual que contribuye a mejorar la profesionalidad del educador matemático, proporcionándole mayor grado

de autonomía intelectual y facilitando la gestión coordinada de los problemas derivados de la enseñanza de las matemáticas dentro del sistema educativo (Bedoya, 2002).

Todos los esfuerzos, investigaciones y estudios para el diseño, planificación y concreción del currículo en sus diferentes niveles, se ve condensada de forma rigurosa y detallada en la propuesta denominada análisis didáctico (AD).

Al respecto Segovia y Rico (2001), proponen como elementos teórico y metodológico, articuladores y facilitadores de este análisis, la noción de “*organizadores del currículo de matemáticas*”. Los cuales son sistemas de conocimientos que fundamentan los significados de los conocimientos escolares (Bedoya, 2002). La nueva concepción de currículo de matemáticas, es de carácter local, sistémico y funcional, exige considerar nuevos organizadores y nuevas muestras de procesamiento y construcción de significados para el conocimiento matemático escolar”. Es por esto que surgen los organizadores del currículo de matemáticas y Rico (1997a) resume las principales características de los organizadores de la siguiente manera:

Vamos a llamar *organizadores* a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículo. Hablamos así de organizadores del currículo. Una condición exigida para aceptar un tipo de conocimientos como organizador del currículo de matemáticas debe ser su carácter objetivo y la diversidad de opciones que genere. Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y comprensión del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad. Los organizadores deben mostrar su potencialidad para establecer distintos marcos de estructuración de las unidades didácticas, con una base objetiva de interpretación y discusión, para producir nuevos significados. Los organizadores han de ubicar las distintas opciones de los profesores para la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas y han de situar estas opciones en unas referencias comunes que permitan precisar las coincidencias y las discrepancias. El conocimiento

didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997^a, p.45).

2.2.1. Modelo local

Todo lo anterior se concreta y particulariza en un modelo local, según Bedoya (2002), refiere a: i) Un diseño curricular local: Ubicados en el Plan de FI de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria del Departamento de DM de la Universidad de Granada; ii) Una estructura conceptual referida a un contenido matemático específico: los números racionales, considerados desde un punto de vista escolar y ubicados en el marco curricular de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), en concreto en su segundo ciclo; iii) Los CD provistos por la asignatura de DM en el bachillerato.

CAPÍTULO 3

MARCO CONCEPTUAL

Para intentar describir o caracterizar las competencias de planificación de las actividades (Unidades Didácticas) que como docente de Matemáticas de Secundaria me corresponde realizar, tal como se ha dicho anteriormente, este trabajo se ha basado en el conocimiento y el análisis didáctico tal como estos son concebidos por los diferentes autores del Grupo PNA en relación con sus propuestas de organizadores del currículo y de formación inicial y permanente de profesores de matemáticas (Rico, Castro, Coriat y Segovia, 1997; Rico, 1997; Socas, 1999; Castro, 2001; Bedoya, 2002).

Las competencias profesionales del profesor de matemáticas y en particular las competencias de planificación, se enmarcan precisamente en los ámbitos relacionados de manera complementaria de la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas y de desarrollo curricular y didáctico (instruccional); por esta razón, éste trabajo se ha enmarcado conceptualmente en estos campos o líneas de formación e investigación, los cuales y de acuerdo con la revisión de la literatura pertinente, se concreta en unos desarrollos de Conocimientos Didácticos (CD) y en unas propuestas de Análisis Didáctico (AD). En coherencia con este enfoque o aproximación, me he propuesto estructurar conceptualmente este trabajo de Sistematización de Experiencias, concebido a la vez como un ejercicio de formación y desarrollo de competencias docentes, con base a cuatro categorías conceptuales que se exponen a continuación: formación del profesor de matemáticas, competencias profesionales del profesor de matemáticas, conocimiento y análisis didáctico y contenidos de matemática curricular.

3.1. FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En la actualidad, la escuela, tiene que enfrentarse al reto tanto de incrementar los niveles de calidad y equidad de la educación, como de confrontar los desafíos que supone una sociedad sujeta a rápidos cambios sociales, culturales, económicos y tecnológicos; desafíos que exigen un “nuevo docente” para el que reproducir información ya no es suficiente. Ahora se necesitan docentes bien preparados y comprometidos con su trabajo, flexibles y capaces de dar respuesta a las nuevas necesidades y demandas, innovadores y con recursos para transformar su realidad inmediata³.

La formación disciplinar y didáctica de los futuros profesores de matemáticas, en las últimas décadas ha demandado la atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas (Rico, 1992; Gómez, 2007; Sfard, Hashimoto, Knijnik, Robert y Skovsmose, 2004; Lupiáñez, 2005; Gómez y Marín, 2005; Lupiáñez y Rico, 2006) y de las administraciones educativas (MEN). La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores (Font, 2011).

Ahora, con relación a la Formación Inicial (FI) de los profesores, ya sea de matemáticas o de cualquier área, sigue siendo uno de los factores críticos el análisis de la relación entre calidad de la educación y el desempeño profesional de los mismos. En este sentido, como argumenta Steffe (2004), la FI debe ser la ocasión en la que los futuros profesores comiencen a desarrollar las competencias para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje que les permitan diseñar y llevar a la práctica actividades de aprendizaje. De esta manera la concepción del futuro profesor de matemáticas, sería un profesional formado y reflexivo, con dominio de las matemáticas escolares, y con los conocimientos necesarios sobre teoría curricular,

³ Ver Davini, C. (1995). *La formación docente en cuestión*. Buenos Aires. Paidós. Valliant, D. (2004). *Construcción de la profesión docente en América Latina. Tendencias, temas y debates*. Santiago de Chile. PREAL.

nociones generales de Didáctica de la Matemática y principios organizadores para considerar y mostrar la pluralidad de significados del conocimiento matemático, a los efectos de ser enseñado y aprendido (Rico, 1997a).

Esta preparación proporciona la formación necesaria, para dotar al profesor de la habilidad para elegir y conocer el por qué lo hace. Con lo cual el profesor podría seleccionar con criterio fundado un conocimiento particular para poder aplicarlo a la situación de enseñanza que considere pertinente para lograr los objetivos planteados. En particular, en este Proyecto de Sistematización se propone intentar identificar o reconocer y articular conocimientos que se consideran fundamentales en la formación profesional de los profesores de matemáticas de secundaria, a la hora de planificar y tomar decisiones relacionadas con la enseñanza de los números racionales en grado séptimo (7°); estos conocimientos disciplinares, curriculares y didácticos constituyen los fundamentos del análisis didáctico y se describen más adelante en este mismo capítulo.

3.2. COMPETENCIAS PROFESIONALES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Las competencias profesionales pueden definirse como el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes, de orden cognitivo, afectivo y práctico, necesarias para el desarrollo profesional del docente y que, según Roegiers (2010), se forman básicamente en el proceso de aprendizaje profesional, a través de procesos culturales vividos por el profesorado, ya sea de modo personal o colectivo. La sociedad y la escuela actual reclaman al profesorado una actualización permanente, centrado en las competencias profesionales, que dé respuesta al nuevo perfil del profesorado y a las funciones que debe desempeñar. En definitiva, los programas de formación deben centrarse en el desarrollo de las competencias profesionales necesarias para resolver los problemas que se plantean en los centros y en las aulas (Tejada, 1999).

Un paso previo, sería entonces, definir esas competencias, de la misma forma que se han realizado en otros estudios (Gairín, 2011; Tejada, 2009). Por su parte, Argudín (2005) establece que una competencia constituye un conjunto de comportamientos relacionados con aspectos: socio-afectivo, cognitivo, sensorial y motriz, que permita a la persona desenvolverse en una función, actividad o tarea. En esta definición, se deja ver, que las competencias no sólo apuntan hacia lo cognitivo o hacia la construcción del conocimiento, sino que, de manera complementaria, hay otros aspectos que deberían tomar en cuenta para el desarrollo de competencias. Bajo esta perspectiva, Perrenoud (1999) concibe la competencia como una capacidad de actuar de manera más eficaz en un tipo definido de situación, capacidad que se apoya en conocimientos, pero no se reduce a ellos.

Ahora en el área de las matemáticas, el concepto de competencia según el proyecto PISA, pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas; y teniendo en cuenta esto, las competencias del docente de matemáticas están referidas a los conocimientos y saberes relacionados con las actividades que le corresponde realizar o gestionar en relación con las cuatro grandes dimensiones del currículo; esto es, el contenido, el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación (Gómez, 2007).

Por otro lado, para Perrenoud (2001) la formación con base en competencia conlleva integrar disciplinas, conocimientos, habilidades, prácticas y valores. Este modelo parte de la integración disciplinar para formar profesionales capaces de afrontar las rápidas transformaciones de la sociedad del conocimiento.

De tal manera, siguiendo a Castillo (2008), se hace necesario propiciar ambientes de aprendizaje para desarrollar competencias investigativas a partir de la experiencia pedagógica de educadores en proceso de formación inicial como dice (Muñoz, 2005) con el propósito de desarrollar habilidades para aplicar conceptos básicos, los métodos y las técnicas de la investigación educativa en las situaciones cotidianas de la vida escolar.

Igualmente, Muñoz (2005), insiste en la importancia de desarrollar las competencias necesarias para que los educadores en proceso de FI logren interpretar, argumentar

y proponer alternativas a las posibles problemáticas que puedan surgir y caractericen un aula cualquiera de los diferentes niveles educativos.

3.3. COMPETENCIA DE PLANIFICACIÓN DOCENTE

En el mundo actual una de las tareas del profesor de matemáticas de Educación Secundaria va dirigida a colaborar en el desarrollo de los estudiantes, por lo que es muy importante tener en cuenta de que cada uno de ellos es un sujeto único, tanto por su individualidad, como por las condiciones socioculturales en las que se ubica. En esa búsqueda de alternativas, para poder lograr con esta tarea el docente tiene que centrar su atención en la planificación.

Desde esta perspectiva entendemos que, la planificación es una de las competencias profesionales más significativas para el profesor de cualquier área. En nuestro caso, resulta muy importante para el profesorado de matemáticas, dadas las dificultades inherentes al aprendizaje y enseñanza de esta materia (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Siguiendo a los anteriores autores, la normatividad educativa (PISA 2003) señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares específicos para cada institución educativa, los cuales deben contener instrumentos necesarios, para tomas de decisiones y propuestas para ajustar el contenido oficial del currículo. Es así que la planificación como competencia es primordial para el profesor de matemáticas, debido a que demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar; organizar, seleccionar y priorizar los significados de los diferentes conceptos matemáticos mediante el AC, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades.

3.4. CONOCIMIENTO Y ANÁLISIS DIDÁCTICO

La reflexión sobre el conocimiento didáctico del contenido es importante puesto que permite analizar específicamente “el conocimiento que los profesores poseen respecto del contenido que enseñan, así como la forma como los profesores trasladan ese conocimiento a un tipo de enseñanza que produzca comprensión en los alumnos” (Marcelo 1992, p.4). De acuerdo con Rico (1979b), el Conocimiento Didáctico (CD) en torno a un contenido determinado, “constituye la principal fuente de información y el instrumento que permite al profesor de matemáticas desarrollar las distintas actividades profesionales de planificación curricular y diseño de unidades didácticas que le competen”.

Para este autor, este conocimiento está relacionado básicamente con los siguientes tipos de cuestiones, reflexiones, análisis y prácticas asociadas: a) Una noción general, bien establecida, sobre el concepto de currículo, sobre sus dimensiones y niveles de reflexión; b) Una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que sostienen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; igualmente sobre los principios y criterios que sostienen los procesos de evaluación; c) Una consideración particular sobre los contenidos del currículo y su estructura conceptual; d) Una aproximación cognitiva sobre cada uno de los distintos contenidos (análisis cognitivo); e) El análisis semiótico de los contenidos y sus implicaciones didácticas; f) El análisis fenomenológico de los contenidos y su didáctica; g) Análisis epistemológico e histórico; h) Análisis y valoración de los contextos en los que se presentan cada concepto y de sus significados y usos; i) Revisión y reflexión sobre los materiales, recursos y tecnologías con las que se pueden considerar y trabajar estos contenidos y conceptos.

Por otro lado, algunas investigaciones realizadas señalan implicaciones para la formación de maestros. Por ejemplo, Sánchez y Llinares (1992), en su estudio de fracciones, concluyen que la comprensión de los conceptos implicados influye en la estrategia instruccional que el profesor utiliza y sugieren que la formación inicial del

profesorado debería concentrarse en desarrollar el conocimiento acerca de la relación entre los procesos matemáticos y la modelización de dichos procesos.

Teniendo en cuenta lo anterior, las principales cuestiones en que se basa este estudio son las siguientes: el análisis de la Estructura Conceptual (EC) de un contenido matemático curricular, en nuestro caso se trabaja sobre el sistema de los Números Racionales: El Conocimiento Didáctico (CD) y el Análisis Didáctico (AD), en torno a este contenido. Estas diferentes cuestiones las enfocamos desde la perspectiva general de la propuesta de los organizadores del currículo (Rico, 1997). El análisis didáctico, como procedimiento local, permite al profesor abordar el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza del aprendizaje (Gómez, 2007).

Para concretar en la práctica las directrices curriculares y didácticas inspiradas en el CD y el AD, es necesario diseñar y desarrollar un conjunto de actividades, estructuradas en una unidad de organización y análisis, Unidad didáctica. Esta unidad está destinada a un grupo concreto de estudiantes y se refiere a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto determinado. Para su realización, el profesor necesita conocer y dominar ciertos conocimientos y ciertas técnicas e instrumentos fundamentales y útiles relativos a este contenido y este contexto (Coll, 1988; Rico 1998a), así como sobre los procesos curriculares asociados de enseñanza, y evaluación.

En general, diseñar una unidad didáctica consiste en la selección y organización de los contenidos; el desarrollo y control de los procesos de enseñanza; la observación y seguimiento de los procesos de construcción y adquisición del conocimiento, de modificación y evolución de los esquemas o estructuras cognitivas, y de asignación y comprensión de significados por parte de los estudiantes; y se refiere también, al análisis, valoración y evaluación de todos los procesos anteriores, logros y resultados; y al tratamiento de los errores y dificultades relacionados con todo ello. De esta manera es como el profesor reflexiona sobre las matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas a los efectos de ser enseñadas y aprendidas. En síntesis. “Una Unidad Didáctica es una unidad de programación y actuación docente

constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia y Rico, p.87).

3.4.1. Análisis Didáctico (AD)

El AD surge de los diferentes trabajos de Luis Rico (1997), y se concreta en dos documentos fundamentales (Rico, 1997a; Rico, 1997b). En dichos documentos se establece el concepto de currículo y de los organizadores curriculares, quedando concretados en lo siguiente: Aspectos Históricos, Fenomenología, Sistemas de Representación, Errores y Dificultades y Materiales y Recursos (Rico 199a; Rico 1997b).

El Análisis Didáctico relativo a nuestro proyecto de sistematización, se ubica en un nivel local, restringido y de carácter sistemático del currículo. Definido principalmente como un procedimiento que permite al profesor del área de matemáticas, abordar la preparación y diseñar al establecimiento educativo estrategias de planificación curricular, articulado principalmente en cuatro fases: el **Análisis de Contenido (AC)**; el **Análisis Cognitivo (ACg)**; el **Análisis de Instrucción (AI) primera parte**; y el **Análisis de Instrucción (AA) segunda parte**.

Para desarrollar este Análisis Didáctico (AD), se necesita profundizar en nuestro conocimiento matemático de estudio: los Números Racionales. Esta profundización la realizaremos desde una perspectiva teórica que relacione a su vez aspectos sobre la enseñanza, y que represente la visión ideal de como el profesor de matemáticas debe planificar, llevar a cabo la práctica y evaluar una Unidad Didáctica, apoyado en la noción de currículo, sostenido por los organizadores curriculares, además con un enfoque funcional. En nuestro caso el diseño se lleva a cabo sobre la asignatura de matemáticas de grado séptimo 7° de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira. Asimismo, en nuestro trabajo el análisis didáctico cumplirá con las siguientes características: i) Es concreto para los Números Racionales, en cada uno de sus temas (definición, operaciones, situaciones problemáticas) y ii) Se realiza

para una planificación de un tiempo determinado de enseñanza de los Números Racionales. En nuestro caso se llevará a cabo durante tres meses y se aplicara en 6 secciones de clase de 120 minutos cada una y 2 bloques de 60 minutos. Para una población de 46 estudiantes correspondiente a un grupo del grado séptimo de la Institución Educativa San Vicente.

A. El Análisis de Contenido (AC)

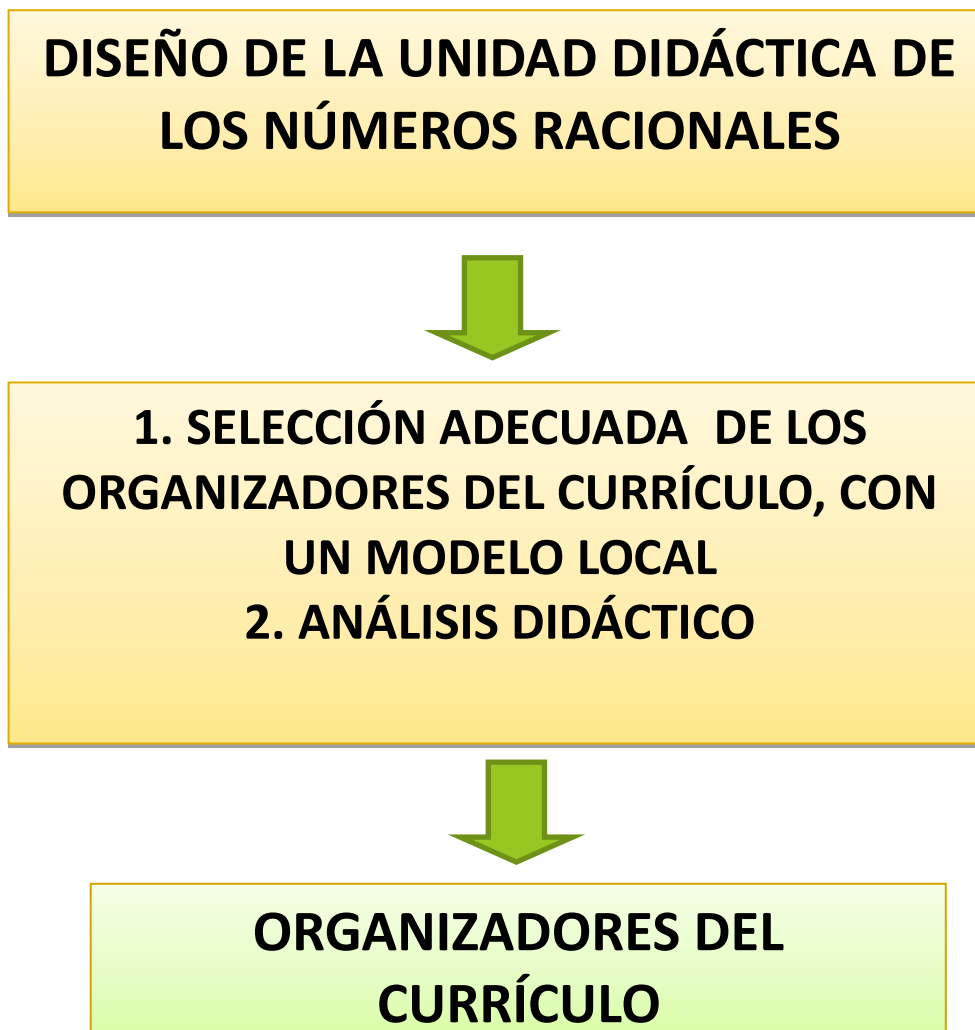
El AC, nos suministra un conjunto de herramientas técnicas para establecer y analizar la variedad de significados que tienen las nociones involucradas en el tema de los contenidos matemáticos desde la perspectiva de las matemáticas escolares, además, tiene que ver con la dimensión conceptual de los organizadores del currículo (Rico, 1997). Mediante este análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas involucrados, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas en su enseñanza a los estudiantes y además para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. Es decir, contribuye al profesor a mejorar la enseñanza desde la competencia de planificación (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

El AC sobre un tópico se lleva a cabo mediante distintas fases, las cuales desarrollan ciertas capacidades y contribuyen a la competencia de planificación. En este trabajo se muestra una aplicación de las nociones del AC mediante su ejemplificación con un tema de Educación Secundaria. El tema elegido como ejemplo es Sistema de los Números Racionales.

En la figura (Figura 3.1.) que se presenta en la siguiente página, presentamos esquemáticamente la organización estructural que se dan cita en él la elaboración de la Unidad Didáctica: Punto de partida: Los organizadores curriculares propios de la Institución Educativa San Vicente. Segundo punto: Realizamos una selección de un modelo local, siguiendo la propuesta del profesor Evelio Bedoya, para poder así planificar un análisis didáctico de los Números Racionales que nos brindara las

herramientas necesarias para realizar el Tercer Paso: llevar a cabo el diseño de la Unidad Didáctica.

Figura 3.1. Proceso de elaboración de la Unidad Didáctica



i. Análisis del contenido matemático

Para el correcto desarrollo de las tareas docentes y el logro de las perspectivas de aprendizaje, el profesor tiene que planificar su trabajo y, como hemos dicho, necesita considerar el significado de conceptos e ideas matemáticas desde una perspectiva

más amplia que la de su exclusiva fundamentación formal y axiomática y de su justificación deductiva, superando las ajustadas definiciones del currículo que lo estancan y limitan. El análisis de los significados de ideas y conceptos de las matemáticas escolares obliga a revisar los contenidos y las estructuras en las que tales conceptos se insertan.

En general en este punto, se estudia el contenido matemático, en nuestro caso los Números Racionales, desde la óptica de las matemáticas escolares. Ahora, desde la reflexión de nuestros autores (Rico y Gómez, 2007), se puntualizan cuatro niveles del contenido matemático, desde la reflexión del Análisis Didáctico:

1. Contenido Matemático Escolar:

Se encuentra definido por todo el cúmulo del conocimiento matemático que, a lo largo de la historia de las matemáticas escolares, de todo el mundo, se ha considerado como un objeto de enseñanza muy importante en la educación Básica y Secundaria.

En Colombia, como en muchas partes del mundo, durante los años de Educación Básica los estudiantes han de aprender acerca de los Números Naturales Números Enteros, Fraccionarios y Decimales, para, posteriormente, adentrarse en el mundo de los Números Racionales, concepto que se introduce formalmente en primer año de la Educación Secundaria. Por estas razones no resulta difícil caracterizar las líneas generales que han orientado durante estos años la práctica educativa sobre la enseñanza de las matemáticas, en general, y de los Números Racionales, en particular. Llevar a cabo esta caracterización es pertinente dado que nuestro estudio pretende mejorar la planificación de una UD, para una mejor enseñanza de las matemáticas en el grado séptimo (7°) de la educación secundaria.

Como se dijo anteriormente, antes del tema de los Números Racionales, la comprensión del concepto de fracción es un propósito trazado desde los primeros años de escolaridad. En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), establece que al terminar el cuarto grado, el estudiante debe estar en

capacidad de describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes y al terminar el quinto grado, además, de interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones, también ha de utilizar la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relacionar estas dos notaciones con la de los porcentajes.

De lo dicho anteriormente se deduce, la importancia de que los estudiantes comprendan el concepto de fracción y sus diferentes significados, de tal manera que puedan resolver cualquier situación relacionada con el tema sin dificultad.

Por otro lado, y de acuerdo a lo estipulado en los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de competencias Matemáticas (2006), se espera que los estudiantes en séptimo grado alcancen unos aprendizajes conceptuales significativos en lo relativo a las fracciones y su diferentes significados, sin embargo, en el aula de clase cuando se propone ampliar el conjunto numérico de los racionales, se evidencian dificultades de comprensión principalmente en lo referente al concepto de fracción y al manejo procedimental de las operaciones de los racionales. La mayoría de los estudiantes no cuentan con los conceptos básicos para acceder al conjunto de los Números Racionales.

En el proceso instructivo se concede mucha mayor importancia al conocimiento procedimental que al conocimiento conceptual. El 89% en primaria y el 76% en secundaria, de las actividades correspondientes a los alumnos son ejercicios. Esta situación produce que los estudiantes tengan un relativo éxito en las tareas de ámbito escolar pero que les resulte difícil exportar sus conocimientos a situaciones de la vida real, pues no disponen de un buen conocimiento de los conceptos ni de las razones que justifican las técnicas que utilizan.

2. Contenido Prescrito:

Constituye la selección del contenido matemático escolar que se recoge de las directrices curriculares oficiales. Además, en este también se encuentran las nociones básicas, que han de manejar todos los estudiantes. Estas se presentan

totalmente organizadas según las etapas y niveles. También está muy relacionado con los cambios políticos y las legislaciones educativas. Según los programas establecidos por el MEN, los primeros contactos de los escolares con el Número Racional se realizan a partir del concepto intuitivo de fracción en cuarto grado (4º) (9-10 años). Aquí, se inicia con la noción de fracción como relación parte-todo, y de manera general se describe como: Un par de números escritos uno sobre otro y separados por una línea horizontal, donde el denominador indica el número de partes en que se ha fraccionado y el numerador indica las partes que cogemos. En este mismo grado se introduce la noción de número decimal, relacionada a la noción de fracción y surge como consecuencia, no justificada, de un cambio de sistema de representación. En el cual las nociones sobre fracciones están relacionadas a modelos en los que se utilizan objetos distinguibles o figuras geométricas regulares; y los números decimales no se asocian a modelos sino a técnicas operatorias que permiten transitar entre distintas representaciones simbólicas entre las que se establece una relación formal más que conceptual. Así, y de manera secuenciada, los estudiantes observan que:

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{1}{100} = 0,01; \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Consecutivamente se instruye a estos estudiantes en la escritura de las fracciones decimales como números decimales: se escribe el numerador y separamos, con una coma, tantas cifras contando desde la derecha, como ceros tenga el denominador; y también se enseña a escribir los números decimales como fracciones decimales: el numerador es el número decimal sin la coma, y el denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía el número decimal. Igualmente, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números decimales se conceptualizan mediante la presentación de situaciones problemáticas asociadas a la medida de magnitudes.

En el quinto grado (5º) (10-11 años) los textos escolares analizados reiteran el esquema del curso anterior: empezar por las fracciones a partir de modelos y presentar los números decimales como resultado de convenciones simbólicas. Por

otro lado, las diferencias residen en la aparición de operaciones con fracciones, que se modelizan con figuras regulares, generalmente rectángulos o círculos, y con el significado predominante de la fracción como relación parte-todo, salvo en el caso de mostrar la fracción como división.

En el sexto grado (6º) (11-12 años) se reconocen las nociones sobre fracciones de los cursos precedentes; pero esta exploración se realiza desde la intencionalidad de progresar en la construcción formal de los Números Racionales. Ahora, se define la equivalencia de fracciones y se presentan las clases de equivalencia como elementos del conjunto Q ; sobre los elementos de este conjunto se inspeccionan las relaciones y operaciones conocidas utilizando fracciones equivalentes. También se amplía la relación operatoria entre las notaciones fraccionarias y decimal mediante una extensión del algoritmo de la división entera, lo que permite la aparición de números periódicos. Además en este nivel se amplía el dominio de los números: entran en juego los Números Negativos.

En el séptimo grado (7º) (12-13 años), los intereses de la educación se focalizan en el estudio de la proporcionalidad aritmética, que se presenta desconectada de las ideas sobre fracciones estudiadas en cursos precedentes. El contenido aritmético se completa con la introducción de una nueva estructura numérica: el conjunto de los Números Enteros. Para finalizar, el Sistema Educativo contempla que en el octavo grado (8º) (13-14 años) se finaliza la instrucción sobre el conjunto de los Números Racionales. Por otro lado, este recorrido por estos 5 grados, resume la secuencia instructiva que el currículo vigente hasta 1996 diseñaba para la construcción del conjunto de los Números Racionales. En este proceso instructivo el estudiante ha de observar cómo las ideas sobre fracciones se asientan inicialmente en la utilización de modelos; cómo estos modelos dan paso a un tratamiento progresivamente formalizado para la construcción de Q ; cómo surgen los números decimales a partir de las fracciones decimales; y cómo las relaciones entre las notaciones fraccionarias y decimal están basadas sobre criterios de tipo operatorio y no conceptuales.

3. Contenido Propuesto para una Asignatura:

Una vez resuelto el punto anterior, diferentes especialistas en educación matemática y profesores pueden tomar decisiones sobre como concretar esas directrices generales para configurar una asignatura de matemáticas para un curso determinado. Usualmente esto lo hacen los que elaboran los libros textos-guía: Desarrollan un tema, organizan una secuencia para esos temas y diseñan unas tareas específicas. Por esto mismo encontramos diferencias significativas entre las editoriales que proponen los libros textos para un mismo año escolar.

4. Contenido de un Tema Concreto:

Este nivel, también es muy importante para nuestro estudio, desde el punto de vista de la planificación de la Unidad Didáctica para el tema de los Números Racionales. Aquí se miran los múltiples significados del tema escogido, y la escogencia del significado más relevante para la instrucción.

Un concepto matemático escolar puede ser estudiado desde una multiplicidad de significados (Rico, 1997b). En el contexto de nuestro trabajo hemos encontrado dentro del análisis de contenido, siguiendo a Llinares y Sánchez (1988), cinco interpretaciones en las cuales los Números Racionales son estudiadas en el sistema educativo: Medida, reparto (Cociente), operador, razón (Semejanza, medida, porcentaje) y relación parte-todo:

i) Medida: Relación de una parte y de un todo (sea este continuo o discreto). Las situaciones que configuran esta interpretación del Número Racional implican situaciones de medida y por tanto consideran un todo dividido en partes. El Número Racional indica la relación entre la parte y el todo; **ii) Reparto:** Cociente y números decimales. Los Números Racionales pueden ser vistos como un cociente, es decir, como el resultado de una división en situaciones de reparto; **iii) Operador:** Significado funcional de la preposición “de”. La interpretación del Número racional como operador se apoya en el significado de función. Un Número Racional actuando

sobre una parte, un grupo o un número modificándolo; **iv) Razón:** Índice comparativo. Una razón es una comparación de dos cantidades (de igual o diferente magnitud); y **v) Relación parte-todo:** Para el caso de la interpretación de la fracción como relación parte-todo, proponen siete atributos que caracterizan dicha relación.

Vasco (1987) afirma que el paso del concepto de número natural al concepto de Número Racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. Involucra además, la comprensión de líneas medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes, las primeras situaciones llevan al Número Racional como medidor o como operador ampliador o reductor (algunas veces considerados como partidores o fraccionadores de la unidad en partes iguales), representando usualmente por una fracción como $\frac{7}{3}$ o por un decimal como 0,56 o por un porcentaje como el 14%. Las otras situaciones llevan al Número Racional como razón, expresado a veces por frases como, cuatro de cinco, o cuatro de cada cinco, o la relación de cuatro a cinco, o por la forma abreviada 4:5.

ii. Estructuras cognitivas del contenido matemático

Uno de los AC, es revisar todas las estructuras matemáticas, en este caso desde una perspectiva cognitiva. Dentro de esta perspectiva cognitiva, y enfocando específicamente el conocimiento matemático, muchos autores han propuesto concebir este tipo de conocimiento estructurado en tres campos principales y complementarios: el *Campo Conceptual*; el *Campo Procedimental*, y el *Campo Actitudinal* (Bell, Costello & Kuchermann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1995). En nuestro proyecto investigativo vamos a denominar a cada uno de estos campos

dimensiones del conocimiento, para recalcar el hecho de que estos tipo de conocimientos no son dissociables, salvo para efectos de su análisis.

El primero, el Conceptual, está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el Procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. Además, el conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz, reflexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber común. El último, el Actitudinal, se consideran los aspectos del conocimiento matemático y sus múltiples representaciones en relación a su forma de enseñanza. Miremos como se encuentran los dos primeros campos dentro de nuestra Unidad Didáctica:

1. Contenido Conceptual para una UD de los Números Racionales:

Naturalmente, los contenidos de la unidad variarán según el curso para la queremos usar. En nuestro caso los Contenidos Conceptuales Básicos son: i) Números Racionales; ii) Orden de los Números Racionales; iii) Densidad del conjunto Q ; iv) Suma, resta, multiplicación y división de Números Racionales; v) Expresión fraccionaria de un Número Racional; vi) Números decimales puros y periódicos mixtos; vii) Expresión decimal de una fracción; y viii) Expresión fraccionaria de un número decimal exacto y periódico.

2. Contenido Procedimental para una UD de los Números Racionales:

i) Obtención de la expresión de fracción; ii) Obtención de la expresión fraccionaria de un número decimal exacto o periódico; iii) Utilización de los porcentajes para expresar fracciones y números decimales; iv) Operaciones de los Números Racionales; v) Realización de operaciones con números

decimales y fracciones; y vi) Representación gráfica de Los Números Racionales por figuras geométricas y en recta.

Además, dentro de esos dos campos se establecen tres niveles de complejidad, en el Campo Conceptual tenemos: *Hechos*, que es el nivel básico de complejidad y a su vez se organizan en términos, notaciones, convenios y resultados. En un nivel medio de complejidad están los *Conceptos*, que pueden tener diferentes significados, como es nuestro caso con los Números Racionales. En un nivel de complejidad superior están las *Estructuras*. El conocimiento de la estructura de los Números racionales tiene que ver con las relaciones y propiedades características de los mismos. En el Campo Procedimental los tres niveles de complejidad son: *Destrezas*, *Razonamientos* y *Estrategias*. Por ellos, algunos conocimientos de los Números Racionales se presentan en el nivel básico de destrezas como el conocimiento de adquirir o afianzar las operaciones entre ellos. En el caso de razonamiento, Puede ser deductivo en el tratamiento. En el mayor nivel de complejidad se encuentran las Estrategias, como son la capacidad de estimar o reconocer las distintas formas de los conceptos, del tema a estudiar. Finalmente, también se toman en cuenta los conocimientos didácticos provistos por la asignatura de Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, y que en nuestro caso son necesarios para la concreción en el diseño y planificación de actividades didácticas sobre los Números Racionales, en el segundo grado de secundaria.

Fuera de los dos campos anteriores, se debe tener en cuenta para la planificación de la UD, los siguientes contenidos actitudinales: i) Apreciación por la utilización correcta de los diferentes significados de los Números Racionales y sus propiedades; ii) Interés por experimentar la utilidad de los Números Racionales en situaciones de la vida real; y iii) Valoración propias capacidades para plantear y resolver problemas relacionados con situaciones de la vida ordinaria.

En síntesis, con base en el diseño curricular de la Institución Educativa San Vicente y a los conocimientos sobre el contenido matemático del Grado séptimo (7°) y su enseñanza, se determinará y seleccionará unos objetivos y unos aspectos del

contenido y también, se diseñará, planificará y producirá unas actividades didácticas como propuestas para la enseñanza de estos contenidos matemáticos.

iii. Mapa relacional de Conceptos y Procedimientos

Para profundizar en el proceso de AC de un tema matemático conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos y procedimientos, muestre la articulación e interdependencia entre ellos, y exprese su complementariedad. Para ello deberá destacar ciertas ideas centrales a partir de las cuales organizar la enseñanza del tema.

La organización alrededor de conceptos básicos admite una primera representación en modo de mapa conceptual, específico a cada uno de los focos. Con esta representación se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. Entre las ventajas de los mapas conceptuales destacan:**1)** Establecer una jerarquía de nociones dentro de cada concepto, que se expresa por su ordenación dentro de una lista mediante una representación lineal secuenciada; **2)** Conectar las nociones de las distintas listas; las relaciones y conexiones se muestran mediante segmentos o posiciones conectadas que, a veces, se identifican mediante etiquetas.**3)** Mostrar un grafo con nodos y conexiones como producto final; los nodos con mayor número de conexiones son los conceptos principales; **4)** Considerar distintos recorridos en el grafo; cada recorrido muestra un modo coherente de secuenciar varias nociones centrales en una estructura conceptual.

Concluyendo: El mapa conceptual es, fundamentalmente, un esquema para entender e interpretar una estructura conceptual determinada. Cuya delimitación de un tópico matemático ubica los correspondientes conceptos y procedimientos y sus relaciones, establece prioridades, destaca conexiones y muestra las diversas opciones y trayectorias para organizar las expectativas sobre su aprendizaje; igualmente, aporta las referencias necesarias para establecer sus significados.

iv. Estructura del AC desde los Organizadores Curriculares

En este diseño sobre la estructura de análisis de contenido, del significado de las nociones que conforman un tema de las matemáticas escolares, procede del planteamiento realizado, los organizadores del currículo y modelos locales de organizadores (Rico, L.; 1997; Bedoya, E. 2002). Lo cual para nuestro trabajo hemos considerado los siguientes organizares:

1. Estructura Conceptual (EC): Desde un enfoque formal, una estructura matemática se establece cuando se define el conjunto de objetos que la sustenta, algunas operaciones significativas, algunas relaciones significativas y algunos elementos significativos (Marker, 2000). La noción de estructura conceptual es una noción de lógica matemática que se materializa en la metodología clásica en la que se establecen definiciones, principios, propiedades y que mediante una serie de reglas y razonamiento se infieren nuevas propiedades.

Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y de las relaciones correspondientes a ese concepto. Esta componente del significado corresponde a lo que Frege denomina referencia y constituye una frontera entre la matemática pura y la matemática escolar.

2. Los Sistemas de Representación: El estudio e investigación de los sistemas de representación es uno de los componentes de la estructura de análisis de contenido. Por representación se entiende cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997). Esos diferentes modos de representar comparten una estructura, y por ello se habla de *Sistemas de Representación* (Janvier, 1987).

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades. Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del

significado de las nociones matemáticas, y contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos. Cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros. El estudio de los sistemas de representación de un tema matemático tiene como objeto que los profesores de matemáticas desarrollen su capacidad para analizar diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos involucrados en ese tema y explorar y mostrar sus diferentes conexiones.

Además, un sistema de representación debe responder a las preguntas ¿qué representaciones hay asociadas al tema? Y ¿qué relaciones se pueden establecer entre esas presentaciones? (Gómez y Cañadas, 2011).

Teniendo en cuenta esas dos preguntas, identificamos los sistemas de representación que consideramos relevantes para nuestro tema:

Sistema de Representación Simbólico: Este sistema consiste en el conjunto de símbolos (Caracteres) que pueden asociarse a nuestro tema. Esto, es el sistema de numeración utilizado, los signos de las operaciones empleadas y otros símbolos que tienen significados precisos y coherentes dentro del tema.

Sistema de Representación Gráfico: Este sistema consiste, en las posibles representaciones que se puedan dibujar o graficar asociadas a los conceptos y procedimientos del tema estudiado.

Sistema de Representación Manipulativo: Este sistema consiste en los posibles elementos manipulables relacionados con un tema matemático específico.

Sistema de Representación Verbal: Este sistema consiste en representar conceptos y procedimientos mediante palabras, expresiones y oraciones cortas, escritas u orales.

Sistema de Representación Numérica: Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir varias formas de expresar el mismo concepto matemático.

v) Modelización

Debido a que en nuestro proyecto de sistematización estamos interesados en los modelos matemáticos y en el proceso de modelización matemática desde un diseño didáctico, atenderemos a su construcción y utilización con el propósito de alcanzar mayores niveles de beneficio en la enseñanza de las matemáticas. Según Lange (1987) y Swetz (1991): *“Al proceso mediante el cual se construye y se desarrolla un modelo matemático se le conoce como modelización matemática. Modelizar una situación de la vida real significa matematizarla”*.

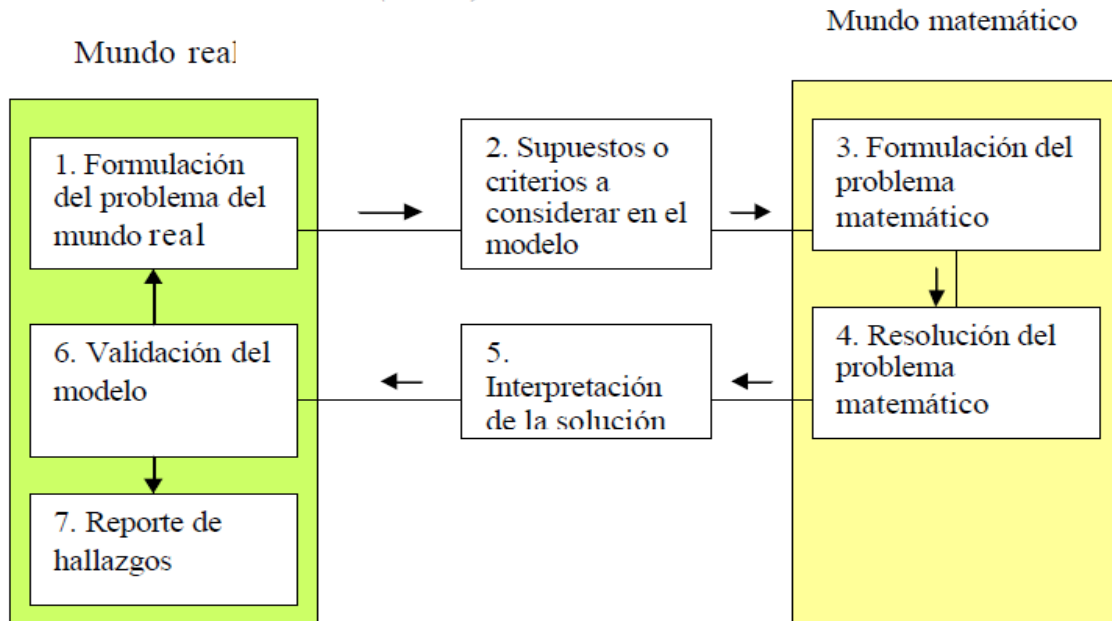
El proceso de modelización en educación matemática es un tema de interés que ha tomado mucha amplitud dentro de los investigadores y estudiosos de diversos países, para Rico y Gómez (2002) la modelización se trata del proceso en el cual se busca encontrar la estructura matemática que representa a la problemática que surge de un fenómeno. Igualmente Blum (1991) y Castro y Castro (1997) afirman que la modelización debe ser incorporada en la enseñanza de las matemáticas (p.85). Estas sugerencias deben tener su consideración en los programas de matemáticas de secundaria, cuando se afirma que se deben relacionar propiedades matemáticas de los distintos objetos de estudio con las propiedades de los modelos obtenidos, e interpretar los resultados de acuerdo con las situaciones planteadas.

En este trabajo nos referimos a un modelo matemático en el sentido amplio de Rico y Gómez (2002): “...un constructo de carácter dinámico que resulta de la matematización de la realidad, además conserva un isomorfismo con la realidad de la cual procede”. Dicho constructo está constituido esencialmente de fenómenos, estructuras matemáticas y de relaciones entre fenómenos y estructuras. Tales relaciones representan aspectos de una situación del mundo real.

Asumimos la modelización, como el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre fenómeno y una estructura, a partir de una situación o problema del mundo real. Esto significa que las implicaciones del modelo lo deben orientarse a la comprensión y resolución del problema correspondiente al mundo real.

Figura 3.2. Proceso de Modelización⁴

*Proceso de modelización según Stewart & Pountney
(1995)*



Además, se entiende como una situación abierta que pertenece al mundo real, susceptible de ser tratada con herramientas matemáticas. Hay que mostrar el interrogante en términos de una estructura matemática que resume y expresa el problema. Además, aquí se incluye la posible toma de datos y su organización para análisis posterior; **ii) Construcción del Modelo Matemático:** se entiende como un constructo que permite describir, predecir y explicar fenómenos o hechos a los cuales refiere. Al modelizar se deben establecer los datos, conceptos, relaciones, condiciones y premisas que serán introducidos al lenguaje matemático; **iii) Elección de los Contenidos y métodos Matemáticos apropiados:** En este punto se acude a los conceptos y técnicas matemáticas, también se puede recurrir a los recursos

⁴ En esta figura se puede apreciar el planteamiento de Stewart y Pountney (1995), quienes plantean que la naturaleza abierta de la modelización matemática es la antítesis de la experiencia un problema – una solución. Los autores, proponen una metodología basada en la aproximación de las siete cajas, manifestando además que es un abordaje ampliamente usado en la enseñanza de la modelización matemática.

tecnológicos para su aplicación operativa o resolución; **iv) La Interpretación y Validación de las conclusiones:** Este punto se realiza contrastando directamente con la situación del mundo real, que está siendo estudiada, o a través del modelo real configurado en la modelización realizada.

La Modelización como Organizador del currículo:

Ortiz (2002) afirma que *el empleo de la modelización como organizador del currículo adquiere cada vez mayor relevancia en la enseñanza de las matemáticas* (p.71). Además, *la modelización genera un espacio de reflexión que muestra los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático* (p.72). Estas consideraciones nos permiten afirmar que los modelos y el proceso de la modelización satisfacen lo exigido en el planteamiento de Rico (1997b) para que un conocimiento tenga estatus de organizador del currículo.

Uno de los aspectos más importantes que caracterizan a la modelización es que permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los estudiantes, es decir, el profesor tendrá en este organizador muchas opciones que le pueden ayudar a relacionar las estructuras y conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los estudiantes puedan vislumbrar una mayor importancia a los temas de las matemáticas escolares y basar su conocimiento matemático en fenómenos y cuestiones cotidianos. La modelización también ayuda a que los estudiantes perciban las matemáticas como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento del mundo real. Castro y Castro (1997) sostienen que “...la modelización matemática es un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula”. (p.110).

Lo antes señalado pone en demostración la importancia que ha cobrado en los últimos años la incorporación de la modelización en los currículos de las matemáticas, entendido esto como un proceso clave en la mejora de la apreciación y

comprensión vinculada al entorno social, de una manera asequible al conocimiento que posee el estudiante.

Resolución de un problema vía modelización:

La modelización en este tema implica traducir los problemas desde un mundo real al mundo matemático, este primer proceso se conoce como modelización horizontal. Una vez hecho lo anterior, el proceso puede continuar. Aquí el estudiante puede plantear a continuación cuestiones en los que se utilizan conceptos y destrezas del mundo matemático. Esta parte del proceso se denomina modelización vertical, lo cual incluye diferentes representaciones.

Al respecto Silver (1994) refiere dos situaciones idóneas en la formulación de problemas: Una es aquella en la que un sujeto a partir de un hecho cualquiera genera problemas nuevos, por ejemplo, en una situación cotidiana de compra-venta, y otra, en la que a partir de un problema complejo se procede a la división de éste en problemas más sencillos, en este caso se presentan reformulaciones del problema inicial. Igualmente, Cázares (2000) al respecto considera dos aproximaciones a la formulación de problemas: 1) problemas que se plantean dentro del proceso de resolución de un problema. 2) problemas formulados a partir del contacto del sujeto con su medio. La segunda aproximación se realiza, por ejemplo, cuando un sujeto se enfrenta a una situación real donde tiene que hacer uso de los conocimientos matemáticos que posee para enunciar y resolver el problema.

vi) Análisis Fenomenológico (AF)

Para Puig (1997), los objetos matemáticos son medios de organización de fenómenos en diversos contextos, razón por la cual una de las tareas de la fenomenología en el campo de la didáctica de la matemática, consiste en indagar los objetos matemáticos más allá de sus estructuras formales, para determinar cuáles son los fenómenos que dichos objetos modelan y organizan; por ejemplo, el

concepto de número está relacionado con una gran cantidad de fenómenos, la mayor parte de ellos referidos a cantidad, medida y orden; las figuras geométricas como objetos matemáticos organizan un conjunto de fenómenos que se puede calificar globalmente como el mundo de los contornos.

Realizar un análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos consiste en detallar fenómenos asociados a los conceptos matemáticos así como la relación que existe entre ellos. Bajo esta idea, los significados de los conceptos y procedimientos matemáticos se muestran mediante su conexión con el mundo real, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego, con los fenómenos de los que surgen o en cuyo tratamiento se envuelven tales conceptos (Lupiáñez, 2009). Tiene como finalidad constituir una ayuda para la organización de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituye, además, una fuente de información para, la organización de actividades motivadoras y el planteamiento de problemas.

Desde este enfoque, el significado de conceptos y procedimientos matemáticos se manifiestan mediante su conexión con el mundo real, con las situaciones en las que se sitúan y con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos de los que surgen o en cuyo procedimiento se implican tales conceptos. Situaciones, Contextos, Fenómenos y Subestructuras, son los aspectos más importantes del análisis que hay que tener en cuenta.

Situaciones: Esta estructura matemática inicia por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos implicados, aquéllas en las que éstos muestran su funcionalidad. Las situaciones matizan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un sujeto viene relacionada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el propio sujeto.

Además, una situación viene dada por un referente al medio (natural, cultural, científico y social) en donde se sitúan los problemas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los individuos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Las situaciones que se consideran como criterio clasificador de tareas matemáticas son: personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

Contextos: Según Rico y sus colaboradores (2008) señalan que “*Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para qué se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones*”. (p.11). Son varios los contextos numéricos para los Números Racionales: Contar, Expresar Cantidad, Medir, Ordenar, Operar, Simbolizar; ya que estos satisfacen distintas funciones y atienden a diferentes necesidades.

Uno de los propósitos de la Unidad Didáctica es que los estudiantes operen (ejecuten) expresiones aritméticas que involucran adiciones de números racionales. El contexto asociado a nuestro tema lo hemos denominado “contexto operacional”. Para realizar la suma de Números Racionales y hallar un resultado., se usan las propiedades y procedimientos descritos en la estructura conceptual. Por lo tanto para resolver una expresión aritmética que representa una situación aditiva, es posible aplicar algoritmos y propiedades para su solución.

Fenómenos y Subestructura: En este punto se pretende que los profesores puedan, por un lado, identificar fenómenos asociados al tema de los Números racionales, y, por el otro, establecer relaciones entre esos fenómenos.

Mencionamos algunos fenómenos relacionados con nuestro tema la suma o adición de números racionales. La temperatura de un día cualquiera a las 6 a.m. es $-3/5^{\circ}\text{C}$, y si desde la 6 a.m. a las 12 a.m. aumenta en $12/5^{\circ}\text{C}$, ¿se puede hallar la temperatura a las 12m? Es posible dar respuesta a la pregunta mediante una adición. En una finca, se tiene sembrado de la siguiente manera: La cuarta parte de un terreno está sembrado de papa, dos quintas partes de hortalizas; y tres décimas partes de árboles frutales. ¿Qué parte del terreno está sembrado? Las preguntas planteadas en los dos ejemplos hacen referencias a una pregunta más general: ¿cuáles son los valores?

Aunque nuestro tema tiene un amplio campo de subestructuras detectadas, que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades; identificamos la subestructura matemática, en expresiones aritméticas presentes en situaciones aditivas, que permite organizar los fenómenos de nuestro tema.

Los fenómenos que se relacionan con la subestructura aditiva son aquellos que se basan en la consideración de la unión de colecciones, en las acciones de juntar o añadir/separar o segregar, en las comparaciones aditivas basadas en las relaciones cuánto más que/cuánto menos que y otras variantes similares. El listado de fenómenos aditivos puede ser muy amplio si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables.

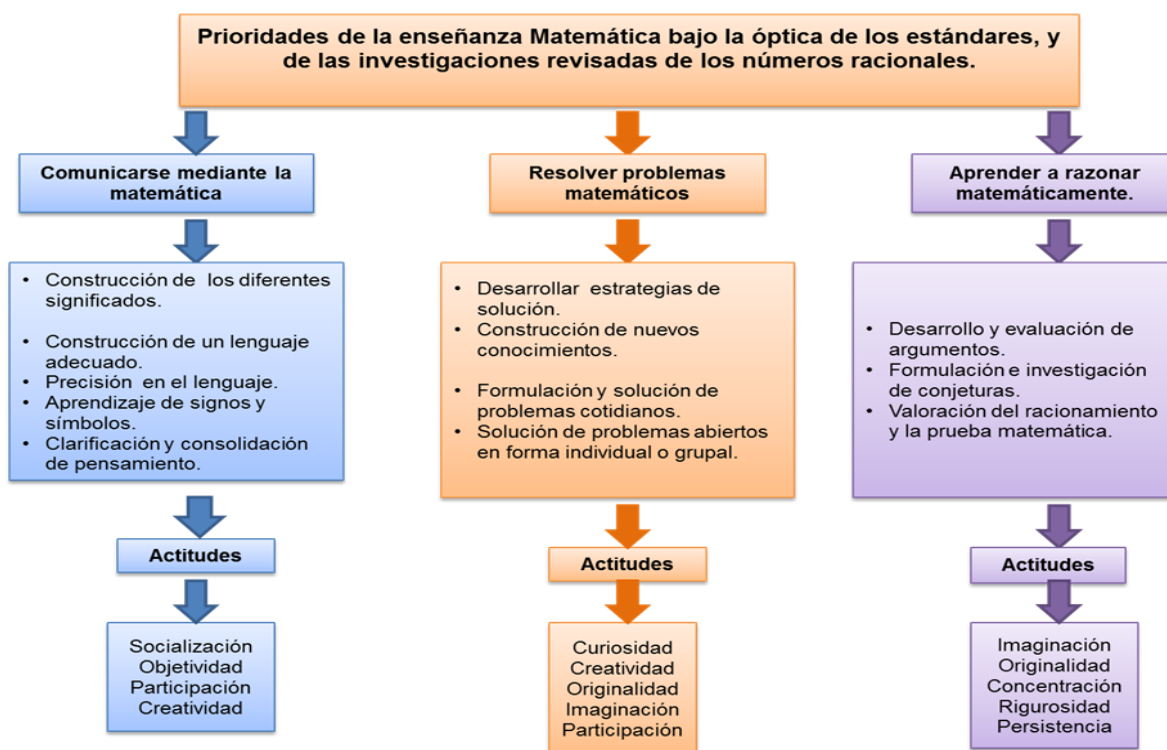
B. Análisis Cognitivo (ACg)

Una vez realizado el AC es necesario organizar toda la complejidad de nociones y relaciones que conforman un tema. Parte del ACg se centra en que los profesores en FI analicen y describan qué capacidades esperan que desarrollen los escolares acerca de ese tema, al finalizar la implementación de la UD que están diseñando, según Coll (2002) el ACg capacita a los profesores para que describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen los estudiantes de un nivel educativo concreto sobre el tema tratado. El logro de estas expectativas se hará visible mediante la actuación de los estudiantes ante las tareas que el profesor demanda.

Al enmarcarse en la dimensión cognitiva del currículo, nuestro análisis cognitivo coloca su foco de atención en el aprendizaje de las matemáticas en general, y de los Números Racionales, en particular, por parte de los estudiantes. Algunas de las preguntas que surgen en este contexto son ¿qué es aprender matemáticas? en general, y en nuestro caso particular: ¿cómo se produce el aprendizaje de los Números Racionales? ¿Qué puede facilitar dicho aprendizaje? ¿Qué dificultades se presentan en el aprendizaje? ¿Cómo se reconoce el aprendizaje? Estas cuestiones son de gran importancia para la educación matemática, ya que, por ejemplo, en

virtud de las respuestas que se asuman, la actividad del profesor puede tomar orientaciones muy diferentes en su práctica docente (Rico, 1997). En este análisis, se examinan las expectativas que suele tener el profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda de los Números Racionales y sobre el modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje. Igualmente el análisis cognitivo es un procedimiento que contribuye al proceso de planificación de las matemáticas escolares. Dicho procedimiento permite al profesor llevar a cabo una descripción y un análisis puntualizados de toda la problemática del aprendizaje del tema de los Números Racionales desde el punto de vista curricular y funcional.

Figura 3.3. Prioridades de la enseñanza en matemáticas



De igual manera, en este análisis el profesor describe sus hipótesis de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrentan a las tareas que compondrán las

actividades de enseñanza-aprendizaje (Gómez, 2007). También, tiene que ver con los fines formativos, que se preocupan el desarrollo intelectual de los estudiantes, de sus aprendizajes (Lupiáñez, 2009, p.28). En nuestro caso vamos a responder a dos cuestiones:

1. Expresar algunas suposiciones sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas, proponiendo específicamente caminos de aprendizaje, conjeturas sobre el proceso que seguían los estudiantes al resolver tareas matemáticas.
2. Determinar las limitaciones al aprendizaje que surgen en el tema matemático de nuestro proyecto de sistematización: qué dificultades y errores van a surgir en el proceso de aprendizaje.

El análisis cognitivo se estructura en torno a lo que el profesor espera que aprendan los estudiantes, a lo que pueda interferir en ese aprendizaje, y a lo que les permite a los estudiantes aprender y al profesor observar si se produce ese aprendizaje de manera efectiva. Metafóricamente, el ACg atiende tanto la parte positiva del aprendizaje (qué deberían saber los estudiantes), como la parte negativa (en qué errores pueden incurrir y a qué pueden deberse). Estas herramientas delimitan los tres organizadores del currículo que estructuran y organizan el análisis cognitivo:

B.1) Las expectativas de aprendizaje:

Poder constituir qué es lo que deben aprender los estudiantes en cada sección, constituye una dimensión trascendental dentro de la planificación curricular: *“la razón principal de planificar la enseñanza es hacer posible la consecución de un cierto conjunto de objetivos”* (Gagné y Briggs, 1976, p.31). Se emplea el término expectativas de aprendizaje para denominar de manera general, aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes a lo largo

de un período de tiempo de la Educación Secundaria y con las implicaciones de ese aprendizaje.

Para poder determinar el aprendizaje de las matemáticas, el profesor plantea a los estudiantes tareas, actividades y problemas que exigen actuaciones donde muestren sus capacidades y conocimientos alcanzados y las competencias matemáticas desarrolladas. La complacencia de dichas expectativas de aprendizaje se pone de manifiesto mediante los modos de hacer de los estudiantes ante las tareas, actividades y problemas, así como de las inferencias sobre el logro de determinadas competencias (Bell, Costello y Kucheman, 1985; p.77).

La profundidad de las expectativas de aprendizaje esperados, están en función de la variedad de conexiones y de la riqueza simbólica de los conocimientos matemáticos en donde se movilizan y de la dificultad de los problemas que se abordan. Las expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas, identificables por actuaciones que responden a tareas concretas sobre un tema específico, se han enunciado tradicionalmente mediante objetivos específicos, también llamados objetivos de aprendizaje. En este apartado, se necesitan desarrollar:

i) Objetivos de aprendizaje, los cuales son las capacidades y competencias permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje. Esta caracterización es necesaria si el profesor quiere diseñar tareas (y secuencia de tareas) que induzcan a los estudiantes a lograr el objetivo de aprendizaje y a contribuir al desarrollo de unas competencias previamente establecidas. Los objetivos previstos para la Unidad Didáctica están cimentados en los estándares del MEN (2006). Este documento curricular indica que los estudiantes deben justificar y examinar los procesos matemáticos y los procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones de los variados temas vistos, al terminar grado séptimo (7°).

ii) Capacidades, que en el análisis cognitivo, se especifica como una expectativa del profesor sobre la acción de un estudiante con relación a cierto tipo de tarea asociada a un tema matemático. Las capacidades se presentan mediante conductas observables de los estudiantes (González, Gómez y Lupiáñez, 2010). Las capacidades se pueden definir como aquellas aptitudes o habilidades para realizar

determinadas tareas, actividades o problemas que posee el estudiante (o cualquier sujeto).

iii) Caminos de aprendizaje, dada una tarea, se pueden presentar los siguientes interrogantes (Gómez, 2007, p.70): *¿cómo puede el profesor prever el aprendizaje de sus estudiantes cuando ellos la aborden?, ¿cómo puede la formulación de estas hipótesis afectar el análisis y selección de las tareas?, ¿qué papel puede jugar el conocimiento del profesor sobre las dificultades de sus estudiantes relacionadas con el objetivo de aprendizaje en cuestión?* Dichas preguntas se pueden responder mediante los caminos de aprendizaje.

Así, un camino de aprendizaje de una tarea es una secuencia de capacidades que los estudiantes pueden poner en juego para resolverla (Gómez, 2007). Se construye a partir de la lógica con la que el profesor propone para resolver dicha tarea y a partir del conocimiento que él tiene sobre el aprendizaje de los estudiantes.

iv) Competencias, se entiende por competencia el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Las competencias o procesos generales elegidos son: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, y usar herramientas y recursos (Rico, 2007). De esta manera, las expectativas de aprendizaje de los estudiantes no quedan determinadas exclusivamente por los objetivos y las capacidades.

Las competencias corresponden, también, a la dimensión cognitiva del currículo; en relación, al significado de competencia en educación, extraemos tres ideas importantes (Rico y Lupiáñez, 2008a):

1. La competencia sirve para y se manifiesta mediante la acción, lo cual se expresa de diversos modos, como actuar, interpretar y resolver problemas o aplicar conocimientos a la práctica.
2. La competencia se muestra mediante el desarrollo personal y social del sujeto competente (los estudiantes).

3. La competencia siempre hace referencia a un contexto de aplicación.

Desde la perspectiva curricular, objetivos y competencias enuncian expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes. Las competencias corresponden al segundo nivel de reflexión: el Sistema Educativo.

Las competencias matemáticas según PISA, centran la educación matemática en el estudiante, en su aprendizaje y en el enfoque funcional de ese proceso. Donde establecen como variables para este proceso: 1. Pensar y razonar; 2. Argumentar; 3. Comunicar; 4. Modelizar; 5. Plantear y resolver problemas; 6. Representar; 7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones; y 8. Emplear herramientas tecnológicas. En este trabajo, hemos seleccionado las competencias modelar, plantear & resolver problemas, y representar. Estas competencias se encuentran relacionadas con los estándares (MEN, 2006), ya que en este documento se habla de los cinco procesos generales de la actividad matemática refiriéndose a formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y por último formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos (MEN, 2006, p. 51). A continuación, definimos cada una de las competencias seleccionadas:

a) Modelizar (M): Las tareas de modelización se enmarcan dentro de aquellos procesos que permiten a los estudiantes el manejo y uso de conceptos para la resolución de problemas. Con la modelización matemática no sólo se amplía el conocimiento de los estudiantes, sino que desarrolla una particular manera de pensamiento y actuación. La modelización contribuye igualmente a dotar de mayor significado a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas.

De manera general, esta competencia tiene que ver con que los estudiantes: (a) estructuraren y analicen el campo o situación que va a modelarse, (b) expresar o traducir esa situación en términos matemáticos, (c) construir o usen modelos matemáticos para resolver ese problema matemático, (d) interpreten los resultados: reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados; y (e) comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).

b) Plantear y Resolver Problemas (PR): Esta competencia ha sido, uno de los más importantes focos de investigación en educación en matemática. La gran variedad de tipos de problemas matemáticos que pueden encontrarse, su diversidad complejidad, los procesos cognitivos que movilizan, entre otros subrayan la importancia de esta competencia. Según PISA, esta competencia permite que los estudiantes sean capaces de enunciar y plantear problemas en diferentes situaciones y con diferentes criterios. En resumen, esta competencia incluye: (a) plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados) y (b) resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

c) Representar (R): Los sistemas de representación que acepta una estructura matemática le otorgan diferentes significados a efectos de la enseñanza: conceptos o conocimientos matemáticos que se pueden representar de manera gráfica, numérica, o simbólica (Janvier, 1987). En actividades cotidianas es frecuente que se necesiten extraer o sintetizar información de gráficos, o bien expresar matemáticamente un problema para afrontar satisfactoriamente su resolución.

Esta competencia tiene que ver con: (a) decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones, y (b) escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito (Rico, 2007).

Estas competencias se relacionan con los objetivos propuestos. Por ejemplo, el objetivo 3 se refiere a la interpretación y resolución de problemas en diferentes situaciones de la vida real, que involucren las operaciones de Números Racionales y se relaciona directamente con la competencia plantear y resolver problemas. De la misma manera, también aporta a las competencias modelar y representar, puesto que las tareas que compone este objetivo contribuyen a estas competencias.

Por ejemplo si elegimos una tarea relacionada con la competencia representar, el estudiante puede decodificar y codificar la situación, interpretarla y traducir desde la representación verbal (oriente, occidente, norte, sur, ingresos, gastos, etc.) —

relacionándolos con el sistema de representación simbólico al momento de usar los números enteros y operaciones entre ellos—, y luego representar la situación en la recta numérica. Esta posible actuación del estudiante evidencia la relación que existe con las representaciones relevantes a nuestro tema y que a su vez son tratadas en cada uno de los objetivos.

B.2) El análisis de limitaciones de aprendizaje

Este segundo organizador del currículo que estructura el análisis cognitivo se encarga de las limitaciones para el aprendizaje que, de manera distinta, pueden trastornar y estancar el aprendizaje de los estudiantes. Además, este organizador se centra en aquello que puede interferir en el aprendizaje de los estudiantes, se concreta en dificultades y errores (Estupiñan, 2009). En el contexto de esta investigación y en el análisis didáctico, nos preocuparemos de las limitaciones de aprendizaje en relación al aprendizaje de los Números Racionales.

El conocimiento de los obstáculos, errores y dificultades permite al profesor conocer aquellos conceptos que van a tener una especial dificultad y con ello emprender el diseño de instrumentos para su diagnóstico y tratamiento. En el caso de nuestro trabajo, para que los estudiantes, lleguen a comprender la noción de los Números Racionales, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, les lleva mucho tiempo. Y los estudiantes lo necesitan para comprender, interpretar y usar sus notaciones con sentido en las diferentes aplicaciones de las mismas.

En este apartado, se necesitan desarrollar: **a) Dificultades y errores:** Siguiendo el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997d), se consideran los errores y dificultades, como dos tipos básicos de limitaciones en el aprendizaje para nuestro tema de investigación. El estudio de errores y dificultades *“tiene por finalidad poner en conocimiento del profesor los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de los datos que*

surgen en estos estudios son los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales". (Rico, 1997d, p.53-54).

Algunas dificultades surgen por el proceso de enseñanza y se relacionan directamente *"con la institución escolar; con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza."* (Socas, 1997, p.133). Para este caso el papel profesor es muy importante, ya que el uso optimizado de los recursos disponibles, la concreción y adaptación de las directrices curriculares y la planificación y puesta en práctica de su actividad son parte de su responsabilidad. Otras dificultades surgen asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes, y por último las dificultades que surgen a las actitudes afectivas y emocionales, que tiene mucho que ver con la aversión de algunos estudiantes hacia las matemáticas. Las dificultades que se tomaron en cuenta para este trabajo tienen que ver con la complejidad de los objetos matemáticos y las relacionadas con el proceso de pensamiento matemático.

Ahora, el error es la manifestación visible de una dificultad; este es observable directamente en las actuaciones de los estudiantes, en sus respuestas a las tareas, actividades y problemas que les demanda el profesor. *"cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta"* (Rico, 1995b, p.6)

B.3) Las oportunidades de aprendizaje:

El tercer organizador del currículo del análisis cognitivo, pone su foco de atención en aquellas oportunidades que el profesor pueda brindar a sus estudiantes para que éstos se instruyan. De todas las oportunidades de aprendizaje posibles, distinguimos las tareas como el elemento principal. Al respecto, Carrión (2007) sostiene que *"Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno, del tipo de tareas y del discurso en que participan."* (p.20)

El diseño y selección de tareas establecen un aspecto central dentro del proceso que realiza un profesor para diseñar una Unidad didáctica. El logro de los objetivos de aprendizaje al tema de matemáticas de los Números Racionales, se alcanzará mediante la realización por parte de los estudiantes de las tareas que desarrollen y movilicen su conocimiento acerca de este tema.

a) Selección de tareas: La descripción de las capacidades y de los caminos de aprendizaje le permiten al profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que en términos de su contribución a las competencias y de sus caminos de aprendizaje, le dan bases al profesor sobre las secuencias de capacidades que desearía que los estudiantes pusieran en juego al realizar dichas tareas. Las tareas seleccionadas sirven para ilustrar el significado de los objetivos descritos anteriormente y el tipo de actuaciones que los estudiantes pueden desarrollar o movilizar. Para el diseño y selección de tareas, se tiene presente: a) Los contenidos matemáticos del tema, b) las expectativas de aprendizaje para obtener un logro y poder así: c) detectar y diagnosticar errores.

b) Objetivos de las tareas: Este procedimiento requiere que el profesor identifique y formule las capacidades de los estudiantes cuya puesta en juego puede contribuir al logro del objetivo de aprendizaje que el profesor pretende lograr (Gómez, 2009). El profesor puede especificar el objetivo de aprendizaje desde dos perspectivas: En la primera, él puede establecer en qué medida el objetivo de aprendizaje ayuda a una lista de competencias; en la segunda, él puede identificar los caminos de aprendizaje del objetivo en cuestión. Por otro lado, el trabajo con profesores en formación inicial en torno a los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo, suministra una serie de herramientas que tienen especial incidencia en su aprendizaje profesional. (Estupiñan, 2007).

Desde otro punto de vista, la estructura y organización del análisis cognitivo que hemos desarrollado, permite progresar y mejorar el propio diseño del análisis didáctico, ya que pone de manifiesto los vínculos entre diferentes elementos que lo constituyen y refuerza su estructura cíclica.

C. Análisis de Instrucción (AI) primera parte.

Este análisis se centra, en el procedimiento en virtud del cual el profesor puede diseñar, seleccionar y secuenciar las actividades de enseñanza que atenderán la Unidad Didáctica, que el profesor está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, el empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación.

Este análisis además utiliza la información que surge del análisis de contenido y del análisis cognitivo para efectos de analizar y seleccionar las tareas que se pueden utilizar en el aula (Gómez, 2002b, p 277). Al respecto Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) destacan la importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de la siguiente manera: *Las tareas son centrales para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que configuran, no solamente sus oportunidades para aprender, sino también su visión del contenido.* (p.335).

En este apartado centraremos la atención en el análisis y selección de las tareas para la planificación, en el contexto de los objetivos de aprendizaje. A partir de las nociones de capacidad y competencia, y utilizando las herramientas que se propusieron en el análisis cognitivo, estableceremos un procedimiento para el análisis y selección de tareas. Las tareas propuestas en este trabajo, tiene una secuencia que ordenamos según su aparición en las sesiones.

a. Tareas y Actividades

Siguiendo a Doyle (1986, p.399), lo que sucede en el aula se puede estructurar en los siguientes niveles: a) sesión; b) lección (colección de actividades sujetadas a un contenido); c) actividad y d) tarea. En este apartado hablaremos de los dos últimos. Aunque los términos de tarea y actividad suelen utilizarse con frecuencia como sinónimos, según Doyle (1986), “la actividad es la unidad básica de la organización del aula” (p.398) y se caracteriza dependiendo del tipo de organización que crea.

Por otro lado, siguiendo a Gómez, cuando cita el trabajo de Christiansen y Walter (1986) al analizar los términos tarea y actividad; describiendo estas dos nociones como: “la actividad procede a través de un sistema de acciones que buscan un propósito” (p.255). La tarea (aquello que asigna el profesor) se convierte en el objeto de la actividad del estudiante (p.260) y la enseñanza a través de actividades implica la necesidad de planificar con el propósito de utilizar la actividad del estudiante como el principal vehículo para lograr el aprendizaje que se pretende (p.265).

Asimismo la actividad puede referirse al profesor. En este caso describe todo lo que el profesor realiza en su clase al plantear tareas a sus estudiantes, al introducir, explicar o ejemplificar nociones, etc. Esta caracterización de tarea y actividad nos permite introducir la estructura del análisis de instrucción siguiendo la propuesta de Marín (2009).

b. Estructura del Análisis de Instrucción

Como parte del análisis didáctico, este análisis se articula en torno a siete elementos claves, según Marín (2009), como componentes determinantes en el proceso de planificación, que siempre tienen a las tareas como dispositivo organizador, que son: la adecuación, la complejidad, la resolución de problemas y la modelización, el empleo de materiales y recursos, la secuenciación, la evaluación y la gestión del aula de matemáticas.

1. Adecuación: De manera general, las tareas que el profesor planifique, deben ser coherentes con el contenido que se está trabajando. Y de manera muy importante, deben estar ligadas al análisis y selección que el profesor realiza sobre los conceptos y procedimientos que configuran el contenido matemático seleccionado. Por otro lado, en el análisis cognitivo se establecieron las expectativas de aprendizaje que el profesor perseguirá para sus estudiantes, desde este punto, las tareas que el profesor diseñe y seleccione deben contribuir al logro de dichas expectativas y, por otro lado, también deben permitir a los estudiantes a superar los posibles obstáculos, dificultades y errores previstos también en el análisis cognitivo.

2. Complejidad: Las tareas exigen determinadas demandas cognitivas a los estudiantes que las afrontan, pero no siempre esas demandas tienen el mismo grado de complejidad. Marín (2009) realza la importancia de la complejidad como una de las variables de análisis de tareas y propone una serie de criterios que inciden en la categorización de dicha complejidad. Marín (2009) al respecto realza la importancia de la complejidad como una de las variables de análisis de tareas y propone una serie de criterios que inciden en la categorización de dicha complejidad.

3. Grados de Complejidad de las Tareas: Cada una de las competencias establecidas por el MEN admite diferentes niveles de profundidad. Los expertos consideran tres niveles de complejidad en los problemas matemáticos y en las competencias demandadas por los mismos: **i) Reproducción:** Aquí se incluyen las tareas más sencillas, las cuales se introducen en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente. Ejemplo: Contextos familiares; Conocimientos ya practicados; Aplicación de algoritmos estándar; Realización de operaciones sencillas; Uso de fórmulas elementales. **ii) Conexión:** Las tareas correspondientes a este nivel de complejidad van un poco más allá, introduciendo situaciones y contexto que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que no se ha practicado después. Los niveles de cálculo se complican, pero sin llegar a ser dificultoso: Contextos menos familiares; Interpretar y explicar; Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación; Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios; y **iii) Reflexión:** En este nivel se realizan los ejercicios de mayor dificultad o ampliación: Tareas que requieren comprensión y reflexión; Creatividad; Ejemplificación y uso de conceptos; Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos; Generalizar y justificar resultados obtenidos.

Requiere un nivel de comprensión de todo lo aprendido y una organización de los conceptos clave. Los contextos de trabajo son nuevos o complejos y buscan una generalización de los resultados. El nivel de cálculo puede tener una mayor dificultad y se exigirá una buena capacidad de argumentación y justificación, que le suele suponer un obstáculo al estudiante para completar el problema. Por lo general, las

tareas propuestas para este tema pertenecerán a una de las dos primeras categorías, ya que los niveles de conocimiento que tienen los estudiantes en este grado son aún muy básicos y lo que se pretende es que comprendan y seguidamente automaticen los procedimientos de resolución para adquirir destrezas. Más adelante, en cursos posteriores, las tareas sí deberían dar lugar a que los estudiantes lleguen a los niveles de reflexión.

4. Resolución de Problemas y Modelización: Dentro del enfoque funcional del currículo de matemáticas, la resolución de problemas ocupa un lugar predominante ya que, la educación matemática persigue que los estudiantes sean capaces de usar su conocimiento matemático para dar respuesta a problemas y necesidades que surgen una amplia variedad de situaciones y contextos.

Por otro lado, las tareas de modelización son un caso concreto de problemas que están enunciados en un contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución y que después se vuelven a interpretar en el contexto original.

5. Empleo de Materiales y Recursos: Un material es un elemento diseñado con un propósito específico relacionado con un tema matemático en particular y cuya función es facilitar (promover) el aprendizaje del estudiante relacionado con el tema. Un recurso no tiene ningún objetivo específico predeterminado y puede tener múltiples funciones (Carreto, Coriat y Nieto, 1993).

En el mundo actual un recurso muy importante es el uso de la tecnología (TIC) para la enseñanza y el aprendizaje. Habitualmente estas tecnologías se refieren principalmente a ordenadores e internet.

6. Secuenciación: Se constituye en una serie de unidades de información y propuestas de acción que el profesor suministra al estudiante con diferentes intenciones. (Marín 2009, p.18). Cuando el profesor diseña una clase, estructura y organiza temporalmente las tareas que realizarán los estudiantes. Para el diseño de una Unidad Didáctica, además de lo anterior debe ordenar las diferentes sesiones que la compondrían.

Existen varios criterios para secuenciar las tareas que el profesor ha diseñado o seleccionado, y entre ellos se destacan dos, que tienen que ver con la intencionalidad y la funcionalidad de las tareas. Para las primeras se señalan lo siguiente: 1) pueden idearse para introducir algunos temas matemáticos; 2) pueden diseñarse para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente; 3) pueden idearse para revisar o consolidar la reflexión y la integración a través de una visión global. (Mason y Johnson-Wilder, 2006, p.69). Y de acuerdo a su funcionalidad, Parcerisa (1996) clasifica las tareas según una secuencia de aprendizaje.

A la hora de realizar la secuenciación y organización de las tareas es importante establecer unas prioridades de aprendizaje que darán lugar a la adquisición por parte de todos los estudiantes de una serie de conocimientos mínimos, destacando: a) Distinguir los diferentes significados y usos de los Números Racionales; b) Trabajar con los diferentes sistemas de representación y c) Interpretar, expresar y resolver situaciones de la vida cotidiana.

7. Tareas de evaluación: La evaluación es un componente central en el currículo y en la actividad docente del profesor. Por otro lado, la evaluación se sitúa en el análisis de instrucción segunda parte que veremos en el siguiente apartado, lo que nos interesa en este momento es destacar la importancia del diseño de tareas para llevar a cabo la evaluación. Rico (1997b) señala la importancia de caracterizar instrumentos que permitan llevar a cabo la evaluación de los estudiantes, y cita a Bell, Burkhardt y Swan (1992) para destacar algunas condiciones que ha de satisfacer las tareas de evaluación; 1) Relevancia práctica; 2) Coherencia o fragmentación de la tarea; 3) Rango de respuestas posibles; 4) Extensión y valor de la tarea y 5) Modo de trabajar las tareas.

8. Gestión del Aula: El proceso enseñanza y aprendizaje en el aula es complejo y para lograrlo de manera eficiente se requieren considerar muchos aspectos (Marín, 1997). Algunos de estos son la disciplina, la integración de todos los estudiantes, la organización de las diferentes actividades o el manejo del tiempo.

Sin embargo, a la hora de realizar este análisis vamos a intentar seguir el esquema propuesto por Gómez. En primer lugar, diseñamos las tareas y las proponemos en una secuencia que ordenamos según su aparición en las sesiones. En segundo lugar vamos a analizar las tareas de la secuenciación desde el punto de vista de la complejidad de las distintas competencias matemáticas MEN. Así atenderemos discernir qué competencias nos ayudan a mejorar y a qué nivel de complejidad cada una de las tareas propuestas.

c. Procedimiento del Análisis de Instrucción

Como se ha dicho, el análisis de instrucción se centra en el diseño, la selección y la secuenciación de tareas desde diferentes puntos de vista. El profesor necesita herramientas que le permitan establecer, con algún grado de certidumbre, la pertinencia de una tarea con respecto a los objetivos de aprendizaje que él se ha propuesto. La pertinencia de las tareas involucran los siguientes pasos:

- 1) Establecer el contexto en el que se va a realizar la tarea, lo cual debe implicar especificar el nivel educativo, describir las competencias, las principales características del diseño curricular global en el que se enmarca la planificación local.
- 2) Seleccionar un objetivo de aprendizaje concreto para cuyo logro se seleccionarán las tareas.
- 3) Como parte del análisis cognitivo, y desde la tabla de competencias para lograr el objetivo de aprendizaje, lo cual implica: establecer competencias que contribuyan a las capacidades y revisar el enunciado de las mismas para que se adapten a las condiciones en las cuales se necesitan.
- 4) Caracterizar el objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje.
- 5) Seleccionar unas tareas, el profesor parte de tareas ya existentes y el propósito es evaluar su pertinencia para efectos de compararlas, rechazarlas o modificarlas.
- 6) Evaluar las tareas con respecto a su tabla de capacidades-competencias. Esto implica, para cada tarea identificar las capacidades que se ponen en juego cuando los estudiantes aborden la tarea.

- 7) Construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer cuando abordan cada tarea.
- 8) Establecer a qué competencias contribuye cada tarea y en qué medida.
- 9) Evaluar la pertinencia de las tareas a partir de esta información.
- 10) Aceptar, rechazar o modificar las tareas y establecer una secuenciación. Construir secuencias de tareas orientadas por características específicas, como: Secuencias cuyo objetivo es la construcción de conocimientos nuevos; Secuencias en las que predomina el uso de un material o recurso específico; secuencias orientadas a guiar el logro de objetos específicos.

d. Análisis de la Instrucción y Conocimiento del profesor

Cualquier actividad que el profesor lleva a cabo al ejecutar el análisis de instrucción sobre un tema específico, le brinda un gran número de criterios para diseñar y seleccionar tareas matemáticas de ese tema. Estos criterios constituyen un conocimiento significativo a la hora de desarrollar en el profesor su competencia de planificar la Unidad Didáctica.

Además, en la actualidad se puede disponer de un gran número de tareas matemáticas gracias a las numerosas publicaciones y, sobre todo, a la creación constante de páginas web que recogen muchos ejemplos de cuestiones, problemas y actividades relacionadas con la matemática. Lo importante estriba en disponer de criterios y herramientas que permitan al profesor discernir cuáles de estas propuestas son apropiadas para lograr alcanzar las expectativas de aprendizaje que él ha establecido.

e. Planificación de la Gestión de Clase

Si se toma la enseñanza como un proceso en el que se determinan previamente unos objetivos y se diseñan unas actividades que pretenden inducir a los estudiantes al logro de esos objetivos, entonces la gestión de clase es relativamente sencilla. El

profesor solo debe poner en juego las tareas que ha seleccionado, esperar que sus estudiantes las realicen y evaluar los resultados de la actividad. Desde este contexto el profesor solo es el ejecutor de un plan preestablecido.

Pero, si el profesor pretende acompañar a sus estudiantes en su desarrollo y en promover su pensamiento matemático y, por tanto, pretende atender y reaccionar a sus actuaciones, entonces la gestión de clase se convierte en un problema complejo. Y de aquí surge la pregunta ¿Cómo puede el profesor planificar la gestión de clase de manera eficaz y eficiente? El profesor debe apoyarse en las capacidades-competencias y en los caminos de aprendizaje, para que se conviertan en sus mejores herramientas conceptuales y metodológicos, para que el profesor pueda abordar la planificación de una unidad didáctica, además debe incluir la hipótesis sobre cómo el aprendizaje puede desarrollarse en la práctica del aula. Lo cual lo debe preparar para responder a la cuestión ¿qué pasa si los estudiantes actúan de maneras que no están previstas en la planificación? Y deberá mejorar su análisis didáctico para superar cualquier imprevisto.

f. Recursos, materiales didácticos para el diseño y análisis de las tareas

La noción de recurso admite una gran variedad de interpretaciones en la educación matemática. En general cuando se habla de materiales didácticos, se define como un elemento diseñado con un fin específico relacionado con un tema en particular y cuya finalidad es facilitar el aprendizaje del estudiante relacionado con el tema. Un recurso no tiene ningún objetivo específico predeterminado y puede tener múltiples funciones.

D. Análisis de Instrucción (AI) segunda parte

Este es el último de los cuatro análisis que conforman el Análisis Didáctico, se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conforman la Unidad

Didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recurso y los criterios y métodos de evaluación.

Además, está vinculado a la evaluación y en él el profesor determina las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se manifestaron hasta el momento. Por lo tanto, en este apartado tratamos algunos criterios, aspectos e instrumentos que permiten establecer en qué medida los estudiantes lograron los objetivos y en qué medida las tareas contribuyeron a las capacidades y competencias.

D.1. Evaluación

El AI (segunda parte) está relacionado con la evaluación, pero esto no significa que sea equivalente a ella. El propósito de este análisis no es clasificar a los estudiantes por una nota, sino establecer el seguimiento del progreso de los estudiantes al comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula, establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula.

En lo referente a los instrumentos de evaluación, tratamos en primera instancia la evaluación informal que ejecutamos de manera cotidiana y habitual. Para esta evaluación proponemos instrumentos como parrillas de observación, preguntas específicas, diario del alumno y diario del profesor. Para la segunda instancia, tomamos la evaluación específica, la cual nos permite obtener información sobre el proceso de aprendizaje del estudiante para establecer su estado en relación con los objetivos propuestos. Presentamos los siguientes instrumentos: prueba diagnóstica, rúbricas, examen final y cuestionario individual de evaluación. Comenzamos por describir los instrumentos diseñados para la evaluación informal.

D.2. Instrumentos de recolección de información y evaluación

a) Parrillas de observación para caminos de aprendizaje: Estas parrillas de observación, son trazadas de acuerdo con los caminos de aprendizaje para cada una de las tareas. Se incluyen apoyos que pudieran optimar la resolución de las tareas y abordar los posibles errores en los que las estudiantes pudieran incurrir. Se diseñó una lista de chequeo para cada parrilla de observación. En dicha lista se registraron las capacidades desarrolladas y el camino de aprendizaje seguido por el estudiante, los errores en que incurrieron y una sección donde el docente pudiera realizar anotaciones de acuerdo a las observaciones en clase durante el trabajo de los estudiantes. (Anexo 5).

b) Diario del Estudiante: Este se usa como parte de la evaluación que el mismo realiza de su trabajo personal en clase, a través de una serie de preguntas. Para la Unidad Didáctica se incluyen 2 preguntas generales y una específica al tema de la tarea. En este diario se incluye una tabla, en el cual los estudiantes registran cómo se sintieron en cada uno de los momentos del desarrollo de la sesión de clase. (Anexo 6).

c) Diario del Profesor: En este diario, el profesor recoge y lleva el registro de los contenidos trabajados en las diferentes actuaciones y además los aspectos observados durante cada sesión de clase. También las conclusiones y las observaciones que se consideran oportunas. Todos esos datos nos proporcionan información de cómo ha ido el proceso de enseñanza y aprendizaje en el tema que se trabaja, en nuestro caso los Números Racionales.

Por tanto, este diarios sirve para reflexionar sobre el trabajo realizado en cada sección, por un lado los logros conseguidos por los estudiantes y por otro, los realizados por el propio profesor, además de mostrar los aspectos que se han de mejorar a la hora de volver a poner en práctica otra experiencia como esta.

Diseñamos un diario del profesor para cada una de las tareas, que se divide en dos partes, una referida a la enseñanza y otra al aprendizaje. (Anexo 7)

d) Actividad inicial diagnóstica: Presentamos una prueba diagnóstica, que intenta activar los conocimientos previos de los estudiantes necesarios para el desarrollo de las tareas. (Anexo 8).

e) Examen final: Esta evaluación final se realiza con la intención de obtener datos concretos del aprendizaje que han logrado los estudiantes al final de la Unidad Didáctica. Se diseñó el examen con base en los objetivos (Anexo 9)

f) Lista de control para la evaluación de la unidad didáctica: control final por parte del profesor para evaluar los resultados que se llevaron a cabo durante todo el proceso.

3.5. ANTECEDENTES

El estudio de antecedentes nacionales e internacionales, teóricos y de las investigaciones similares, que están dentro de la línea de investigación Didáctica de la Matemática, nos permitirá desarrollar nuestro Proyecto de Sistematización. En este trabajo prestamos atención, especialmente a estudios realizados en torno a la formación inicial de profesores, los cuales permiten analizar la Calidad de la Enseñanza de las Matemáticas. Además, nos enfocamos en trabajos sobre la enseñanza de los Números Racionales y consideramos aspectos sobre el procedimiento de Análisis Didáctico sobre el campo de las matemáticas.

i. Estudios relacionados sobre la Formación Inicial (FI) de profesores de matemáticas: La búsqueda de información sobre el conocimiento profesional de los profesores y los efectos de estos conocimientos en la enseñanza se concentró en el uso del término “Formación Inicial de Profesor de Matemáticas”, para referirse a la problemática y las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el nivel y la profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que tienen los futuros profesores de educación secundaria obligatoria? ¿Cuáles son las enseñanzas u oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a estos futuros profesores y que les permiten lograr esos conocimientos? ¿Qué contenidos se enseñan y cómo se organiza la instrucción?

Una línea de investigación en el ámbito de formación de profesores es reconocer la importancia de investigar diferentes factores relacionados con la calidad de los profesores de matemáticas, de manera que estos tengan una mejor preparación a los diversos aspectos manejados por las diferentes instancias que protagonizan el proceso educacional.

Diversos estudios en este sentido han permitido identificar diferentes tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas. A partir de estos precedentes, nos interesa estudiar qué conocimiento pone en juego un profesor de educación secundaria, al enseñar el concepto matemático de los Números Racionales, es por esto último que se hace necesario conocer y reflexionar los diferentes estudios que se asocian a la calidad sobre formación inicial de profesores de matemáticas de la educación.

La tesis doctoral “Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Graficadoras” (Bedoya, 2002) constituye un antecedente directo de nuestro trabajo. En ella se concreta el diseño, planificación, implementación y evaluación de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Además, el estudio se caracteriza por un contexto curricular local; y está inmerso en el grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). El Conocimiento Didáctico (CD) base de la formación inicial que requiere el profesor de matemáticas para realizar el análisis didáctico integrador (de contenido, cognitivo y de instrucción), orientado hacia el diseño, planificación y evaluación de unidades didácticas. Todo lo dicho anteriormente, han sido considerados de manera estructurada en nuestro Proyecto de Sistematización: un modelo local de carácter conceptual y metodológico basado en la propuesta de los organizadores del currículo realizada en el marco del grupo PNA.

En otra tesis doctoral “*Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*”, llevada a cabo por P. Gómez (2007) se presenta una investigación en la que indaga sobre el proceso de aprendizaje de los futuros profesores que participaron en una asignatura de

formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Además, para nuestro interés, realiza el análisis didáctico como conceptualización de las actividades que un profesor debería realizar para diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas y concreto la idea de conocimiento didáctico como el conocimiento necesario para realizar el análisis didáctico. De igual forma, en este trabajo se describe y caracteriza el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores; para ello establece cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico y caracteriza, desde diferentes perspectivas, la evolución de los significados que los futuros profesores construirán a lo largo de la asignatura. Los resultados de los estudios ponen de manifiesto varios aspectos de la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y destacan la necesidad de profundizar en el diseño y desarrollo de este tipo de planes de formación y en el papel que los formadores pueden jugar en el aprendizaje de los futuros profesores.

ii. Estudios relacionados con la enseñanza de los Números Racionales:

Diversas investigaciones han reconocido que los Números Racionales, son uno de los contenidos de las matemáticas que más manifiestan dificultades tanto en su enseñanza como en su aprendizaje, fundamentalmente en los niveles básicos de educación; los fraccionarios son de gran importancia para la construcción del contenido conceptual de nuestro tema.

En su investigación doctoral “Las fracciones, aspecto conceptual y didáctico”, Fandiño (2005) describe tres períodos, referentes a las investigaciones sobre la enseñanza de los números fraccionarios: de 1960 a 1980, de 1980 a 1990 y de 1990 hasta la actualidad; cuyas características se describen brevemente a continuación:

i) Período de 1960 a 1980: En este periodo se obtuvo una gran cantidad de estudios con estudiantes, entre 14 y 18 años, especialmente en los Estados Unidos; de donde se resaltan los estudios relacionados con el concepto de los números fraccionarios; como también, estudios relacionados con operaciones entre racionales, fracciones y dificultades relacionadas con ellas. En este mismo periodo se distinguen los aportes alcanzados por Kieren (1988), donde evidencia la existencia de siete significados

para el término de número racional, mostrando que una de las principales dificultades para su aprendizaje, está ligada tanto con el concepto como con las operaciones, es decir, por tener esa multiplicidad de significados; **ii) Periodo de 1980 a 1990:** En este periodo se desarrollaron trabajos bajo las siguientes directrices: 1) aprendizaje en general, 2) aprendizaje de operaciones con números fracciones, 3) comparaciones entre los valores de las fracciones y/o números decimales y las dificultades en la expansión de los números naturales a los números racionales o a decimales y 4) problemas relacionados con las diferentes interpretaciones de la noción de número racional.

Además, aparecen dos grandes contribuciones, al tema que habrán de proveer un panorama más amplio en torno a las investigaciones presentadas: 1. Los artículos de Guy Brousseau, relacionados con la enseñanza de los números decimales, basado en experiencias durante la década de los 70's en una escuela primaria de Francia. Estos escritos han sido fundamentales para la evolución de la Educación Matemática y muestran una nueva metodología que es denominada *epistemología experimental*, dando lugar a una nueva idea de investigación en Educación Matemática. 2. Otra contribución importante fue el proyecto del Número Racional desarrollado en Estados Unidos de 1979 al 2000; y **iii) Periodo de 1990 a la actualidad:** En este periodo se observaron investigaciones referidas a áreas más específicas, para estudiantes de entre 6 y 14 años de edad, tales como fracciones, números decimales, números racionales y algunas combinaciones como: fracciones y números racionales y fracciones y números decimales; sobresalen los trabajos de Valdemoros (2007), quien proporciona una amplia diversidad de perspectivas sobre el lenguaje de las fracciones, centrando su atención en la construcción del significado a través de diferentes sistemas simbólicos y referentes a los materiales y a los modelos concretos.

En la investigación "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento desde los números racionales" llevada a cabo por Moreno y Flores (1999) se presenta el conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva de las competencias específicas basadas en los conocimientos y destrezas

adecuadas para el desarrollo de su actividad. El profesor de matemáticas, dicen los autores, tiene competencias profesionales con las que afronta los problemas de enseñanza, pero además los profesores deberían contar con una descripción de sus competencias profesionales tanto para facilitar la preparación de los candidatos, como para diseñar criterios de valoración para que puedan ser aplicados por aquellos que formen parte de un tribunal que juzgue estas pruebas. En este sentido se realiza el trabajo de investigación: reflexionando sobre las competencias profesionales del profesor de matemáticas, y describiendo el conocimiento del profesor en relación a los números racionales.

iii. Estudios relacionados a los significados asociados al concepto del Número

Racional: Hasta aquí hemos mencionado algunas investigaciones que han proporcionado ideas claves para nuestras reflexiones. En general, el objeto de saber denominado Número Racional está asociado a un contexto amplio y rico de significados e interpretaciones. Se tomará en cuenta la polisemia de significados ligados al concepto de números racionales. Este estudio nos aportará concepciones epistemológicas propias del saber matemático involucrado en nuestra investigación. En la investigación “Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: Estudio de caso de un profesor chileno” llevada a cabo por Rojas (2010), se enfoca en la importancia del papel del profesor, para ello analiza el conocimiento de los profesores, en especial el conocimiento matemático, y la forma de enseñanza de sus clases dentro del aula.

Concretamente se enfoca en el dominio de las fracciones, porque lo considera un contenido vital en el currículo escolar chileno, y además ser la base para entender el concepto de Número Racional. También, en su investigación analiza la complejidad del concepto de fracción, por lo cual, afirma que debe estar bien comprendida por los profesores para poder diseñar e implementar una enseñanza adecuada; para lograr esto el profesor debe estar consciente de la diversidad de significaciones de las fracciones y el papel que desempeña cada significado para que pueda darle sentido a las relaciones y operaciones con fracciones.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

La sistematización de experiencias docentes se puede concebir como un proceso mediante el cual uno o más profesores desarrollan una propuesta curricular o didáctica, a la vez que se forman y desarrollan competencias profesionales a través de la reflexión sistemática y fundamentada, conceptual y metodológicamente en el marco de este ejercicio o práctica (Bedoya, 2013). De acuerdo con esto, la realización de un proyecto de sistematización de experiencias consiste en un proceso de indagación a partir del cual el docente se apropia y desarrolla saberes y competencias profesionales, las cuales se concreta en la elaboración de propuestas curriculares o instruccionales en contextos institucionales y/o del aula de clases.

Bedoya (2013), basándose en varios autores (Jara, 1994; Barnechea y Morgan, 2008; Mejía, 2010; Londoño y Atehortúa, 2011; entre otros) propone organizar el proceso metódico de sistematización en cuatro fases o momentos, no necesariamente sucesivas:

- I. Preparación y planificación metodológica del proceso de sistematización.
- II. Recuperación/ reconstrucción de la experiencia: documentación y fundamentación conceptual.
- III. Análisis e interpretación de la información y del proceso realizado (de tal forma que se movilicen y desarrollen conocimientos fundamentados sobre la práctica o la experiencia).
- IV. Potenciación y socialización o comunicación de los resultados asociados con la experiencia, su sistematización (incluyendo propuestas de posibles mejoras) y fundamentación conceptual y procedimental.

El diseño y desarrollo metódico de este trabajo consiste en la concreción de estas cuatro fases; para su ejecución, en tanto proceso de indagación cualitativa, Bedoya (2013) propone complementariamente apoyarse en un diseño basado en las metodologías de Investigación-Acción-Participativa (IAP) (Elliot, 1993; Kemmis y McTaggart, 1988); de estudio de casos (Rojas, 2010) y de investigación evaluativa (Bedoya, 2002).

La metodología general de análisis, consiste en una adaptación de la propuesta general de análisis didáctico, mencionada, en el capítulo anterior bajo la concepción de estrategia de formación y de desarrollo de competencias profesionales docentes, así como de desarrollo curricular (Rico, 1997; Gómez, 2007; Bedoya, 2013). Teniendo en cuenta esto y el hecho que este proyecto de sistematización se propone en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas y el desarrollo curricular, el modelo metodológico de análisis ejecutará en torno a las cuatro categorías (o dimensiones) de análisis didáctico siguientes (Bedoya, 2013):

1. Contextualización curricular.
2. Análisis Didáctico de Contenido (ADC): disciplinar, histórico, epistemológico, fenomenológico, semiótico: estructura didáctica conceptual.
3. Análisis Didáctico Cognitivo (ADCog.): obstáculos, dificultades, errores, comprensión, aprendizaje.
4. Análisis Didáctico de Instrucción-Construcción (ADIC): de los conocimientos asociados al Contenido Matemático Escolar (CME).

La propuesta o modelo de análisis didáctico es concebido y adaptado no sólo como estrategia metodológica de formación y desarrollo curricular, sino también de investigación o sistematización de experiencias en el campo de la DM y la FDM. Esta es la opción y reto metodológico adoptado en éste y otros proyectos de tesis (Trabajos de Grado de Maestría en Educación) que se vienen desarrollando de manera relacionada y complementaria en el marco del Grupo de Investigación y Formación de Profesores de Matemáticas en torno al Pensamiento Matemático Educativo: -GIFPME- (Código Gruplac COL0036156), bajo la dirección del Doctor Evelio Bedoya M.

4.1. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1.1. Enfoque Metodológico

Cuando se revisan diferentes concepciones o definiciones tanto de la sistematización de experiencias (Jara, 1994; Hleap, 1998; Ghiso, 1999; Mejía, 2010; entre otros), como de la Investigación-Acción-Participativa (I-A-P) (Kemmis y McTaggart, 1988; Elliot, 1993; Lomax, 1990; McNiff, 1992; entre otros), resulta natural relacionar o articular en el diseño metodológico del proceso metódico de la Sistematización con diferentes aspectos metodológicos de la I-A-P, tal como lo propone Bedoya (2013).

Así, por ejemplo, Kemmis y McTaggart (1988) destacan como puntos clave de la I-A-P, el propósito de la mejora de la calidad de la educación a partir del aprendizaje que generan las acciones de planificación y reflexión; que permiten dar una “justificación razonada” de nuestra labor educativa, mostrando pruebas obtenidas y la reflexión crítica llevada a cabo. Por otro lado, Elliot (1993) plantea que la I-A-P tiene como propósito “mejorar la calidad de la acción social dentro de la misma”, y agrega que “la investigación-acción interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema, por ejemplo profesores y alumnos”.

Por otra parte, en el marco de la Sistematización de Experiencias, Jara (1994) dice que está consiste en la “interpretación crítica de las experiencias que, a partir de su reconstrucción ordenada, descubre y explica la lógica del proceso vivido y los factores que han intervenido en dicho proceso”. Igualmente Ruiz (2002) afirma que la “sistematización de experiencias surge por la necesidad de conocernos, darnos a conocer y cualificar las prácticas”, además Ruiz (2002) ve la sistematización como un proceso de producción de conocimiento que a partir de la práctica tiene utilidad porque:

1. Cualifica el conocimiento que se tiene de la práctica, es decir que se genera conocimiento a partir del proceso de sistematización.

2. Cualifica la propia práctica, ya que permite la retroalimentación que ayuda a vivenciar mejor la práctica y mejorar sus resultados.
3. Empodera a los sujetos que realizan la sistematización, al ser de ellos los propios actores de la práctica y quienes desarrollan el proceso de sistematización.

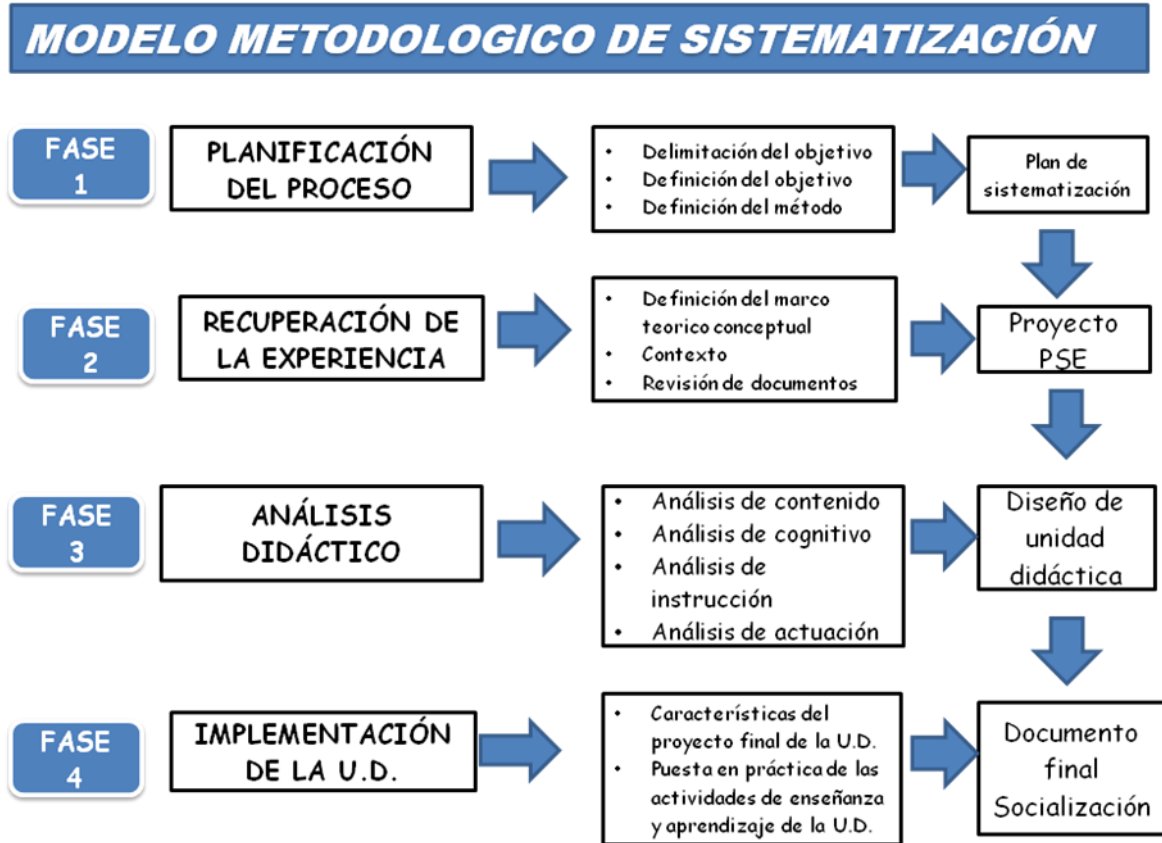
El diseño de este trabajo de sistematización se organiza bajo la metodología de I-A-P, con 4 fases fundamentales:

- **Fase de planificación:** Se realiza un primer estudio para indagar sobre los aspectos estructurales y cognitivos del concepto matemático de nuestra investigación.
- **Fase de Acción:** Se lleva a cabo la programación diseñada y de acuerdo con las decisiones tomadas por el autor.
- **Fase de Observación:** Como resultado de las dos fases anteriores se tienen datos sobre la puesta en práctica de los contenidos, sobre la comprensión que muestran las estudiantes sobre dichos contenidos, y sobre la interacción didáctica que se produce en la construcción del conocimiento.
- **Fase de Reflexión:** Para esta fase se han recogido y organizado los datos de las fases anteriores. El trabajo último será el de analizar dichos datos, valorarlos, extraer conclusiones y tomar decisiones oportunas derivadas.

4.1.2. Estructura y fases del Proceso de Sistematización de Experiencias

Teniendo en cuenta las características sistémicas y estructurales de los procesos metodológicos de Sistematización de Experiencias y de I-A-P, se propone organizar y temporalizar el desarrollo de este trabajo en cuatro fases, las cuales a su vez recogen las distintas etapas o subfases del proceso de SE propuesto en 3.1.1. En la Figura 4.1. se ilustra de manera esquemática la estructura en fases y subfases del diseño metodológico de este trabajo de SE docente.

Figura 4.1. Diseño metodológico del proyecto



Se inicia con la primera fase, que denominamos **Planificación del proceso**, Por tratarse de una etapa de formulación, se aborda una reflexión donde hablamos de los resultados que se esperan obtener, como también de las experiencias que queremos sistematizar referentes a la formación inicial ya que constituye una instancia fundamental en la configuración de la identidad profesional docente y que sienta las bases para que el profesor pueda ejercer liderazgo pedagógico que actual mente demanda la complejidad educativa. La segunda fase, **Recuperación de la experiencia**, en esta fase cabe preguntarse si las características que han asumido las instituciones y su cultura académica proporcionan las condiciones adecuadas para transmitir a los estudiantes los saberes, las actitudes y las habilidades propias del liderazgo. Durante esta etapa se aborda el estudio y evaluación de la factibilidad

o viabilidad del proyecto. Para lograr este desarrollo, se articula en tres subfases: (i) Diagnóstico y reconocimiento de la situación problemática. Se realiza un primer estudio para examinar sobre los aspectos estructurales y cognitivos; estudio que se complementó con la revisión de textos escolares utilizados en la Institución Educativa San Vicente, puesto que dichos textos nos proporcionan informaciones acerca de la instrucción que sobre este tópico recibieron las estudiantes de grado anteriores. Además de la experiencia propia como profesora de la asignatura de la investigadora de este trabajo. Con la información obtenida se elabora la propuesta, que se realizan en torno a: (ii) Revisión global: Áreas prioritarias. Revisión específica: Problemas, necesidades. (iii) Planificación definitiva; Elaboración plan de actuación. Aplicar mejoras: Material referencial. Evidencias.

En la tercera fase, se realiza el **Análisis Didáctico**; donde se estructuran las actividades desde una perspectiva teórica, con el fin de constituir el diseño de la Unidad Didáctica. Estas relaciones permitieron en la cuarta fase, **Implementación de la Unidad didáctica**, cierre del ciclo de análisis didáctico. Puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar las fortalezas y debilidades de la planificación. Presentación de un Documento final. El diseño y desarrollo de la Unidad Didáctica desde este modelo posibilitara el que pueda darse una verdadera adaptación del Diseño Curricular en base a las características y necesidades de nuestros estudiantes de la Institución Educativa San Vicente. Permitirá también que se produzca una adecuación de las situaciones de enseñanza al contexto de aula en el que ésta se desarrolle, contribuyendo, con ello, al logro de un aprendizaje significativo por parte de estos estudiantes.

Paralelamente al desarrollo de las 4 fases anteriores, la documentación de este trabajo también se organiza siguiendo la secuencia de las cuatro fases de la I-A-P, descritas en el apartado anterior, de la forma siguiente: *Fase de Planificación*, donde se detalla el proceso seguido desde la propuesta didáctica inicial hasta la propuesta definitiva, incluyendo las observaciones y reflexiones sobre la prueba diagnóstico. En *la Fase de Acción*, se da cuenta del control entre lo planificado y lo ejecutado, se

detallan las observaciones realizadas acerca del comportamiento de las estudiantes en la realización de las diferentes tareas propuestas, se analiza la interacción didáctica producida durante las secciones. En la *Fase de Observación*, se analizan las producciones escritas de los estudiantes sobre la comprensión de los conocimientos matemáticos sobre lo que se ha instruido. La *Fase de Reflexión*, permite hacer un reconocimiento de la comprensión de las estudiantes sobre los diferentes temas que se abordan en la propuesta didáctica.

4.1.3. Duración de la aplicación

De acuerdo con los resultados de las primeras dos fases de I-A-P, se conforma la programación de las sesiones de nuestra Unidad Didáctica, dicha programación se organiza en torno a cinco componentes curriculares: objetivos, contenidos, actividades propuestas, metodología y valoración. Su redacción definitiva se ha llevará a cabo durante tres meses y se aplicara en 6 secciones de clase de 120 minutos cada una y 2 bloques de 60 minutos.

Tabla 4.1. Descripción de la aplicación de la propuesta didáctica por sesiones y bloques

Sesión	Bloque	Descripción
	1	Aplicación de la prueba de diagnóstico (Anexo 4).
0		Presentación de la Unidad Didáctica
1		Temas. Actividad 1
2		Temas. Actividad 2
3		Temas. Actividad 3
4		Temas. Actividad 4

5		Temas, Actividad.5
6		Evaluación final (Anexo 5)

El tiempo estimado para la implementación y evaluación de la Unidad Didáctica, realizada por el investigador-profesor, es de cinco semanas.

4.1.4. Prueba de diagnóstico

Con la intención de disponer de información más completa sobre los conocimientos de las estudiantes acerca del tópico que se estudia, se aplica una prueba exploratoria, el día 19 de mayo de 2012; Responden la prueba el total de las 46 estudiantes, en un tiempo de 60 minutos.

La prueba proporciona información sobre los conocimientos personales que tienen las estudiantes del concepto de los Números Racionales, y sobre las características de su enseñanza y de su aprendizaje. Nos ofrece información sobre uno de los tópicos objetos de este trabajo: significado de las fracciones, de los decimales y de la conexión entre ambos, así como operar respecto a las expresiones fraccionarias y decimales de los Números Racionales.

a) Contenido de la prueba: La prueba propuesta a los estudiantes en el aula de clase se puede ver en el Anexo 10.

b) Valoración de las respuestas de los estudiantes: De la revisión de las respuestas dadas por las estudiantes del curso de séptimo a la prueba diagnóstico extraemos las siguientes consideraciones más relevantes:

1. El significado predominante de la fracción es como relación parte-todo, o como cociente, e inexistentes los de razón, medida o operador.
2. Las relaciones entre la notación fraccionaria y decimal se establecen en términos exclusivamente operatorios, siendo el algoritmo de la división el que se emplea mayoritariamente.
3. La imposibilidad de llevar a cabo una división cuando el dividendo es menor que el divisor.

4. Dificultad al pensar que un número decimal con más cifras puede ser menor que un número con menos cifras.
5. Las estudiantes ponen en evidencia que el curriculum de las matemáticas escolares contiene escasos tópicos que sean de utilidad en la vida cotidiana.

Los anteriores datos generales establecen el perfil del estudiante de la asignatura de matemáticas en el curso de Séptimo (7º) grado (2011-2012) en la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira. Según los intereses de esta investigación las principales características de estos estudiantes son: los grados de aceptación de la materia en general son muy dispares, consideran las matemáticas dentro de un aprendizaje pasivo, los conocimientos previos que tienen de los números racionales son escasos.

c) Papel del profesor: El investigador, que es el mismo profesor del curso de matemáticas de grado séptimo, le permite llevar a cabo las actuaciones siguientes:

- Introducir modificaciones en los contenidos del programa de la asignatura, por cuanto es responsable de la misma y porque dichas modificaciones no afectan a los objetivos de la asignatura.
- Aplicar las estrategias metodológicas más acordes con la intencionalidad del trabajo, previa justificación ante las estudiantes.
- Obtener datos para la investigación en el lugar y condiciones en que se producen, puesto que su presencia en el aula es un hecho normal.
- Analizar situaciones particulares del desarrollo de la experiencia y tomar decisiones en el momento en que se producen.

4.1.5. Recogida de información

La implementación de nuestro PSE se desenvuelve con unos estudiantes determinados y en un contexto concreto y esta consideración es definitiva para la organización de la primera etapa de nuestro trabajo. La inclusión del marco curricular es obligatoria en nuestro trabajo. Siguiendo a Rico (1990a), nuestro estudio está definido por un entorno sociocultural de los estudiantes; y las distintas singularidades

de las personas, medios y recursos que conforman la Institución Educativa San Vicente en la que se produce esta enseñanza; las necesidades formativas que se quieren cubrir y el control que se realiza de la formación alcanzada.

En la organización del currículum se consideran al profesor, los estudiantes, el contenido y la institución como elementos o dimensiones del sistema curricular (Rico, 1990b). En este proyecto nos situamos dentro de ese nivel de reflexión para ajustarnos en el análisis de las componentes del análisis didáctico, de las interacciones que se muestran en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Considerando el salón de clases como el marco en que se desarrolla la investigación, se identifican tres componentes que se relacionan entre sí: contenidos, estudiantes y el profesor/a. Para asimilar la relación entre profesor y estudiante nos centramos en la interacción en el aula; para estudiar la interacción entre profesor y contenido observamos la organización del contenido; para conocer la relación entre contenido y estudiante estudiamos la comprensión del contenido por parte de los estudiantes.

Igualmente hemos recogido la información sobre la clase realizada, el martes 26 de Junio de 2012; correspondiente a la primer sección de la puesta en práctica de nuestra Unidad Didáctica. La cual le dio un valor agregado a la enseñanza de los Números Racionales, ejecutada por el profesor-investigador. La observación de aula ha sido grabada en vídeo desde la parte delantera del salón de clases, con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones de las estudiantes. La cámara se mantuvo en movimiento durante toda la clase, se hicieron varios acercamientos con el zoom, como por ejemplo, para ver la actuación de las estudiantes. Después de la grabación, se ha transcrito esta clase (Sesión 1). En la transcripción se han incorporado las notas recogidas durante la observación de la clase⁵.

⁵ En el Anexo 11 se muestra un Análisis de Resultados de la experiencia.

4.1.6. Contextos y participantes

Esta sección corresponde con la primera fase del proceso, en la cual se presentan los participantes, el contexto institucional y curricular; además de la propuesta general de AD y de la concreción de Unidad Didáctica.

A. Aplicación de la Unidad Didáctica

i) Participantes

Tabla 4.2. Información general de la Institución Educativa San Vicente

Nombre de la Institución	Institución Educativa San Vicente
Carácter	Oficial
Zona	Urbana
Sector	Comuna
Dirección	Sede Principal: Calle 28 No. 29-41
Teléfono	2722857 - 2730002
Ciudad	Palmira
Departamento	Valle del Cauca
Adopción del PEI	si
Profundización	Técnico Comercial

Fuente: Página Virtual de la Institución Educativa San Vicente⁶

En la tabla anterior se muestra algunos datos de la Institución a la cual pertenecen las estudiantes participes en la aplicación de la propuesta.

⁶ Fuente página virtual de la Institución Educativa San Vicente:
<https://www.google.com/a/sanvicente.edu.co/ServiceLogin?service=mail&passive=true&rm=false&continue=https://mail.google.com/a/sanvicente.edu.co/&ss=1&tmpl=default&tmplcache=2>

ii) Características del Centro Educativo

La Institución Educativa San Vicente, es una entidad pública-oficial, con más de 50 años de servicio en el Municipio de Palmira. En donde se forma líderes que aspiran a la excelencia y están educados en la espiritualidad cristiana.

La finalidad de la institución es lograr en las estudiantes la búsqueda del saber y los valores que le permitan tener autonomía para vincularse en el mercado laboral o ingresar a la educación superior.

En su campus albergan estudiantes del género femenino de todos los estratos sociales del municipio, dando así cumplimiento a lo que exige la constitución colombiana, apoyando la sana convivencia y desarrollo de las diferentes psicologías de las estudiantes.

La institución apoya toda clase de eventos que las estudiantes realicen en función de su desarrollo socio-afectivo, como son muestras empresariales, celebración del medio ambiente, participación en los intercolegiados de deportes, actividades artísticas, entre otras.

Igualmente la institución goza de un buen reconocimiento por parte de los habitantes del municipio de Palmira, además que en las pruebas de estado “Saber”, ha estado muy bien escalonado con respecto a los resultados obtenidos por sus estudiantes. La institución también hace reconocimientos a las diferentes estudiantes en sus logros adquiridos, ya sea en las pruebas Saber o en el deporte u otras áreas.

En palabras de la institución⁷:

La Institución Educativa San Vicente les presenta la Gestión Educativa de Calidad que ha venido gestando en todos los estamentos de la Comunidad educativa, teniendo como meta una educación Oficial de Excelencia para los estratos 1 y 2 de Palmira.

⁷ *Ibíd.*

Nuestra aspiración es formar mujeres con liderazgo y disciplina y formación espiritual en valores cristianos, que continúen en la Universidad del Estado, ubicándose en los primeros puestos, por su Excelencia académica, realizando su sueño de ser profesionales para servir a la sociedad.

Tabla 4.3 Características principales de la Institución Educativa San Vicente⁸

Misión	San Vicente es una Institución de carácter oficial femenino, cuya Misión es formar Integralmente a las estudiantes, con estándares de la calidad académica, innovación pedagógica y tecnológica, desarrollando competencias contables, responsabilidad social y teniendo siempre como base los principios y valores Institucionales.
Visión	La Institución Educativa San Vicente, será reconocida en Palmira y el Valle del Cauca, a través de experiencias pedagógicas de convivencia Horizonte pacífica y respeto mutuo, promocionando estudiantes, con altos estándares académicos, creativos, de alta calidad humana y cristiana, líderes, honestas, responsables y aptas para realizar su proyecto de vida.
	La Institución Educativa San Vicente les presenta la Gestión Educativa de Calidad que ha venido gestando en todos los estamentos de la Comunidad educativa,

⁸ Ibíd.

Generalidades	<p>teniendo como meta una educación Oficial de Excelencia para los estratos 1 y 2 de Palmira.</p> <p>Nuestra aspiración es formar mujeres con liderazgo y disciplina y formación espiritual en valores cristianos, que continúen en la Universidad del Estado, ubicándose en los primeros puestos, por su Excelencia académica, realizando su sueño de ser profesionales para servir a la sociedad.</p>
----------------------	---

Muestra:

Las estudiantes que conforman el grupo del grado séptimo (7^o) con los cuales se aplica la Unidad Didáctica pertenecen a la jornada de la mañana de la Institución Educativa San Vicente, este grupo está conformado 46 estudiantes, con edades comprendidas entre 12 y 14 años.

Entre ellas existen marcadas diferencias en sus niveles de desarrollo, tanto en lo relativo al área motriz, como en sus capacidades cognitivas, de razonamiento, etc.

CAPÍTULO 5

LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO, EL ANÁLISIS DIDÁCTICO Y DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS

La planificación de las actividades didácticas es una de las principales competencias en el desempeño profesional del profesor de matemáticas (Lupiañez y Rico, 2008). Los estándares nacionales e internacionales, las directivas gubernamentales y la planeación estratégica de la institución educativa determinan los contextos social, educativo e institucional en los que se produce el diseño curricular global de cada asignatura. La planificación no solo hace referencia a que el profesor mantenga el orden de la clase, “sino que también debe prever y gestionar sus actuaciones de tal forma que los escolares logren los objetivos de aprendizaje” (Gómez, 2007). En este sentido el profesor necesita una planificación del aula que sea sistemática, eficaz y eficiente. Para alcanzar este propósito, los profesores precisan de una serie de herramientas que les permitan, entre otros elementos, establecer, objetivos, prever dificultades y errores, y generar estrategias de evaluación. Al respecto Gómez (2007) dice: “Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramienta, que fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase”.

Para concretar todo lo anterior en la práctica, es necesario diseñar y desarrollar un conjunto de actividades, estructurada en una UD. La cual está dirigida a un grupo concreto de alumnos y se refiere a un contenido matemático específico y está dentro

de un contexto determinado. Para lograr esto hay que llevar a cabo un proceso de análisis riguroso y detallado, denominado análisis didáctico, en torno a los contenidos matemáticos a enseñar, a partir de determinados Organizadores del Currículo estructurados sistemáticamente en un modelo local.

En este capítulo desarrollaremos el análisis didáctico a través de sus cuatro tipos de análisis relacionados entre sí: (a) análisis de contenido, relacionado con el significado de los contenidos a enseñar; (b) análisis cognitivo, referente a la manera en que se da el proceso de aprendizaje; (c) análisis de instrucción (I parte), en el que el profesor estudia y selecciona las tareas que incluirá en el diseño de actividades; y (d) análisis de instrucción (II parte), en el que el profesor compara lo que esperaba del estudiante con lo que hizo, para generar información que le sirva para un nuevo ciclo de planificación.

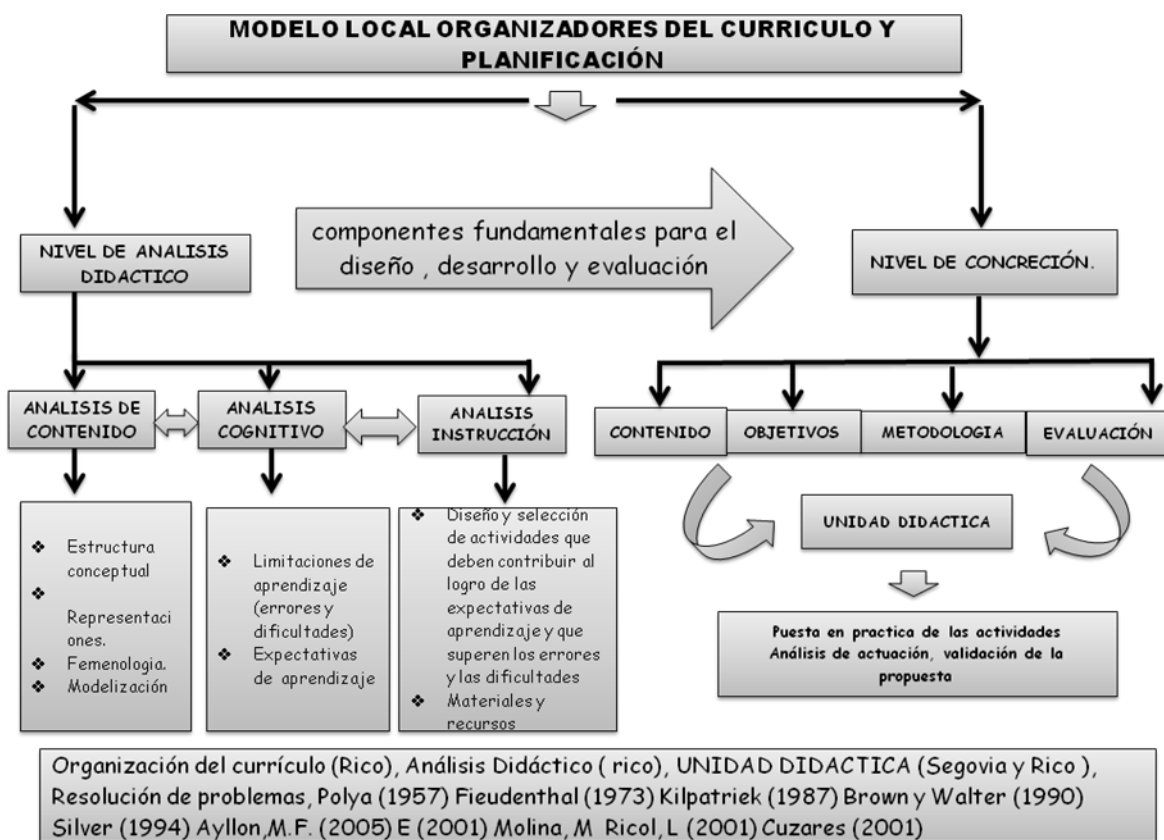
5.1. ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO PARA EL DISEÑO DE LA UD

En base al diseño curricular local y a los conocimientos sobre el contenido de matemático específico y sobre su enseñanza, Los organizadores del currículo y Modelos locales de organizadores (Rico, L.; 1997; Bedoya, E. 2004; 2011). El profesor determinará y seleccionará unos objetivos y unos aspectos del contenido, realizará ciertos análisis conceptual, cognitivo y de instrucción, y diseñará, planificará y producirá unas actividades didácticas como propuestas para la enseñanza de estos contenidos.

Adicionalmente este análisis didáctico, se lleva a cabo a través de unos organizadores del currículo. Siendo estos últimos, herramientas conceptuales y metodológicas que permiten analizar un tema de las matemáticas escolares y producir información que sea útil para el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica sobre el contenido en cuestión. Y se sitúan bajo tres niveles de concreción, descritos en el capítulo 2.

En la siguiente figura (5.1.) se puede ver el modelo local que se escogió para el trabajo.

Figura 5.1. Modelo local de OC



5.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

En nuestro AD, inicialmente presentamos el AC, en el que describimos los diferentes contenidos matemáticos relacionado con el tema de la UD, su desarrollo histórico, los diferentes sistemas de representación (semiótico) que se pueden emplear en el Sistema de los Números Racionales, y además los fenómenos relacionados con el tema. Posteriormente trataremos el ACg, describiendo las expectativas de aprendizaje (competencias, objetivos y capacidades) así como los caminos de

aprendizaje y los posibles errores y dificultades con los que se pueden encontrar los estudiantes. A continuación, formulamos las tareas seleccionadas para nuestra UD, sus relaciones con las expectativas de aprendizaje y con los contenidos del tema. Finalmente, presentamos el AI (segunda parte), en el que describimos algunos criterios, aspectos e instrumentos que permitirán establecer, una vez se implemente la UD, en qué medida los estudiantes lograron los objetivos y en qué medida las tareas contribuyeron a las capacidades y competencias propuestas.

5.2.1. El Análisis de Contenido (AC)

El AC es el procedimiento que permite identificar y organizar la multiplicidad de significados de un concepto matemático. Como nuestro tema, son los números racionales, en este análisis se consideran los diferentes modos de expresión y de uso de estos en el mundo matemático, las conexiones con distintas estructuras, la utilización de diferentes procedimientos, y la diversidad de problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse. Así, en este apartado, describo el análisis de contenido matemático para el desarrollo de la UD de los números racionales.

I. Análisis del Contenido Matemático de los Números Racionales (Q)

El cuerpo ordenado de los Números Racionales (Q) se presenta en los textos de matemáticas como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos (Feferman, 1989). En el contexto de nuestro trabajo hemos considerado, siguiendo a Llinares y Sánchez (1988), cuatro contextos en los cuales los Números racionales son estudiados en el sistema escolar: relación parte-todo (medición y reparto), cociente (división), razón (semejanza, medida, porcentaje) y operador.

Algunos sistemas de representación utilizados en la enseñanza primaria para referirse a las fracciones o sus propiedades son: numéricos, verbales, figural y

manipulativo. Asimismo, podemos convenir que existen diversos fenómenos que dan sentido a las fracciones. Desde un ámbito matemático, la fracción es una representación de un Número Racional. Desde un ámbito escolar, los diversos contextos asociados a las fracciones implican una abundancia de fenómenos: las nociones informales que presentan los alumnos sobre reparto equitativo y de medida son base para construir los significados vinculados a los números racionales (Llinares y Sánchez, 1988).

a) Conocimiento matemático de los Números Racionales

Estos números a lo largo de la historia se han ido forjando de los diferentes significados sobre las fracciones; significados que algunos autores denominan constructos, de acuerdo a Kieren (citado en Gairín, 2001), dichos constructos deben entenderse como las distintas interpretaciones de las comprensiones de objetos del mundo real a objetos mentales, incluyendo también las creaciones mentales y actos físicos que están implicados en su génesis. Los diferentes significados de la fracción que citan autores como Behr, Lesh y Kieren son los de parte todo, cociente, razón, operador y medida (Gairín, 2001).

b) El concepto de Número Racional

De manera general, se ha acepta como definición: Los Números Racionales son aquellos que se puede expresar como cociente de dos números enteros (Z). El término "racional" hace referencia a una "ración" o parte de un todo; el conjunto de los números racionales se designan con "Q" por "quotient" que significa "cociente" en varios idiomas europeos. En general el conjunto Q de los Números Racionales está compuesto por los números enteros (Z), por los fraccionarios y los decimales.⁹

⁹ Para mirar y profundizar sobre este tema mirar la UD del Anexo 1.

c) Focos de contenido en el Sistema de los Números Racionales

Dentro de los cinco bloques en que se divide el contenido matemático (Números, Álgebra, Geometría, Funciones – gráficas y Estadística & probabilidad), los Números Racionales se encuentran incluidas en el Bloque de Números. El desarrollo del sentido numérico iniciado en la primaria continúa en la secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes.

En nuestro caso de los Números Racionales, los focos que consideramos prioritarios para centrar el aprendizaje y abordar la enseñanza del tema, son: **1)** Nociones sobre significados y usos de los Racionales; **2)** Números Enteros; **3)** Números en Equivalencia en Fracciones; **4)** Números Decimales; **5)** Sistema Decimal de Numeración; **6)** Relación de orden; **7)** Suma de Racionales; **8)** Resta de Racionales; **9)** Producto de Racionales; **10)** Divisibilidad de Racionales; **11)** Potencialidad de Racionales; **12)** Porcentajes de Racionales.

II. Desarrollo histórico de los Números Racionales

Como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema. Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto, pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales, para lograr hacerlo de una manera más exacta necesitaban medidas o divisiones más pequeñas que la Unidad, o divisiones mayores que las misma, lo que lleva a proponer expresiones numéricas para llevar a cabo la operación. “Así como el hombre empezó a contar a partir o con los números naturales, empezó a medir con los Números Racionales cuya idea fundamental históricamente hablando son las fracciones” (Flores y Morcote, 2001, p. 2).

La evolución histórica de la construcción del concepto de los Números Racionales tiene su origen en las fracciones, es por eso que a continuación miraremos algunos aspectos de ese desarrollo histórico, a partir de la Fracción:

1. Aspectos históricos de la Fracción

En la historia de la matemática es posible distinguir dos motivos importantes por los que fueron concebidas las fracciones. El primero de ellos fue la existencia de divisiones inexactas mientras que el segundo resultó de la aplicación de unidades de medida de longitud. Las fracciones, también conocidas con el nombre de “quebrados”, fueron en la antigüedad conocidas por babilonios, egipcios y griegos.

Pero el nombre de fracción se lo debemos a Juan de la Luna, que lo tradujo al latín *de fractio*, para traducir la palabra árabe “al-Kasr”, que significa quebrar, romper. Por su parte el verbo fraccionar sugiere dividir algo en partes iguales. La relación existente entre los ordinales con las fracciones da lugar a la denominación de éstas.

i) Fracciones en los egipcios antiguos: Se considera que fueron los egipcios quienes usaron por primera vez las fracciones, pero sólo aquellas de la forma $\frac{1}{n}$ (fracciones unitarias) o las que pueden obtenerse como combinación de ellas. Es decir, los egipcios utilizaron las fracciones cuyo denominador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ consiguiendo hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Por otro lado, las fracciones en esta cultura surgen del contexto de la resolución de problemas sobre la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas estaban la distribución del pan, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta Tierra. En este sistema además, se permite considerar la fracción como adición de cantidades de magnitud que son particiones enteras proporcionales de la unidad, mediante el empleo casi exclusivo de fracciones unitarias. Esto lo podemos comprobar numerosas inscripciones antiguas como el papiro de Ahmes.

Dicho Papiro es un documento escrito en un pergamino de unos seis metros de longitud 33 cm de anchura, en un buen estado de conservación, con escritura hierática y contenidos matemáticos. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en 1650a.c., a partir de escritos de doscientos años de antigüedad, según reivindica Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores. Contiene 87 problemas matemáticos con cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. En él encontramos el tratamiento de las fracciones.

ii) Fracciones en los Babilonios: Esta cultura disponía de un sistema posicional sexagesimal para cantidades enteras que permitía realizar extensiones para representar cualquier cantidad no entera. También disponían de una unidad y conocían los múltiplos y submúltiplos sexagesimales, por lo que podían expresar esas mediciones en cantidades enteras y sexagesimales. Los cuales las utilizaron teniendo como único denominador al número 60. Asimismo, desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionaria, que permitió establecer aproximaciones decimales realmente admirables.

Esta evolución y simplificación del método fraccionario permitió el desarrollo de nuevas operaciones que ayudaron a la comunidad matemática de siglos posteriores a hacer buenos cálculos de, por ejemplo, las raíces cuadradas. La escritura de números en este sistema es muy similar a la actual notación decimal, aunque presenta un inconveniente relacionado con la ausencia de un signo para indicar separación entre la parte entera y la no entera, además de la carencia de un símbolo para nombrar las posiciones vacías que corresponderían al actual cero. Finalmente, para los babilónicos era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando sistemas de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

iii) Fracciones en los Griegos: Euclides en algunos de sus libros, llamado de Los Elementos, hace mención a la noción de fracción y sus propiedades, la cual está asociada a la razón entre dos números y no se concebía como otro tipo de número llamado fracción o Número Racional, sino que se interpretaba como una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo.

Por otro lado, los griegos mostraron sus grandes dotes en cuanto a geometría en algunas construcciones geométricas de segmentos cuyas longitudes representan racionales. En la Grecia Clásica conviven entonces numéricas con significados diferentes y representados de forma distinta, estos entes numéricos representan cantidades que resultan de medir o de comparar magnitudes. Básicamente, la fracción surge en un contexto de medida y en otra de reparto. Sin embargo, en el siglo VI d. C., fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones.

iv) Fracciones en los hindúes y árabes: Aceptado el legado hindú y árabe con nuestro sistema de numeración indo arábigo, se conoce que los hindúes en el siglo VI notaban a las fracciones con numerador encima del denominador pero sin raya de fracción y dieron continuidad a la descomposición de unidades fraccionarias. Los árabes son los que introducen las líneas vertical y horizontal para notar fracciones. Además, en los árabes aparece el significado de fracción como razón en el sentido de relación o proporción de cambio entre valores de monedas diferentes.

v) Fracciones en los chinos: Los chinos conocían muy bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de hallar el mínimo común denominador de varias fracciones. Como era su costumbre asignaban un rol femenino y otro masculino a los elementos que componen la fracción. Se referían al numerador como “el hijo” y al denominador como “la madre”. El énfasis generalizado en toda la cultura china sobre los principios del ying y el yang hacía fácil seguir las reglas para manipular fracciones. Más importante que estas curiosidades era, no obstante, la tendencia a la decimalización de las fracciones en China. La adopción de un sistema

decimal en pesos y medidas dio como resultado que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones.

vi) Fracciones en Europa: En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indo arábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los Fraccionarios en la vieja Europa. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIII cuando Leonardo Pisa, más conocido por su apodo Fibbonacci, introdujo el concepto de Números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador.

vii) Fracciones Decimales: Así como en Mesopotamia un sistema de medidas básicamente sexagesimal condujo a la numeración sexagesimal, en China la adopción de una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse hasta el siglo XIV a.C.

Sin embargo, las fracciones decimales no fueron admitidas de inmediato a pesar de que el sistema de numeración decimal, el sistema árabe-hindú, ofrecía ventajas incuestionables para su utilización en las fracciones. Pasaron más de 1000 años hasta incorporar las fracciones decimales para sustituir a las fracciones unitarias o a las fracciones sexagesimales.

El uso de las fracciones decimales se extendió en el mundo árabe en el siglo XIII. En el siglo XV, Al Kasi, astrónomo y matemático de Samarcanda, las utilizó para hacer estimaciones. El uso del punto (o coma) para separar la parte entera de la fraccionaria en la escritura de los números se hizo usual desde 1579, en la obra *Canon Mathematicus sud ad triangula*, en la que Francois Viète utilizó los múltiplos y submúltiplos de 10. A principios del siglo XVII el uso de la representación decimal se consolidó en Europa. El reconocimiento más generalizado acerca de la invención de la notación decimal, a pesar de que no fue ni el inventor ni el primero que utilizó las fracciones decimales, es hacia el científico neerlandés Simón Stevin que publicó en

1585 el libro *De Thiende (La Décima)* en el cual se dan definiciones acerca de décima, número decimal, entre otros.

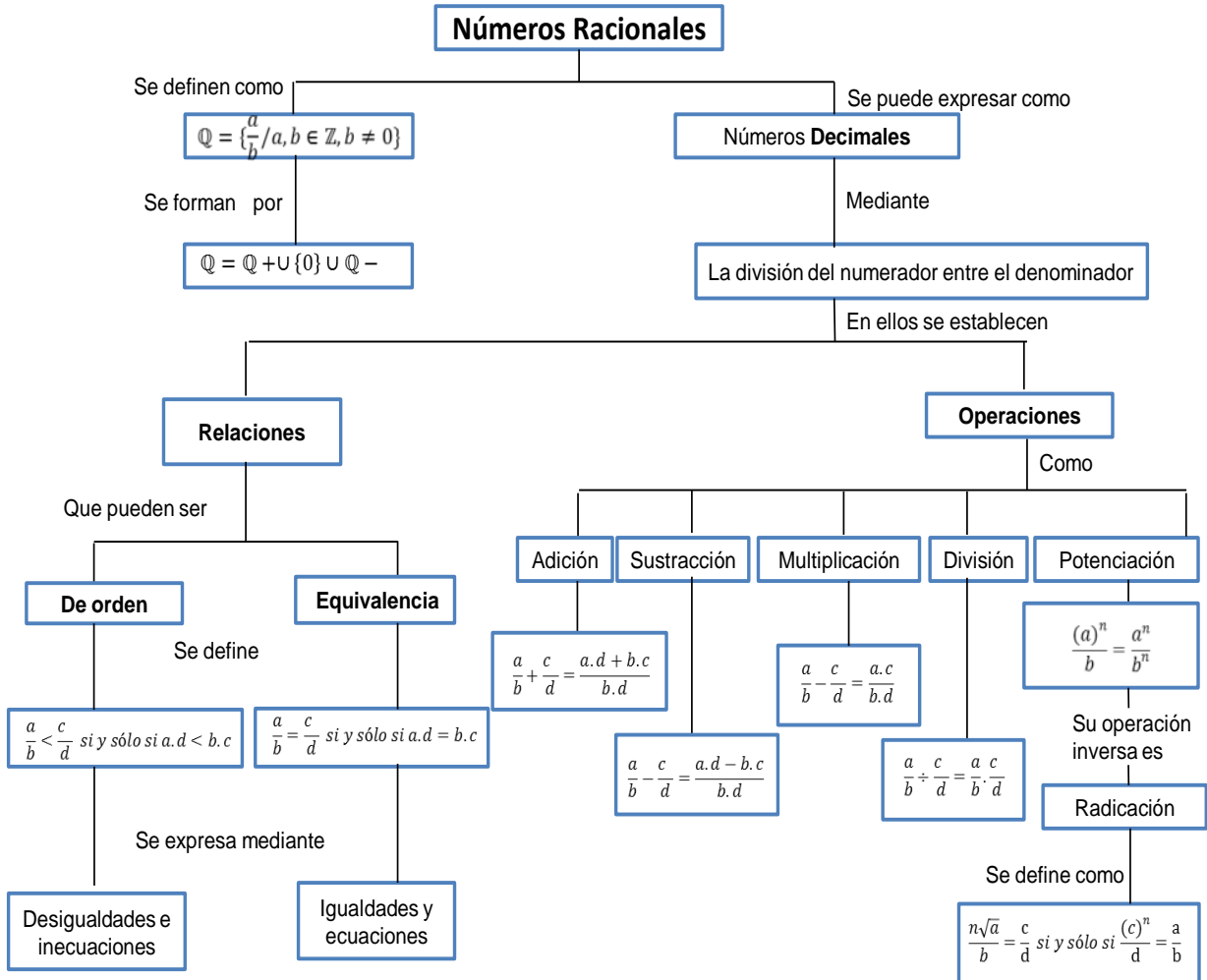
viii) Los Números Racionales: Tiempo después de lo dicho anteriormente, se fueron perdiendo los componentes intuitivos y representativos que caracterizaron a las fracciones. El resultado fue que el símbolo quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medida y a las cantidades de medidas, y fue considerado simplemente como un número, conduciéndose a la formalización del Número Racional. Hacia 1801 Gauss fundamenta la Teoría de Números, relegando la fracción escasamente a una visión intuicionista. Con Gauss se considera que el cuerpo de los Números Racionales se establece como teoría estructural que se conoce hoy día.

En la actualidad, la herencia cultural y científica de otras culturas, ha culminado con una práctica que permite simbolizar las fracciones de formas diferentes. Las notaciones más frecuentes son a/b o, pero también se utiliza el signo de porcentaje (%), o los dos puntos (:) para las escalas de mapas o planos, entre otras interpretaciones

III. Estructura del análisis de contenido desde los organizadores curriculares

Para el diseño del esquema conceptual se tienen en cuenta todos los contextos de concreción tales como el nacional (MEN) números racionales en los lineamientos y estándares, institucional números racionales en el PEI o PCA, y el del aula como textos y otros medios, también se han revisado muchas de las investigaciones hechas sobre los números racionales. Ahí establecimos las diferentes conexiones de los elementos tanto conceptuales como procedimentales mostrando la coherencia de sus relaciones. Esta se muestra en la figura 5.2.

Figura 5.2. Diagrama de la estructura de AC de los números racionales



El punto de partida en la generalización del concepto de los Números Racionales (Q), es la teoría de los Números Enteros (Z). Los cuales contienen el 0 (Cero), los números enteros positivos (z^+) y los números enteros negativos (z^-). Además gozan de las mismas leyes formales para la suma y la multiplicación de los Números Naturales. Pero Z plantea algunas restricciones en otra de sus operaciones, las más importante es para efectuar la división a/b entre dos números enteros cuando a no es múltiplo de b, situación que se plantea en mediante la ecuación $b \cdot x = a$, con

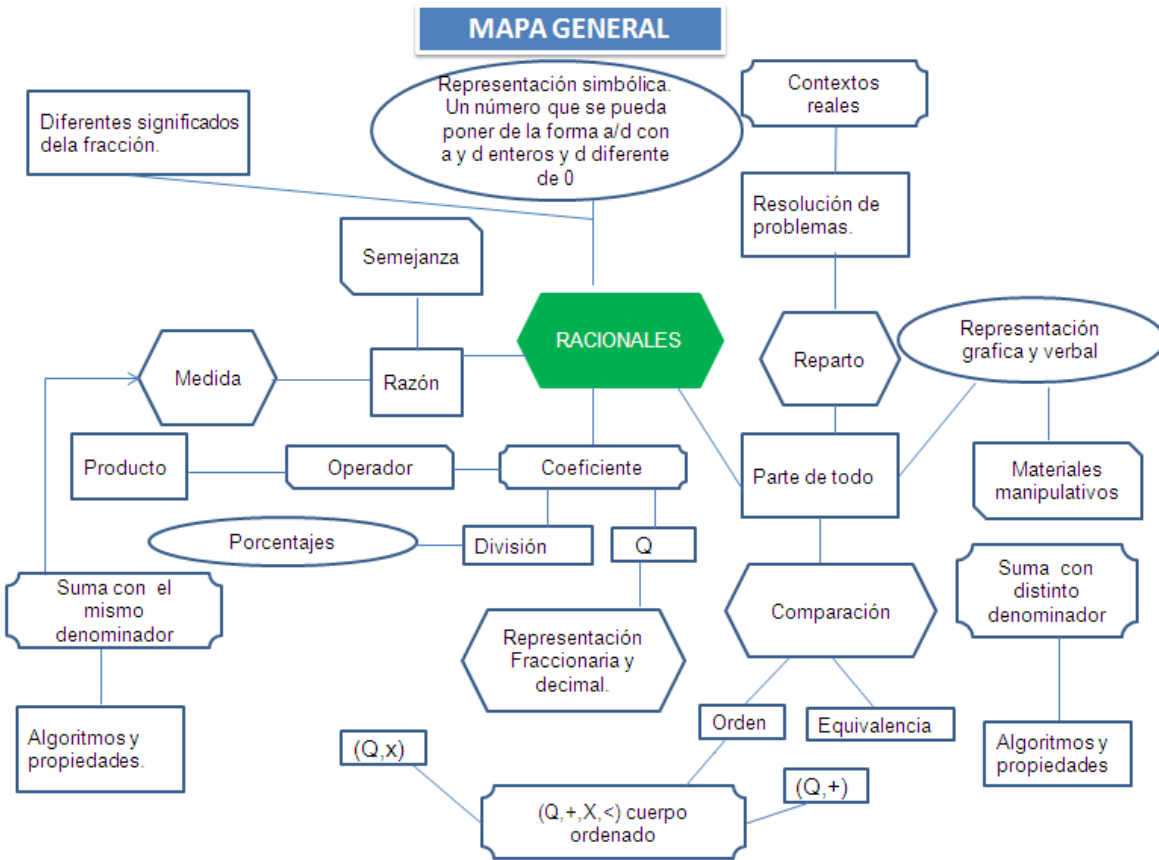
$b \neq 0$, la cual no tiene solución dentro de los Z . Los nuevos números emergen como cocientes de números enteros a y b utilizando el símbolo $\frac{a}{b}$, para notarlos, sujeto a la regla que $b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a$, es decir, $\frac{a}{b}$ es por definición solución de la ecuación $b \cdot x = a$. De esta manera, los Números Racionales son por definición *cocientes*. Donde cada uno de tales cocientes recibe el nombre de *fracción*. Además, dos o más fracciones que resulten de una misma ecuación se denominan equivalentes y se conviene que definen el mismo Número Racional. Como representantes de las clases equivalentes se eligen las fracciones irreducibles, es decir que no pueden simplificarse.

A. Estructura Conceptual (EC)

Realizamos la estructura conceptual del tema mediante un diagrama de la EC de los números racionales, de acuerdo con el siguiente procedimiento: primero, elaboramos una lista de los elementos de carácter conceptual y procedimental relacionados (ver figura anterior), con base en información procedente de varios de los libros texto de matemáticas de grado séptimo. Luego, establecimos las relaciones entre esos elementos.

Finalmente, diseñamos un diagrama de la EC en el que recogimos los elementos y los organizamos de tal manera que se muestran las relaciones de forma coherente, como lo muestra la Figura 5.3.

Figura 5.3. Esquema Conceptual



B. Los Sistemas de Representación (SR)

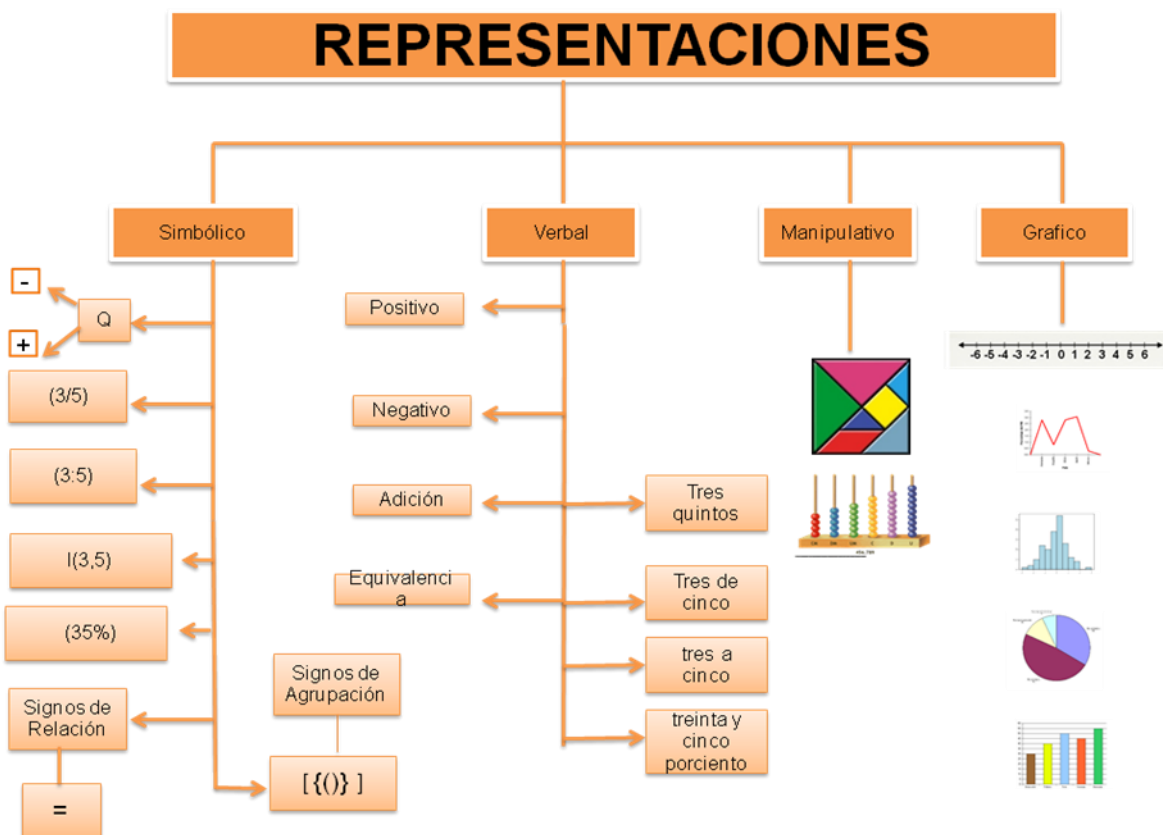
Describimos los sistemas de representación más relevantes para nuestro tema, los elementos que hacen parte de ella y las relaciones que hemos establecido. En la siguiente Figura podemos observar estas representaciones con respecto a los números racionales¹⁰.

¹⁰ Ver Anexo (de la UD) para ampliar los diferentes sistemas de representación de los números Racionales.

Para nuestro caso, identificamos los sistemas de representación que consideramos relevantes para nuestro tema: representación simbólica, representación gráfica, representación manipulativa, representación verbal y representación numérica.

En la figura 5.4. a continuación podemos ver todos estas representaciones, luego miraremos cada una de ellas.

Figura 5.4. Los Sistemas de Representación de los Números Racionales



1. Sistema de Representación Simbólico: El conjunto de símbolos (Caracteres) que pueden asociarse a nuestro tema: Por ejemplo, usamos el sistema de numeración arábigo para designar los elementos del conjunto Q. El símbolo (+), forma parte de este sistema y puede denotar un número positivo o una adición. El símbolo (-), que denota un número negativo o una sustracción (resta). Igualmente, el

símbolo $|$ que denota el valor absoluto de un Número Racional, el símbolo $(=)$ que denota igual a, y los signos de agrupación $[]$, $()$ y $\{ \}$.

Además, podemos decir que la representación simbólica permite variadas formas de utilizar los números para indicar una relación: representación como división indicada $\frac{a}{b}$, representación como razón $(a:b)$, representación decimal (a,b) y representación de porcentajes (50%) lo que sugiere 100 como la unidad; son algunos de los sistemas usuales de representación simbólica para los Números Racionales.

2. Sistema de Representación Gráfico: En nuestro caso, las fracciones pueden representarse de manera geométrica y se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. Miremos estos casos:

a) La representación gráfica de datos: Diagramas de barras, Histogramas, Polígonos de frecuencias, Pictogramas, etc. Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir dos casos:

Figura 5.5. Modelos de áreas

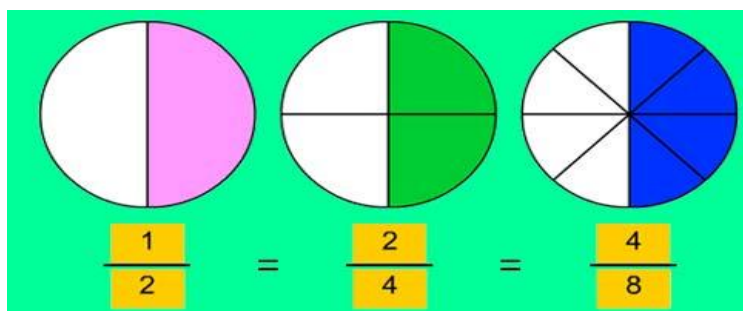
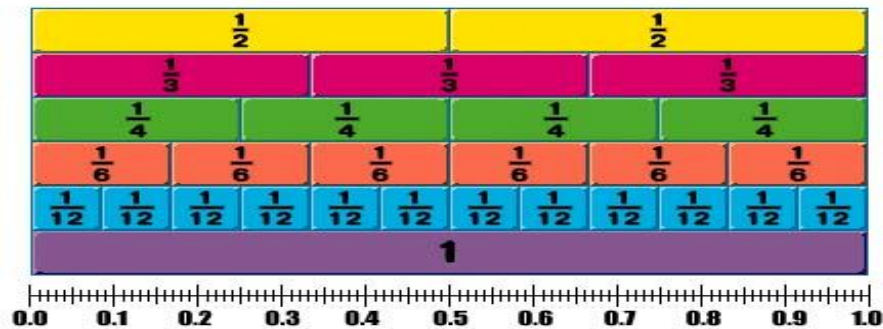
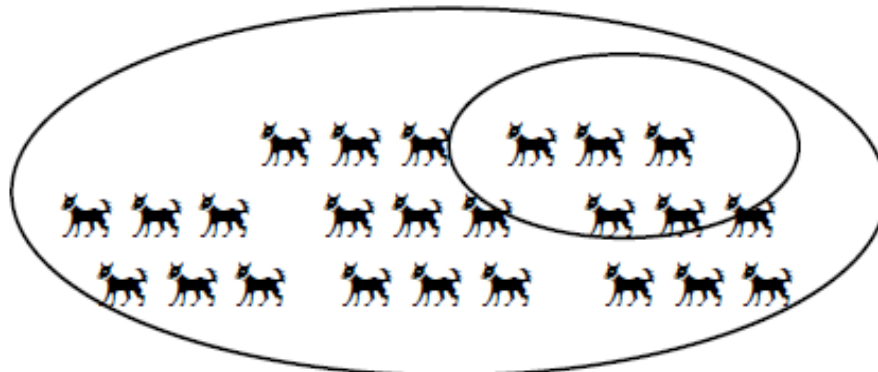


Figura 5.6 Modelos lineales



b) Representación gráfica discreta: Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.

Figura 5.7. Repartición en conjuntos



c. La representación en la Recta Numérica: Se trata de una línea recta, horizontal o vertical, donde se ubican los números enteros que queremos representar. El (0) es el número que separa los números positivos (+) de los negativos (-). La distancia entre cada uno de los números es constante y están organizados teniendo en cuenta el orden de \mathbb{Q} .

Figura 5.8. Recta Numérica



FIGURA 1

c) Sistema de Representación Manipulativo: Para nuestro tema encontramos el ábaco, la calculadora, la computadora; juegos manipulativos como el Armonigrama, el Tangrams. Para el diseño de nuestra unidad didáctica seleccionamos el Armonigrama y el Tangrams.

Figura 5.9. Armonigrama

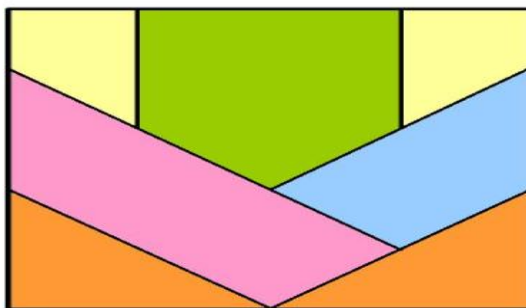
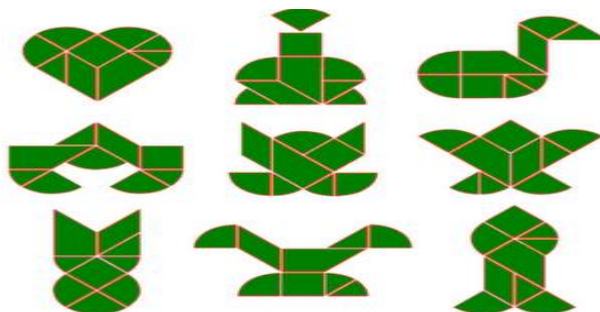


Figura 5.10. Tangrams



d) Sistema de Representación Verbal: Los nombres de las operaciones de los Números Racionales (enteros, fracciones, decimales) y sus signos correspondientes. Un número positivo (+) como elemento de Q^+ se interpreta como tener algo, por ejemplo, tengo $\frac{5}{7}$ de dinero, significa tener un número dado de dinero. Por el contrario, un número negativo (-) como elemento de Q^- se interpreta como deber algo, por ejemplo debo dinero. Mientras no tener nada significa una cantidad igual a 0. También aquí, podemos encontrar representaciones literales en distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco (Llinares y Sánchez, 1988).

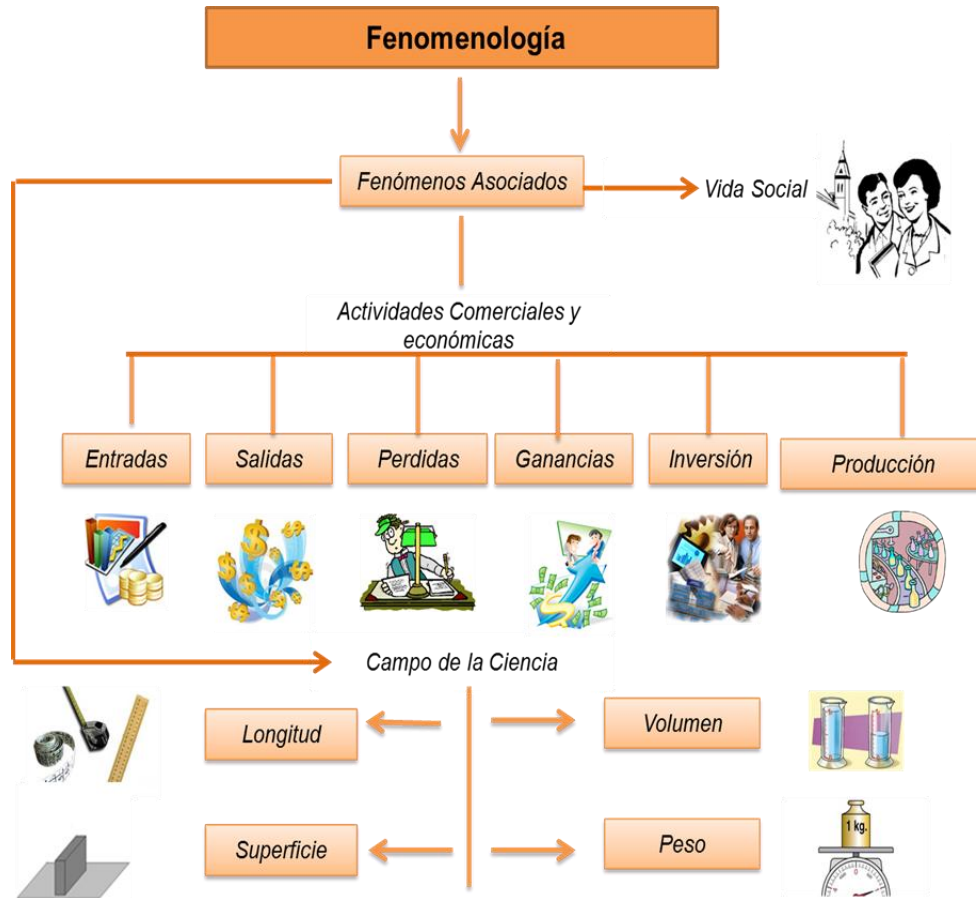
e) Sistema de Representación Numérica: Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir varias formas de expresar el mismo concepto:

1. Notación usual: $\frac{1}{2}$.
2. Decimal: 0.5.
3. Porcentaje: 50%.
4. Sistema sexagesimal (Horario) 12:15:30.
5. Equivalencia: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.
6. Número mixto: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

IV. Análisis Fenomenológico de los Números Racionales

El último de los aspectos que analizamos para organizar y examinar los contenidos de un tema escolar de matemáticas, el cual intenta dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo se organizan los fenómenos que dan sentido al tema? (Gómez y Cañadas, 2011). Para dar respuesta a esa pregunta se deben describir los fenómenos asociados al tema de los Números Racionales, las subestructuras matemáticas y los contextos numéricos que los organizan, y las relaciones entre ellos subestructuras y contextos. Como se muestra en la siguiente figura:

Figura 5.11. Análisis Fenomenológico de los Números Racionales



A. Análisis Fenomenológico desde el significado de los Números Racionales

Una visión general fenomenológica del concepto de los Números Racionales, demanda, entonces, atender a la pluralidad de sus significados e interpretaciones que las fracciones admiten desde el punto de vista didáctico. Esto nos conduce a la diversidad de usos y significados tanto en el mundo escolar como en el mundo real (fenómenos que la fracción permite organizar). Nos muestra la potencialidad del concepto para diversos contextos y situaciones y en consecuencia nos conduce a las diferentes interpretaciones del objeto analizado. Miremos entonces la fenomenología

de los Números Racionales, desde sus diferentes significados: Relación parte-todo; reparto, razón, operador y medida.

a) Como Relación Parte-Todo: En este caso, los Números Racionales responden a la pregunta ¿Qué parte es del entero o del todo o de la unidad de que se trate?

Ejemplo: ¿Qué parte de la figura se ha sombreado?

Figura 5.12. Rectángulo sombreado



b) Como Reparto: Este concepto aparece como cociente en las fracciones tipo $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), que puede significar el cociente de dos enteros a entre b . Lo anterior conduce a la idea de cociente de dos números: “ a unidades en b partes iguales”, surgiendo así la noción de reparto en cantidades iguales. Este caso se produce cuando se trata de resolver una igualdad del tipo $a = b \cdot x$, ($b \neq 0$), donde a no es divisible por b dentro del conjunto de los enteros.

Ejemplo: $\frac{1}{2}$ podría representar la acción de dividir 1 litro entre 2 personas. Dividir una cantidad en un número de partes dadas. $\frac{3}{4}$, podría representar tres bolsas de caramelos repartidas entre 4 niños.

En general, cuando dividimos un objeto en un número arbitrario de objetos parciales que se reemplazan entre sí, esto lleva a la división por números naturales (fracción como cociente). En este caso las fracciones pueden ser descritas como un representante de la clase de equivalencia. Los objetos, mediante una relación de equivalencia, se requieren para formar clases que representan valores de magnitud.

c) Como Razón: Los Números Racionales tienen significado de razón cuando lo que simboliza es la relación entre dos cantidades o conjunto de unidades. Es esta otra

interpretación de las fracciones para comparar situaciones: una relación entre dos números que son medidas de dos cantidades asociadas. En este caso no existe de forma natural definido un todo o unidad.

Ejemplo: Dos cuerdas A y B, de longitud y de largo, respectivamente. Podemos decir que la razón de la medida de A y la medida de B es de 3 a 4, expresada $\frac{3}{4}$. Otra manera de decir que la medida de A es $\frac{3}{4}$ de la medida de B. Podemos establecer la relación entre la medida de B y A, donde la medida de B es de la medida de A.

Para este caso las visualizaciones espaciales son altamente recomendadas como: la recta numérica, peso, área, tiempo, volumen, etc. Los pesos pueden ser visualizados linealmente, en la escala de balanza; el tiempo puede ser visualizado sobre ejes de tiempo; longitudes y áreas son los medios más naturales para visualizar magnitudes con respecto a la enseñanza de fracciones (Freudenthal, 1994).

d) Como Operador: En este caso, las fracciones actúan u operan sobre un conjunto discreto, una cantidad de cierta magnitud o un número.

Ejemplo: En un contexto discreto, si en una clase hay 36 alumnos y de ellos son mujeres. ¿Qué cantidad de los alumnos son mujeres?

La situación inicial, 36 alumnos, mediante la actuación del operador se transforma en el número 24 que representa a las mujeres del curso. El operador puede actuar sobre objetos y relacionarlos entre sí, con respecto a: cantidades y valores de magnitud (número, longitud, peso).

e) Como Medida: Situados en el contexto de la medida, y ante la necesidad de fraccionar la unidad, parece conveniente que el Número Racional se presente con la notación fraccionaria. En efecto, la notación fraccionaria exige una sola partición de la unidad, la creación de una única subunidad de medida. El tamaño de esta subunidad, que depende del número de partes en que se ha fraccionado la unidad,

viene reflejado en el denominador de la fracción; mientras que el número entero de subunidades que contiene la cantidad a medir viene reflejado en el numerador de la fracción.

B. Análisis Fenomenológico desde los contenidos matemáticos de los Números Racionales

I. Situaciones: A continuación se enumera las situaciones mencionadas anteriormente en las que pueden aparecer problemas que se resuelvan con los Números Racionales:

i) Situación Pública: Se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. En este tipo de situaciones suele aparecer los Números Racionales como parte de la unidad. A continuación se exponen algunos ejemplos:

1. De los 84 pasajeros de un MIO, $\frac{2}{3}$ son hombres. ¿Cuántas mujeres viajan en el MIO?
2. En el fin de semana, las atenciones de un servicio de urgencias suponen un 30% de las ocurridas en toda la semana. Si en dicho fin de semana se produjeron 150 atenciones. ¿Cuál es el total de atenciones?
3. En una ciudad hay un depósito de 2300 m^3 que abastece a parte de la población. Se extrae $\frac{1}{4}$ de su capacidad y, posteriormente, se gastan 175 m^3 . ¿Cuántos metros cúbicos quedan? ¿Qué fracción del total representan?

ii) Situación Laboral: Como ejemplos se proponen:

1. En una pizzería, para la venta por unidades, se preparó una pizza pequeña de 8 porciones, una mediana de 10 porciones y una grande de 12 porciones. De la pequeña se vendieron 3 porciones, de la mediana 5 porciones y de la grande 8

porciones. ¿Qué fracción de pizza se vendió en cada una? Si sumamos las fracciones de pizza sobrante, ¿qué fracción de pizza quedó sin vender?

2. El cocinero de una pizzería saca $\frac{2}{13}$ de la capacidad total del frasco de salsa para cada pizza que prepara. Si estás preparando cinco pizzas, ¿qué cantidad saca del contenido del frasco de salsa?

3. Un sastre compró la mitad de 9 metros de tela y utilizó $4\frac{1}{2}$ metros. ¿Cuánta tela sobró?

iii) Situación personal: Como ejemplos se pueden encontrar:

1. Rosario y Maribel participan en dos fiestas diferentes, en las cuales se reparten equitativamente en dos pasteles del mismo tamaño. Si el trozo recibido por Rosario es menor que el recibido por Maribel, ¿en cuál de las dos fiestas hubo más invitados?

2. Luis y Juan pesan juntos 105 kg. Luis pesa $\frac{3}{4}$ de lo que pesa Juan. Hallar el peso de Juan.

3. Cinco amigos consumieron en un restaurante por un total de 40€, pero dos de ellos sólo consumieron $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{6}$ del total. Por tanto, si los demás consumieron lo mismo entre ellos, ¿cuánto pagó cada uno de los restantes para saldar la deuda?

iv) Situación científica: Como ejemplos se pueden encontrar:

1. Un análisis químico indicaba que $\frac{4}{7}$ de una sustancia era petróleo; un segundo análisis, que 0,572 de la sustancia era petróleo. ¿Cuál de los dos análisis mostraba más petróleo?

2. Una aleación está compuesta por 24 partes de cobre, 4 de estaño y 1 de zinc. ¿Cuántos kilogramos de cada metal habrá en 348 kg de aleación?

II. Fenómenos y Subestructura: En este punto se pretende que los profesores puedan, por un lado, identificar fenómenos asociados al tema de los Números

racionales, y, por el otro, establecer relaciones entre esos fenómenos. Mencionamos algunos fenómenos relacionados con las operaciones de Números Racionales.

Ejemplo1: La temperatura de un día cualquiera a las 6 a.m. es $-3/5^{\circ}\text{C}$, y si desde las 6 a.m. a las 12m. Aumenta en $12/5^{\circ}\text{C}$, ¿se puede hallar la temperatura a las 12m?

Es posible dar respuesta a la pregunta mediante una adición.

Ejemplo2: En una finca, se tiene sembrado de la siguiente manera: La cuarta parte de un terreno está sembrado de papa, dos quintas partes de hortalizas; y tres décimas partes de árboles frutales. ¿Qué parte del terreno está sembrado? Las preguntas planteadas en los dos ejemplos hacen referencias a una pregunta más general: ¿cuáles son los valores? Otro fenómeno puede darse de la cotidianidad,

5.2.2. Análisis Cognitivo (ACg)

En este análisis abordamos los objetivos de aprendizaje que se han propuesto para la UD, las capacidades que pretendemos que los estudiantes activen y cómo estas favorecen al desarrollo de su competencia matemáticas, así como también las posibles formas en las que los estudiantes puedan solucionar una tarea del tema, y las dificultades y errores que se pueden presentar en su solución.

I. Expectativas de aprendizaje

1. Objetivos de aprendizaje

Con base en los documentos curriculares, hemos enunciado los siguientes objetivos específicos que favorecen al dominio del vocabulario matemático, la justificación de procedimientos y la resolución de problemas en situaciones contextualizadas.

Objetivo 1: Favorecer la comprensión del concepto de Número Racional mediante los diferentes significados de la fracción.

Objetivo 2: Generar situaciones significativas que les permita formular, plantear, transformar y solucionar problemas del cómo, cuándo y porqué del uso de conceptos, procedimientos y razonamientos de los Números Racionales.

Objetivo 3: Resolver operaciones con Números Racionales en contextos cotidianos a nivel teórico y/o práctico.

2. Capacidades:

Para nuestro tema, el análisis cognitivo lo identificamos mediante una serie de capacidades que esperamos que los estudiantes agilicen y desarrollen en la ejecución de las tareas propuestas. Las capacidades están relacionadas con los organizadores del currículo que se han trabajado previamente. Hemos denotado las capacidades con la letra “C” acompañada de un número. En la tabla 4.1 presentamos las capacidades previstas.

Tabla 2.1. Capacidades previstas

Capacidad	Descripción
C1	Resolver operaciones básicas entre Números Racionales.
C2	Desarrollar la comprensión de los Números Racionales
C3	Reconocer fracciones equivalentes.
C4	Simplificar fracciones hasta obtener una fracción irreducible.
C5	Reducir fracciones a común denominador.
C6	Expresar una fracción en forma decimal.
C7	Utilizar el concepto de Racional.
C8	Usar los Números Racionales en diferentes contextos.
C9	Resuelve problemas de conteo, utilizando los números.
C10	Justificar las relaciones de equivalencia y de orden entre las fracciones mediante la comparación de cantidades de magnitud.

C11	Justificar operaciones aritméticas utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
C12	Identificar las características del conjunto de los Números Racionales.
C13	Leer y escribir Números Racionales en notación fraccionaria y decimal.
C14	Comprender el enunciado del problema; Identificar estrategias requeridas para la solución del problema.
C15	Ejecutar el plan de solución al problema planteado.
C16	Examinar la solución obtenida al problema planteado.
C17	Formular situaciones problemáticas con datos reales referidas a Números Racionales.
C18	Reconocer los aportes que brinda el manejo adecuado de los números y operaciones matemáticas básicas en diferentes contextos.
C19	Realizar distintas representaciones de un Número Racional.
C20	Reconocer distintas gráficas para representar datos.
C21	Analizar la información que está representada en graficas estadísticas.
C22	Propiciar el uso de diferentes representaciones y sistemas de notación simbólica.
C23	Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, consultas, entrevistas).
C24	Resolver problemas usando modelos geométricos.
C25	Comprender los diferentes significados de las fracciones para el concepto de los Números Racionales.

Un análisis a fondo de las capacidades a desarrollar, se pueden de relacionar con la Estructura Conceptual (EC), los Sistemas de Representación (SR) o el Análisis Fenomenológico. Por ejemplo, C1 es una capacidad de tipo conceptual, ya que requiere de los conceptos de número natural, número entero (positivo y negativo) y número fraccionario para su identificación en diferentes situaciones dentro del análisis fenomenológico. La capacidad C25 es de tipo procedimental, ya que para

elaborar la operación se emplea un procedimiento algorítmico, el cual permite encontrar un resultado.

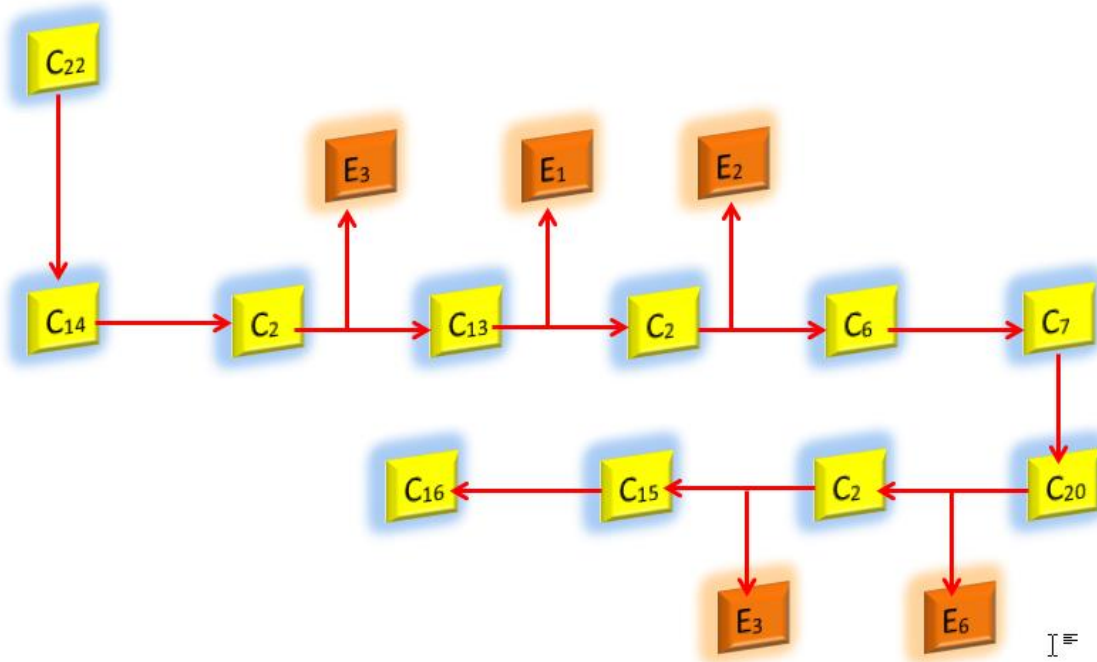
De manera general, podemos decir que al desarrollar las capacidades en la solución de una o varias tareas apoya al logro de los objetivos de aprendizaje previstos. Por ejemplo, las capacidades C2, C8 y C12 están asociadas al objetivo 1. Cuando estas capacidades se relacionan secuencialmente se forman lo que se denomina un camino de aprendizaje.

3. Caminos de aprendizaje:

Se construye a partir de la lógica con la que el profesor propone para resolver dicha tarea y a partir del conocimiento que él tiene sobre el aprendizaje de los estudiantes. Tomemos como ejemplo la Tarea 5 (T5): “Según el recibo del agua y alcantarillado de la ciudad de Palmira”; de la Unidad Didáctica, un camino de aprendizaje para esta tarea es $C22 \rightarrow C23 \rightarrow C14 \rightarrow C2 \rightarrow C16$. Que se puede describir de la siguiente forma: (C22): Propiciar el uso de diferentes representaciones y sistemas de notación simbólica; (C23): interpretar los datos provenientes del recibo; (C14): Comprender el problema enunciado e identificar la estrategia requerida para la solución del mismo; (C2): Incrementar la comprensión de los Números Racionales; y por último: Examinar la solución obtenida al problema planteado (C16).

Los posibles caminos de aprendizaje que identificamos se relacionan con los objetivos propuestos. Por ejemplo, para los logros de los objetivos 1, 2 y 3; teniendo en cuenta los cuatro pasos para la resolución de problemas propuestos por Pólya (1973): el estudiante en un primer paso (comprender el problema para el objetivo 1), puede activar ciertas capacidades (C25 y C7). Para el objetivo 2, puede activar las capacidades (C7 y C12); por último para el objetivo 3, puede activar las capacidades (C1 y C9). De esta forma, a partir de la conexión de capacidades, se puede identificar un posible camino de aprendizaje para cada tarea y este a su vez se relaciona con los objetivos propuestos, esto será tratado en detalle en el análisis de instrucción.

Figura 5.13. Forma Gráfica de los Caminos de aprendizaje



El camino de aprendizaje de la figura siguiente, corresponde a la Tarea 1 (T1), de la Unidad Didáctica, informa al profesor una secuencia ideal de capacidades que los estudiantes podrían tener poner en juego al abordar la tarea.

II. Limitaciones en el aprendizaje

A continuación presentamos de manera general algunas de las limitaciones relacionadas con los Números Racionales. Con respecto a las dificultades se encuentran: dificultad en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas, dificultad del uso de la recta numérica para la adición de los Números Racionales, o dificultad para sumar cuando involucran números decimales.

i) Dificultades y errores relacionados con la comprensión del significado y uso de los Números Racionales

En el grado séptimo (7º) una primera dificultad en el estudio de nuestro tema consiste en que los estudiantes no pueden atribuir un significado correcto a la noción de Número Racional. Otra dificultad, es la notación de los números enteros que aparecen en la escritura de una fracción, ya que se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, que hasta este momento sólo conocen los números naturales.

a) Desarrollo de los Números Racionales como parte de un todo:

Las primeras ideas de los números racionales, viene dada por el concepto de fracción. En algunos casos los estudiantes realizan tareas consistentes en fraccionar objetos antes de las edades esperadas o son capaces de comprender la idea de mitad, tercio y sexto aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales. Hay unos criterios para comprender la relación parte-todo:

1. Considerar que una región entera se puede dividir en partes.
2. Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes.
3. El número de partes pueden o ser igual al número de cortes; por ejemplo con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta.
4. Todas las partes son iguales.
5. Cada parte en sí misma se puede considerar como un “todo”.

Siendo bastante frecuente que los alumnos se encuentren con dificultades en la comprensión de estos conceptos. Ahora, la fracción como parte en un conjunto discreto de objetos: Algunos experimentos sugieren que para los estudiantes es más difícil comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos. Puede ocurrir que no tomen el conjunto completo como el entero y caracterizan cada parte asociando a numerador y denominador. Por ejemplo, si se les presenta a los estudiantes 3 fichas negras y 6 blancas y se les pregunta: “¿Qué parte de estas fichas son negras?”, algunos niños responden: “3/6”

b) Representación de las fracciones como puntos en una recta numérica:

El modelo de recta numérica de los Números Racionales, con fracciones ocasiona dificultades a los estudiantes que no siempre son capaces de pasar de la representación de áreas a la recta o viceversa. El modelo de recta numérica resulta más difícil que los anteriores. En la representación lineal se enfatiza la idea de que una fracción, por ejemplo $\frac{4}{5}$ es esencialmente un número, de idéntica naturaleza que los números 0 y 1, pero comprendido entre ambos. A diferencia de las dos representaciones anteriores no se incorpora la idea de relación parte-todo.

La fracción como división indicada de dos números enteros: Al calcular porcentajes o transformar una fracción en decimales es necesario dividir dos enteros. Hay ocasiones en que los niños no comprendan que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales. (Por ejemplo, pueden presentar dificultades cuando se les pide que repartan tres chocalatinas entre cinco niños).

ii) Dificultades y errores relacionados con la estructura aditiva de los Números Racionales:

A la hora de sumar o restar, Números Racionales, aplican los operadores sobre los numeradores entre sí y los denominadores entre sí porque generalizan las propiedades de la adición de números naturales en el campo de los Números Racionales. Por ejemplo, pueden pensar que $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{6}{8}$ o que $4 - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$.

Olvidar o modificar algún paso del algoritmo: aditivo, comparativo o equivalencia: Comparando fracciones, una fracción como $\frac{1}{2}$ se considera menor que la fracción $\frac{1}{3}$, argumentando que $2 < 3$.

En el caso de equivalencia de fracciones, se puede presentar una situación en la que la fracción sea considerada como un par de números naturales que no están relacionados entre sí.

$$\frac{3}{5} = \frac{7}{9} = \frac{11}{13}$$

La respuesta está basada en el reconocimiento de un modelo aditivo en los numeradores (sumar 4) que se traslada a los denominadores.

Un entero se confunde con su inverso: $\frac{1}{3}$ se confunde con $\frac{3}{1}$, o bien, $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{1}$, se consideran como dos escrituras equivalentes.

Aplicar la simplificación del producto a la suma de fracciones: $\frac{3+6}{3+8} = \frac{6}{8}$

ii) Dificultades y errores relacionados con la estructura multiplicativa de los Números Racionales:

1. Sobre el conocimiento de los números naturales

La influencia que el conocimiento de los números naturales ejerce en el proceso de aprendizaje de las fracciones se manifiesta en muchos aspectos: Entender que el producto de un número entero por una fracción propia disminuye y que la división de un número entero por una fracción propia aumenta. Igualmente, es difícil para el estudiante entender que el producto de dos fracciones puede ser menor que cualquiera de ellas, al contrario de lo que sucede en los números naturales. Como lo que él tiene asimilado son los algoritmos con esos números a menudo trata de forzar los algoritmos con fracciones de manera que el resultado se ajuste a lo que le dicta su intuición.

2. Olvidar o modificar algún paso del algoritmo de la división o de la multiplicación:

Para multiplicar entre sí dos fracciones, reducen a un común denominador y después multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. Se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación. La mitad de la fracción $\frac{1}{6}$ se designa frecuentemente por la fracción $\frac{1}{3}$ (que es en realidad el doble de $\frac{1}{6}$), argumentando que la mitad de 6 es 3.

No respetar la jerarquía de operaciones: Van realizando las operaciones según está escrita y no respetan el orden en la prioridad de algoritmos. Una vez realizado el

análisis didáctico de las fracciones, y teniendo en cuenta la información proporcionada por el mismo, se está en disposición de poder realizar la descripción de la unidad didáctica como tal.

iv) Dificultades, errores relacionados con los focos de contenido del tema de los Números Racionales

Partiendo del enunciado de objetivos de aprendizaje y de las competencias consideradas anteriormente, consideramos ocho dificultades, organizados con algunos de los focos de contenido que hemos mencionado antes. Para cada uno de esas dificultades, ejemplificamos algunos posibles errores en los que pudieran incurrir los estudiantes.

Tabla 5.2. Dificultades y errores

Dificultades	Enunciado	Errores	Enunciado
D1	Dificultad para escribir Números Racionales en notación fraccionaria y decimal	E1	Expresar un decimal en forma de un Número Racional
D2	Dificultad en la utilización de los diferentes significados de los Números Racionales en sus expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver en contextos diferentes.	E2	Confunde la fracción como operador
		E3	Confunde la fracción como razón
		E4	Cambiar el orden del numerador y del denominador al resolver un ejercicio
D3	Dificultad para encontrar un Número Racional según su	E5	No escribe la fracción representada

	presentación		
D4	Dificultad para analizar la información que está representada en las graficas estadísticas	E6	No sigue los pasos correspondientes solo se limitan a observar la grafica sin resolver operaciones
D5	Dificultad para encontrar el Número Racional irreducible	E7	No simplifica hasta obtener su mínima expresión
D6	Dificultad para comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes	E8	Errores en la lectura
D7	Predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa	E9	Resuelve problemas multiplicativos con operaciones aditivas
D8	Dificultades en los procesos de estimación y cálculo mental	E10	Aplicar criterios inadecuados para obtener el resultado

5.2.4. Análisis de Instrucción (AI) primera parte

Este análisis permite diseñar, analizar y seleccionar las tareas que son objeto de la instrucción. En este sentido, presentamos a continuación los elementos que componen las tareas, los recursos y materiales seleccionados y la descripción de las tareas.

I. Elementos y condiciones de aplicación de las tareas

En el diseño, análisis y selección de tareas, tuvimos en cuenta diferentes criterios como la comunicación, la interacción, el agrupamiento, el tiempo y la complejidad. La comunicación en la clase puede ser alumna-alumna o alumna-profesor; para lo cual

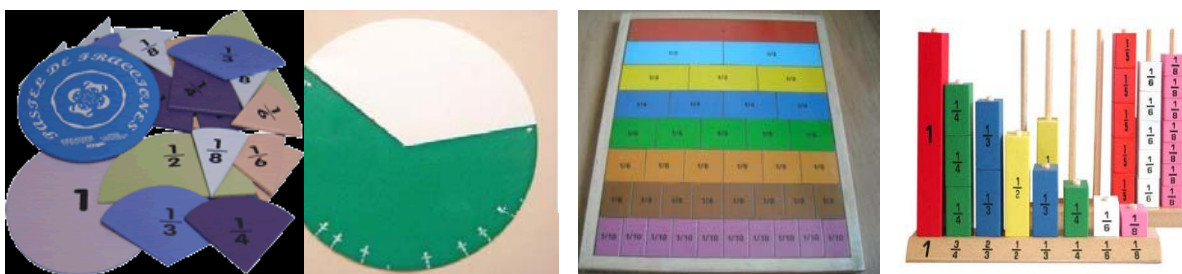
se deben iniciar los mecanismos adecuados para favorecerla. La forma de agrupar a las alumnas para resolver la tarea puede ser en gran grupo, en pequeños grupos, en parejas o de manera individual; para esto se planificó de acuerdo con las características y finalidad de cada tarea. El propósito de la forma individual consiste en que cada estudiante pueda desarrollar sus propias capacidades y razonar sobre los procedimientos a seguir al resolver las tareas. Otros criterios que se tuvieron en cuenta fueron los siguientes: a) el tiempo de dedicado a la tarea y la forma de organizarlo; b) la complejidad de la tarea; y c) el papel del profesor y del estudiante.

II. Recursos, materiales didácticos para el diseño y análisis de las tareas

El AI (primera parte) nos permitió seleccionar los materiales y recursos que hicieron parte de las tareas. Estos materiales y recursos elegidos se caracterizan por tener cualidades y funciones diferentes. Describimos algunos recursos que ayudan en la suma de los fraccionarios:

Materiales manipulativos: Aquí se pueden encontrar el pastel de fracciones, el círculo de fracciones, el diagrama de Freudenthal, escala de fracciones.

Figura 5.14. Materiales y Recursos



Juegos: Entre los distintos juegos que existen con fracciones se pueden destacar: El uso de hojas de papel de acetato en los que aparecen diversos cuadrados o

rectángulos divididos en partes iguales, los cuales permiten operar con Números Racionales.

Nuevas tecnologías: Las fracciones también han llegado a las nuevas tecnologías, permitiendo que los estudiantes las manipulen pasando de unas formas de representación a otras mediante el uso de programas informáticos, calculadoras, applets, etc.

III. Descripción de las tareas

Para desarrollar este punto, describimos brevemente las cinco tareas que componen la unidad didáctica. En particular, para cada tarea, atendemos a la meta que persigue, la interacción, el agrupamiento, los recursos utilizados y el objetivo al que contribuye. Además, buscamos que cada tarea tenga un enfoque de algo cotidiano.

Tarea 1. Adolescentes embarazadas.

Primera parte. Obra de teatro.

Segunda parte. Desarrollo de la tarea, la cual está relacionada con datos estadísticos sobre la prevención de los embarazos en las adolescentes. Se tomó un pequeño informe del periódico el País, sobre estadísticas de embarazos en adolescentes. Los puntos a desarrollar tienen estos aspectos:

1. Representación numérica de los datos.
2. Establecer relaciones entre número racional y decimal.
3. Establecer equivalencias de porcentajes y los números racionales.

Esta tarea contribuye de manera directa el desarrollo de los Objetivos 1 y 2. Su meta consiste en que el estudiante realice y establezca relaciones del sistema de representación verbal al sistema de los números racionales. En la primera parte el profesor observa la obra de teatro. En esta obra se desarrollan en dos Grupos. En la segunda parte el profesor presenta a los estudiantes de forma individual la copia de la tarea.

Tarea 2. La autoestima.

De acuerdo a una breve lectura sobre el tema de la autoestima y su influencia en el éxito personal, se busca desarrollar los siguientes aspectos:

1. Establecer números racionales a partir la tabla según la lectura.
2. Realizar la adición de números racionales.
3. Identificar los números racionales, que corresponden a diferentes gráficas.

Esta tarea contribuye de manera directa el desarrollo de los Objetivos, 1, 2 y 3. Su meta radica en escribir expresiones en el sistema de los números racionales, según gráficas, además de ejercitar la adición de los números racionales. El profesor entrega una copia de la tarea y les pide resolverla de manera individual. Se resalta la importancia del lenguaje simbólico para expresar cantidades, establecer relaciones entre datos del enunciado.

Tarea 3. Crisis económica en EE.UU y España.

De acuerdo a una breve lectura sobre el tema de la crisis económica en EEUU y España, tomado de un periódico, se busca desarrollar los siguientes aspectos:

1. Interpretar y establecer los números racionales, desde la razón.
2. Interpretación de números racionales a través de los porcentajes.
3. Buscar un número racional irreducible.

Esta tarea contribuye directamente al Objetivo 1. Su meta consiste en mediante la comprensión de lectura, encontrar los números racionales dentro de un tema de la economía mundial. El profesor hace una breve intervención, explica la actividad, luego entrega el material, organiza, dirige y orienta. El recurso utilizado es el periódico.

Tarea 4. La violencia en Palmira.

De acuerdo a información extraída del organismo adscrito a la fundación Progresamos de la Cámara de Comercio, se busca desarrollar los siguientes aspectos:

1. Interpretación de los porcentajes en el sistema de números racionales.

2. Desarrollar habilidades aritméticas.

Esta tarea contribuye directamente a los Objetivos 1 y 2. Su meta consiste en mediante la comprensión de lectura, encontrar los números racionales dentro del análisis de un informe estadístico. El profesor orienta la actividad. La tarea se realiza en dos personas.

Tarea 5. Recibo de acueducto.

De acuerdo a información extraída de un recibo de acueducto y alcantarillado de Palmira, de donde se busca desarrollar los siguientes aspectos:

1. Interpretación del sistema de representación gráfico, con los números racionales.
2. Desarrollar habilidades aritméticas.

Esta tarea contribuye directamente al Objetivo 1. Su meta consiste en mediante la comprensión de lectura, encontrar los números racionales dentro del análisis de un recibo de acueducto. El profesor orienta la actividad. Recurso recibo de acueducto y alcantarillado.

IV. Características de las tareas

Clasificamos las cinco tareas en ejercicios de interpretación de contextos reales. Identificamos un camino de aprendizaje para cada tarea, como nuestra previsión de cómo las estudiantes podrían abordarla.

Tarea 1. Adolescentes embarazadas: C22 – C14 – C2 – C13 – C2 – C6 – C7 – C20 – C2 – C21 – C18--C12.

Tarea 2. La autoestima: C22 – C3– C14 – C13 – C1– C12-C24- C20- C11- C14- C15- C21.

Tarea 3. Crisis económica en EE.UU y España: C22 – C13– C3 – C2- C4- C13- C8- C12-C4- C15- C21- C18- C12.

Tarea 4. La violencia en Palmira: C22 – C13– C2 – C1 – C24– C6- C8- 12- C14- C15- C21-C18- C12.

Tarea 5. Recibo de acueducto: C22 – C23 – C14 – C2 – C16

Dichos caminos de aprendizaje manifiestan las relaciones entre las tareas diseñadas y el análisis de contenido. Además establecen las contribuciones a las expectativas de aprendizaje (objetivos, capacidades y competencias) del análisis cognitivo y afrontan las limitaciones de aprendizaje (errores y dificultades). Igualmente la secuencia de estos caminos de aprendizaje es coherente con la planificación y los objetivos.

Por otra parte, los caminos de aprendizaje previstos para esas tareas nos proporcionan tanto, información acerca de la acción de cada capacidad, así como nos establece su contribución al desarrollo de las competencias descritas en el análisis cognitivo. Las cuales se ven justificadas porque intervienen algunas competencias como argumentar, pensar, razonar, comunicar, modelizar representar. Finalmente, para la selección de las tareas se tuvieron en cuenta la resolución de problemas y sus niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión.

5.2.5. Análisis de Instrucción (AI) segunda parte

En este apartado, presentamos los procedimientos orientados a evaluar a los estudiantes durante la implementación, las posibles ayudas que les facilitarán y los procedimientos encaminados a valorar la puesta en práctica de la UD. Diseñamos instrumentos que permiten la recolección de datos de manera permanente e informal. Estos instrumentos sirven para registrar cambios en el aprendizaje y la enseñanza que realizan durante la implementación de la UD.

I. Ayudas y preguntas específicas

Las ayudas son previsiones planificadas de cómo actuaría el profesor cuando surgen errores y dificultades durante el desarrollo de las tareas. Proyectamos 7 grupos generales de ayudas:

- Preguntas.
- Situación, ejemplo, contraejemplo.
- Revisión de datos.
- Explicación individual, ejercicios extra-clase.
- Socialización grupal.
- Recordar y relacionar con tarea anterior.
- Señales o pistas.

Establecimos la relación de objetivos, las tareas, las capacidades, las dificultades con sus posibles errores y ejemplos de las ayudas de acuerdo con su clasificación.

II. Instrumentos de recolección de información.

Diseñamos instrumentos genéricos como las parrillas de observación, el diario del estudiante y el diario del profesor. (Ver Anexos)

II. Instrumentos de evaluación.

Diseñamos instrumentos de evaluación específicos como la prueba diagnóstica, rúbricas para tareas especiales de la secuencia y el examen final. (Ver Anexos)

CAPÍTULO 6

DESARROLLO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN GRADO SÉPTIMO

Diseñar una UD para trasladar a la práctica, es decir, decidir qué se va a enseñar y cómo, es una de las actividades más significativas que llevan a cabo los profesores, ya que a través de ella se concretan sus ideas e intenciones educativas; las orientaciones curriculares, eran años atrás planificadas por las entidades oficiales, las cuales eran las encargadas de establecerlo que se había de enseñar y como, y donde el profesorado sólo se limitaba a emplearlas en su aula. En varios países, los Ministerios de Educación eran los autorizados de establecer el programa de enseñanza.

Desde las nuevas perspectivas sobre la enseñanza según las cuales son los propios estudiantes quienes construyen su conocimiento, la función del profesorado consiste en promover este proceso constructivo, que será diferente para cada estudiante, de este modo, un buen diseño didáctico será aquel que mejor se ajuste a las necesidades diversas que puedan presentar los estudiantes.

Asimismo, cada docente tiene estilos y cualidades diferentes por lo que, a pesar de la rigidez de muchos programas, sería difícil encontrar dos clases iguales. Aun así, en líneas generales, no se ha formado a los docentes para tomar decisiones relacionadas con el diseño de Unidades Didácticas, por lo que su actuación suele ser el resultado de la concreción de intuiciones y de rutinas más que de conocimientos teóricos y prácticos aplicados conscientemente.

En este capítulo presentamos el apartado de la Unidad Didáctica sobre los Números Racionales, aplicada al grado séptimo (7°) de la Institución Educativa San Vicente, del Municipio de Palmira. (En el Anexo de la UD se puede ver completa)

6.1. DESCRIPCIÓN DE LOS CONTENIDOS DE LA UD

Según lo mencionado en los capítulos tenemos:

a) Datos informativos: Se desarrollará en la Institución Educativa San Vicente, para el grado séptimo (7°), de educación secundaria. Dentro del año lectivo 2011-2012, la aplicación de la U.D. será entre los meses de Mayo-Junio.

b) Título: Unidad Didáctica sobre los Números Racionales

c) Tiempo estimado: 5 semanas, tiene una duración de 2 secciones semanales bloques de 2 horas (120 minutos).

d) Objetivos Didácticos: 1) Incrementar la comprensión de los números racionales usando los diferentes significados de la fracción; 2) Fortalecer las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionarias y decimal; 3) Resolver operaciones básicas con números racionales en contextos cotidianos a nivel teórico y/o práctico.

e) Destrezas: Desarrollo de las competencias básicas: 1) Propiciar en el estudiante el uso de las diferentes representaciones y sistemas de notación simbólico, como también trabajar con los distintos significados de la fracción, plantear y resolver problemas cotidianos, y matemáticos; 2) Proponer situaciones que les permita hacer uso del pensamiento matemático como herramienta para resolver problemas de tipo social favoreciendo la formación ciudadana.

f) Contenidos

◆ Conceptuales

1. Definición de los Números Racionales.
2. Interpretación de una fracción: partes todo, operador, cociente, medida y razón.

3. Orden en los números racionales.
4. Fracciones equivalentes. Simplificación y amplificación de fracciones.
Fracción irreducible. Número Racional.
5. Representación gráfica de Números Racionales.
6. Operaciones con racionales: Suma, resta, multiplicación división.
7. Operaciones combinadas.
8. Expresión decimal de Números Racionales.
9. Expresión racional de números decimales.

◆ **Procedimentales**

1. Aplicar las diferentes interpretaciones de una fracción para resolver situaciones susceptibles de ser expresadas con fracciones.
2. Reconocer y obtener fracciones equivalentes a una dada, amplificando o simplificando y obtener la fracción irreducible y el Número Racional que determinan.
3. Reducir fracciones a común denominador para compararlas y ordenarlas.
4. Utilizar la jerarquía de operaciones para efectuar operaciones combinadas con Números Racionales.
5. Expresar una fracción en cualquier forma decimal.
6. Distinguir los distintos tipos de números decimales (decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos) y expresarlos en forma fraccionaria.
7. Utilizar el vocabulario y la nomenclatura adecuados para describir y cuantificar situaciones relacionadas con los Números Racionales.
8. Resolver problemas de la vida cotidiana a partir del planteamiento y resolución de situaciones relacionados con los Números Racionales.

◆ **Actitudinales**

1. Valoración positiva de la presencia y utilidad de los Números Racionales en distintos contextos de la vida cotidiana.

2. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a problemas numéricos.
3. Interés al realizar los cálculos para resolver operaciones y problemas.
4. Utilización adecuada del vocabulario y terminología propia de los Números Racionales.
5. Interés por conocer nuevos métodos para obtener de una forma más rápida y cómoda.
6. Reconocimiento y valoración crítica de la utilidad de los diferentes materiales técnicos como la calculadora.
7. Satisfacción y gusto por la presentación cuidadosa y ordenada de los trabajos.

g) Estrategias Metodológicas

♦ **Estrategias específicas de UD:** 1) Utilizar los diferentes significados o subconstructos: relación parte todo, razón, operador, medida, cociente; 2) Expresar fracciones en forma decimal, en fracción continua y recíprocamente; 3) Generar situaciones problémicas que den sentido a dichos estudiantes.

♦ **Metodología de la UD:** La metodología empleada en la UD favorecerá la conexión existente entre los conocimientos, así como las destrezas matemáticas, adquiridos en los años anteriores de formación y de los nuevos contenidos, insistiendo en el carácter constructivo de la Matemática. Asimismo se marcará la importancia y aplicación de la matemática en contextos cotidianos, haciéndola accesible y de mayor entendimiento por parte de los estudiantes en comparación con los libros de texto.

Centraremos la atención diaria en los estudiantes, intentando que sean ellos los principales actores de las sesiones, lo que nos llevará a una perspectiva constructivista del proceso de aprendizaje. Además, pretendemos que los estudiantes tengan una actitud crítica y que realicen tareas en el desarrollo de las clases, por lo que llevaremos a cabo una metodología activa y participativa.

Siguiendo el currículo oficial vigente, intentaremos enfatizar el enfoque funcional

de las Matemáticas caracterizado porque el conocimiento nos permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de cuestiones y problemas en diferentes contextos. Los Números Racionales deberán iniciarse con explicaciones y pruebas que persiguen un doble objetivo: evaluar los conocimientos previos y motivar a los estudiantes por el aprendizaje de nuevos contenidos. En este sentido se realizarán las siguientes actividades:

h) Recursos: Actualmente contamos con numerosos recursos y herramientas manipulativas que nos ayudan a diseñar tareas matemáticas que ponen en juego capacidades de los estudiantes que de otro modo sería complicado lograrlo (Lupiáñez, 2009). En el desarrollo de nuestra U.D., vamos a utilizar como recursos: los diferentes medios de comunicación (internet, periódico, revistas), materiales didácticos como el tangram.

i) Evaluación: Planteamos la evaluación a través de diferentes instrumentos que nos permiten observar de manera general o específica los avances en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. De esta forma para evaluar la secuencia de la U.D., consideramos los instrumentos aplicados en diferentes momentos, entre ellos los instrumentos de evaluación como la prueba diagnóstica, el examen final, las diferentes tareas propuestas y talleres, entre los instrumentos de recolección de datos tenemos el diario del alumno de acuerdo con las actividades propuestas. El diario del profesor, las parrillas de observación de acuerdo a las capacidades y dificultades de las alumnas y por último la lista de control para evaluar la unidad didáctica la cual cuenta con unos elementos a valorar como son: objetivos, contenidos, metodología, temporización, actividades, evaluación y recursos.

6.2. DESCRIPCIÓN DE LAS SECCIONES PROPUESTAS

La secuencia quedó construida en ocho sesiones, cada una de 120 minutos de duración, previstas entre 20 de mayo y el 29 de junio de 2012. Para cada sesión, asignamos una tarea. Presentamos a continuación la descripción general de cada una de estas sesiones.

Bloque 1: Realización de la prueba diagnóstica. Al dar inicio a esta sesión, el profesor informó la importancia que tiene esta prueba. La prueba se realizará con preguntas que están asociadas al concepto de los Números Racionales. La prueba se planifico para una duración de 60 minutos.

Sesión 0: Se planifico 2 momentos. Primero se programo 60 minutos para la presentación de la Unidad Didáctica sobre los Números Racionales, los objetivos y el sistema de evaluación. En el segundo momento se desarrolla la clase se hace entrega la prueba diagnóstica calificada; y el diario del alumno para que los estudiantes lo v utilicen en cada sesión, tiempo estipulado 60 minutos.

Sesión 1: Se planifico 4 momentos. En primer lugar, la presentación del tema a tratar, con una duración de 50 minutos. En segundo lugar, se da paso a la presentación de una obra de teatro en torno al problema de las jóvenes estudiantes en embarazo, con duración de 15 minutos. En tercero lugar, se entregará la Tarea No.1, la cual se desarrollará en 45 minutos. El cuarto momento para desarrollar el diario de la clase, 10 minutos.

Sesión 2: Planificamos 4 momentos. En el primero de ellos, con una duración de 20 minutos, se entregará la Tarea no.1 revisada y se hacen las aclaraciones pertinentes del la rectificación de la tarea anterior. El segundo momento se pasara a abordar la explicación del tema pertinente a esta sesión, con duración de 50 minutos. El tercer momento se entregará la Tarea No. 2 la cual se refiere a la autoestima, para resolverla en 40 minutos. El cuarto momento, en un tiempo de 10 minutos, se desarrollará el diario de clase.

Sesión 3: Planificamos 4 momentos. En el primer momento se entregará la Tarea No.2 revisada de la sesión anterior se hacen las respectivas rectificaciones de la tarea esto se hace aproximadamente en 20 minutos. El segundo momento se

abordará la explicación de los temas de esta sesión, con una duración de 40 minutos. El tercer momento, con duración de aproximadamente 30 minutos, se dedicará a trabar en parejas la solución de la tarea No. 3 que se refiere a la crisis de EE.UU Y España. El cuarto momento, se realizará un pequeño foro sobre la actividad realizada con duración de 20 minutos. El quinto momento es para desarrollar el diario de clase de las tareas realizadas duración de 10 minutos. Para la Tarea No.3 el profesor utilizó un periódico como recurso.

Sesión 4: Planificamos 6 momentos. En el primer momento, entrega de la Tarea No.3 revisada y se realizan las respectivas rectificaciones, con una duración de 20 minutos. El segundo momento desarrollo del tema, con una duración de 40 minutos. El tercer momento, con duración de 20 minutos realizan la introducción a la tarea en esta ocasión participan dos niñas, En un cuarto momento, se entrega la actividad No 4 que se trata de la violencia de Palmira, para trabajarla de dos personas con duración de 30 minutos. En el quinto momento en un tiempo de 10 minutos es para desarrollar el diario de clase de las tareas con el tiempo restante.

Sesión 5: Consideramos 4 momentos. El primero, para la entrega de las tareas de la sesión anterior revisadas se realizan las diferentes rectificaciones de la tarea con una duración de 20 minutos. El segundo momento, se dedica a desarrollar el tema con una duración de 45 minutos. En el tercer momento, se realizará un debate sobre el enunciado de la tarea, con una duración de 15 minutos. En un cuarto momento se entrega la tarea No 5 sobre el recibo de acueducto y alcantarillado de Palmira, la conforman dos personas en un tiempo de 30, se entregará el el diario de clase donde se darán 10 minutos.

Sesión 6: Consideramos 4 momentos; el primero entrega de la tarea 5 y se realiza la respectiva rectificación con un tiempo de 20 minutos; luego se procede a realizar un breve repaso de todo lo anterior esto con el fin de poder proseguir con la realización del examen final tiempo destinado 30 minutos, y en el tercer momento se

hace entrega de los respectivos exámenes que se les realizara en forma individual con una duración de 60 minutos y finalmente se entrega el diario de clase con duración de 10 minutos.

Sesión 7: Consideramos tres momentos; primero se hace entrega del examen final y se realizan las diferentes rectificaciones tiempo 20 minutos; luego en el segundo momento se deja talleres de refuerzo para realizarlos en la misma clase para aclarar cualquier duda duración 90 minutos en grupos de cuatro personas; después en el último momento se procede con el diario de clase que tiene una duración de 10 minutos.

Sesión 8: Consideremos tres momentos; el primero se socializan todos los comentarios resultantes del diario de los estudiantes para estas secciones y se hace una reflexión final duración 60 minutos; luego se procede a realizar la coevaluación y la autoevaluación duración 40 minutos. Luego se explican las acciones a seguir por parte del profesor para aquellas estudiantes en cuyo caso obtengan como valoración final un bajo desempeño. Duración 20 minutos.

CAPÍTULO 7

REFLEXIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

En este último capítulo se presentan las reflexiones finales del Proyecto a modo de conclusiones y recomendaciones para trabajos posteriores relacionados con el desarrollo curricular y la formación continuada de profesores de matemáticas.

7.1. CONCLUSIONES GENERALES

En términos generales pueden plantearse las siguientes conclusiones inferidas al final de todo el proceso de desarrollo de este trabajo, que articula la Sistematización de prácticas docentes de un profesor de matemáticas en ejercicio de educación básica secundaria (de grado séptimo en torno al contenido concreto de los números racionales) con el proceso formal de Sistematización de Experiencias de formación posgraduada en el programa académico de Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática, Modalidad Profundización, que ofrece el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle¹¹.

Nuestra visión de la formación profesional del docente atiende a sus intereses y se enmarca en las prioridades de la investigación actual en Educación Matemática. De acuerdo con esto, por una parte, en este trabajo nos interesamos por revisar y determinar las competencias profesionales (conocimientos, habilidades, saberes, actitudes, etc.) como concreción de la formación profesional que debe desarrollar un

¹¹ El cual tiene como requisito de grado, la realización de un Proyecto de Sistematización de Experiencias del docente.

profesor de matemáticas para el desempeño de su labor docente. Por otra parte, la **competencia de planificación**, se reconoce como una de las competencias básicas de los profesores (Lupiáñez, 2009), y es en este sentido que se han abordado y desarrollado las bases teóricas (conceptuales y metodológicas) de las nociones centrales del tema sobre la formación profesional docente, a saber: la noción de currículo, la propuesta de los organizadores del currículo y el proceso de análisis didáctico (AD). De esta forma, desde esta perspectiva teórica, se propone que esta formación (y por ende dichas competencias) se intenten articular o coordinar sistémicamente en estos dos tipos de **experiencias formativas** (formación permanente y posgraduada) que necesariamente tienen que ser complementarias, aun a pesar de las tensiones dialécticas o diferencias aparentes que se suelen presentar en estos tipos de procesos.

Recordemos que los ejes (problemáticos o categorías) del Proyecto de Sistematización que enmarcaron los propósitos y desarrollos fueron los siguientes:

- Formación docente
- Competencia (de planificación)
- Conocimiento didáctico (CD) y análisis didáctico (AD)
- Unidad didáctica (UD).

Estos “ejes” se trabajaron en torno a un Contenido Matemático Curricular (CMC) específico –la estructura o sistema conceptual de los números racionales– y un contexto curricular e institucional determinado: Grado séptimo (7°) de la Institución Educativa San Vicente de la ciudad de Palmira.

Teniendo en cuenta todo esto, las reflexiones finales que a modo de conclusiones generales se presentan están organizadas en relación con las cuatro categorías de trabajo siguientes:

- (a) Formación profesional del profesor de matemáticas (FPM) y su desarrollo profesional;
- (b) Competencias de planificación;

- (c) Conocimiento didáctico de contenido (CDC), análisis didáctico (AD) y diseño de la unidad didáctica (UD);
- (d) Diseño y desarrollo metodológico del proceso de sistematización.

(a) Sobre la Formación profesional del profesor de matemáticas (FPM) y su desarrollo profesional: La experiencia de reflexionar de manera sistémica y articulada sobre la práctica como docente en ejercicio y sobre los conocimientos profesionales del profesor de matemáticas, tal como lo propone la línea de formación “Didáctica de las Matemáticas y Formación de Profesores” de la Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática de la Universidad del Valle, la cual toma como marco de referencia conceptual y metodológica los trabajos y desarrollos del Grupo PNA (de España, Colombia y otros países), así como los aportes complementarios teóricos y prácticos de las otras líneas que sostienen la Maestría, han permitido poner de manifiesto la gran complejidad y el carácter sistémico y especializado de la formación profesional que requiere un profesor de matemáticas para realizar de manera eficaz y eficiente su actividad profesional. Esta es la manera como se debe entender la actividad profesional docente con calidad y competente, toda vez que ésta está basada en fundamentos metodológicos y conceptuales científicos desarrollados de manera disciplinar en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

Se considera a partir de esta Sistematización de Experiencias formativas, concretadas en éste trabajo, que toda propuesta que planifique y desarrolle un plan de formación (inicial o continuada) de profesores de matemáticas debe contemplar la articulación mediante procesos de reflexión permanente, aspectos conceptuales o teóricos y prácticos (procedimentales) referidos a los siguientes tipos de contenidos: al contenido matemático escolar o educativo (CME); al conocimiento didáctico del contenido (CDC) provisto por la Didáctica de las Matemáticas; al currículo de la disciplina en sus distintos contextos de concreción –Nacional (MEN), institucional (Proyecto Curricular del Área) y de aula–; a los procesos psicológico-cognitivos y

actitudinales de estudiantes y profesores en relación con los CME; y a los procesos y modelos instruccionales y de evaluación correspondientes.

Precisamente, estas fueron las directrices generales que se siguieron en el plan de formación y de dirección en que consistió éste Proyecto de Maestría, el cual se diseñó consultando propuestas y autores de la línea Didáctica de las Matemáticas y Formación de Profesores de Matemáticas del Grupo PNA, cuya finalidad principal es precisamente el desarrollo de esta formación y de competencias profesionales por parte de los profesores, y en particular de la competencia de planificación que relacionan directamente con el diseño de unidades didácticas en torno a un tópico matemático escolar determinado (Lupiáñez, 2009). (Ver los capítulos 2 y 3).

(b) Sobre la competencia profesional de planificación de los profesores de matemáticas: En este trabajo se ha asumido que la formación docente basada en competencias constituye una estrategia para ofrecer respuestas a una realidad educativa en continua transformación y frecuentes situaciones de crisis, que obviamente tienen que afrontar y vivenciar los profesores en las aulas e instituciones educativas. Compartimos las posturas de numerosos autores en el sentido que la mejora de la calidad educativa depende en gran medida del nivel de competencia profesional de los profesores, la cual está directa y estrechamente relacionada con su formación, de ahí que resulte de tanta importancia la necesidad de revisar, rediseñar y mejorar permanentemente los planes de formación tanto inicial como continuada de los docentes (Lupiáñez, 2009; Rico, *et al*, 2008; Gómez, *et al*, 2008; Tejada, 2009; Argudín, 2005; Bedoya, 2002; 2004; 2012).

Estos y otros autores han puesto el estudio de las competencias profesionales de los profesores de matemáticas como tema de actualidad en los últimos años, al considerarlas expresión (representación) y concreción de la propia formación profesional de estos, y al relacionarlas con los conocimientos base de esta formación, con las actitudes, habilidades y saberes necesarios para la enseñanza de las matemáticas y gestión de las actividades instruccionales (Rico y Lupiáñez, 2008a).

Con todo este marco de referencia, la reflexión realizada durante el proceso de Sistematización permitió clasificar o considerar las siguientes categorías de competencias profesionales de los profesores de matemáticas: competencia de planificación, competencia de análisis didáctico; competencia de ejecución o gestión de la clase y de las actividades de instrucción y construcción de conocimientos; y competencia de evaluación.

Sin embargo, tal y como ya se ha mostrado, este trabajo se centró en las dos primeras y especialmente en la segunda, la **competencia** que hemos denominado **de análisis didáctico**, debido a que es fundamental y base para todas las demás y en particular para la primera, la **competencia de planificación**, que a su vez es naturalmente, base para cualquier competencia de las dos últimas categorías. En síntesis, desde nuestra perspectiva estas dos categorías o sistemas de competencias son fundamentales y están estrechamente relacionadas entre sí y con cualquier otra competencia profesional del profesor de matemáticas. Me atrevo a afirmar que estas dos categorías de competencias tienen carácter de genéricas entre las competencias profesionales del profesor de matemáticas debido a que son base y fundamentales para potenciar las demás competencias.

En efecto, se ha podido constatar, de acuerdo con Rico, Marín, Lupiáñez, Gómez (2008), y Tejada (2009), entre otros, que planificar la enseñanza de las matemáticas no es una “tarea trivial”, se trata de una competencia profesional importante que supone el dominio de diversos campos y el desarrollo de ciertas habilidades y capacidades para analizar, interpretar y organizar el conocimiento, la enseñanza y evaluación de las matemáticas escolares (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Así mismo, se pudo comprobar durante las fases de recuperación y de análisis de la Experiencia que la competencia de planificación exige desarrollar y utilizar diferentes conocimientos, habilidades o “capacidades” que permitan al profesor enfrentar nuevas exigencias (modelos) curriculares, metodológicas y didácticas relacionadas con la planificación de acciones, actividades, medios y materiales, que faciliten una comprensión adecuada de los procesos y resultados de enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. En particular, coincidimos con Tejada (2009) cuando

plantea que entre estas competencias se incluyen específicamente las siguientes: “capacidad para utilizar diversas estrategias de enseñanza; habilidad de comprender, identificar y aplicar teorías de aprendizaje en matemática; habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática; habilidad para seguir, desarrollar y exponer un razonamiento matemático; habilidad para exponer ideas matemáticas; y capacidad para utilizar formas actualizadas en evaluación.”

(c) Sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC), el análisis didáctico (AD) y el diseño e implementación de la unidad didáctica (UD): En la sección 3.2 de este trabajo se definió la competencia profesional como el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes y saberes de orden teórico, disciplinar, cognitivo, afectivo y práctico que los profesores necesitan para realizar de manera adecuada –efectiva y eficiente, es decir con calidad-, su labor docente y curricular y en general su desarrollo profesional. Coherentemente con esta concepción, y tal como se propuso anteriormente, todo plan de formación basada en competencias profesionales docentes debe contemplar el desarrollo de conocimientos base – conceptuales, procedimentales y actitudinales-, en relación con las siguientes dimensiones o categorías básicas: conocimientos del contenido disciplinar; conocimientos sobre el currículo; conocimientos didácticos en torno a dichos contenidos matemáticos; conocimientos sobre procesos cognitivos asociados a estos contenidos; y conocimientos sobre los procesos de instrucción y de evaluación. Precisamente, desde el marco teórico en que se sitúa este Proyecto, la Teoría de los Organizadores del Currículo desarrollada por el Grupo PNA, el **conocimiento didáctico del contenido (CDC)** y en general el **análisis didáctico (AD)** constituyen los conocimientos conceptuales (teóricos) y procedimentales (prácticos) básicos de la formación y por ende de las competencias profesionales docentes en general, y de las competencias de planificación en particular. En realidad, sin esta serie de conocimientos no habría sido posible realizar este trabajo que, como se ha dicho, ha sido concebido como un ejercicio y propuesta de formación docente continuada y de posgrado, de la autora del mismo.

En este marco y de forma más local y concreta, el sistema de conocimientos disciplinares (matemáticos), curriculares e instruccionales que se tuvieron que apropiarse y movilizar (aplicar) para la realización del **AD** en sus distintos y complementarios componentes, así como para la planificación y su concreción en el desarrollo de la **UD**, conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que vienen a constituir lo que hemos denominado el **CDC**, fueron entre otros los siguientes:

- La construcción del sistema o estructura conceptual asociada a los números racionales (escolares) que se trabajan en grado séptimo de educación secundaria (Véase Figura 5.3. Esquema Conceptual sobre el esquema de la estructura conceptual en la sección 5.2, p. 107).
- Estrechamente relacionado con la estructura conceptual están los resultados de los análisis referidos a las múltiples formas de representar y visualizar los números racionales así como sus relaciones y operaciones en el nivel de escolaridad que nos ocupa. (Véanse secciones 3.4 y 5.2).
- El tratamiento de las múltiples representaciones y visualizaciones de los números racionales no sólo es clave para su representación, visualización y comunicación, sino que también lo es para su comprensión y sentido, y por lo tanto para su didáctica, esto es, para su enseñanza, comprensión, aprendizaje y evaluación. Pero, para que estos resultados cognitivos sean significativos tanto para los alumnos como para el profesor o la profesora, es necesario que se trabajen de manera “realista” (en el sentido de la “Educación Matemática Realista”, propuesta inicialmente por Freudenthal (1983); y esto sólo es posible mediante la realización de procesos estrechamente relacionados de análisis fenomenológico y de modelización matemática. La organización y aplicación sistémica y fundamentada en los **CDC** y en los subsistemas de conocimientos del modelo local de los organizadores del currículo, se estructura y concreta en el **AD** y en su resultado concreto, la **UD**. (Véanse secciones 3.4. y 5.2). Tal y como lo dicen Rico, *et al* (2008) y Bedoya (2013), las conexiones o relaciones entre conceptos y procedimientos, concepciones y significados; representaciones, visualizaciones y modelizaciones, fenómenos,

problemas y aplicaciones en un mismo mapa o diagrama conceptual facilita la definición, selección y secuenciación de actividades y tareas que los profesores deben elaborar y estructurar en una **UD** para guiar y llevar a cabo los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación deseados. Estas relaciones y conexiones sólo es posible establecerlas mediante la realización del **AD**, a través del cual el docente puede apropiar, desarrollar y aplicar el **CDC**. (Véanse AD y UD en las secciones 3.4. y 5.2. y el anexo 1). En síntesis, la producción, implementación y evaluación de la **UD** para la enseñanza y aprendizaje de sistema (estructura) conceptual asociado al contenido de los números racionales del grado séptimo, como resultado de la apropiación, movilización y desarrollo del **CDC**, lo cual se logra y aplica a través de procesos de **AD**, vienen a constituir el resultado y expresión final de lo que consideramos consiste una formación profesional adecuada y por consiguiente del desarrollo de competencias profesionales de los profesores de matemáticas.

Por otro lado, en el diseño, análisis y selección de tareas, tuvimos en cuenta diferentes criterios como la comunicación, la interacción, el agrupamiento, el tiempo y la complejidad. Así, las actividades de la **UD** fueron planificadas de acuerdo a cómo actuaría el profesor cuando surgen errores y dificultades durante el desarrollo de dichas tareas.

De esta forma se puede afirmar también que a través de éste Proyecto de Sistematización, el AD, concebido como estrategia metodológica de investigación, de formación docente y de desarrollo curricular, ha mostrado su gran potencial, toda vez que ha permitido no sólo desarrollar los objetivos del Proyecto sino también contribuir a una reflexión curricular ampliada en la Institución Educativa donde labora la autora del trabajo y que ha sido el contexto institucional y curricular donde se ha realizado el mismo. En particular, los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción proporcionan un conocimiento más profundo acerca de los contenidos trabajados y de su proceso instruccional; así mismo permitieron identificar y reconocer los caminos de aprendizaje (véase sección 5.2), los obstáculos, los errores y dificultades que se les suelen presentar a los estudiantes y también a los profesores cuando se proponen aprender y enseñar, respectivamente, las distintas nociones, relaciones y

propiedades de los números racionales en grado séptimo de educación básica secundaria.

En conclusión, el CDC, el AD, la formación profesional y el desarrollo de la competencia de planificación se pueden considerar como una de las herramientas más versátiles y útiles a la hora de planificar una formación profesional de los profesores de matemáticas que a su vez se concreten en el desarrollo de propuestas y materiales curriculares (UD). De la misma manera, permiten a los profesores desarrollar actitudes favorables y proactivas hacia el permanente cambio y actualización en su formación, acorde con los cambios, retos y procesos a veces críticos de la educación en nuestra región y país.

(d) Sobre el diseño y desarrollo metodológico del Proyecto de Sistematización de Experiencias Curriculares y Didácticas: Tal como lo propone Bedoya (2013) la sistematización de las experiencias curriculares y/o didácticas de los profesores constituye una estrategia metodológica clave para la formación y el desarrollo profesional de los docentes, así como para el desarrollo de sus competencias profesionales y del currículo en sus distintos contextos de concreción, desde las propuestas curriculares oficiales e institucionales hasta su concreción en el aula. Ello supone una valoración importante de la enseñanza como profesión. Jara (1994) dice al respecto: “Sistematizar experiencias significa entonces entender porque este proceso se está desarrollando y se ha desarrollado de esa manera, entender e interpretar lo que está aconteciendo a partir de un ordenamiento y reconstrucción de lo que ha sucedido en dicho proceso”.

Empoderar al profesor, es decir formarlo en competencias profesionales, entendiéndolas como el dominio de un conjunto de saberes, capacidades, actitudes y habilidades para realizar con efectividad ciertas acciones y desempeñar funciones que pertenecen a un determinado campo profesional (Estebaranz, 2011).

El diseño metodológico del proceso de sistematización no sólo articula los subprocesos de sistematización de la práctica docente, y de formación profesional posgraduada; sino que además permitió desarrollar un proceso y propuesta de

integración teórica y práctica; la búsqueda y el desarrollo de conocimientos también teóricos y prácticos, bases de las competencias profesionales y de la formación profesional del profesor de matemáticas. Una sistematización se puede manejar como una herramienta de gestión para el cambio.

De esta forma, tal como se ha expuesto en (a), (b), (c) e incluso en (d), se consideran alcanzados los propósitos u objetivos del Proyecto, que en términos generales estuvieron orientados a planificar e intentar implementar una propuesta de formación docente y de rediseño y desarrollo curricular, articulando sistémica y sistemáticamente dos tipos de experiencias que han solido estar dissociadas, la práctica cotidiana del profesor y la formación continuada, en este caso de carácter formal a nivel de Maestría. Propuesta que ha sido diseñada, implementada, analizada y evaluada a través de éste Proyecto de Sistematización de Experiencias curriculares y didácticas, cuyo diseño metodológico se ha basado en aspectos de la investigación acción participativa, el estudio de casos y la investigación evaluativa. Como ejercicio de Sistematización, se ha orientado a la búsqueda de alternativas fundamentadas sobre la formación de los profesores de matemáticas y el desarrollo de las competencias profesionales, en particular, las competencias de planificación y de análisis didáctico. Todo este trabajo se ha concretado humanamente en el desarrollo personal de una formación posgraduada y el desarrollo de competencias profesionales de la autora y de otros miembros del equipo de trabajo (Grupo GIFPME-CEV, Código GrupLac COL0036156) de la Maestría y del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, dirigido por el Doctor Evelio Bedoya M.; así mismo se ha concretado objetivamente en la producción de propuestas curriculares y didácticas, lo cual constituye la cuarta fase de potenciación, producción y socialización del Proyecto de Sistematización. (Véase Figura 4.1. Diseño metodológico del proyecto, que muestran las fases del Proyecto de Sistematización en sección 4.1.)

7.2. RECOMENDACIONES

Las reflexiones presentadas anteriormente a modo de “conclusiones finales”, así como todo el ejercicio de reflexión con propósitos formativos y de desarrollo curricular y didáctico que, en términos generales, ha asentado este trabajo, nos lleva a proponer algunas recomendaciones que consideramos importantes a tener en cuenta, tanto en esta fase de potenciación del Proyecto de Sistematización, como en otras posibles y futuras experiencias basadas o relacionadas con esta.

Una primera recomendación se refiere a la importancia de tener muy en cuenta el carácter complejo, sistémico y costos de toda propuesta de formación continuada o inicial de profesores de matemáticas, por tanto y cuanto ésta, al ser concebida como un “proceso sistémico y estructurado” (Vasco, 2008), tiene repercusiones o implicaciones en otras dimensiones y aspectos subjetivos y objetivos del proceso, como son el desarrollo de competencias profesionales, el desarrollo profesional docente y el desarrollo curricular y didáctico en los contextos en que se realiza la propuesta. Esta concepción exige, de acuerdo con Vasco (2008) y Bedoya (2002, 2013), considerar modelos locales de organizadores del currículo y de análisis didáctico. De acuerdo con nuestra experiencia y los marcos de referencia conceptual y metodológica en que nos hemos basado, estos modelos deben tener además un carácter sistémico tetrádico (Bedoya, 2001), al considerar o incluir necesariamente los siguientes subsistemas como componentes: docentes, estudiantes, contenidos matemáticos escolares y medios y recursos de diferentes naturaleza –humanos, conceptuales, tecnológicos, bibliográficos, etc.- que hacen posible y de calidad el desarrollo de la propuesta. A su vez, esta misma reflexión lleva a otra recomendación de carácter personal, en el sentido que por la misma complejidad de un proyecto como éste, debe ser abordado preferiblemente en un equipo de profesores y asesores, que cuente además con el aval y respaldo institucional, lo cual resulta coherente con la concepción de currículo (como planificación sistémica de un plan local de formación, fundamentado conceptual y metodológicamente) que se ha manejado en éste trabajo.

En un sentido más concreto, y con cierto carácter prospectivo, se propone que todo plan de formación de profesores de matemáticas sea concebido a la vez como propuesta de desarrollo profesional (de competencias) y curricular, que se desarrolle de manera continuada o permanente, que tenga carácter sistémico, y que se realice mediante procesos de Sistematización de Experiencias curriculares y didácticas por parte de los propios docentes; para lo cual deben ser rigurosamente planificada y sometida a pruebas empíricas, si se quiere alcanzar los objetivos esperados y que contribuyan a reconocer y mejorar las situaciones problemáticas e incluso de crisis a que frecuentemente se ven sometidos los currículos de matemáticas, las instituciones y sistemas educativos matemáticos.

Conceptual y metodológicamente, estas propuestas deben estar basadas y fundamentadas en sistemas de conocimientos que se estructuran en modelos locales de organizadores del currículo y de análisis didáctico, los cuales se concretan en conocimientos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) sobre los contenidos matemáticos escolares (CME), sobre el currículo de matemáticas respectivo, conocimientos didácticos del contenido (CMC), así como conocimientos, habilidades, capacidades y saberes (competencias) para el desarrollo de los procesos de instrucción correspondientes. En particular se recomienda prestarle atención y hacer más explícita la dimensión actitudinal del conocimiento (Bedoya, 2002); aspecto poco atendido en los procesos curriculares y educativos, y que es clave, como plantea Sarabia (1992) para el desarrollo de tres componentes clave del proceso educativo: el componente cognitivo, el componente afectivo y el componente conductual, y que generalmente suelen formar parte de “currículos ocultos”.

Estas observaciones plantean la importancia de profundizar más en las relaciones sistémicas y funcionales entre las dimensiones del conocimiento y competencias profesionales del profesor de matemática y las componentes del conocimiento y del análisis didácticos, como estrategias de cualificación (formación) docente y desarrollo profesional y curricular, ya que sin duda, un docente competente profesionalmente tendrá el perfil que en estos tiempos y el futuro demandan las instituciones educativas y la sociedad.

En cierto sentido, de esta forma se estará contribuyendo a mejorar la calidad de la educación matemática en la institución, la región y el país, mediante el cumplimiento de la misión del profesor de matemáticas y del currículo, de desarrollar y “potenciar”, como lo propone el Ministerio de Educación Nacional en los “Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas” (MEN, 2006), el pensamiento y las competencias matemáticas de los estudiantes, de manera acorde con las demandas que la sociedad hace a la educación, a las instituciones educativas y por ende a los docentes.

Un profesor con estas características profesionales de formación y competencias, y con el respaldo y apoyo de los demás profesores y directivos tanto para el logro de las mismas como para su proyección y realización, no sólo podrá contribuir a crear y mejorar una cultura educativa de calidad en su institución, sino que también podrá ayudar a sus estudiantes a tener una mayor y mejor formación y competencias matemáticas, que a la vez mejoren sus posibilidades de aprovechamiento como estudiante y de desarrollo personal en los contextos local, nacional e incluso internacional, tal como lo están requiriendo los estudiantes mismos, sus familiares, la sociedad, así como nuestra región y el país, lo cual, sin lugar a duda, constituye uno de los principales propósitos educativos del currículo y de las instituciones educativas.

De todas maneras, a pesar de considerar que se ha cumplido con el compromiso de realizar este trabajo, el cual representa un propósito riguroso de formación posgraduada y de desarrollo profesional y curricular, por lo cual me siento satisfecha por el deber cumplido, así como agradecida con todas las personas que me apoyaron para tal efecto, soy consciente que en cierto sentido este no es el final sino un continuar con el propósito y proceso iniciados. El mismo trabajo me ha enseñado que el compromiso y misión de un educador es procurarse de manera permanente o continuada el desarrollo de una formación y competencias profesionales acordes con estos tiempos de permanentes cambios sociales, culturales, tecnológicos y científicos. Por esta razón, en lugar de un punto final, prefiero cerrar con esta

reflexión que nos propone el poeta español Antonio Machado (1875-1939) en su poema “Proverbios y Cantares”:

*Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.*

*Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.*

*Caminante no hay camino
sino estelas en la mar...*

¡¡Muchas gracias!!
Martha Janeth Corrales Castaño.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

8.1. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Arco, M. T., Ramírez, J. J., García, A. y Nogales, M. J. (2010). *Análisis fenomenológico de la simetría. Trabajo realizado para el Máster Universitario de profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas) de la Universidad de Granada*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.
- Argudín, Y. (2005). *Educación basada en competencias. Nociones y antecedentes*. Editorial. Trillas: México.
- Bedoya, E. (2002). *Formación Inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE- Horsori. p. 61-94
- Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.
- Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria*. Revista Iberoamericana de educación Matemática, 1, p.17-35.
- Font, V. y Godino. J.D. (2010). *Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en Coll (ed.), Matemáticas: Investigación innovación y buenas prácticas*. Graó, Barcelona, España. P.9-55.
- Font, V.; Rubio, N, Giménez, J. Y planas, N. (2009). *Competencias profesionales en el Máster de profesorado de secundaria*. UNO 51, p.9-18.

- Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- García, R. y Mayorga, D. (1997). *Dificultades en la comprensión del concepto de número fraccionario: La relación Parte-todo. Ideas básicas para el estudio de las fracciones*. Trabajo de Grado (Especialistas en Educación Matemática) Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.
- Gairín, J. M. (2001). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. Contextos Educativos, 4, p.137-159.
- Gairín, J. M. (2004). *Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos*. Contextos Educativos, 7, p.235-260.
- Gairín, J. M. y Muñoz, J.M. (2005). *El Número Racional Positivo en la Práctica Educativa: Estudio de una propuesta editorial*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
- Gairín, J. (2011). *Formación de profesores basada en competencias*. Bordón. 1(63), p.93-108.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Jara, O. (1994). *Para Sistematizar Experiencias: Una Propuesta Teórica y Práctica*. 3ª Edición. San José C.R. Centro de estudios y Publicaciones Alforja, p.29.
- Korthagen, F. y Kessels, J. (1999). *Liking Theory and Practice: Changing the Pedagogy of Teacher Education*. Educational Resercher, 28 (4), p.4-17.
- Llinares, S. y Sánchez, M (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Londoño, D.M. y Atehortúa. G.J. (2011). *Los pasos en el camino de la sistematización*.
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

- Lupiáñez, J. L.; Rico, L (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Santafé de Bogotá.MEN.
- MEN (1999). *Lineamientos curriculares nuevas tecnologías y currículo de Matemáticas*. Santafé de Bogotá.
- MEN. (2003). *Lineamientos y Estándares para la enseñanza de la matemática*. Santafé de Bogotá.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria*. BOE, 5, p.677-773.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- Perrenoud, Ph. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona, Graó.
- Puig, L. (1997). *Análisis fenomenológico*. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación- Horsori. p. 39-59
- Rico, L. (Ed.) (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice-Horsori.
- Rico, L. (Ed.) (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis
- Rico, L. (2006). *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*. *Revista de Educación* p. 275-294.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). *Planificación de las*

- matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales.* Suma, 58, p.7-23.
- Roegiers, X. (2000). *Saberes, capacidades y competencias en la escuela: una búsqueda de sentido.* Innovación Educativa 10, p.103-119.
- Ruiz, L.D. (2002) *La Sistematización de la práctica” en Proyectos de Investigación e Innovación.* Universidad Peruana Cayetano Heredia.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). *Unidades didácticas. Organizadores.* En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* .Madrid: Síntesis. p. 83-104
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria.* En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: Horsori. p. 125-154
- Steffe, L.P. (2004). *On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions.* Mathematical Thinking and Learning, 6(2), p.129-162.
- Tejada, J. (2009). *Competencias docentes. Profesorado.* Revista de curriculum y formación del profesorado, 2 (13), p.1-15.
- Vasco, C. E. (2008). *Sistematizar o no, he ahí el problema.* Revista Internacional Magisterio. Educación y Pedagogía, 23, 19-21.

8.2. BIBLIOGRAFÍA EN RED

- Álvarez, V. (2007). *Formación basada en competencias para profesionales de la orientación* [versión electrónica]. Educación XX1, 10, 1p.5-37.
- Barnechea, M.M. y Morgan, M. (2008). *El conocimiento desde la práctica, y una propuesta del método de sistematización de experiencias.*
- Gallego, B. (2005). *La Formación del Profesorado de Secundaria. Antecedentes, Situación actual y perspectivas.* <http://books.google.es/books?id.pdf>.
(Consultado 30-08-2012)
- Laursen, P. (2007). *Student Teacher’s Conceptions of Theory and Practice in*

Teacher Education. Paper presented at biannual ISATT conference, Brock University, July. (Consultado: 21-11-2012)
http://www.isatt.org/.../Laursen_StudentTeachersConceptionsofTheoryandpractice.pdf

Martín, R. y De Juanas, A. (2009). *La formación inicial en competencias valorada por los maestros en activo*. REIFOP, 12 (3), 59-69. Web: <http://www.aufod.com> – (Consultado: 22-04-2013).

Morcote, O. & Flórez, P. (2001). *Algunos elementos del conocimiento profesional en La planeación de clases de futuros profesores de secundaria. Un caso: las fracciones*. Recuperado el 20 de Marzo de 2011 de http://www.ugr.es/~pflores/textos/ArticulOS/Investigación/Morcote_FloresEMA.pdf

Moreno, C. (1992). *Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido*. Ponencia presentada al Congreso Las didácticas específicas en la formación del profesorado, Santiago, 6-10 de julio, 1992. Recuperado el 20 de agosto 2012 de http://www.inet.edu.ar/programas/formación_docente/marcelo_garcia_como_conocen_docentes.pdf

8.3. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Doyle, W. (1986). *Classroom organization and management*. En M.C. Wittrock (Ed.), *handbook of research on teaching*. New - York: Macmillan. p.392-43.

Fandiño, M. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

Feinman-Nemser, Sh. (2008). *Teacher learning: How do teachers learning to teach?*

- En Cochran-Smith, M; Feinman-Nemser, Sh. Y McIntyre, D.J. y Demers, K.E. (Eds.) *Handbook of Research on Teacher Education. Enduring Questions in Changing Contexts*. Third Edition. New York, Routledge. p.697-705.
- Ferreira Da Silva, M. J. (2005). *Investigando saberes de profesores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para quinta série*. Tesis de doctorado no publicada. PUC/SP, Brasil.
- García, G. (2003). *Currículo y evaluación en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Kilpatrick, J., Swafford, J.O. y Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Lupiáñez, J.L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática. Capacidades y Competencias matemáticas*. En Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática. Málaga.
- Marcelo, C. (2009). *Formalidad e informalidad en el proceso de aprender a enseñar*. Revista de Educación, 350, p.31-35.
- Marín, A. (1997). Programación de Unidades Didácticas. En L. Rico (Coord.), E.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Muñoz, J.M. (2005). *El número racional en la Práctica educativa*. Diploma de Estudios Avanzados. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
- Parcerisa, A. (1996). Materiales curriculares. Barcelona: Grao.
- Puig, L. y Calderón, J. (1996). *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-CIDE.