FORMACIÓN DE LA NOCIÓN ABSTRACTA

DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA

A partir del estudio histórico–epistemológico de los aportes de

Cantor y Dedekind

Vicente Erdulfo Ortega Patiño

Código: 9704691

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática

Santiago de Cali, Colombia de 2011

FORMACIÓN DE LA NOCIÓN ABSTRACTA DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA

A partir del estudio histórico–epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind

Vicente Erdulfo Ortega Patiño

Código: 9704691

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación: Énfasis en Educación Matemática

Director

Luis Carlos Arboleda Aparicio

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática

Santiago de Cali, Colombia de 2011

Nota de Aceptación

Aprobada

Andrés de la Torre Gómez
Jurado

Luis Cornelio Recalde Caicedo
Jurado

Luis Carlos Arboleda Aparicio
Director

Santiago de Cali, Colombia de 2011

Resumen

En esta investigación, desde una perspectiva histórica-epistemológica, se presenta un análisis de los principales temas que forman parte de la obra de Cantor y de Dedekind, los cuales, de acuerdo con un enfoque conjuntista y abstracto, condujeron a la formación de la noción de estructura del álgebra moderna.

Se estudia además el espíritu original y creador plasmado en la obra de estos dos matemáticos, sus polémicas innovaciones y su interés por promover una visión y una fundamentación conceptual abstracta de las matemáticas y la forma como estas innovaciones, con el uso de métodos y recursos teórico-conjuntistas, establecieron las bases que señalarían el rumbo por donde debía avanzar la matemática moderna.

Palabras Claves: epistemología, objeto matemático, estructura algebraica, enfoque conjuntista abstracto, principio de permanencia de las formas equivalentes, formación de pensamiento matemático.

Abstract

From a historical-epistemological perspective, an analysis of key issues related to the work of Cantor and Dedekind, who, according to a set-theoretical approach and abstract, leading to the formation of the concept of structure of the modern algebra is presented in this investigation.

This investigation also examines the authorsóriginality and creativity, their controversial innovations and their interest in promoting a vision and an abstract conceptualization of mathematics. The way these innovations using set-theoretical methods and resources laid the groundwork that would indicate the direction that the modern mathematics would take.

Keywords: epistemology, mathematical object, algebraic structure, abstract set-theoretic approach, principle of permanence of equivalent forms, formation of mathematical thinking.

Tabla de Contenido

Introducción general

El objetivo principal de esta tesis es estudiar, mediante un enfoque histórico-epistemológico, algunas de las etapas que condujeron a la formación de la noción abstracta de estructura del álgebra moderna, a partir de la consideración de los principales temas que desarrolló Cantor en la teoría de conjuntos y, fundamentalmente, analizando los aspectos pertinentes de la obra de Dedekind, desde su enfoque teórico-conjuntista abstracto. Con tal propósito, el trabajo se ha organizado en cinco capítulos.

En el primer capítulo, después de precisar la postura conceptual y metodológica que fundamenta este trabajo, se hace una reflexión acerca del papel de los problemas en el desarrollo histórico de las matemáticas, tratando de presentar, a manera de una visión panorámica, un escenario en el cual se evidencie que bajo esa especie de capa exterior abstracta, que envuelve a la mayoría de las teorías axiomáticas del álgebra, se encuentran ocultos problemas concretos de carácter teórico o práctico, cuyas soluciones permitieron, en su momento, realizar generalizaciones satisfactorias y no pocas veces condujeron a conclusiones que han tenido los más amplios alcances, como es el caso de los problemas que, según la tipología de Dieudonné, se ordenan en torno a una teoría general, fecunda y vigorosa como los de la teoría de los grupos de Lie y la topología algebraica, o los que crean un método como los de la teoría analítica de los números y la teoría de grupos finitos, o como los que Hilbert planteó basándose en las principales tendencias de las investigaciones matemáticas de finales del siglo XIX, intentando predecir, de alguna manera, las direcciones futuras de los progresos matemáticos.

Al finalizar este capítulo, en la (sección 1.6), se presentan algunas consideraciones, de acuerdo con el pensamiento de Polya, sobre la resolución de problemas.

En el capítulo dos, después de hacer una presentación del estado de las matemáticas clásicas a comienzos del siglo XIX, se considera que en el estudio de la evolución de las matemáticas, en esta época, de la rica y variada historia del álgebra, una parte importante corresponde a la formación de ciertos conceptos fundamentales y al desarrollo de procesos tales como el del simbolismo algebraico que haría posible acercarse al estado actual de madurez del álgebra simbólica que reemplazó los procesos algebraicos verbales, por procedimientos simbólicos con reglas de fácil comprensión. Precisamente, por estas razones, es pertinente y tiene importancia analizar los aportes de Peacock y de De Morgan en torno a las concepciones e inquietudes sobre la generalización del álgebra simbólica (subsección 2.2.1).

Es también tema fundamental de discusión en este capítulo el denominado proceso de desontologización (sección 2.4) que hace referencia al hecho de que en matemáticas no tiene importancia la consideración de la naturaleza de los objetos, sino las relaciones entre objetos indefinidos y las reglas que rigen las operaciones entre ellos. Esta convicción a la que llegaron los matemáticos en la época moderna dio viabilidad al desarrollo de las estructuras como nuevos objetos de la matemática moderna.

Así mismo se analiza un tema relacionado con la creación del álgebra actual como es el caso de los sistemas numéricos hipercomplejos de Hamilton.

En el capítulo tercero se estudian los aportes de la obra de Cantor en relación con el propósito de la tesis. Al comenzar se estudia el problema de la aceptación e incorporación del infinito actual en el cuerpo teórico de las matemáticas; luego, en las secciones 3.2 y 3.3, se aborda el problema de la unicidad de representación de funciones reales mediante series trigonométricas y como estas investigaciones condujeron a Cantor a la teoría de conjuntos trayendo a primer plano el tema del infinito en matemáticas. Se analiza como a partir de estas investigaciones se propuso desarrollar una fundamentación sistemática de los números reales definiéndolos como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, lo cual le permitiría, desde el punto de vista del desarrollo de la teoría de conjuntos, presentar ideas sobre topología de conjuntos de puntos y en particular la noción de conjunto derivado. Se continúa hacia 1870, cuando Cantor demostró que si una serie trigonométrica converge a una función continua en un intervalo dado, entonces la serie es única y en 1871 probó que sucede lo mismo aún en el caso de que la función representada sea discontinua, o la serie no converja en una cantidad finita de puntos dentro del intervalo. Avanzando en esta línea de generalización, en la sección 3.3 se analiza el resultado de la unicidad para el caso de infinitos puntos excepcionales bajo ciertas condiciones que se expresan recurriendo a los conjuntos derivados.

Se prosigue en esta secuencia para mostrar cómo la noción de conjunto derivado continuaría desempeñando un papel importante en la teoría de integración y en la teoría de funciones en los años siguientes; el lenguaje conjuntista se aplicaría a campos diversos como la geometría, el análisis, la teoría de funciones reales, el álgebra y la teoría de números. Así, a la vista de las definiciones de los reales, la noción de conjunto parecía necesaria para sentar las bases de la aritmética. Sin embargo la señal de partida que dio pie al desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana surgió sólo en 1873, cuando Cantor se planteó una pregunta genial sobre la posibilidad de correlacionar biunivocamente los números reales y los naturales.

En las secciones 3.7 y 3.8 se analiza entonces el hecho de que la respuesta, establecida en 1873 sobre la base de la completitud de los números reales, resultó ser negativa y con ella adquirió sentido la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, ya que se había probado la existencia de conjuntos infinitos de diferentes tamaños. Por otra parte, en conexión con la noción de conjunto derivado, se estudia cómo Cantor comenzó, en los años 1870, a pensar en la posibilidad de considerar derivados de orden infinito, P^{∞}, $P^{\infty+1}$, etc. y con ellos empezó a jugar con símbolos que se convertirían en los números ordinales transfinitos. Tanto las cardinalidades infinitas como los ordinales transfinitos desempeñarían un papel importante en la matemática posterior.

En el capítulo cuatro se analiza la obra de Dedekind con el propósito de estudiar los aportes de la misma a la temática de la tesis. Para comenzar se hace referencia a la concepción de Dedekind que se caracteriza por una firme convicción en la defensa de la utilización del lenguaje conjuntista en matemática pura. Se señala cómo a través de toda su obra se propuso sistematizar y reformular las principales nociones de la aritmética, el álgebra y el análisis desde el mencionado punto de vista. Así en la publicación de su teoría de los números reales, en 1872, estableció los fundamentos del análisis sobre la base de una teoría de conjuntos y aplicaciones. Estas mismas nociones las había comenzado a utilizar, a finales de los años 1850, en el trabajo relacionado con los temas de álgebra y luego las aplicaría en el estudio de los fundamentos del concepto de número. Las definiciones, en este mismo sentido, sobre los números naturales las presentó en su obra de 1888, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, la cual es de una importancia indiscutible en la historia de la rigorización, en la matemática abstracta y en la teoría de conjuntos.

Las definiciones de los números naturales, de los enteros, de los racionales y de los números reales las elaboró en términos conjuntistas. En álgebra utilizó conjuntos de números o de polinomios, tomando como nociones básicas ciertas estructuras bien definidas.

En la sección 4.1, que trata del papel de las nociones de conjunto y aplicación, pensando en las funciones del análisis como aplicaciones de los reales en los reales o de los complejos en los complejos, señaló también que el análisis se basa en la teoría de conjuntos y aplicaciones. En este caso acogía la noción abstracta de función que era una idea preferida de Dirichlet y de Riemann. Su teoría de los números reales publicada en 1872, en términos de cortaduras en los números racionales también corresponde a las construcciones complejas e infinitarias introducidas sobre la base del conjunto de los números racionales, pues hay que tener en cuenta que dichas cortaduras, en definitiva, son clases infinitas de números racionales dotadas de una cierta estructura de orden.

Al tratar el tema de los números algebraicos, en 1871, en la sección 4.6, se analiza la propuesta de reorientación del trabajo en esta temática que afectaría al álgebra en general, ya que en lugar de trabajar directamente sobre los números algebraicos y sus propiedades, reformula todo el tema en términos de conjuntos de números. De esta manera, inicia con la presentación de la noción de cuerpo y se refiere también a anillos de enteros, lo mismo que a módulos e ideales. Se analiza también, en la sección 4.6, el problema fundamental de la factorización de enteros algebraicos, mediante la definición de las nociones de producto de ideales e ideal primo y entonces demuestra que, dado un cuerpo cualquiera de números algebraicos, todo ideal admite una descomposición única como producto de ideales primos. Estos planteamientos los hace utilizando un enfoque conjuntista, a pesar de que aún en el álgebra era inusual dicho enfoque en esos tiempos. Pero hay que tener en cuenta que ya desde 1850, cuando asistía a las clases de Riemann y realizaba sus primeros trabajos originales en álgebra y sobre los fundamentos de la aritmética, en las lecciones sobre álgebra que impartía en Göttingen, presentaba la teoría de Galois en una versión muy moderna en la cual analizaba las interacciones entre los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio, donde, de manera original y moderna, presentó la idea de que la teoría estaba relacionada esencialmente con extensiones de cuerpos. Esto le permitió considerar que la noción de cuerpo era fundamental para el álgebra. En esta época también realizó algunos estudios sobre la teoría abstracta de grupos, utilizando las nociones de isomorfismo y homomorfismo; trabajó además con clases infinitas de polinomios.

En la sección 4.1, se analiza cómo a pesar de la confianza en el lenguaje conjuntista que había logrado en el contexto del álgebra y en los fundamentos de la aritmética, todavía no había considerado la conveniencia de utilizar ideas conjuntistas en la teoría de números algebraicos; pero la familiaridad con la noción de cuerpo le permitió entender la noción adecuada de entero algebraico, la cual era indispensable para resolver, de manera satisfactoria, el problema de la factorización aunque al comienzo intentó hacerlo utilizando congruencias superiores relacionadas con ciertos polinomios. En vista de que de esta manera no le fue posible encontrar una solución completamente general, hacia 1870 pudo entender que al introducir conjuntos de números podía hallar una solución general, sin tener que utilizar polinomios y congruencias. De esta manera se podía realizar y reformular todo en términos de números y conjuntos de números, es decir, de una forma puramente aritmética y en términos conjuntistas.

Habiendo continuado perfeccionando la teoría de ideales, en la última versión de 1894, incluyó una discusión detallada de la teoría de Galois presentada en términos del grupo de automorfismos del cuerpo de descomposición.

Así completó las reflexiones sobre las profundas relaciones entre álgebra, teoría de números y conjuntos.

Finalmente, en el capítulo cinco, correspondiente a las *Conclusiones generales*, se presentan los conceptos más importantes relacionados con la *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*, considerando los aportes de las obras de Cantor y Dedekind, desde una perspectiva histórico-epistemológica, agrupados en torno a los principales temas de indagación relacionados con la problemática de la tesis.

Consideraciones metodológicas y epistemológicas

El estudio del tema de la tesis se aborda de acuerdo con un enfoque histórico-epistemológico, tanto en el contexto de las matemáticas como en el de la Educación Matemática; y teniendo en cuenta que desde la perspectiva epistemológica se trata de explicar la naturaleza del conocimiento científico, su evolución y su normatividad, se asume esta indagación de acuerdo con una concepción que no considera que lo relevante y pertinente de una forma de conocimiento es únicamente aquello que corresponde a su estado presente, desconociendo de hecho el desarrollo histórico; postura esta, que en el caso de las matemáticas se reduciría a valorar sólo los aspectos técnicos de los conceptos y la forma cómo ellos funcionan en la jerarquización dentro de una determinada teoría. Estudiar las matemáticas desde una visión que sólo haga énfasis en el lenguaje abstracto, en las estructuras, en el formalismo y en lo técnico, es limitar las posibilidades de comprender a cabalidad la naturaleza de los objetos que la constituyen, del significado de sus conceptos y teorías y del papel que ha cumplido el conocimiento matemático, a través de la historia, como elemento básico de la cultura en las distintas civilizaciones y en la vida de los pueblos. Por el contrario, desde una perspectiva histórica-epistemológica, al analizar los procesos de constitución, validación y legitimación social de los conceptos y teorías, se hace posible poner en evidencia los problemas a partir de los cuales surgieron las distintas interpretaciones sobre los mismos, los procesos y los métodos a que dieron lugar al intentar resolverlos, las explicaciones epistemológicas que se generaron, los contextos sociales y culturales que los condicionaron, los significados y explicaciones que, aunque divergentes con los ya sancionados y formalizados, develan las complejidades de la actividad matemática.

La preocupación por ir más allá de los aspectos formales y técnicos, considerando las orientaciones científicas, las rutas epistemológicas y las tendencias educacionales que, en cada momento histórico, pueden generar enfoques y posturas teóricas diferentes, hace posible que los procesos de formación matemática se encaminen de manera apropiada teniendo en cuenta tanto las potencialidades y limitaciones de los seres humanos, como los contextos sociales y culturales de los cuales forman parte. Esta inquietud toma más fuerza en el caso de la Educación Matemática que, concebida como un campo de indagación de naturaleza interdisciplinaria, estudia los procesos de producción y comunicación de los conocimientos y saberes matemáticos no como productos acabados, ni solamente en el nivel de las teorías formales sino como el resultado de procesos socioculturales que se examinan desde una perspectiva histórica-epistemológica, teniendo en cuenta la actividad misma que permitió llegar a ellos.

Seguramente la forma más idónea de explicar el sentido de estas consideraciones sea parafraseando a Arboleda (Arboleda, 2007, p. 1)[1] en su referencia a Schwartz acerca del bien conocido fenómeno de la formalización de las teorías matemáticas, según el cual estas teorías cuando ya han alcanzado el nivel de elaboración en un leguaje formal, “ocultan la actividad matemática compleja que las produjo” y observa que ante tal hecho Schwartz “propone la intervención de la historia de las matemáticas para ayudar a los lectores a reconocer las huellas de esta actividad”. Dice además Arboleda que Schwartz advierte que, en

[1]Artículo elaborado en el marco del proyecto de investigación: “La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes”. Colciencias, Universidad del Valle, código 1106-11-17688.

general, la manera como las personas se representan los procesos constitutivos de las teorías, es muy distinta a aquella según la cual se sucedieron; a partir de lo cual se ha generado una imagen predominante de un progreso mediado de principio a fin por “razonamientos rigurosos, perfectamente lineales, en un orden bien determinado y único que corresponde a una lógica perfecta”. Esto, como bien lo señala, implica el desconocimiento de que se trata, por el contrario, de procesos zigzagueantes; situación que se considera lamentable por cuanto sobre el prestigio de la veracidad plena que tienen las matemáticas y las ciencias en general, se genera una percepción de ser “demasiado rígidas, menos humanas y más inaccesibles”.

Estos autorizados puntos de vista han sido parte fundamental del sustento y la orientación para adelantar la indagación propuesta en la tesis. Otras consideraciones más específicas se harán en el capítulo correspondiente a las conclusiones generales.

En el caso concreto de la tesis, relacionado con la “*Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*”, en el marco de una matemática conjuntista y de una concepción conjuntista del álgebra, se evidencia también cómo la forma de presentación de esta temática dentro de las teorías de los tiempos actuales, no refleja ni revela las enormes complejidades, ni los avatares del proceso histórico de construcción, el cual además, no pocas veces se personifica en ciertas individualidades e impide comprender que, como todo gran proyecto científico, se trata de una obra colectiva. La formalización, la forma axiomática, la abstracción, la generalidad y el simbolismo encubren la intrincada actividad matemática que dio lugar a la producción del conocimiento. Dentro de tan complejo atavío, los procesos mediante los cuales se constituyeron los conceptos y teorías tienen una apariencia ficticia según un orden y una solidez lógica que no admite altibajos. Para la práctica educativa estas visiones son completamente inconvenientes por cuanto generan frustraciones y conducen a subestimar el esfuerzo de la mente humana cuando tiene que producir desarrollando procesos árduos y zigzagueantes mediados por conjeturas, ensayo-error, relativizaciones, particularizaciones y ejemplos. Considerar que la parte constitutiva elemental de una teoría, desde un enfoque lógico, concuerda con lo primero que aparece en el orden temporal, corresponde a una concepción lineal, simplista y desde luego equivocada del proceso de construcción teórica. Es, en cambio, a partir del estudio de la historia de las ciencias, como se puede comprender que la forma de presentación de las teorías, en el momento actual, es diferente y no representa la historia de su construcción.

Por tales motivos, en el desarrollo de esta investigación se ha tratado de seguir de cerca el proceso histórico tomando como punto de partida el problema cuyo intento de solución dio lugar a la emergencia de cada concepto o teoría. Puntualizando sobre la temática y la metodología de la tesis no se puede pasar por alto el hecho de que al hablar de la "*Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*", se pone de manifiesto, en primer lugar, que el tema tiene que ver con el desarrollo de la teoría de conjuntos en el siglo XIX y en segundo lugar, que los trabajos de Cantor, pese a que aparentemente no se ubicaron en esa dirección, puesto que estuvieron motivados, como se verá, por las necesidades del análisis, finalmente si contribuyeron a la formación de dicha noción. Concretamente, como es bien sabido, se inició con el problema de la convergencia de las series de Fourier y de allí continuó sus trabajos sobre los conjuntos derivados, la teoría de los números reales, el infinito y el continuo y los números transfinitos. Con relación a lo primero hay que decir que no se trata simplemente de un dato cronológico, sino que al abordarlo, de alguna manera se pone de presente la polémica sobre la autoría de la teoría de conjuntos, en la cual se reflejan ciertas concepciones relacionadas con las matemáticas modernas. Así por ejemplo, las concepciones tradicionales atribuyen a Cantor el título de su "creador", respecto a lo cual Ferreirós afirma: "La tradición de otorgarle semejante título se remonta a numerosas declaraciones de la comunidad matemática de principios de siglo" y cita, como testimonio autorizado, la siguiente declaración de Ernst Zermelo:

> En la historia de las ciencias es ciertamente infrecuente que haya que agradecer toda una disciplina científica de carácter fundamental a la obra creativa de un único individuo. Esto es precisamente lo que ocurre con la creación de Georg Cantor, la teoría de conjuntos (Cantor, 2005).

Aunque observa también que cuando Zermelo estaba dedicado al tema, en su momento de mayor actividad creativa, afirmó que la teoría de conjuntos había sido creada por Cantor y Dedekind (Ferreirós, 1991, p. 20).

En una posición opuesta a la de Zermelo, se expresa Dieudonné cuando dice con firmeza:

> [...] el paraíso de Cantor en el que Hilbert creyó entrar no era en el fondo más que un paraíso artificial. Hasta nueva orden, lo que queda vivo y fundamental de la obra de Cantor son sus primeros trabajos sobre lo numerable, los números reales y la topología. Pero en estos dominios es justo asociarle a Dedekind, y considerar que ambos comparten en pie de igualdad el mérito de haber fundado las bases conjuntistas de la matemática actual. (Del prólogo de Dieudonné al libro de Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, 1976) (Ferreirós, 1991, p. 21)

Dugac, por su parte, afirma:

> Dedekind publica en 1871 [...] su teoría de ideales. Es ahí, en nuestra opinión, donde hay que buscar el "lugar de nacimiento" de la teoría de conjuntos. (Ferreirós, 1991, p. 21).

En otro momento, el mismo Dieudonné, expresa:

> Los colaboradores de N. Bourbaki tuvieron, desde el comienzo de su trabajo colectivo, una cierta concepción de las matemáticas, siguiendo la tradición de H. Poincaré y E. Cartan en Francia y de Dedekind y Hilbert en Alemania. Los "*Elementos de*

> *matemática*” se escribieron para dar a este tipo de investigaciones fundamentos sólidos y de acceso cómodo, en forma bastante general para ser utilizables en el mayor número posible de contextos. (Dieudonné, 1987, p. XI).

El significado y los alcances de estas afirmaciones se pueden valorar mejor si se tiene en cuenta que el propósito central de la obra de Bourbaki tenía que ver básicamente con los siguientes aspectos: poner de manifiesto los principios de un lenguaje formalizado único, indicando a su vez cómo se podría redactar en dicho lenguaje la teoría de conjuntos y luego, dado que cada una de las ramas de la matemática se puede exponer en términos de la teoría de conjuntos, mostrar la forma de inserción de estas diversas ramas en dicha teoría. En otras palabras, para el Grupo Bourbaki, la teoría de conjuntos constituía una herramienta fundamental o lenguaje básico de la matemática; lo que Ferreirós denomina *enfoque conjuntista* para distinguirlo de lo que, según él, sería *teoría abstracta de conjuntos*, esto es, la teoría de conjuntos como objeto de investigaciones autónomas; respecto a lo cual, observa además, que no hay coincidencia entre la historia del enfoque conjuntista y la historia de la teoría abstracta de conjuntos, como tampoco se puede entender que este enfoque constituya un proceso de aplicación posterior de dicha teoría.

En este orden de ideas, antes de la obra de Cantor se desarrolló y se dio la toma de conciencia de que el enfoque conjuntista, como instrumento básico, hacía posible lograr precisión y generalidad en matemáticas. Así mismo este enfoque permitió el estudio de estructuras conjuntistas de tipo algebraico, topológico o abstractas en general, y en consecuencia obró como requisito previo y fundamental que motivó y guió el trabajo de Cantor.

Todas estas consideraciones están relacionadas, desde luego, con el surgimiento del planteamiento conjuntista en las investigaciones algebraicas de Dedekind, enmarcadas en su propuesta de fundamentación del sistema numérico, puesto que, como se sabe, por una parte, el enfoque conjuntista de Dedekind estaba básicamente claro a finales de los años 1850 y, por otra, el desarrollo de ese planteamiento fue obra de toda su vida. Sin embargo, donde más sobresale el enfoque conjuntista es en su teoría de ideales, a partir de la cual Cantor, hacia 1879/84, utilizando la terminología empleada en ella por Dedekind, presenta las operaciones y relaciones conjuntistas de inclusión, unión e intersección, además de la unión disjunta, después de haber estudiado esta teoría con plena conciencia de la base conjuntista de su exposición, prueba incontrovertible de la influencia directa de Dedekind. No hay que olvidar también que Dedekind y Cantor se conocieron en 1872 y desde entonces mantuvieron permanente y armoniosa correspondencia (Ferreirós, 1991, p. 22).

De todas maneras, el tema de la autoría de la teoría de conjuntos se asume con beneficio de inventario, pues no forma parte del objetivo central de la tesis tal discusión, sin que esto signifique que la misma no tenga importancia, sino que, por el contrario, podría ser motivo de una indagación concreta al respecto, ya que no carece ni de sentido ni de interés hacer una "relectura del proceso de nacimiento de la teoría de conjuntos" (Ferreirós, 1991, p. 20). En el capitulo 3 se hace el análisis sobre la obra de Cantor desde la perspectiva que se considera pertinente para el caso, tratando de desvirtuar la apariencia que a simple vista insinuaría que su obra poco o nada tendría que ver con la temática que se plantea en la tesis, a diferencia de lo que ocurre con Dedekind, para lo cual no se requiere aclaración alguna en tal sentido.

Capítulo 1

Los problemas en la evolución histórica de las matemáticas

Introducción

En este capítulo se trata de mostrar que, como una característica casi invariable que presenta el estudio de la historia de las matemáticas, cada teoría se originó en los esfuerzos por resolver un determinado problema, de orden práctico o teórico. Así, desde los más remotos tiempos e inseparables del proceso de surgimiento y evolución de las nociones matemáticas, los problemas han jugado un papel de incuestionable trascendencia, especialmente haciendo posible que el ser humano comenzara a comprender que el conocimiento sobre el número y la forma serían tan útiles y esenciales como el lenguaje en los procesos de conformación y desarrollo de las condiciones que caracterizarían el avance de las culturas y las sociedades.

Con tal propósito se hace un breve recorrido por distintas etapas del desarrollo de las matemáticas, partiendo desde las civilizaciones mesopotámica y egipcia. Se procura poner en evidencia también, que las matemáticas han marchado íntimamente relacionadas con la actividad productiva del ser humano. Se observa que en aquellos tiempos la motivación fundamental que primaba, en la resolución de ciertos problemas matemáticos, era el afán de satisfacción de las necesidades cotidianas y el logro del provecho material antes que una auténtica curiosidad e interés por conocer.

Luego se analizan los problemas en la matemática griega donde, a factores como una elevada productividad y la actividad comercial, se suma, de manera predominante, el deseo o gusto por inquirir que hizo que se reconozca, en esa civilización, la aparición de la matemática como una ciencia pura e independiente con su conexión lógica entre teoremas y demostraciones, junto con la preocupación por tratar de desentrañar la naturaleza de los problemas, considerándolos además de manera general. Se hace referencia a los problemas plateados por Diofanto y a los tres famosos problemas de la era clásica. En particular se hace referencia a la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$, a partir de la cual surgirá el teorema de Fermat.

Tratando de hacer una aproximación al pensamiento por problemas, se examina el funcionamiento de esta actividad matemática, considerando el caso en el cual Descartes, a partir del Problema de Pappus, aplica las reglas de su método analítico que, en matemáticas, trae como consecuencia la prioridad conferida al tratamiento algebraico.

El tema de los 23 problemas de Hilbert es ampliamente conocido, pero de tal importancia que no podía pasarse por alto dentro de este capítulo de la tesis, dado el sentido y la relevancia que se confiere a los problemas matemáticos dentro de la misma. Se pone de presente que Hilbert, según su visión, propuso tales problemas porque ellos representaban los puntos de discusión que eventualmente podrían hacer progresar las matemáticas, basándose en las principales tendencias de las investigaciones en este campo durante el siglo XIX. Pues no hay que olvidar que la historia enseña la continuidad del desarrollo de las matemáticas y que cada época tiene sus propios problemas.

Finalmente, se analiza la clasificación que Dieudonné hace de los problemas, destacando la importancia de los mismos en el desarrollo de las matemáticas, especialmente aquellos que se ordenan en torno a una teoría general fecunda y vigorosa y los que crean un método.

1.1. Los problemas en las antiguas civilizaciones de Egipto y Mesopotamia

Las civilizaciones de Mesopotamia (5700 a. C.) y del Egipto antiguo (4400 a. C.) se desarrollaron en torno a la agricultura, y en ese tipo de economía la necesidad de un calendario seguro era crucial para garantizar precisión tanto aritmética como astronómica. De esta manera comenzaron a hacer presencia las matemáticas, unas veces subordinadas a dar respuesta a los interrogantes que tempranamente surgían motivados por los requerimientos de la astronomía, las necesidades de la agricultura, el comercio y la ingeniería primitiva; otras, encaminadas a elaborar explicaciones de fenómenos como la regularidad de los movimientos de los cuerpos celestes, la elaboración de calendarios, llevar estadísticas para administrar los graneros, regular las cosechas, controlar el desbordamiento de los ríos, expresar con números medidas angulares originadas en observaciones astronómicas; así mismo, las construcciones, la medición y parcelación de los campos, entre otros hechos, fueron generadores de demandas y preguntas que se trasformaron en problemas que, con la ayuda de una incipiente aritmética y geometría, se trataron de interpretar y buscar respuestas.

Según lo testimonian las tablillas babilónicas, ya desde hace más de 3.000 años antes de nuestra era, en la antigua Mesopotamia se sabía resolver problemas relacionados con distancias, con el peso y con herencias. Algo semejante puede decirse de los registros consignados en los papiros egipcios; por ejemplo, se conoce que el papiro de Rhind contiene unos 85 problemas sobre el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones algebraicas simples, numeraciones, progresiones y las mediciones de áreas y volúmenes. La fuente que alimentaba el entusiasmo creador y que movilizaba el surgimiento y la formación de algunas nociones y procedimientos regulares era el deseo de resolver cierto tipo de problemas elementales en términos de abundantes observaciones sistemáticas y registradas que se constituían en el sustento de generalizaciones empíricas enmarcadas en las posibilidades y limitaciones que ellos mismos se impusieron e inspiradas, no en una autentica curiosidad ni en el interés cognoscitivo, sino más bien en el afán de satisfacer las necesidades cotidianas y en lograr lucro material aun en las condiciones de la más imperfecta actividad productiva.

1.2. Los problemas de la matemática griega

La expresión de la matemática como ciencia teórica pura y como cuerpo independiente de conocimientos, tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas que florecieron en las ciudades de la antigua Grecia. Movidos por una curiosidad y ambición desbordantes, intentando entender y elaborar explicaciones de los múltiples fenómenos naturales y discernir el sentido y los fines de la vida y de la humanidad, aplicaron el poder de la razón para plantear y buscar respuesta a las más diversas y profundas preguntas, asumiendo el reto de descubrir las leyes del universo persuadidos de que estas correspondían a un plan de carácter matemático. Los griegos le imprimieron otra dimensión al concepto de problema, la cual no se contrapone a la visión empírico-práctica de los egipcios y babilonios sino que es complementaria y que al mismo tiempo la enriquece al lograr formular auténticos problemas matemáticos de carácter teórico que condujeron a obtener resultados generales y dieron lugar al nacimiento de notables desarrollos, dando el gran salto de llegar a estudiar las matemáticas por las matemáticas mismas. Desde esta perspectiva desestimaron los problemas llamados de aplicación y que relacionaran la utilidad práctica de los conocimientos matemáticos y, por el contrario, se interesaron profundamente por desentrañar la naturaleza de los problemas de manera general. Aplicando la razón al estudio de la naturaleza, subestimaron la importancia de la experiencia y del paciente registro de hechos observados y se propusieron elaborar hipótesis y teorías para la organización de los hechos, bajo el supuesto de poder obtener un conocimiento del mundo externo por deducción, a partir de principios generales basados en sus particulares impresiones de lo que debía ser propiamente un universo bien organizado. Así por ejemplo, en el caso de la astronomía, intentaron proponer para los cuerpos celestes movimientos razonablemente sencillos como medio de explicación de los complicados movimientos aparentes. Esto generó más de un problema geométrico que cautivó su mentalidad matemática. Más tarde, durante el *Renacimiento Europeo*, Copérnico, Tycho Brahe y Kepler, contribuyeron a la solución en términos geométricos del problema, planteado por los griegos, de deducir los movimientos relativos y la disposición de los cuerpos celestes partiendo de la confusión de sus movimientos aparentes.

Es ampliamente reconocido el importante papel que han desempeñado, en el progreso de las matemáticas, los famosos tres problemas clásicos relacionados con la construcción con regla y compás de la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Las pretensiones por resolverlos se remontan a los orígenes mismos de la geometría y dichos intentos generaron una prolífica actividad matemática, durante más de dos mil años, que comprende desde las curvas de Hipócrates de Chios, las cónicas de Menecmo y las curvas de Dinostrato, hasta los esfuerzos de grandes matemáticos del siglo XIX. Así mismo, el problema referente a la existencia de una fracción cuyo cuadrado fuera igual a dos, atribuido a los pitagóricos hacia el año 550 a. C. y resuelto también con respuesta negativa, ejerció una decisiva influencia en las matemáticas griegas, durante los seis siglos siguientes, la cual se tradujo en la tendencia a la geometrización de las matemáticas en menoscabo del desarrollo de la aritmética y del álgebra, con repercusiones que alcanzaron a llegar hasta los tiempos de Newton y Leibniz.

La “*Arithmetica*” de Diofanto, básicamente consiste en una colección de alrededor de ciento cincuenta problemas, todos los cuales están resueltos en términos de ejemplos numéricos concretos y específicos. Dirigiéndose a Dionisios con afán pedagógico, propone:

- Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada.
- Descomponer un número en dos partes cuya razón sea dada.
- Descomponer un número en dos partes que estén en una razón dada con una diferencia dada.

Diofanto hace énfasis en la resolución de problemas indeterminados antes que en la exposición deductiva, debido a lo cual, esta obra constituye un capítulo importante que se aparto de la corriente central de la matemática griega y que corresponde a los comienzos de lo que hoy se conoce como *Análisis Difantico en teoría de números*. Es posible que los orígenes de algunos de tales problemas y métodos de resolución se puedan encontrar en la matemática babilónica, no obstante, "*La Arithmética*", presenta un aspecto admirablemente original y la influencia en la moderna teoría de números es mucho mayor que la de cualquier algebrista no geométrico griego. Es conocido, por ejemplo, que Fermat intentando generalizar un problema de la *Arithmética de Diofanto*, referente a hallar cuadrados que son sumas de dos cuadrados, llegó a formular la proposición que establece que para $n > 2$, no existen números enteros positivos x, y, z, que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$, resultado que se conoce como "*último teorema*" o "*gran teorema*" *de Fermat*; por cuanto, desde entonces, se constituyó en uno de los problemas abiertos más famosos en matemáticas y cuyos intentos realizados para demostrarlo dieron lugar a importantes investigaciones en teoría de números. La colección de problemas propuestos por Diofanto, por una parte, inspiró, de manera directa, la posterior resolución de ecuaciones en números enteros hasta llegar al siglo XVII; y por otra, permitió comprender y al mismo tiempo constituyó una valiosa guía en la moderna "*Teoría de ecuaciones diofánticas*".

1.3. Descartes y su programa de transformación algebraica de un problema geométrico

A propósito del problema de Pappus, Descartes desarrolla su programa de transformación algebraica de un problema geométrico y en su "proyecto de clasificación", considera fundamental distinguir bien entre los distintos órdenes de problemas, clasificados de acuerdo a su naturaleza.

Este interés obedece a un proyecto global, pues no sólo desea enriquecer las matemáticas, sino, ante todo, resolver metódicamente todos los problemas que puede plantear la ciencia, para lo cual se requiere clasificarlos, ordenarlos y jerarquizarlos. Descartes se propone llevar a cabo tal jerarquización especialmente en torno a los problemas que tratan de realidades continuas, en cuyo dominio "determinados problemas pueden resolverse únicamente con líneas rectas y círculos", otros con la ayuda de "curvas engendradas por un movimiento único y descritas con compases de un nuevo tipo"; y otros "si se utilizan curvas puramente imaginarias engendradas por dos movimientos diferentes no subordinados el uno al otro [...] de tal manera que no quede entonces casi nada más que descubrir en geometría" (Descartes, 1947).

"En matemáticas, este proyecto metódico trae como consecuencia la prioridad concedida al tratamiento algebraico. Descartes no estudia las curvas por si mismas, como realidades espaciales. Para él, una curva es un lugar geométrico, el conjunto de las soluciones de una ecuación" (Apéry & otros, 1988).

Campos señala que con la algebrización de la geometría que hizo posible Descartes, en una época que se caracterizaba por una carencia de curvas, de las cuales sólo había unas cuantas, surgidas primordialmente de la indagación en los tres problemas griegos, las cuales tenían nombre propio y propiedades debidas a su mismo origen, logró explotar la idea de traducir problemas de geometría al lenguaje algebraico y transmutó así esa escasez "en una incontenible exhuberancia de curvas cuyo estudio es literalmente inagotable" (Campos, 1997).

Lo anterior permite poner de manifiesto el pensamiento de Descartes en el sentido de que la seguridad y el rigor del método es lo que debe hacer la diferencia entre la ciencia moderna y la geometría antigua, en la cual únicamente los virtuosos de la intuición podían desenvolverse y realizar sus proezas. Para Descartes, en lugar de una colección de resultados, el álgebra es una técnica y un método de combinación y de construcción. Según esto, por el solo funcionamiento del mecanismo algebraico, es posible hacer surgir un mundo geométrico sin límites que nunca habría sido revelado por la intuición directa de la figura.

1.4. Los problemas de Hilbert

En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Paris en 1900, David Hilbert es invitado a dictar una conferencia; el tema comprende la investigación matemática, lo que ella significa para el crecimiento tanto de un matemático como de la matemática misma; la importancia de plantear bien los problemas; y, la confianza inconmovible en que todo problema bien planteado tendría tarde o temprano una solución, "[...] porque en matemáticas no hay ignorabimus" (Campos, 1994). En esta conferencia propone 23 problemas abiertos de matemáticas, de difícil solución, y que desde entonces convocaron el trabajo de los matemáticos. Hilbert señala que la provisión de problemas en matemáticas en inagotable y tan pronto un problema es resuelto muchos otros vienen a ocupar su lugar. Comenta Campos, que debido a que la versión final resultó bastante extensa, Minkowski y Hurwitz, le sugirieron que no la presentara completa, razón por la cual en el desarrollo de su discurso, y después de la celebre afirmación antes citada, pasó a describir sólo 10 de los 23 problemas seleccionados extraídos de varias ramas de las matemáticas y de cuya discusión se esperaría algún beneficio para la ciencia. Tres de ellos se refieren a la fundamentación de las matemáticas (números 1, 2 y 6), cuatro sobre aritmética y álgebra (7, 8, 13 y 16) y tres sobre la teoría de funciones (19, 21 y 23).

Empezó a hablar en los siguientes términos: ¡Quien de nosotros no desearía poder levantar el velo tras el cual se oculta el futuro y lanzar una ojeada a los próximos avances de nuestra ciencia, a los secretos de su desarrollo en los siglos venideros! Luego formula las siguientes preguntas: ¿Cuáles serán las metas particulares por las cuales se esforzarán los adalides matemáticos en las generaciones futuras? ¿Cuáles serán los nuevos métodos y los nuevos hechos que, en el amplio y rico campo del pensamiento matemático, revelarán las centurias por venir? Y prosigue: La historia enseña la continuidad en el desenvolvimiento de la ciencia. Sabemos que cada época tiene sus problemas propios los cuales la época siguiente resuelve o relega como estériles, reemplazándolos por otros nuevos. Si queremos tener una idea del posible desarrollo del saber matemático en el futuro inmediato, debemos hacer desfilar ante nosotros los problemas abiertos y lanzar nuestra mirada hacia los problemas planteados por la ciencia actual y cuya solución esperamos del futuro. El día de hoy, situado en la frontera de dos centurias, parece especialmente apropiado para una revista de problemas del presente; pues la terminación de grandes épocas no sólo nos invita a mirar hacia el pasado sino que también dirige nuestros pensamientos hacia el ignoto futuro.

Las denominaciones de los primeros once de dichos problemas son:

1. El problema de Cantor sobre la potencia del continuum.

2. La no contradicción de los axiomas de la aritmética.

3. La igualdad en volumen de dos tetraedros de bases iguales y alturas iguales.

4. El problema de la línea recta, la distancia más corta entre dos puntos.

5. La noción de grupo continuo de transformaciones, de Lie, sin la hipótesis de diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.

6. El tratamiento matemático de los axiomas de la física.

7. Irracionalidad y trascendencia de ciertos números.

8. Problemas de los números primos.

9. Demostración de la ley de reciprocidad más general en cualquier dominio numérico.

10. Determinación de la solubilidad de una ecuación diofántica.

11. Formas cuadráticas con coeficientes algebraicos cualesquiera.

Con relación al teorema de Fermat decía entonces: Fermat afirmó, como es bien sabido, que la ecuación diofántica

$$x^n + y^n = z^n$$

(x, y y z enteros) es insoluble, excepto en ciertos casos evidentes. Los intentos hechos para demostrar esta imposibilidad ofrecen un ejemplo destacado del efecto estimulante que un problema, muy específico y aparentemente insignificante, puede tener sobre la ciencia. En efecto, Kummer, instigado por el problema de Fermat se vio conducido a introducir los números ideales y al descubrimiento de la ley de descomposición única de los números de un cuerpo cíclico en términos de factores primos ideales, una ley que, hoy en día, en su versión generalizada a cualquier dominio numérico algebraico, por Dedekind y Kronecker, figura en el centro de la teoría moderna de los números; extendiéndose su influencia mucho más allá de las fronteras de la teoría de los números, hasta los dominios del álgebra y de la teoría de funciones (Campos, 1981). Sobre este problema se hará referencia en el capítulo cuatro de la tesis.

Todos ellos parecían entonces irresolubles y se suponía que solucionarlos representaría considerables avances en las distintas ramas de las matemáticas. El primer problema, “el problema de Cantor sobre la potencia del continuum” o “hipótesis especial del continuo” ha tenido respuesta exitosa por parte del más famoso lógico del siglo pasado, y quizá de la historia, Kurt Gödel y el conocido teorema de Gödel, considerado como el resultado más importante de la lógica matemática, da una respuesta negativa al segundo problema de Hilbert sobre “la no contradicción de los axiomas de la aritmética”. El último de los 23 fue resuelto en el año de 1970.

1.5. Una tipología de problemas matemáticos según Dieudonné

En su artículo “Matemáticas vacías y matemáticas significativas”, tema de la conferencia ofrecida en el Seminario de Filosofía y Matemática de la École Normale Supérieure de París (1976), Dieudonné se propone, por una parte, mostrar “el estado actual de la matemáticas” y, por otra, “hacer ver como han evolucionado los problemas, pues no puede entenderse una ciencia si se ignora su evolución”, y a continuación al desarrollar las “tipologías de las teorías matemáticas”, basándose en textos históricos, explica “qué sucede con esos problemas una vez que han sido planteados”. Considera varias posibilidades:

1. **Los problemas que no evolucionan**, es decir, que permanecen planteados. Son problemas que han nacido muertos. Se han planteado, se ha intentado resolverlos, no se ha sabido hacerlo y se sigue sin saberlo, a veces durante milenios. Por ejemplo, desde Euclides se ha preguntado en vano si hay números perfectos impares sin que se haya encontrado alguno y tampoco se ha demostrado que no existen. Otro problema de este tipo es el de los números de la forma $p = 2^{2n} + 1$, llamados “números de Fermat”.

Estos números surgieron al investigar la constructibilidad de los polígonos regulares de p lados, cuando p es un número primo. En el libro IV de *Los Elementos de Euclides* se estudia la construcción de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados. Gauss encontró que el polígono regular de p lados era construible si y solo si, p es un número de Fermat. Después de calcular los cuatro primeros de estos números, a saber: 5, 17, 257, 65.537, Fermat observó que eran primos y afirmó que todos los de esa forma eran primos. Sin embargo, Euler en 1732 obtuvo que para $n = 5$, $p = 641 \times 6'700\,.\,417$, que, desde luego, ya no es un número primo. Posteriormente, mediante métodos difíciles de la teoría de números, se comprobó que otros de los "números de Fermat" eran compuestos. Pero hasta hoy no se conoce si hay infinitos números primos de Fermat.

Otro caso es el de la constante C de Euler, que se define como:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

y desempeña un papel importante en el análisis. El problema consiste en determinar si C es un número racional, irracional, algebraico o trascendente; acerca de lo cual aún nada se sabe.

2. **Los problemas sin posterioridad**, se han resuelto, pero de ello no se ha logrado progreso alguno para ningún otro problema, es decir, su solución no ha tenido consecuencias. Las posibilidades de origen técnico para este tipo de problemas, señala Dieudonné, son impensables. Constituyen una especie de acertijos que se han perpetuado en ramas de la matemática actual, tales como la teoría de números, la combinatoria, la teoría de grupos. Por regla general, la resolución de todos estos problemas exige un ingenio asombroso. Uno de tales problemas, planteado pero no resuelto por Sylvester es: Dados n puntos situados al azar sobre el plano, de modo que no estén todos ellos alineados sobre la misma recta, demostrar que existe siempre

una recta que pasa exactamente por dos de dichos puntos. Fue resuelto por un amigo del matemático húngaro Paul Erdös. También Erdös ha propuesto y resuelto cerca de 550 problemas de esta categoría. Pero, a pesar del enorme ingenio que requieren para resolverlos, la inmensa mayoría de ellos ni siquiera son útiles para resolver otro problema; simplemente terminan en la solución. También considera son de este tipo, los planteados por Diofanto.

3. **Los problemas que crean un método**. Este caso se presenta cuando al profundizar las técnicas utilizadas para resolver el problema de partida se llega (complicándolas si es necesario) a utilizarlas en otros problemas semejantes o más difíciles, sin que se tenga la sensación de comprender verdaderamente tal éxito. En la teoría de números abundan métodos de este tipo, el caso más antiguo es el método del descenso infinito, inventado por Fermat, para demostrar que la ecuación $x^4 = y^4 + z^4$ no tiene solución entera. Todos los métodos utilizados para demostrar la *trascendencia* de un número corresponden a este caso. Así por ejemplo, refinando y mejorando los métodos con los cuales se demostró la *trascendencia de e*, se logró demostrar la *irracionalidad de* π, aunque se ignora la razón fundamental de este éxito.

4. **Los problemas que se ordenan en torno a una teoría general, fecunda y vigorosa**. Se trata de aquellos problemas cuyo estudio y reflexión han engendrado ideas nuevas que, a menudo, superan sin medida al problema que les dio origen y acaban por revelar a veces, al cabo de bastante tiempo, la existencia de estructuras subyacentes insospechadas que no solo iluminan la cuestión propuesta, sino que proporcionan instrumentos generales y potentes que permiten dilucidar una multitud de otras en diversos dominios. Se citan como ejemplos típicos, para este caso y en la actualidad, la teoría de grupos de Lie y la Topología Algebraica. Dieudonné destaca esta cuarta categoría y la considera el "*paraíso de los matemáticos*", por cuanto comprende no

solamente métodos, ni mucho menos se trata de artimañas cada vez más refinadas, sino que en tales ocasiones, los matemáticos se dan cuenta de que, al analizar el problema y las nuevas ideas que ha suscitado, comprenden lo que sucede; objetivo este de todo hombre de ciencia: “*llegar a comprender que pasa en el asunto objeto de sus estudios*”. Puntualiza que la mayor parte de los temas expuestos en el Seminario Bourbaki tienen características que los ubican en esta categoría y en menor medida en la categoría anterior.

5. **Las teorías en vía de empobrecimiento** son aquellas que, una vez resueltos los problemas más importantes por sus consecuencias y sus relaciones con las otras ramas de las matemáticas, tienen tendencia a concentrarse sobre cuestiones cada vez más especiales y asiladas, pudiendo ser además muy difíciles. Tal empobrecimiento puede ser momentáneo, como ha sucedido con la *teoría de los invariantes* que varias veces se ha encontrado en esta situación. Se recuerda aquí que Hilbert enfatiza que sólo la aportación ininterrumpida de nuevos problemas garantiza el progreso de una teoría.

6. **Las teorías en vía de disolución**. Corresponden al caso en el cual, en una teoría, una elección afortunada de los axiomas, motivada por problemas precisos, ha permitido desarrollar técnicas que tienen una gran eficacia en muchas partes de las matemáticas y, en el mismo sentido, sucede también que se investiga, sin motivo aparente, modificando de manera bastante arbitraria los axiomas. Bajo estas condiciones, dice Dieudonné que la mayor parte de las veces resulta engañosa la esperanza de renovar así los éxitos de la teoría inicial. (No se mencionan ejemplos de este caso).

El tipo de problemas de primordial importancia para Bourbaki corresponde, en primer lugar, a la categoría cuatro y en segundo lugar, a la categoría tres, de la clasificación hecha por Dieudonné, ya que la principal característica de las matemáticas bourbáquicas es su trabajo concerniente a las teorías vivas, que se sustentan sobre una estructura; y, hasta cierto punto, son las que dependen de un método.

Se pone en evidencia entonces el papel crucial y dinamizador de los problemas en el desarrollo de las matemáticas a través de los tiempos hasta tal punto que muchos autores han llamado la atención sobre este hecho de distintas formas. Por ejemplo, Stewart los considera “la fuerza motriz”; E. T. Bell afirma que además de número, forma, discontinuidad y continuidad, ha llegado a ocupar capital importancia en la historia de las matemáticas, especialmente desde el siglo XVII, una “*quinta corriente*”. El avance de las ciencias hacia una mayor exactitud, ha planteado la constante y creciente necesidad de inventiva matemática, constituyendo en gran parte la causa principal de la enorme expansión de las matemáticas desde 1637, y puesto que la industria y las invenciones se tornaron cada vez más científicas, después de la revolución industrial de la última parte del siglo XVIII y la primera del XIX, también estimularon la creación matemática ofreciendo con frecuencia problemas situados más allá de los recursos de que disponían las matemáticas. En muchos casos, los intentos para resolver un problema de tecnología esencialmente nueva, han conducido a un desarrollo ulterior de las matemáticas puras (Bell, 2002).

Después de haber hecho este recorrido sobre la evolución de las matemáticas desde la perspectiva de los distintos tipos de problemas que han surgido en su desarrollo, es conveniente hacer unas consideraciones sobre el tema.

El valor y la importancia de un problema no radican tanto en la consecución de su solución, como en las ideas y bosquejos de ideas que hacen posible que surjan en el proceso mismo que se desarrolla al intentar resolverlo.

Muchos de los problemas de las matemáticas, y aún independientemente de su solución, han dado lugar a los más notables desarrollos de este campo del conocimiento. Aún el hecho mismo de pensar si determinados problemas tienen o no tienen solución se ha constituido en un tema crucial de investigación en matemáticas, especialmente, a partir de los tres famosos problemas de la matemática griega, dando apertura a una nueva manera de pensar y de abordar los problemas matemáticos. Durante más de dos mil años dichos problemas permanecieron sin ser resueltos, a pesar de los intentos realizados por algunos de los grandes matemáticos. La creación de la geometría analítica permitió comprender los profundos vínculos de la geometría con el álgebra y a mediados del siglo XIX, a partir de los considerables avances alcanzados en el álgebra gracias a los trabajos de destacados matemáticos y en especial a los aportes de Galois (1811-1832), pudo demostrarse en forma convincente y rigurosa que los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo no se habían podido resolver, porque precisamente carecían de solución. En 1882, Ferdinand Lindemand probó que el problema de la cuadratura del círculo también era irresoluble. Este problema implica quizá mayor grado de dificultad y exige de los recursos técnicos del análisis matemático.

En la matemática griega, el problema de constatar la imposibilidad de ciertas construcciones geométricas comenzó a marcar una tendencia que condujo a que los matemáticos comprendieran la importancia y la validez de proponerse investigar: "*¿Cómo es posible probar que ciertos problemas no pueden resolverse?*".

A esta nueva manera de pensar corresponden problemas como: *¿Existe alguna fracción cuyo cuadrado sea igual a dos?, ¿Es posible resolver una ecuación general de grado igual o mayor que cinco, utilizando radicales?*

Los problemas han ido evolucionando, a través del proceso histórico, paralelamente con el desarrollo del conocimiento, como signos de vitalidad de la matemática y como reflejo de la influencia mutua entre la vida práctica y el pensamiento abstracto, hasta constituirse en característica esencial de una forma de pensamiento que, como tal, es asumida y valorada en la actualidad por los matemáticos. Dicha influencia ha generado un conjunto de procesos que comienza por la matematización de situaciones a partir del mundo real, avanzando luego en la reflexión sobre las condiciones presentadas hasta llegar a alcanzar niveles de abstracción tales que permitan actuar de acuerdo con procesos deductivos y finalmente, mediante las aplicaciones, retornar a la realidad (Aleksandrov et al., 1980, pp. 20-21)[1].

Constitúyese así una caracterización de una forma de pensamiento que en el fondo está muy ligado a la ontología del dominio del objeto a partir del cual se fija el problema para su solución. Lo que emerge de la solución del problema pareciera que lleva en sí la herencia del dominio previo de objetos de donde se encuentra. Es decir, que la ontología del objeto está en el dominio anterior. Este pensamiento de resolución de problemas, característico de la matemática, apunta a un problema localizado, por cuanto el pensamiento que ahí se desarrolla está limitado por lo dado, esto es, por las condiciones que fija el problema.

Para hacer una aproximación al pensamiento por problemas, es conveniente examinar cómo funciona la actividad de solución de problemas y cómo se da este tipo de pensamiento en un ejemplo concreto. Para tal efecto se considera el caso en el cual Descartes elige el *problema de Pappus*, en cuya solución aplica las reglas de su "*método analítico*".

"En matemáticas, este proyecto metódico trae como consecuencia la prioridad concedida al tratamiento algebraico. Descartes no estudia las curvas por si mismas, como realidades espaciales. Para él, una curva es un lugar geométrico, el conjunto de las soluciones de una ecuación. [...] Se empieza por las soluciones de las ecuaciones con una incógnita, de primer grado y después de segundo grado, y cada vez se indica cómo construir geométricamente las soluciones (los segmentos que representan a las soluciones). [...] por consiguiente, el principal objeto de esta geometría es la representación de las soluciones de problemas algebraicos. A

[1]Las "Ciencias exactas, mecánica, astronomía, física y una gran parte de la química, expresan sus leyes, como todo estudiante sabe, por medio de fórmulas, y utilizan ampliamente el aparato matemático en el desarrollo de sus teorías. El progreso de estas ciencias habría sido completamente imposible sin la matemática. Por esta razón, las necesidades de la mecánica, astronomía y física han ejercido siempre una directa y decisiva influencia en el desarrollo de la matemática.

En todos los casos, pero especialmente allí donde los fenómenos son más complicados, debemos tener en cuenta que si no queremos perder el tiempo manejando fórmulas desprovistas de significado, la aplicación de la matemática es útil sólo si se aplica a fenómenos concretos que ya han sido objeto de una profunda teoría. De un modo u otro, la matemática se aplica en casi todas las ciencias, desde la mecánica hasta la economía política".

tal tipo de ecuación le corresponde tal tipo de construcción” (Apéry & otros, 1988, p. 60).

Descartes, no solamente se propuso hacer una primera clasificación de los problemas; si no que en el primero de los tres libros de “*La Geometría*”, trata “*de los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas*”; luego presenta las reglas de formación de las ecuaciones de curvas geométricas. De modo que las condiciones de solución de la ecuación establecen los requisitos para la construcción de un problema. En consecuencia, la posibilidad de construir el problema depende de la posibilidad de encontrar las raíces de la ecuación. A continuación señala los pasos que se deben seguir para resolver cualquier problema, los cuales constituyen el “*método analítico*”:

1. Inicialmente es necesario suponer que el problema se encuentra ya resuelto.

2. Se debe designar con letras todos los datos y todas las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3. Encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las desconocidas.

4. Sin hacer diferencia alguna entre los datos y las líneas buscadas, expresar de dos maneras distintas la relación entre ellas, para obtener dos expresiones de una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones forma una ecuación.

5. Finalmente, se debe resolver la ecuación. Los requerimientos constructivos de la ecuación expresan los requerimientos constructivos del problema.

Estas reglas las aplica en la resolución de problemas difíciles como el problema de Pappus, que por tales condiciones resulta paradigmático para analizar dicha actividad.

En su “*Colección de problemas*”, Pappus asegura que ya Euclides había intentado, sin éxito, la resolución del siguiente problema: Dadas cuatro líneas en posición, encontrar un punto desde el cual se puedan trazar líneas que formen ángulos dados con las cuatro líneas dadas y que satisfagan la condición de que el paralelogramo formado por dos de esas líneas se encuentre en una razón dada con el paralelogramo formado por las otras dos. Más exactamente, desde Apolonio había un problema abierto de encontrar el lugar geométrico de la familia de curvas que tienen una determinada situación o cumplen ciertas condiciones en el plano; para lo cual se tiene que designar el nuevo objeto, el objeto curva algebraica.

Entonces, para entender cómo funciona la actividad de solución de problemas, esto es, la estructura epistémica del problema, considerando el problema de Pappus como paradigmático, es conveniente expresar la manera como se interpreta la solución en los siguientes términos:

En primer lugar hay un reconocimiento por parte de Descartes del aporte de Pappus al identificar cual era el problema abierto por resolver, planteado desde Apolonio. Se tiene entonces, un dominio de objetos que cumplen ciertas características; son de naturaleza euclidiana y hay una serie de instrumentos y herramientas de intervención sobre esos objetos, que son unas técnicas analíticas, las cuales comportan "*dar por resuelto el problema*" y buscar unos principios de explicación últimos de las condiciones en las que se encuentra la configuración de las rectas en el plano.

Se debe recordar que el objetivo cartesiano es eliminar la diferencia existente entre las distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una "*forma única de la magnitud*", dada a través de los segmentos, como condición que hace viable una lectura algebraica de la geometría y con la posibilidad de definir un producto de segmentos con la propiedad de cerradura o clausura. "*De esta forma Descartes rechaza la interpretación estrictamente espacial, concreta e intuitiva en beneficio de una interpretación más puramente abstracta, no figural*" (De Lorenzo, 1971, p. 83). Surge así la necesidad del signo escrito, artificial y al asignar a cada línea "*con una letra o una cifra, las operaciones aritméticas quedan incluidas* *en los terrenos estrictamente algebraicos*". (De Lorenzo, 1971, p. 85). Por lo tanto se requiere la designación de lenguajes escrituralmente.

En el proceso de resolución del problema a través de los instrumentos de intervención correspondientes va emergiendo un objeto radicalmente diferente que es el concepto de curva algebraica distinto del concepto de curva de Apolonio.

En síntesis, se tiene: un problema, unos instrumentos de intervención en la resolución del problema, tales como saberes, técnicas, métodos que corresponden al estado del arte en el que se encuentra, en el contexto matemático, procedimientos que dan lugar a un nuevo objeto matemático, constitución de un nuevo objeto matemático. En términos epistemológicos, se tiene una realidad nueva en relación con lo anterior, una curva algebraica. Este nuevo objeto que se constituye según el pensamiento de Descartes ya no está ligado con el problema de Pappus sino instaurado en una teoría propia, una teoría de curvas algebraicas.

1.6. Algunas Reflexiones sobre la Resolución de Problemas según Polya

Desde la perspectiva de la Educación Matemática, el proceso de plantear y resolver problemas tiene gran relevancia sobre todo si se considera que éste debe estar presente en todas las actividades curriculares de matemáticas, hasta el punto de llegar a constituir el eje central a partir del cual sea posible organizar el currículo, teniendo en cuenta que las situaciones problema, como elementos básicos del contexto inmediato, permiten dar sentido al quehacer matemático.

De acuerdo con estas consideraciones resulta imprescindible la referencia a Polya, cuyas obras pioneras despertaron el interés por el proceso de resolución de problemas desde los comienzos de la investigación en Educación Matemática.

Polya consideraba que una de las opciones que tiene el profesor de matemáticas es la de dedicarse a ejercitar al estudiante en operaciones rutinarias, con el riesgo de destruir el interés por este tipo de conocimiento y desaprovechar la gran oportunidad que tendría para su desarrollo intelectual. La otra alternativa, es la de poner a prueba la curiosidad de los estudiantes planteándoles problemas adecuados a su nivel de conocimientos y, mediante preguntas estimulantes, orientarlos en la búsqueda de las correspondientes soluciones de tal forma que sea posible despertar el gusto por el pensamiento autónomo.

En correspondencia con estas dos opciones, es conveniente precisar el significado de la palabra *problema*, por cuanto en la clase de matemáticas suele emplearse con un sentido equivocado cuando se asocia a situaciones relacionadas ante todo con ejercicios de ejecución que sólo requieren de la aplicación rutinaria de procedimientos idénticos o análogos a los ya establecidos o resueltos. En cambio, el concepto de problema aceptado en matemáticas se refiere a una situación que es nueva para quien tenga que resolverla.

Según Polya, la resolución de problemas es una habilidad práctica que se adquiere justamente resolviendo problemas. Sin embargo, no es fácil precisar con sentido práctico el significado de un verdadero problema, de tal manera que con frecuencia se hace difícil decidir de antemano si una determinada situación es o no un problema para cierta persona.

Por lo tanto, ha sido necesario establecer algunas condiciones, como las que se presentan a continuación, que permiten caracterizar si una situación es, para alguien, un verdadero problema.

- En primer lugar, debe existir un propósito deseado y claramente definido que se conoce conscientemente.

- En segundo lugar, el camino para alcanzar tal propósito se encuentra bloqueado y los patrones fijos de conducta de la persona, sus respuestas habituales, no son suficientes para romper ese bloqueo.

- Por último, tiene que haber deliberación. Esto es, la persona toma conciencia del problema, lo define más o menos claramente, identifica varias hipótesis o soluciones posibles, y comprueba su factibilidad.

De acuerdo con estas condiciones, en la resolución de un problema matemático es fundamental que se fije, en primer lugar, lo que se pregunta y también que haya motivación para contestar dicha pregunta. El tema de si se trata de un verdadero problema o no se dilucida teniendo en cuenta la segunda condición. Luego se requiere deliberar para poder establecer con seguridad si se tiene la respuesta correcta, caso en el cual el problema ya habría sido resuelto.

Al respecto, Polya sostenía que al estudiar los métodos de resolución de problemas se percibe otra de las dos facetas de las matemáticas. En efecto, una de ellas corresponde a la ciencia rigurosa presentada a la manera euclidiana como conocimiento sistemático y deductivo. En cambio las matemáticas en via de formación aparecen como una ciencia experimental e inductiva. En este caso, señalaba que "las matemáticas *in statu nascendi*, en el proceso de ser inventadas, nunca han sido presentadas al estudiante, ni incluso al maestro, ni al público en general."(Polya, 1972, p. 9).

A partir de estas consideraciones y con fundamento en su experiencia en la enseñanza de las matemáticas en diversos niveles y apoyado en un serio y largo estudio de los métodos de resolución, propuso el, llamado por algunos autores, método heurístico que consta de las ya conocidas cuatro etapas necesarias para resolver un problema, a saber: comprender el problema, concebir un plan para resolverlo, ejecución del plan y finalmente, examinar la solución obtenida.

Con relación a la importancia de la resolución de problemas, el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) sostiene que frente a unas condiciones de vida que cambian tan rápidamente, lo único predecible es que las cosas serán diferentes hacia el futuro y por lo tanto la capacidad de ajuste y solución de los propios problemas es de importancia primordial. En consecuencia, es necesario enseñar a los estudiantes a formular y resolver problemas en los cuales participe una reflexión cuantitativa. Cuando avancen a los estudios superiores o lleguen al ejercicio profesional, tendrán que ser capaces de resolver los problemas que les plantee la educación avanzada o la profesión que ejerzan. La educación debe estar orientada para capacitarlos para ese propósito.

Capítulo 2

El camino hacia una visión estructural abstracta de las matemáticas

Introducción

Este capítulo se inicia con la presentación del estado de las matemáticas clásicas a comienzos del siglo XIX y se habla también de la caracterización de las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los respectivos objetos de estudio. En este contexto, se plantean los propósitos y los condicionamientos que obedecían a las exigencias impuestas por el progreso de la ciencia y la tecnología, tanto en los diversos campos de las matemáticas como en los propios métodos de cálculo. Se hace referencia a la incorporación progresiva de los métodos matemáticos en la mecánica y en las ciencias naturales y la forma cómo los logros de éstas acrecentaron las demandas de la producción matemática y de sus aplicaciones y cómo más adelante, en la primera mitad del siglo XIX, se pone en evidencia poco a poco un extraordinario cambio en sus conceptos, temáticas y simbolismo.

Teniendo en cuenta que en el estudio de la evolución de las matemáticas resulta de primordial interés analizar las principales fases a través de las cuales el simbolismo algebraico elemental pudo alcanzar un grado de desarrollo que le permitiría acercarse al estado actual de madurez, y cómo la carencia de un simbolismo eficaz constituiría un obstáculo para el progreso de las matemáticas, en este capítulo se estudian principalmente los aportes de los principales reformadores del álgebra británica, así como las razones de estos emprendimientos. De la misma manera se estudian las condiciones y concepciones que orientaron el desarrollo del álgebra simbólica. En otras palabras, se hace referencia a los interrogantes que dieron origen a la reforma del álgebra emprendida por los matemáticos ingleses y la manera cómo intentaron justificar y garantizar la validez de las operaciones algebraicas. Se analizan las concepciones de Peacock, como el personaje más influyente, planteadas en su obra "*A treatise on algebra*" y el significado y los alcances del "*principio de permanencia de las formas equivalentes*" y los principios a partir de los cuales se hizo su formulación.

Se consideran también las concepciones y la obra de De Morgan, como uno de los defensores más importantes de las ideas de Peacock y las inquietudes en torno a la idea de una generalización del álgebra simbólica.

Al examinar el papel de la obra de Peacock y de la escuela británica en la emergencia de una mentalidad axiomática surgen interrogantes acerca de cómo entender, de manera adecuada, el alcance de los planteamientos de Peacock y sus seguidores sobre el álgebra simbólica, tratando de dilucidar las posibles relaciones con los enfoques formalistas y axiomáticos y con el enfoque abstracto y estructural del álgebra moderna.

Finalmente, se hace referencia a un tema que ha sido fundamental, no solamente para el desarrollo del pensamiento matemático, sino para la ciencia misma. Se trata del hecho de que entre la matemática clásica y la matemática moderna se enlazan intuición y rigor lógico y cómo, al acercarse al enfoque estructural de la matemática moderna, el llamado criterio de evidencia que con ellos está involucrado, entra en crisis por cuanto poco a poco los matemáticos llegaron a la convicción de que, en esta disciplina, no tiene importancia la consideración de la naturaleza de los objetos, sino las relaciones entre objetos indefinidos y las reglas que rigen las operaciones entre ellos. Este proceso de cambio de concepción, denominado de desontologización, posibilitaría el paso a las estructuras como nuevos objetos de la matemática moderna.

2.1. Una visión panorámica de las matemáticas clásicas a principios del siglo XIX

Una parte importante de las matemáticas ha surgido motivada por la necesidad de proporcionar modelos que permitan resolver los problemas que plantean las otras ciencias y disciplinas; pero con el paso del tiempo se ha ido imponiendo y transformando en fuerza esencial del desarrollo de las matemáticas "*el gusto de inquirir*", heredado de los griegos, que ha llevado a que la investigación en matemáticas esté estimulada por resolver los propios problemas generados por el apremio de una fundamentación rigurosa, "*la necesidad de conocer la verdad, la curiosidad intelectual y la atracción por los enigmas*" (Dieudonné, 1987).

Al respecto hay que destacar el hecho esencial de que en todos sus pasos y etapas las matemáticas no han perdido el contacto con el mundo empírico. Al contrario, dicho contacto se ha realizado de las más diversas formas y en distintos casos, y aún sus construcciones más generales y, por tal razón más alejadas del lenguaje intuitivo del común, resultan de máxima utilidad para el conocimiento profundo de la naturaleza. Hecho este tan esencial que el mismo Dieudonné lo pone de presente en su obra "*Panorama de las matemáticas puras*", cuando al finalizar la presentación de cada una de las teorías matemáticas, según "*La elección bourbakista*", en una sección específica, hace referencia a las relaciones con las ciencias de la naturaleza y que al mismo tiempo confirma que las complejas y fecundas relaciones que existen entre las matemáticas y la realidad empírica no pueden confinarse en un esquema único predeterminado, ni tampoco disminuye el poder interpretativo de la realidad, que tienen las matemáticas, por la generalidad siempre creciente de sus modernas teorías, ni por el carácter aparentemente artificioso de los objetos que estudian. La fuerza que moviliza al conocimiento matemático contemporáneo hacia concepciones cada vez más audaces y menos intuitivas no pretende aislarlo de la realidad, sino darle capacidad de captar las razones ocultas de las leyes enunciadas por los principios del conocimiento matemático. En matemáticas no se construye sistemas de conceptos alejados de los de la vida cotidiana por simple deseo de evasión, sino que se trabaja obedeciendo una exigencia esencialmente racional, la cual obliga a penetrar cada vez más profundamente el complejo patrimonio de nociones fruto del trabajo anterior y que al mismo tiempo abastecen de instrumentos cada vez más eficaces a quienes se esfuerzan por teorizar y transformar el mundo en el cual se vive y se obra, teniendo en cuenta que la manera de realizar la esencia de lo humano es a través del razonar que permite el juicio. Juicio para atribuirle un predicado a cada cosa; para asociar la cosa con la idea, lo particular con la forma, el género con la especie. Pero también juicio para pensar en la idea, la forma y la especie en si mismas. Palabra para comunicar pero también palabra en función de ella misma, respondiendo a la pulsión pura de lucidez. Como ninguna otra ciencia, las matemáticas responderían a esta doble naturaleza del espíritu humano.

Las razones fundamentales del progreso en el conocimiento matemático y en el conocimiento científico en general son la curiosidad, el deseo de conocimiento y la imaginación creadora; pero estas tendencias intelectuales naturales se intensifican y agudizan, en muchos casos particulares, por las necesidades materiales del ser humano. Por medio de la actividad científica el ser humano ha aprendido a describir de manera objetiva el mundo que lo rodea, con precisión y con independencia de sus deseos; a clasificar los resultados de la observación; a realizar experiencias controladas a establecer relaciones entre las variables que intervienen en los distintos procesos naturales; a buscar explicaciones de los fenómenos naturales y de las experiencias mediante la creación de hipótesis y la elaboración de teorías a partir de un pequeño número de proposiciones primitivas y de definiciones operacionales que vinculen los hechos observables con los símbolos de la teoría; a verificar sus hipótesis y teorías, deduciendo consecuencias lógicas de las mismas y verificándolas luego experimentalmente y, en consecuencia, a hacer predicciones.

La actividad matemática y científica le ha permitido al ser humano liberarse de mitos y dogmatismos que lo apasionaban, lo aterrorizaban y lo empequeñecían. A partir del conocimiento de las leyes que gobiernan el mundo físico y mediante la modelación matemática, el ser humano a la vez que aprende a ubicarse mejor en el mundo al cual pertenece, adquiere también un poderoso medio para interpretar los fenómenos naturales y utilizarlos para su propio beneficio.

En consecuencia, las matemáticas y la ciencia en general contribuyen, quizá más que cualquier otro proceso humano, a hacer lo más libre posible al ser humano, tanto desde el punto de vista mental como material.

Al finalizar el siglo XVI, el progreso de la ciencia y de la tecnología tenía como componente fundamental los resultados logrados en el álgebra, la trigonometría, la geometría y los métodos del cálculo.

Durante el siglo XVII fueron incorporados progresivamente los métodos matemáticos en la mecánica y en las ciencias naturales en general. Así fue posible expresar, en términos matemáticos, las leyes de la caída de los cuerpos de Galileo y las del movimiento de los planetas de Kepler. Más tarde Newton pudo formular y demostrar la ley de gravitación universal.

A medida que las ciencias naturales han alcanzado mayores logros, se han acrecentado también las demandas de producción matemática y de sus aplicaciones, hecho este que se manifestó con mayor énfasis en el siglo XVII, época de profundos cambios cualitativos matemáticos tales como los aportes de Descartes y Fermat en la geometría analítica, los de Newton y Leibniz en el cálculo diferencial e integral, los de Desargues y Pascal en la geometría proyectiva, los de Ja. Bernoulli en probabilidades, entre otros.

Con los cambios en la vida económica y social de la Europa del siglo XVIII, manifestados en fenómenos como la revolución industrial, la formación del mercado mundial y las actividades asociadas a ellos como la navegación, la construcción de naves, la técnica militar, la hidroenergética, la termotécnica y demás, el ritmo de desarrollo de la ciencia aumenta aceleradamente. En este complejo de las ciencias físico-matemáticas surgen los problemas propios de la creación del aparato matemático de investigación de los fenómenos electromagnéticos y de los problemas de la mecánica y la astronomía que son estudiados por eminentes matemáticos (Euler, Lagrange, Laplace, D'Alembert, Dirichlet, Monge, Legendre, Clairot, Ja. Bernoulli, Hamilton, Fourier, Gauss y muchos otros). Se inician entonces las investigaciones en campos diversos de la matemática, como el álgebra y la teoría de números y, en el análisis matemático, la teoría de funciones, las ecuaciones diferenciales y el cálculo de variaciones.

A continuación se muestra un breve panorama de las matemáticas a principios del siglo XIX.

La aritmética y el álgebra permanecían separadas a manera de "*compartimentos estancos*" y cumplían reglas operatorias poco comprensibles. En la aritmética y aún ligados a las cantidades, se estudiaban los números naturales y los enteros, las fracciones, los números algebraicos y los enteros módulo n. Los números reales y complejos, antes que objetos de estudio eran herramientas empíricas.

El álgebra comprendía la teoría de ecuaciones con números desconocidos o "*incógnitas*" que representaban números reales o complejos. Antes que constituir una disciplina era, más bien, una herramienta para resolver ecuaciones y expresar funciones. El único progreso notable alcanzado desde la época de los babilonios había sido la resolución algebraica o por radicales de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, por los matemáticos italianos del siglo XVI. Este hecho estimuló la ilusión de hallar, en forma semejante, métodos que permitiesen resolver algebraicamente cualquier ecuación de grado superior.

En geometría todo continúa inmodificable, es decir, permanece el predominio de la geometría griega o geometría métrica euclidiana de los *Elementos* y con ella la concepción de las figuras que, en calidad de imágenes de sus formas ideales del mundo platónico de las ideas, se mantenían conectadas con el mundo tangible. En los últimos tiempos de aquella época solo se manifestaba como avance el nacimiento y desarrollo inicial de lo que sería en el futuro la geometría proyectiva que surge con las reglas de la perspectiva en el Renacimiento y se fortalece con lo métodos de la geometría descriptiva de Monge, de finales del siglo XVIII. En el aspecto teórico es importante el aporte de Desargues y luego con la obra de Poncelet se establecen las bases de la geometría proyectiva, al distinguir las propiedades métricas de las propiedades proyectivas de las figuras.

El siglo XVIII fue, en especial, el siglo del auge del cálculo infinitesimal y de los métodos infinitesimales que habían hecho posible el triunfo de los “*Principia*” de Newton. Este cálculo, cuyos métodos se reducían a reglas de carácter algorítmico que correspondían al cálculo diferencial, integral y de variaciones, fue sistematizado en los tratados de Euler y aplicado exitosamente por Lagrange y por Laplace.

Según los objetos de estudio, el análisis se dividía en: *análisis real para las funciones sobre los reales, el análisis complejo para las funciones sobre los complejos, y el análisis funcional para los operadores diferenciales, integrales y variacionales que actuaban sobre esas funciones*.

El rasgo prominente de los métodos infinitesimales de esa época era la carencia de todo fundamento de rigor. Afortunadamente la situación cambió en el siglo XIX hasta tal punto que este se constituyó en el siglo del rigor en el cálculo.

Con el propósito de explicar el concepto histórico y epistemológico de "rigor", resulta oportuno hacer referencia al caso que plantea Moreno en su artículo de 1997: "*Weierstrass: Cien años después*", sobre la fundamentación del análisis real en el siglo XIX, en el cual se menciona el concepto de función continua. Como es obvio, fueron protagonistas Cauchy, durante la primera mitad del siglo, y Weierstrass en la segunda. Cauchy organizó los resultados logrados por sus predecesores, entre los cuales sobresale Euler. Observa Moreno que con el fin de recuperar de manera clara y rigurosa muchos de los resultados que luego se convertirían en teoremas del cálculo, Cauchy empezó por establecer definiciones claras de sucesión convergente, de función continua, de integral de una función continua, entre otras. La intensa investigación sobre los procesos de derivación e integración afirma, poco a poco fue dando paso a las investigaciones sobre el concepto general de función. De esta manera surgieron resultados como el teorema del valor intermedio de Cauchy-Bolzano, para funciones continuas definidas en un intervalo. En este caso, advierte, que se debe tener en cuenta que Bolzano comprendió que dicho teorema requería de una construcción rigurosa de los números reales.

Haciendo énfasis en el sentido profundamente histórico del rigor, recuerda el enunciado del teorema del valor intermedio aceptado en aquella época: *Una función continua que cambia de signo en un intervalo, deberá tener una raíz en dicho intervalo*.

Agrega que es fácil darse cuenta que a este enunciado le falta precisión, lo cual hace parte del medio ambiente de rigor de la época. Luego compara las definiciones de función continua propuestas por Cauchy y Weierstrass.

La que se halla en el curso de Análisis de Cauchy de 1821, es: $f(x)$ *se dirá continua si los valores numéricos de las diferencias* $f(x+\alpha)-f(x)$ *decrecen indefinidamente cuando* *decrece indefinidamente el incremento* α.

Luego menciona la definición propuesta por Weierstrass en 1874: *Diremos que una cantidad y es una función continua de x si, una vez que hayamos elegido* $\varepsilon > 0$, *podemos demostrar que existe* $\delta > 0$ *tal que, para cualquier valor entre* $x_0 - \delta$ *y* $x_0 + \delta$, *el valor correspondiente de y está entre* $y_0 - \varepsilon$ *y* $y_0 + \varepsilon$.

Estas dos definiciones se pueden comparar también con la que aparece en la tercera edición del texto Principios de Análisis Matemático de Rudin de 1980 en los términos siguientes: *Supongamos que* X *y* Y *son espacios métricos,* $E \subset X$, $p \in E$ *y que* f *aplica* E *en* Y. *En estas condiciones, se dice que* f *es continua en* p *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$, *tal que*

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

para todos los puntos $x \in E$, *para los cuales* $d_X(x, p) < \delta$.

Claramente se observa que hay diferencias entre ellas, lo cual refleja la diferencia de concepciones sobre el tratamiento del tema.

Señala entonces, que la sistematización debida a Cauchy, supone dado el continuo numérico, por lo cual, una vez introducida la noción de sucesión, no se puede distinguir entre sucesión convergente y lo que hoy se conoce como sucesión de Cauchy, y esto afirma, lo evidenció en la demostración del teorema del valor intermedio. En cambio, dice Moreno, que Weierstrass fue capaz de comprender como Bolzano, antes que él, que el esclarecimiento conceptual de este teorema, y de muchos otros, sólo sería posible mediante una construcción rigurosa de los números reales. Entonces dio una demostración basada en lo que hoy en día se conoce como el teorema de Bolzano-Weierstrass (1874): *Toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación.*

Moreno además hace referencia específica al siguiente resultado enunciado y demostrado por Cauchy en sus lecciones de análisis de 1821: *Si* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *es una sucesión de funciones continuas tal que para cada* x *de* E, *la sucesión* $f_n(x)$ *es convergente, entonces la función*

$f:\ E \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) = \text{lím}\, f_n(x)$ *para cada* $x \in E$*, es continua*.

Y advierte que, de acuerdo con las interpretaciones actuales, el resultado es falso. Lo cual se verifica tomando como ejemplo la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, $E = [0,1]$. En este caso la función límite, f, es $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 1$, la cual no es continua en $x = 1$, a pesar de que cada una de las funciones f_n es continua (por hipótesis).

Aquí se pregunta ¿cómo pudo Cauchy cometer un error de esa naturaleza?

La única respuesta posible, opina Moreno, es que a su imagen conceptual de función continua Cauchy le atribuía propiedades que no aparecían de manera explícita en su definición.

Observa que, posteriormente, en sus conferencias de 1861, Weierstrass enuncia el siguiente resultado: *Si* $(f_n)_n$ *converge uniformemente a* f*, y cada* f_n *es continua, entonces* f *es continua.*

Esto era precisamente lo que desconocía Cauchy cuando incurrió en el mencionado error.

Lo anterior permite concluir que el rigor matemático es profundamente histórico, es decir, ha evolucionado con las matemáticas. En tal proceso se puede observar que las exigencias corresponden siempre a una concepción de los objetos matemáticos implicados.

Como rasgo principal de esta época, cada rama de las matemáticas estaba caracterizada por la naturaleza de los respectivos objetos de estudio, es decir, la ontología del objeto era la clave de la significación como en la matemática griega. La matemática clásica estudia las propiedades distintivas de objetos de una misma clase. La matemática responde a la pulsión de predicar sobre la cosa a partir de reconocer la idea o la forma o el género, mediante un principio de identidad.

Para ampliar la idea sobre la modalidad clásica de estudio ontológico de objeto es conveniente tener en cuenta la investigación de Gálvez sobre “El carácter matemático de la noción de continuidad en Aristóteles”. Al estudiar los trazos físicos como puente entre la forma de objetos sensibles y la forma de objetos matemáticos, recuerda precisamente que Aristóteles condiciona la existencia de los seres matemáticos como correlatos de seres sensibles o espaciales y agrega, citando a Panza, que “como la meta de la geometría de Euclides es ofrecer una objetivación de un orden primitivo, como lo es el orden espacial, los objetos de Euclides deben existir como posibilidad real, en tanto que correlatos de un mundo sensible, y no meramente como posibilidad lógica” (Gálvez, 2005, p. 60). Hace referencia además a la existencia de un vínculo establecido inicialmente entre la definición aristotélica de la continuidad local, entendida como la definición de una forma de seres sensibles, y la geometría de Euclides, entendida como una teoría de formas matemáticas de objetos sensibles.

Al considerar la prioridad ontológica de la recta en la geometría de Euclides, plantea que el tema fundamental en este caso es establecer que la continuidad aristotélica es el modo de ser de los objetos de la geometría de Euclides (Gálvez, 2005, p. 62). Más adelante afirma que “Se pueden señalar cinco *objetos* elementales entre los cuales se nota una jerarquía desde el punto de vista ontológico en la geometría de Euclides: el punto, la línea, el círculo, la línea recta y la superficie; ellos aparecen como los objetos elementales de esta teoría y como el centro de las siete primeras definiciones”. Así mismo señala “que estas definiciones hablan de la naturaleza de objetos y que ellas juegan un rol en la trama deductiva de Euclides, en tanto que sugieren una manera de asociar formas físicas a formas ideales a través del trazo físico” (Gálvez, 2005, p. 66). Finalmente concluye que las anteriores razones permiten juzgar la noción de continuidad de Aristóteles como un legítimo punto de partida en la historia del continuo y la continuidad en matemáticas. La puerta de ingreso de la noción de continuidad a una teoría matemática la abre Euclides de Alejandría y la persistencia de esta noción se podrá juzgar en virtud de que sólo hasta la creación del cuerpo de los números reales se podrá pensar en el continuo como un objeto matemático, independiente del referente geométrico e intuitivo. Este hecho lo reafirma al final de la tesis planteando que sin desconocer el valor epistémico de todo el andamio matemático levantado desde Aristóteles hasta el siglo XIX, "desde el punto de vista fundacional y sustancial, la continuidad aristotélica, fue dominante hasta los trabajos de Dedekind y Cantor" (Gálvez, 2005, p. 205).

El siglo XIX marca un período conocido como el de las matemáticas modernas. En la primera mitad de este siglo comenzó a evidenciarse un extraordinario cambio en sus conceptos, en sus temáticas y aún en su simbolismo.

Pero antes de hablar de las peculiares características del desarrollo de las matemáticas, es conveniente mostrar un breve panorama de las mismas a principios del siglo XIX.

2.2. La corriente abstractiva y las características del álgebra simbólica británica

Los aportes de la escuela británica al desarrollo de las matemáticas desde la iniciación del siglo XIX fueron de primordial importancia. Estos aportes fueron el resultado de los esfuerzos por dar respuesta a los problemas que planteaban las matemáticas en aquella época y por superar la parálisis que había sufrido el trabajo de los matemáticos ingleses durante el siglo XVIII debido, por una parte, a las críticas de Berkeley a los fundamentos del cálculo diferencial y por otra, a la influencia de Newton contra la obra y la notación de Leibniz y sus discípulos en la Europa continental. En efecto, hacia 1800 la situación en la que se encontraban las matemáticas era motivo de muchas expresiones de insatisfacción que estaban sumergidas en un todo de nuevas creaciones del álgebra y el análisis. Este estado de cosas se ponía de manifiesto en el uso libre de varios tipos de números reales y aún de números complejos, sin la definición precisa de los mismos y sin la justificación de las operaciones respectivas. Pero las mayores inquietudes provenían del hecho de que las letras se manipulaban como si tuvieran las propiedades de los números enteros, pese a lo cual tenían validez los resultados de tales operaciones cuando las letras eran sustituidas por números cualesquiera. La ausencia del desarrollo de la lógica de los diversos tipos de números, no permitía entender que estos tenían las mismas propiedades formales de los enteros positivos y de la misma manera, que expresiones literales que simplemente se mantenían para cualquier clase de números reales o complejos debían poseer las mismas propiedades. En otras palabras, esto significaba que el álgebra ordinaria era únicamente aritmética generalizada. La situación se presentaba como si el álgebra de expresiones literales poseyera una lógica en sí misma, la cual garantizaba su efectividad y corrección. Estaba planteado entonces el problema de justificar las operaciones con expresiones literales o simbólicas.

Los matemáticos de las islas británicas tradujeron en el año de 1816 un texto de carácter didáctico escrito por Silvestre Francisco Lacroix, en el cual se exponía, utilizando la notación de Leibniz y sus sucesores, todos los resultados matemáticos de ese momento relacionados con el análisis, lo cual tendría consecuencias decisivas para la matemática británica y, desde luego para toda la matemática[1]. Entre los jóvenes matemáticos de esa época (1820) destacaban J. F. W. Herschel, Charles Babbage y George Peacock, quienes crearon la Analytical Society of Cambridge, con el propósito de promover un mayor acercamiento con la matemática del continente europeo. Guiados por el pensamiento de Leibniz, tanto ellos como la mayoría de los matemáticos británicos, desarrollaron su trabajo haciendo especial énfasis en el problema del simbolismo formal operatorio. Ellos lograron darse cuenta de que la elección adecuada de un simbolismo hacía posible el desarrollo de la matemática, en tanto que la ausencia del mismo sería motivo de su estancamiento. En consecuencia,

[1]“Corresponderá a Leibniz dar carácter operacional, de tipo algebrizante, al cálculo infinitesimal, a toda la obra anterior, convirtiéndola en instrumento fundamental tanto de la matemática como, sobre todo, de la ingeniería y de la técnica. Por ello, de todo el progreso humano en cuanto a civilización, realizado en los dos últimos siglos. Para lo cual Leibniz no tendrá nada más que inventar una notación adecuada en la que traducir las reglas y proposiciones obtenidas por sus predecesores” (De Lorenzo, 1971).

la búsqueda de simbolismos idóneos, el manejo formal de los mismos y su ampliación a campos de objetos cualesquiera son las características y las temáticas propias de esa época. Durante el siglo XIX, el álgebra se enriqueció con la creación de nuevos objetos como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas cuadráticas binarias, los números hipercomplejos, las transformaciones, las sustituciones y las permutaciones. Al romperse los cánones clásicos del álgebra, con criterio cada vez más abstracto, estos entes matemáticos se combinarían mediante operaciones y como resultado de la difusión del enfoque simbólico y de un proceso también de aritmetización como en el caso de los números complejos, por ejemplo, el concepto de operación experimentaría después una ampliación, dando lugar al concepto básico de "*ley de composición*"[2], que pasó a ser el foco de investigación en álgebra y se aislaron las propiedades fundamentales como conmutativa, distributiva y asociativa, que la caracterizarían.

A partir de 1830 se inició, en Gran Bretaña, un movimiento orientado a reformar la enseñanza y modificar las notaciones introducidas por Newton, las cuales eran consideradas anticuadas. La reforma del álgebra emprendida por los miembros de la Analytical Society de Cambridge como Peacock, Herschel, Babbage, De Morgan, Hamilton y Boole, entre otros, tenía como propósito tratar de justificar las operaciones algebraicas que había que realizar en expresiones simbólicas o literales, ya que se carecía de explicaciones convincentes acerca de la lógica, el sentido y los referentes de dichas operaciones. Así entonces, los matemáticos ingleses iniciaron la reforma encaminada a dilucidar y desarrollar una cierta lógica que pudiera garantizar la validez de las operaciones algebraicas estableciendo el llamado "*principio fundamental de la permanencia de las leyes formales*", según el cual "expresiones iguales indicadas en los términos generales de la aritmética universal han de

[2]La noción de ley de composición resultaría ser fundamental para desarrollar las principales estructuras algebraicas que surgirían posteriormente como grupo, subgrupo, subgrupo invariante, anillo, cuerpo, ideal, entre otras.

seguir siendo iguales si las letras dejan de designar «cantidades» simples, y por tanto también si se altera la interpretación de las operaciones”. Así para el caso $ab = ba$, debe mantenerse la validez cuando a y b son números complejos. De la misma manera, por ejemplo, dado que $2 \times 3 = 3 \times 2$ de aquí se deduce de inmediato, de acuerdo con el “principio de permanencia”, que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ [3].

Se considera como pionero de este movimiento al profesor de la universidad de Cambridge, Robert Woodhouse. En su tratado titulado *Principles of analytical calculation* y publicado en Cambridge en 1903, explica detalladamente la notación diferencial que había propuesto Leibniz y de manera insistente sugiere su utilización. Sin embargo, con rigor, critica los métodos utilizados por los discípulos de Leibniz por el uso de frecuentes suposiciones con relación a principios no evidentes. Se afirma que fue el matemático inglés que por vez primera hizo uso del principio de “la permanencia de la forma”.

Pero el miembro más influyente de la nueva escuela fue, sin duda, George Peacock, quien participó activamente en la modificación de los estatutos de la universidad, en la fundación de sociedades científicas y sobre todo, fue uno de los mayores impulsores de las reformas matemáticas durante la primera mitad del siglo XIX que desempeñó un papel de mucha importancia también para la reforma del álgebra en la Gran Bretaña, hasta tal punto que se considera como fecha oficial del nacimiento del álgebra simbólica el año de 1830, cuando se publicó su tratado de álgebra titulado “*A treatise on Algebra*”. En aquella época el álgebra se entendía, en términos de la concepción de Newton, como una “aritmética universal”, es decir, como una ciencia de la cantidad en la que se trataba, sobre todo, de estudiar ecuaciones. Esta concepción demasiado estrecha, particularmente no permitía comprender la aparición

[3] Como se verá en el capítulo 4, la necesidad de demostrar este tipo de resultados incitó a Dedekind, hacia 1870, a crear su teoría del sistema de los números reales, introduciendo el concepto de cortadura ya que, según él, en los Elementos de Euclides no se encuentra axioma alguno de completitud para magnitudes y sobre todo, porque de acuerdo con su postura logicista y su exigencia de rigor demostrativo total “lo que es demostrable, no debe aceptarse en ciencia sin demostración”.

de los números negativos y complejos, indispensables para el desarrollo del álgebra. A pesar de que la interpretación geométrica de los números complejos constituyó un paso importante para aclarar estas nociones, al permitir asociar, a todos los símbolos del álgebra de aquel momento, referentes tomados de la geometría plana, planteaba sin embargo el problema de saber si el álgebra era una ciencia dependiente de la geometría, dado que los símbolos algebraicos solo adquirían significado al interpretarlos geométricamente. En esta situación, en la que surgió el álgebra simbólica, la interpretación geométrica de los números complejos tenía como propósito garantizar el carácter universal del álgebra, poniendo de presente a la vez los fundamentos que le otorgaban legitimidad a dicha interpretación (Ferreirós, 1990).

El propósito de la obra de Peacock era justificar una concepción más amplia del álgebra intentando darle una estructura lógica a la manera de los *Elementos de Euclides*, esto es, entendiendo el álgebra como una *ciencia abstracta hipotético–deductiva*[4] volviendo a tomar y desarrollar ideas formalistas de la matemática continental, es decir, diferenciando los aspectos semántico y sintáctico del álgebra, al tratar por una parte la teoría y por otra las interpretaciones, para justificar las operaciones con expresiones literales que podían mantenerse para números negativos, irracionales y complejos. Todo lo cual llevaría a desarrollar la *tendencia a la abstracción* como una característica del trabajo de los matemáticos ingleses de esa época.

Peacock comenzó estableciendo una distinción entre el álgebra aritmética y el álgebra simbólica, con lo cual pudo elaborar un conjunto de reglas que se aplicarían a los números y de la misma manera se aplicarían las correspondientes reglas para las magnitudes en general. El álgebra aritmética trataba con símbolos que representaban únicamente números naturales y en consecuencia los símbolos $+$ y $-$ eran utilizados en el sentido habitual;

[4]Por esta concepción que, por primera vez, trata de presentar el álgebra como *formalismo puro* inspirado en el *modelo euclideano*, Peacock ha sido llamado el “*Euclides del Algebra*”. (Ver: Boyer, 1986, p. 711; Bell, 2002, p. 190)

así mismo la expresión $a-b$ solo tenía sentido cuando $a > b$; se entendía también que $a^m a^n = a^{m+n}$ tenía validez siempre y cuando m y n fueran números naturales, es decir, eran permitidos únicamente operaciones que condujeran a enteros positivos. En el caso del álgebra simbólica, las reglas de las operaciones del álgebra aritmética ya no se limitaban solo a los enteros positivos sino que se extendían y aplicaban sin restricción a todo el conjunto de los números negativos, racionales, irracionales y complejos. La concepción de Peacock con relación al álgebra se sintetiza de la siguiente forma: "todos los resultados obtenidos en el álgebra aritmética, cuyas expresiones son generales desde el punto de vista de la forma, pero particulares, específicas, al nivel de los valores, son también resultados en el álgebra simbólica, caso en el cual, son generales tanto en la forma como en el valor". En consecuencia, en el álgebra simbólica, la expresión general $a-b$ es válida para valores cualesquiera de a y de b, y en el mismo sentido tienen validez las expresiones $(a+b)^n$ y $a^m a^n = a^{m+n}$, para toda m y para toda n. Peacock sustentaba la validez de estos resultados utilizando como argumento el "principio de la permanencia de la forma" el cual lo formula en el "Informe sobre los progresos recientes y el estado actual de ciertas ramas del análisis", publicado en el año de 1833, con el que se inicia la divulgación de los resúmenes de los progresos científicos que se llevaban a cabo en el momento y que desde entonces aparecerían en las *Transactions of the British Association*.

La concepción de Peacock sobre el álgebra simbólica hace énfasis, por una parte, en el carácter ilimitado del símbolo, tanto en lo que se refiere al valor como a su representación, y por otra, en la validez, para todos los casos, de las operaciones que se efectúan con dichos símbolos, cualesquiera que sean. Afirma además que en el álgebra las leyes de combinación de los símbolos operan de tal manera que coinciden universalmente con las del álgebra aritmética, cuando los símbolos son cantidades aritméticas y las operaciones que se efectúan con los mismos llevan el mismo nombre que en el álgebra aritmética. Propone entonces que en el álgebra simbólica:

1. Los símbolos son ilimitados tanto en valor como en representación.
2. Las operaciones sobre ellos, cualesquiera que sean, son posibles en todos los casos.
3. Las leyes de combinación de los símbolos son de tal clase que coinciden universalmente con las del álgebra aritmética cuando estos símbolos son cantidades aritméticas, y cuando las operaciones a las que se sujetan son llamadas con los mismos nombres que en el álgebra aritmética.

Peacock creyó que a partir de estos principios era posible deducir el principio de permanencia de la forma mediante el cual se evitaría la absoluta arbitrariedad al ampliar las operaciones para casos cualesquiera:

> Cualesquiera formas algebraicas que son equivalentes, cuando los símbolos son generales en forma pero específicos en valores (enteros positivos), serán equivalentes de la misma manera cuando los símbolos son generales tanto en valor como en forma.

Este principio da a entender que, independientemente de la naturaleza de los objetos o de los números a los que hagan referencia las operaciones, las leyes del álgebra no cambian y lo usó para justificar en particular las operaciones con números complejos. No obstante este principio falla en su lógica de base, por cuanto se podrían, por ejemplo, enunciar propiedades específicas de los números pares en forma simbólica y pretender luego que esos enunciados simbólicos fueran generales. Tratando de proteger su conclusión utilizó la frase: “cuando los símbolos son generales en forma”. De esta manera era posible no establecer propiedades especiales de números enteros particulares en forma simbólica e insistir en la generalidad de estos enunciados simbólicos. Por ejemplo, la descomposición de un entero compuesto en producto de números primos, aunque expresados simbólicamente, no tenía validez en condición de enunciado del álgebra simbólica. En otras palabras, el principio aprobaba de hecho lo que era correcto y evidentemente empírico, pero que todavía no había sido establecido lógicamente. En una segunda edición de su tratado (1842-1845), Peacock desarrolla aun más la anterior argumentación e introduce en ella una ciencia formal del álgebra que comprende, entre otras cosas, la formulación de las propiedades fundamentales como: la asociatividad y la conmutatividad para la adición y la multiplicación, y la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición. De acuerdo con su punto de vista, en primer lugar, las operaciones que se deben realizar están sugeridas por el conjunto de las leyes algebraicas y, en segundo lugar, las operaciones tienen sentido siempre y cuando se sometan a tales leyes. En la segunda edición de su *A treatise on Algebra,* Peacock volvió a reafirmar este principio, y aquí también presenta el álgebra como una ciencia formal, estableciendo, que al igual que la geometría, el álgebra es una ciencia deductiva. Así entonces, sus procesos tienen que estar basados sobre un enunciado completo del cuerpo de las leyes que expresan las operaciones usadas en el proceso. Al menos para la ciencia deductiva del álgebra, los símbolos para las operaciones no tienen sentido diferente de aquel dado por las leyes.

En cuanto a la interpretación de los símbolos algebraicos, referida anteriormente, Ferreirós advierte que no se debe confundir el conjunto de las leyes que forman el álgebra simbólica con ninguna de sus interpretaciones, puesto que si se tiene en cuenta que el significado de los símbolos del álgebra es básicamente arbitrario, esta puede convertirse esencialmente en una ciencia de los símbolos y de sus combinaciones, construida según sus propias reglas y, en consecuencia, se puede aplicar tanto a la aritmética como a todas las otras ciencias por interpretación. Agrega además que, en dirección de esta definición, Peacock se dio cuenta con claridad de dos ideas que resultarían clave para los enfoques actuales, a saber:

1. Que la validez de los procesos deductivos que se realizan en un sistema algebraico no depende del carácter particular de los objetos estudiados, sino de las leyes de

combinación de los símbolos que los representan.

2. Que cualquier dominio dado puede ofrecernos una interpretación del sistema, siempre que sus objetos puedan operarse de modo conforme a dichas leyes de combinación.

Así mismo, como consecuencia de la difusión del enfoque simbólico, la noción de "ley de composición" se convirtió en el núcleo de la investigación en álgebra y de la misma manera se identificaron las propiedades básicas que la caracterizarían: conmutativa, distributiva y asociativa.

El nuevo enfoque tuvo dificultades para ser entendido, puesto que se consideraba paradójica la idea de otorgar cierta autonomía a un conjunto de símbolos. Personajes como Hamilton, por ejemplo, se opusieron durante mucho tiempo por cuanto, según su punto de vista, el álgebra, al igual que la geometría, debía concebirse como una ciencia y no como un simple conjunto de expresiones.

Augustus De Morgan fue uno de los matemáticos que desarrollaron el planteamiento de la llamada "álgebra simbólica", basado en la idea de que el álgebra es una ciencia abstracta que no trata necesariamente de relaciones cuantitativas y al igual que Boole introdujo métodos matemáticos en la lógica. Llevó mucho más lejos la teoría del álgebra como ciencia de los símbolos y las leyes de sus combinaciones. Escribió varios artículos sobre la estructura del álgebra en los cuales presento su visión al respecto y en su obra "*Trigonometría y álgebra doble*" de 1849, "con un carácter más pedagógico que teórico", se centró en una "interpretación particular del álgebra habitual" denominada "*álgebra doble*" o "*completa*", que hacía referencia al álgebra de los números complejos, en la cual elaboró de nuevo, de manera original, la interpretación geométrica de los números complejos surgida a principios del siglo, en la misma forma que Peacock lo había hecho, en 1845, con la publicación del segundo volumen de la segunda edición del "*Treatise on algebra*". El "*álgebra simple*" se refería al álgebra de los números negativos y antes de ella estaba la "*aritmética universal*" que comprendía el álgebra de los números reales positivos. De acuerdo con la concepción de De Morgan, el álgebra era una colección de símbolos carentes de significado y de operaciones definidas entre estos símbolos, tales como: 0, 1, $+$, $-$, $\times$, $\div$, $()^{()}$ y las letras del alfabeto. Las leyes que cumplían estos símbolos, como la conmutativa, la distributiva, la asociativa, la de los exponentes, la de los signos y expresiones como $b-b=0$, $b \div b=1$, entre otras, constituían las leyes del álgebra. Además puso en duda la validez de los números negativos, y en su libro "*Sobre el estudio y las dificultades de las matemáticas*" afirmaba que expresiones como $\sqrt{-a}$, que aparecerían en solución de algún problema, implicarían una inconsistencia o un absurdo. También consideraba que una expresión como $0-a$ es tan inconcebible como $\sqrt{-a}$ e insistía en que era absurdo considerar los números menores que cero.

El "principio de permanencia de la forma" de Peacock, presentado anteriormente, se apoyaba en los siguientes axiomas, que a mediados del siglo XIX, se reconocían como los axiomas del álgebra:

1. Cantidades iguales sumadas a una tercera dan cantidades iguales.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. $a+b=b+a$.
4. Iguales añadidos a iguales dan iguales.
5. Iguales añadidos a desiguales dan desiguales.
6. $a(bc)=(ab)c$.
7. $ab=ba$.
8. $a(b+c)=ab+ac$.

A pesar de que este principio hacía referencia al problema de por qué los varios tipos de números tenían las mismas propiedades de los números enteros, el propósito de Peacock, Gregory y De Morgan era el de hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos y, en consecuencia, la concebían como una ciencia de símbolos sin interpretación y con sus leyes de combinación, y con base en este punto de vista se sustentaba el supuesto de la permanencia de las mismas propiedades fundamentales para todos los tipos de números. Pero esta fundamentación además de ambigua era rígida, de tal manera que un paralelismo entre el álgebra aritmética y el álgebra general, en tal sentido de rigidez, amenazaría la generalidad del álgebra.

Para De Morgan la idea de una generalización del álgebra simbólica le parecía “a primera vista [...] algo así como símbolos hechizados, dando vueltas al mundo en busca de un significado”.

A pesar de todo, no tardó mucho tiempo para que estos nuevos planteamientos encontraran apoyo. Después de haber logrado superar sus primeras dudas, el mismo De Morgan, al igual que Gregory y Boole defendieron con firmeza el nuevo enfoque acorde con la idea de que el álgebra no era necesariamente una ciencia de la cantidad y que además, al margen del álgebra numérica clásica si era posible plantear sistemas algebraicos.

Según Ferreirós, parte de las dificultades que acompañaron en sus inicios al álgebra simbólica se originaron en el hecho de que la exposición de Peacock resaltaba demasiado la vía ascendente que mediante la generalización puramente formal pasaba del álgebra aritmética al álgebra simbólica y por el contrario, tenía en cuenta demasiado poco otra vía descendente, que “a partir de los principios del álgebra simbólica debía llevar a interpretaciones efectivas”. Agrega que, a raíz de todas las críticas recibidas, tanto Peacock como De Morgan, enfatizaron con más claridad la importancia de la noción de interpretación, y, de esta manera, De Morgan se convirtió en defensor decidido del nuevo enfoque, hasta tal punto que para 1835 criticaba el "conservadurismo" de Peacock, quien había manifestado ciertas dudas con relación al interés de considerar sistemas que no fueran análogos al álgebra numérica habitual y, por el contrario, De Morgan afirmaba la posibilidad, al menos teórica, de postular sistemas determinados por reglas arbitrarias siempre que sirvieran para alcanzar algún propósito deseable.

Posteriormente De Morgan inicia una serie de artículos dedicados, de manera más sistemática, a los principios del álgebra simbólica, para lo cual empezó abandonando la terminología de Peacock y se encaminó a hacer mayor énfasis en la importancia de la interpretación del sistema algebraico, sin que esto desvirtúe la interpretación habitual de que Peacock, Gregory, y De Morgan, en lo fundamental, sostuvieron la misma postura.

En este punto de la discusión, considerando las ideas de De Morgan en cuanto a que para ese momento era posible distinguir en el álgebra una parte técnica y otra lógica, entendiéndose la primera como el arte de usar símbolos bajo reglas que se prescriben como definiciones de los símbolos, independientemente de la otra y la segunda como la ciencia que investiga el método de dar significados a los símbolos primarios y de interpretar todos los resultados simbólicos subsiguientes, Ferreirós señala su desacuerdo con la interpretación de los planteamientos de De Morgan propuesta por Helena Pycior en un artículo de 1983, que reconoce como el mejor artículo dedicado exclusivamente a la obra algebraica de De Morgan (Pycior identifica el "álgebra técnica" con el "álgebra simbólica" de Peacock y el "álgebra lógica" con el "álgebra doble" o "completa" de De Morgan, de 1849). Al respecto, presenta su crítica a la opinión de Pycior en cuanto a que, en 1839, De Morgan había entrado en una ambivalencia respecto al álgebra simbólica que duraría el resto de su carrera. Considera como un anacronismo el atribuir a De Morgan o a Peacock un planteamiento inicial excesivamente formalista, y radicalmente opuesto al de sus contemporáneos. Advierte que estos fueron los motivos que lo llevaron a tomar la decisión de abandonar la intención original de tomar como punto de partida la periodización de la obra de De Morgan presentada por Pycior. Por último expresa su opinión en cuanto a que la interpretación habitual más acertada es aquella que considera que Peacock, Gregory y De Morgan sostuvieron básicamente la misma postura.

De Morgan hizo otros aportes al álgebra simbólica, tales como la introducción de una especie de sistema axiomático tentativo para la teoría de los números complejos, del cual dedujo algunos resultados. Posteriormente, alrededor de 1840, desarrolló otros sistemas algebraicos ("*algebras triples*") que hacen referencia a un tema relacionado nuevamente con la interpretación geométrica de los números complejos, como son los cuaterniones de Hamilton, que explícitamente los reconoce como precursores e inspiradores.

2.2.1. El papel de la obra de Peacock y de la escuela británica en la emergencia de una mentalidad axiomática

En el año de 1830 Peacock presentó una formulación bien elaborada de los conceptos que había desarrollado anteriormente. En ella expone, por vez primera, una serie de ideas que, según referencia de Ferreirós, se habían convertido en patrimonio común de los matemáticos, lo cual ha sido motivo de gran interés entre los historiadores.

Como ya se ha analizado, la concepción de Peacock sobre el álgebra se apartaba de la visión newtoniana que la consideraba como una "aritmética universal", la cual estudiaba relaciones entre cantidades. El énfasis de su enfoque hacía posible concebir un álgebra simbólica que, a pesar de que sus leyes eran análogas a las de la aritmética, se entendían en diferente forma. Esto es que, lejos de expresar hecho acerca de cierto tipo de objetos, eran leyes puramente formales que correspondían a combinaciones entre símbolos. Ferreirós sostiene que este planteamiento formalista obedecía a la clara conciencia de dos hechos fundamentales ya mencionados. El primero de los cuales tenía que ver con el hecho de que la validez de los procesos deductivos que se realizan en un cálculo algebraico sólo depende de las leyes de combinación de los símbolos que los representan y no del carácter particular de los objetos estudiados. El segundo se refería a que cualquier dominio dado puede ofrecer una interpretación del cálculo, siempre que sus objetos puedan operarse de modo conforme a dichas leyes de combinación. Es importante observar aquí que la concepción moderna de las matemáticas está caracterizada por su formulación abstracta, axiomática o estructural y estas dos ideas son elementos constitutivos de dicha concepción.

A pesar de que De Morgan, Gregory y Boole fueron defensores importantes de las ideas de Peacock, el álgebra simbólica no dio lugar a una tradición investigativa promisoria, si no que más bien dio la impresión de que hacia 1850 esa posibilidad se había desvanecido.

El álgebra simbólica, en este momento, parecía un principio perfecto para el desarrollo del enfoque abstracto y estructural propio del álgebra del futuro. Entonces, cabe la pregunta de por que las cosas no evolucionaron de tal manera. Al respecto, Ferreirós considera que se debe comenzar por tratar de entender correctamente el alcance del planteamiento de Peacock y sus seguidores, lo cual lleva a polemizar con las ideas de Helena Pycior, quien, según dice Ferreirós, en los últimos diez años ha revitalizado el debate histórico de esta cuestión. Ella, además de enfatizar en que hay proximidad entre el álgebra simbólica y los enfoques formalistas o axiomáticos actuales, ha planteado la pregunta anterior, a la cual responde apelando a factores relacionados con el ambiente intelectual de la Gran Bretaña en ese momento. Pero, personajes tan influyentes en el ambiente científico como Hamilton negaron con energía la validez científica y el interés pedagógico. Este tipo de influencias tradicionalistas habrían sido los principales determinantes de que los jóvenes investigadores no siguieran el camino de Peacock. Pero, a pesar de que los hechos a los que alude Pycior son ciertos, Ferreirós dice que esa no era la verdadera causa si no que había que indagar en factores internos, ya que la propia formulación que del tema hace Pycior está viciada interpretación errónea y en último término es anacrónica, ya que se guía por una determinada filosofía de la matemática y enfatiza en el formalismo de la concepción de Peacock. Sin embargo, hay una noción que fue central para Peacock tanto como para Boole o De Morgan; se trata de la idea de interpretación que Pycior deja en la sombra. Esta negligencia se refleja en el tratamiento que Pycior hace tanto de Peacock como de De Morgan.

Ferreirós se propone mostrar lo dicho, para ambos casos, de la siguiente manera: para Peacock, el principio orientador que hace posible llegar al álgebra simbólica es el "*principio de permanencia de las formas equivalentes*"; aunque se trata de uno de los puntos más difíciles de interpretar de su teoría, el modo en que lo utilizó, en los años treinta y cuarenta, tenía el mismo sentido que negar la posibilidad de postular sistemas arbitrarios de leyes simbólicas. Dicho en términos modernos, sólo se aceptarían sistemas isomorfos a la teoría de los números racionales (positivos). Observa que parece que esto contradice su supuesto formalismo radical, y así es como lo ve Pycior, de hecho. Dice a su vez que De Morgan lo criticó en este punto, y tanto él como Gregory y Boole plantearon sistemas divergentes. Señala además que hay indicios de que el propio Peacock no se aferró a esa idea dogmáticamente, aunque lo que interesa principalmente, en este momento, es el motivo original de que formulara su principio. Afirma que en 1833, los argumentos de Peacock que respaldaban esta postura expresaban que al admitir sistemas divergentes: "*nos encontraríamos totalmente sin medios para interpretar, ya nuestras operaciones o sus resultados, y la ciencia así formada sería una ciencia de símbolos exclusivamente, que no admitiría ninguna aplicación en absoluto*".

El argumento que no es aceptable, únicamente indica la importancia que Peacock le asignaba a la noción de interpretación, lo cual claramente está determinando la aceptabilidad y el interés teórico de los sistemas algebraicos. Asegura que todos los escritos de Peacock confirman esta aseveración. En este sentido, el segundo volumen de su libro se titula On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position y sería lo que la geometría ofrece al álgebra como su mayor rango de interpretaciones y su principal conexión con la ciencia y la filosofía natural. El tema se pone en claro en cada capítulo de la obra ya que en todos los casos se inicia introduciendo una operación simbólica por generalización a partir de la aritmética para luego interpretar geométricamente el sistema simbólico obtenido. El punto más difícil de comprender del nuevo enfoque era la idea de que tuviera sentido y fuera aceptable una generalización puramente formal para luego hacer una interpretación de ella. En palabras de De Morgan: el álgebra simbólica parecía "*a primera vista [...] algo así como un asunto de símbolos hechizados, dando vueltas al mundo en busca de un significado*". Esto motivo las críticas formuladas, entre otros, por Hamilton porque en verdad las formulaciones generales de Peacock hacían demasiado énfasis en el aspecto formal. Razón por la cual De Morgan hacia 1839 se propuso hacer una reformulación de las bases generales de la teoría. Para tal efecto distingue dos partes fundamentales del álgebra, a saber: "*álgebra teórica*" y "*álgebra lógica*". La primera trata de los símbolos y sus leyes formales de combinación, y la segunda estudia el método de interpretación del álgebra teórica. Observa Ferreirós que este es de nuevo un punto de divergencia con la argumentación de Pycior, por cuanto ella entiende que con esto De Morgan traiciona el espíritu inicial del álgebra simbólica y retrocede a una postura "ambivalente". Precisa que dada la importancia de la interpretación en la obra del propio Peacock, considera que la reformulación de De Morgan no supone cambio de postura alguno, sino una defensa del álgebra desde dentro, haciendo más explícita una característica que no había sido bien comprendida.

En este punto Ferreirós dice que una vez establecido lo anterior corresponde discutir cual fue el motivo real de que el álgebra simbólica no diera lugar más directamente al álgebra actual. Agrega que el planteamiento simbólico del álgebra surge en buena parte de una reflexión acerca de la interpretación geométrica de los números complejos, cuya legitimidad quedó plenamente justificada por su representación geométrica. Sin embargo resultaba claro que debería ser posible una teoría propiamente aritmética o algebraica; de lo contrario, parecía como si el álgebra se hubiera subordinado a la geometría. Observa además que Peacock se propuso mostrar la validez de la interpretación geométrica garantizando la generalidad del álgebra, lo cual lo logró diferenciando el sistema simbólico de sus interpretaciones. De esta manera la interpretación geométrica se constituía en una de las posibles interpretaciones del álgebra. Sostiene además, que en consideración de las pretensiones del nuevo enfoque, lo importante sería establecer la conclusión de que en último término el planteamiento del álgebra simbólica es de carácter metodológico.

Como es conocido Cayley, Hankel, Dedekind, Pasch y Schröder, entre otros, tomaron muy en cuenta la lección de Peacock, y observa Ferreirós que a pesar de esto, es en este punto donde también se encuentra la respuesta al interrogante de por qué el álgebra simbólica británica no fue un álgebra estructural, puesto que ella no propuso programa de investigación característico alguno. Sin embargo, los británicos participaron en la búsqueda de sistemas de números hipercomplejos y en el desarrollo del cálculo de operaciones, temas estos estudiados también en el continente.

Finalmente hace referencia a que la historia del álgebra en el siglo XIX demuestra que el camino hacia el enfoque moderno "*estructural*" más que por lo meramente "*abstracto*", estuvo determinado por el desarrollo de ciertos programas de contenido bien concreto, como por ejemplo, el problema clásico de la resolución de ecuaciones, que contó con los aportes de Lagrange, Cauchy, Abel y Galois principalmente. Pero el más novedoso fue, como se verá más adelante en el capítulo 4, el encaminado a desarrollar una teoría de los números algebraicos con los trabajos de Gauss, Kummer, Kronecker y Dedekind.

De esta manera se pone en claro que para que surgiera la noción de estructura se requería de la toma de conciencia progresiva de profundos fenómenos de isomorfismos, es decir, de formas de comportamiento operacional similares, entre teorías muy diversas.

Teniendo en cuenta estas condiciones, Ferreirós puntualiza que en el álgebra simbólica no se encuentra ni esa toma de conciencia, ni líneas de investigación que pudieran conducir a ella; lo cual lo considera natural por lo temprano de la época por un lado y por otro, por el estado relativamente elemental en el que se hallaba la matemática británica frente a la del continente europeo. Así entonces, era obvio que los matemáticos de la siguiente generación como Cayley y Sylvester se dedicaran a trabajar en los problemas que se estudiaban en el continente.

2.2.2. Los cuaterniones de Hamilton

Al estudiar la manera como se entendía la lógica del álgebra ordinaria en la primera parte del siglo XIX se hizo posible valorar la originalidad de la creación algebraica de Hamilton, la cual, además de marcar una ruptura con viejas concepciones acerca del comportamiento de los números, abría nuevas rutas de indagación sobre el tema, por ejemplo, plantear la posibilidad de construir otras clases de álgebras, como es el caso del álgebra de los números complejos fundamentada en los números reales. Pero hay que tener en cuenta que el nuevo enfoque simbólico del álgebra inglesa de comienzos del siglo XIX, en su momento, resultó difícil de entender por cuanto la idea de conceder cierta autonomía a un conjunto de símbolos resultaba paradójica y uno de los matemáticos que se manifestó adverso, durante mucho tiempo, a tal enfoque, fue Hamilton quien afirmaba que el álgebra, al igual que la geometría, debía ser concebida como una ciencia y no como un simple conjunto de expresiones. Tampoco estaba satisfecho con el hecho de que los números complejos solo estuvieran fundamentados intuitivamente, mediante la representación como puntos o segmentos de recta dirigidos en el plano.

A pesar de que hacia el año de 1831 los matemáticos Wessel, Gauss, Argand, Warren y Mourey, independientemente unos de otros, habían desarrollado la representación geométrica de los números complejos, ninguno de ellos había llegado a extender esta representación al espacio de tres dimensiones. Sería Hamilton uno de los que intentarían encontrar una representación adecuada. Pero antes es conveniente destacar que su enfoque filosófico sobre los fundamentos de la aritmética y del álgebra le permitió introducir un tratamiento de los números complejos como teoría aritmética, rompiendo así con las ideas ligadas a la tradición geométrica. En este sentido hay que recordar que uno de los temas favoritos del pensamiento de Hamilton era el de que el espacio y el tiempo están indisolublemente unidos entre sí, por lo tanto, dado que la geometría era la ciencia del espacio puro, el álgebra debía ser la ciencia del puro tiempo. Es posible que en estas ideas se refleje la influencia del pensamiento de Newton, que, cuando se encontraba con dificultades para definir conceptos abstractos en el método de fluxiones recurría por comodidad al concepto de tiempo del mundo físico. En dos memorias que presenta ante la Academia Real de Irlanda en 1833 y 1835 respectivamente, las cuales serían publicadas con el título de: *El álgebra como la ciencia del tiempo puro*, Hamilton elige el tiempo como el concepto fundamental a partir del cual deduce la noción de unidad. A propósito escribe:

> La idea de la continuidad de la progresión de un momento a otro en el tiempo engloba la idea de una progresión continua de manera semejante en las cantidades [...] Prosiguiendo esta sucesión de ideas, nos vemos obligados a concebir [...] la existencia de un número determinado o de una razón *a* que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón *b*.

Como ya se ha dicho, utiliza el concepto de tiempo para fundamentar su teoría del álgebra aunque se trata de una base intuitiva insatisfactoria para fundar los números en sistemas, por cuanto necesitó valerse del universo físico para justificar esas nociones abstractas. A partir de los enteros positivos y de sus propiedades elementales conocidas, consideraba una serie equidistante de momentos denotados con letras, de la siguiente manera

$$\ldots E''E'EABB'B''\ldots$$

donde cada letra representa un instante o un momento de tiempo tal que los intervalos de tiempo entre dos momentos sucesivos son todos iguales unos con respecto a otros. Tomaba como patrón el momento *cero*, denotado con la letra A, y todos los demás debían compararse con él. El primer momento positivo sería B y mediante el operador a se podía pasar de un momento a otro al colocarse a la derecha, de la siguiente manera

$$B = a + A,\ B' = a + B = 2a + A, \ldots$$

En seguida, Hamilton introdujo los ordinales: $\theta,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$ donde $\theta = -1$, de tal forma que fuera posible representar la serie de las etapas formadas, a partir del momento cero, así

$$\ldots 3\theta a,\ 2\theta a,\ 1\theta a,\ 0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ldots$$

donde $3\theta a = -3a = E'' = -3a + A$.

Designando con las letras $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \omega$ los números ordinales de esta serie, Hamilton demostró, a su manera, propiedades tales como

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad \theta\theta = 1,$$

y también la asociatividad y la distributividad. Así mismo introdujo las fracciones racionales de manera análoga y afirmaba que el símbolo fraccionario $1/0$ denotaba un acto imposible. También sugirió la idea de la partición de los números racionales en dos clases, a la manera de una cortadura de Dedekind y entonces definió un número irracional como el representante de esa partición. Afirmaba también que existe un conjunto infinito de números entre dos números racionales. Sin embargo no avanzó más en el desarrollo de su teoría de los números irracionales, basada fundamentalmente en la determinación de estos números mediante los números racionales.

En 1837, en la tercera sección de su ensayo titulado "*Teoría de las funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro*", dedicada a las parejas algebraicas, desarrolló los números complejos en términos de parejas ordenadas de números reales, casi de la misma manera como la que se utiliza en las matemáticas modernas. Convencido de que la representación geométrica era útil para la intuición pero no satisfactoria para la justificación lógica de tales números, presentó una interpretación de los números complejos en la que no se hacía referencia al espacio sino al tiempo, utilizando pares de momentos temporales. Introdujo entonces el par ordenado de números reales (a, b) y definió operaciones sobre ese par. Para efectuar todas aquellas operaciones se debía tener en cuenta reglas válidas para los números reales, tales como:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_2 b_1 + a_1 b_2)$$

$$\frac{(a_1, a_2)}{(b_1, b_2)} = \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right).$$

Hamilton interpreto la regla de multiplicación de parejas como una operación en la que interviene una rotación.

Aquí se puede ver ya la versión definitiva del concepto de número complejo como un par ordenado de números reales, idea que se hacía explícita por primera vez a pesar de que ya estaba implícita en la representación gráfica de Wessel, Argand y Gauss.

A continuación, Hamilton advertía:

> Estas definiciones, aunque arbitrarias, no son contradictorias una con respecto a otra, ni con respecto a los primeros principios del álgebra, y es posible extraer conclusiones legítimas, mediante un razonamiento matemático riguroso, a partir de las premisas aceptadas arbitrariamente de este modo: pero las personas que han leído con atención las

> observaciones precedentes de esta teoría, y las han comparado con el ensayo preliminar [sección I del libro], verán que esas definiciones no están escogidas arbitrariamente, en realidad, y a pesar de que otras podrían haber sido propuestas, ninguna otra sería igualmente apropiada.

Más adelante explicaría que el par (a,b) es equivalente al número complejo $a+bi$, en los siguientes términos:

> En la teoría de los números simples (reales), el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y designa una raíz imposible, o un número imaginario simple; pero en la teoría de parejas, el mismo símbolo $\sqrt{-1}$ es significativo, y designa una raíz posible, o una pareja real, la raíz cuadrada principal de la pareja $(-1,0)$. Además, en esta última teoría, no en la primera, el signo $\sqrt{-1}$ puede ser propiamente utilizado; y podemos escribir, si escogemos para toda pareja (a_1,a_2), cualquiera que sea, $(a_1,a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ [...].

De acuerdo con este enfoque se fundamentaría los números complejos, evitando por completo el misterioso $\sqrt{-1}$ y sobre todo estarían dadas las condiciones para el surgimiento y la aceptación como legítimos de los números complejos de cuatro dimensiones.

Después de su teoría de las parejas, se propuso la tarea de extender la teoría de los números complejos al espacio de tres dimensiones. Era lógico que surgiera la idea de construir números que desempeñen, con relación a la geometría del espacio euclidiano de tres dimensiones, un papel más o menos análogo al que tienen los complejos respecto de la geometría plana. Entonces, de manera natural, intentó extender la idea a tres dimensiones, pasando de los números complejos binarios $a+bi$, a las ternas ordenadas de números:

$$a+bi+cj.$$

En cuanto a las operaciones, la suma no presentaba dificultad alguna, pero la multiplicación de n-uplas, para $n > 2$, lo desconcertó y durante diez años no encontró solución; pero el día 16 de octubre de 1843, mientras paseaba por la orilla del Royal Canal, después de estos años de espera, a partir de un flujo continuo de ideas, súbitamente surgió el resultado largamente esperado: las dificultades desaparecerían si en lugar de ternas utilizaba cuádruplas y si además, como un hecho revolucionario, transgredía la propiedad conmutativa de la multiplicación. En el mismo año, Hamilton presentó su teoría de los cuaterniones utilizando el concepto de tiempo de la manera siguiente: denominó en primer lugar "cuaternión momental" a un conjunto (A_1, A_2, A_3, A_4) de cuatro momentos de tiempo. Dos cuaterniones son iguales cuando los momentos correspondientes son iguales.

El cuaternión lo expresó en la forma $q = (a, b, c, d)$.

El operador i tiene la propiedad de cambiar la pareja (a_1, a_2) por la pareja $(-a_2, a_1)$, según la teoría de parejas.

En los mismos términos, de acuerdo con la teoría de los cuaterniones, los operadores i, j, k son tales que

$$iq = (-b, a, -d, c)$$

$$jq = (-c, d, a, -b)$$

$$kq = (-d, -c, b, a).$$

Al definir la operación $(ij)q$ de tal manera que sea equivalente a $i(jq)$, obtuvo la relación fundamental $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ijk = -1$.

Así, por primera vez, se introdujo la propiedad asociativa de una operación; en este caso de la multiplicación.

Los principales resultados a los que se llegó en la teoría de los cuaterniones se encuentran en las publicaciones que se hicieron en los años de 1853 y de 1866.

En resumen, utilizando la notación moderna, un número "*hipercomplejo*" tiene la forma $a + bi + cj + dk$ donde a, b, c, d, son números reales, i, j, k son vectores unitarios, dirigidos de acuerdo con la orientación de los ejes x, y, z respectivamente. La parte real del cuaternión, llamada también parte "escalar," es a y lo demás constituye la parte "vectorial". Los vectores unitarios satisfacen las leyes siguientes:

$$\begin{array}{ll} ij = k & ji = -k \\ jk = i & kj = -i \\ ki = j & ik = -j \end{array}$$

$$ii = jj = kk = -1.$$

Se pone en evidencia que para la multiplicación de cuaterniones no se verifica la conmutatividad, es decir que $qp \neq pq$. También se puede realizar la división entre dos cuaterniones, pero hay que tener en cuenta que como la multiplicación no es conmutativa, el resultado de la división puede ser diferente si se busca r tal que $p = rq$ ó $p = qr$. Así mismo, utilizando los cuaterniones, se puede efectuar una rotación, una dilatación o una contracción de un vector dado para obtener otro vector dado; para lo cual se debe operar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} (a+bi+cj+dk) & (xi+yj+zk) & = & (x'i+y'j+z'k) \\ \text{cuaternión} & \text{primer vector} & & \text{segundo vector} \end{array}$$

y resolver en términos de a, b, c, d a partir de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Desde el punto de vista del álgebra moderna los cuaterniones son un ejemplo de un semicuerpo, el cual se puede describir de la siguiente manera:

Sea $\mathscr{Q}$ el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces, $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, + \rangle$ es un grupo bajo la suma por componentes, el producto directo de $\mathbb{R}$ bajo la suma, por él mismo, cuatro veces. De aquí resulta la operación de suma en $\mathscr{Q}$. Haciendo

$$1 = (1,0,0,0), \quad i = (0,1,0,0)$$

$$j = (0,0,1,0) \quad \text{y} \quad k = (0,0,0,1).$$

También:

$$a_1 = (a_1, 0, 0, 0), \quad a_2 i = (0, a_2, 0, 0)$$

$$a_3 j = (0, 0, a_3, 0) \quad \text{y} \quad a_4 k = (0, 0, 0, a_4).$$

A partir de la definición de cuádruplas, se tiene

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) =$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i + (a_3 + b_3) j + (a_4 + b_4) k.$$

La multiplicación en $\mathscr{Q}$ se realiza utilizando las leyes de los vectores unitarios definidas anteriormente y teniendo en cuenta además que: $1a = a1 = a$ para $a \in \mathscr{Q}$.

Finalmente, haciendo:

$$|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + a_4^2 \qquad \text{y} \qquad \bar{a} = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k,$$

se tiene:

$$\frac{\bar{a}}{|a|^2} = \frac{a_1}{|a|^2} - \left(\frac{a_2}{|a|^2}\right) i - \left(\frac{a_3}{|a|^2}\right) j - \left(\frac{a_4}{|a|^2}\right) k$$

el cual es un inverso multiplicativo de a.

Todo lo anterior se sintetiza en el siguiente teorema: *Los cuaterniones $\mathscr{Q}$ forman un semicuerpo bajo la suma y la multiplicación*.

Es de notar además que el conjunto $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es un grupo de orden ocho bajo la multiplicación de cuaterniones. Este grupo está generado por i y j, donde

$$i^4 = 1, \quad j^2 = i^2 \quad \text{y} \quad ji = i^3 j.$$

Finalmente, hay que recordar que el álgebra no es tan rica en semicuerpos (estrictos) como si lo es en cuerpos.

Es conveniente destacar la importancia de que, en el desarrollo del álgebra, es la primera vez que un sistema de números hipercomplejos, estructurado lógicamente, no cumple la propiedad de conmutatividad, la cual es válida para los números reales y complejos. De esta manera Hamilton crea el *cuaternión* como nuevo *ente matemático* que satisfacía todas las *propiedades formales* de las operaciones de la aritmética ordinaria, con excepción de la propiedad conmutativa de la multiplicación. En consecuencia, el conjunto de los *cuaterniones* constituye el primer ejemplo de cuerpo no conmutativo que se puede construir a partir del cuerpo de los números reales. Además, Weierstrass había demostrado, en 1863, que el único cuerpo conmutativo era el sistema de los números complejos y, en 1879, Frobenius demostró que los *cuaterniones* eran el único caso de cuerpo no conmutativo que podía ser construido en el cuerpo de los números reales. También, otros de los matemáticos de la escuela inglesa como Cayley y Sylvester contribuyeron al avance del álgebra en el siglo XIX, quienes, junto con Hermite, crearon la *teoría de los invariantes*. Es oportuno recordar también que desde mediados del siglo XVIII, el estudio de los determinantes proporcionó múltiples resultados importantes a partir de las necesidades que tenían los matemáticos de buscar medios para expresar de manera más compacta transformaciones de coordenadas, cambios de variables en las integrales múltiples y resolución de sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales, entre otras. Todo esto, antes de desarrollar una teoría de matrices; lo cual revela, una vez más, que, de acuerdo con la historia de las matemáticas, las teorías y los conceptos no se han desarrollado necesariamente de una manera lógica, y así, a pesar de que la noción de matriz antecede lógicamente a la de determinante, esta última fue la que se desarrolló primero, y fue Cayley el primero en extraer del determinante la idea de matriz y en publicar una serie de artículos acerca de esta nueva noción, por lo cual es considerado como el fundador de la teoría de matrices.

Estos hechos constituían un paso de avanzada que permitía liberar al álgebra de las ataduras tradicionales y al significar una ruptura con viejas concepciones sería posible visualizar nuevos rumbos para la investigación y despejar totalmente la ruta en dirección a la *creación libre* de nuevas álgebras, como las álgebras vectoriales, en particular la de Grassmann y las álgebras de dimensión finita cuyo estudio puso de manifiesto importantes nociones que sirvieron para elaborar las bases de las *estructuras algebraicas*.

Es de destacar también, como observa De Lorenzo, que al considerar un número complejo como un par ordenado de números reales, Hamilton fue el primero que aritmetizó el concepto de número complejo. Tal aritmetización implicaba, desde luego, que entre los pares de números reales que constituyen los complejos, existían algunos que podían identificarse con los propios números reales. Sin duda la identificación se realizaría por medio de la aplicación $a \rightarrow (a, 0)$, la cual genera un isomorfismo entre el conjunto de los números reales como cuerpo y el subconjunto de los complejos cuya segunda componente es nula. Esto implicaba también que las operaciones aritméticas que se tenían que realizar entre los complejos, como la adición y la multiplicación, fueran consideradas como consistentes con las mismas operaciones que había que realizar entre los números reales. Al respecto, afirma De Lorenzo, que "*El concepto de operación* sufre, así, una *ampliación*, aunque de momento parezca tímida". (De Lorenzo, J, 1971, p. 175)

La invención de los cuaterniones, por parte de Hamilton, representa un hito en la formulación de objetos y sistemas matemáticos que satisfacen propiedades aparentemente paradójicas desde la perspectiva de las matemáticas clásicas. Al respecto, Dieudonné señala que la teoría de los cuaterniones "*constituye un primer ejemplo histórico y el prototipo de teoría que introduce nuevos objetos que, en el momento en que se definen, no responden a ninguna necesidad, sino que aparecen por simple curiosidad, para ver que pasa*". (Dieudonné, 1989, p. 180, 181)

Las "*Lectures on Quaternions*" fueron publicadas en Dublín en 1853.

2.3. Las fuentes del cambio de perspectiva

Fueron numerosas las fuentes del cambio de la época clásica a la época moderna. El problema de la resolución de ecuaciones por radicales, que se remonta a los babilonios, es uno de los primeros problemas famosos en la historia de las matemáticas. Durante mucho tiempo solo se dispuso de la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado y posteriormente se preguntó sobre la existencia de una fórmula para resolver las ecuaciones algebraicas de tercero y mayores grados. Durante el siglo XVI los matemáticos aprendieron a resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

Del Ferro, Tartaglia y Cardano resolvieron la ecuación de tercer grado y posteriormente Ferrari lo hizo para la ecuación de cuarto grado. Estas soluciones se publicaron en 1545 en el Ars Magna de Cardano. Resultaba natural pensar en extender este procedimiento a las ecuaciones de grado quinto o mayor, pero tales intentos fueron infructuosos; aún el mismo Euler intentó encontrar fórmulas sin resultado satisfactorio alguno.

Lagrange planteó por primera vez la pregunta: *¿Por qué funcionan esas fórmulas?*, y *¿Qué se esconde tras ello?* Buscó las razones del éxito alcanzado para los casos de segundo, tercero y cuarto grados y las del fracaso en los de grados superiores. Encontró que el triunfo de los métodos de Cardano y de otros, para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado, residía en la existencia de ciertas funciones no simétricas de las raíces, las cuales poseían determinadas propiedades de *Invariancia por permutaciones* y que el problema de resolver ecuaciones de quinto grado o mayor aún, está relacionado con ciertas expresiones que, de algún modo, son *Invariantes* con respecto a las permutaciones de las raíces.

Ruffini, discípulo de Lagrange, a principios del siglo XIX, estudió los sistemas de todas las permutaciones de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, que dejan invariante un polinomio dado $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$. Pudo demostrar que el número p de permutaciones de un sistema de este tipo es un divisor de 120 y que el número de polinomios distintos que se pueden formar a partir de P, al aplicar las 120 permutaciones de los x_j, es $\dfrac{120}{p}$. Por último demostró que $\dfrac{120}{p}$ nunca puede ser igual a 3 ó a 4. De esta manera quedaba demostrada, en su totalidad, la imposibilidad de resolver cualquier ecuación de quinto grado por radicales.

Desde luego que Ruffini tendría que haber utilizado nociones relativas a lo que mucho más tarde serían los cuerpos numéricos. Finalmente Abel, en 1824, resolvió el problema al demostrar que no hay fórmulas que permitan obtener las raíces de ecuaciones de quinto grado o mayor. Con esta conclusión se inauguraba una nueva era en la evolución del álgebra, esto es, los comienzos de la teoría de grupos y por consiguiente el estudio de las *estructuras*.

Iniciando el siglo XIX, Galois estudió ciertas "*agrupaciones*" o "*grupos*" de permutaciones y las propiedades de determinados "*subgrupos*" que permanecían invariantes bajo ciertas transformaciones, con lo cual pudo probar que era imposible resolver, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que cuatro. El estudio de esos grupos de permutaciones de números o símbolos se llevó a cabo durante todo el siglo XIX, pero sólo al final en 1882, en los trabajos de van Dyck, Netto, y Weber, se alcanzó a formular en abstracto la estructura de esos grupos, y a proponer los axiomas mínimos que deberían cumplir esos sistemas de transformaciones.

Cauchy, para poder generalizar los resultados logrados por Ruffini y Abel, presentó la noción de permutación con un enfoque totalmente nuevo. Eligió un conjunto finito de objetos designados por letras, en un cierto orden, en una línea e hizo corresponder el objeto de una segunda línea, que tuviera el mismo rango, mediante una ley que la llamó *sustitución*. Utilizó en sus razonamientos la notación abreviada $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$, en la que A y B son permutaciones cualesquiera de los objetos considerados. Cauchy introdujo la novedosa idea de *componer dos sustituciones* y así mismo designó por $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ la *sustitución idéntica*.

A pesar de que, desde el punto de vista de la matemática de hoy, es evidente la *analogía* entre este comportamiento de las permutaciones y la composición de funciones, los matemáticos del siglo XIX tuvieron gran dificultad para desprenderse de la concepción tradicional de la división de las matemáticas en partes que se caracterizaban por los objetos matemáticos estudiados; como era el caso de los números enteros en la aritmética, las ecuaciones en el álgebra, el espacio y las figuras en la geometría y las funciones en el análisis. Para poder pensar en forma unificada habría que esperar hasta los tiempos de Cantor y Dedekind.

En el siglo XIX se fijaron de manera definitiva los conceptos fundamentales y los objetivos principales del álgebra abstracta que trataba de las colecciones de objetos de naturaleza a veces muy diferente a la de los números reales o complejos. Durante ese siglo se enriqueció con creaciones tales como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas cuadráticas binarias, los hipernúmeros de diferentes clases, las transformaciones y las sustituciones o permutaciones. Tales objetos se combinaron mediante operaciones y leyes de composición para desarrollar los conceptos algebraicos de base. Las investigaciones sobre los números algebraicos pusieron de presente diferentes variedades de álgebras, que se distinguían por las propiedades de las operaciones definidas en ellas. A partir de los notables trabajos de Galois se pudo establecer de manera definitiva la solución de las ecuaciones polinómicas en términos de operaciones algebraicas. Pero las ideas de Galois, a pesar de su importancia, antes de fructificar, debieron esperar otros resultados tales como la comprensión clara del principio de la permanencia de la forma, así como los fundamentos de una lógica de los números complejos basada en las propiedades de los números reales, los vectores, los cuaterniones, entre otros conceptos.

En las Islas Británicas un grupo de jóvenes matemáticos y entre ellos Peacock crean la Analytical Society of Cambridge para promover un mayor acercamiento con la matemática continental. Peacock dedujo el *principio fundamental de la permanencia de las leyes formales* a partir de la adopción de un cierto número de axiomas y a pesar de que su intento no resultó muy eficaz, tuvo el mérito de preparar el camino para desarrollos más abstractos del álgebra. Peacock, Gregory y De Morgan intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos, para tal efecto propusieron, como postulado básico, que las mismas propiedades fundamentales son válidas para cualquier clase de número. Hamilton demostró que es posible construir otras clases de álgebras, en particular el álgebra de los números complejos fundamentada en las propiedades de los números reales[5].

Otra fuente del cambio en la matemática comienza con el advenimiento de las geometrías no *euclidianas*, cuya fecha de surgimiento puede fijarse hacia la tercera década del siglo XIX. Su importancia radica en su valor intrínseco y en su vinculación con el método axiomático. Las características de la geometría euclidiana en relación con el método axiomático están plasmadas en los *Elementos de Euclides*. De los cinco postulados que Euclides propuso para desarrollar la geometría como un sistema axiomático, el quinto postulado o de las paralelas presenta rasgos un tanto ambiguos por su parecido con el enunciado de un teorema; por tal motivo durante siglos se hicieron reiterados esfuerzos para deducir el quinto postulado de los demás postulados, pero estos esfuerzos siempre fracasaron por cuanto sólo se lograba dicho propósito a costa de introducir, de manera tácita o expresa, otro postulado equivalente al que se pretendía demostrar.

En el siglo XVIII, adoptando un nuevo método se reanudaron dichos esfuerzos. Con el objetivo de demostrar el quinto postulado se consideró la hipótesis de su falsedad, esperando llegar a una contradicción y, por reducción al absurdo, validar el postulado. El primero que aplicó este método fue Gerolamo Saccheri. Basándose en esta hipótesis demostró una serie de teoremas, algunos de los cuales posteriormente formarían parte de las geometrías no Euclidianas, pero Saccheri, obstinado en “reivindicar” a Euclides, se detuvo en uno que,

[5] En el capítulo cuatro se estudiara cómo fueron introducidos los conceptos principales del álgebra, tales como los de grupo, anillo, ideal, cuerpo.

según él, conducía a un resultado “contrario a la naturaleza de la recta”, y concluyó que “la hipótesis del ángulo agudo era absolutamente falsa, porque repugnaba a la naturaleza de la línea recta”.

En el siglo XIX, siguiendo el método aplicado por Saccheri, se llegó a la conclusión de que el hecho de prescindir del quinto postulado en la construcción geométrica no conducía a contradicción alguna. El primero en llegar a esa conclusión fue Gauss y en 1831 decidió redactar una “geometría no euclidiana”, pero al enterarse del trabajo de Bolyai, desistió de hacerlo. Al mismo tiempo que Gauss, pero independientemente de él, llegaron a resultados semejantes los matemáticos Bolyai y Lobachevsky.

La geometría no euclidiana de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, a partir de Felix Klein se llamó hiperbólica. Este cuadro de las geometrías no euclidianas se completó con la geometría elíptica, que correspondía a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri y surgió a raíz de las ideas fundamentales expuestas en la célebre disertación inaugural de Bernhard Riemann: “Sobre las hipótesis en que se funda la geometría”.

Las geometrías no euclidianas ejercieron una importante influencia y repercusión sobre las ideas que habían de conducir a la matemática de hoy, por cuanto tuvieron el mérito de socavar los fundamentos de la geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la geometría, en la que se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico, quedando subsistente sólo la abstracción y el reconocimiento de la libre creación de los sistemas matemáticos.

Hacia 1870 Beltrami y Klein, mediante la presentación de modelos bidimensionales de esas geometrías que se podían considerar, al menos parcialmente, como insertados en el espacio euclidiano tridimensional, mostraron que las tres geometrías o bien se mantenían con firmeza o bien se desplomaban por igual.

Utilizando el concepto de grupo de transformaciones, Klein elaboró una extraordinaria síntesis de estos conceptos importantes que tienen como principio unificador la idea de que una geometría es el estudio de las propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos de dicho conjunto se someten a las transformaciones de un cierto grupo de las mismas, estableciéndose una jerarquía entre todas aquellas geometrías. Surgió entonces el Programa de Erlangen de 1872.

En los *Fundamentos de la geometría*, David Hilbert se propuso formalizar rigurosamente la geometría euclidiana y con tal fin comenzó por considerar que era necesario no tener en cuenta la naturaleza de los objetos geométricos básicos como los puntos, rectas y planos, sino únicamente las relaciones entre ellos. Según una anécdota muy difundida, Hilbert aclaraba la tendencia de la nueva matemática hacia la *desontologización*, diciendo que podían sustituirse las palabras *punto*, *recta* y *plano,* por *mesa*, *silla* y *vaso de cerveza* o por cualesquiera otras, sin que esto alterara en lo más mínimo la geometría resultante; lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos, que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los *axiomas*.

2.4. El proceso de desontologización

Según Paul Germain no parece que los egipcios hayan tenido una concepción clara de ciencia teórica o un ideal científico. La naturaleza les impuso la necesidad de medir tierras y preocuparse por realizar construcciones de canales, graneros, tumbas y templos, hechos estos que los condujeron a manejar números y líneas. Así mismo, señala que los egipcios conocieron hechos matemáticos, supieron manejar fórmulas y razonar con figuras geométricas, pero, en la medida en que es posible juzgarlos actualmente, sólo perseguían fines utilitarios y prácticos.

Con relación a los babilonios, afirma que los documentos nos ofrecen la solución de problemas de segundo grado, pero tampoco aparece ningún deseo de sistematización. Y no obstante, se pregunta si hay en ellos vestigios de una ciencia babilónica.

La opinión de Gray sobre el tema es que ya alrededor del 1700 a. C., los escribas de Egipto y Babilonia no sólo trataban cuestiones de orden práctico y comercial, sino también realizaban cálculos abstractos: se puede encontrar estimaciones de áreas y volúmenes junto a soluciones de problemas numéricos bastante complicados, y mientras las reglas para medir son frecuentemente erróneas, la habilidad con que se solucionan los problemas numéricos sugiere, con bastante firmeza, que los babilonios tenían al menos un buen conocimiento de las matemáticas elementales. Los babilonios, que en general sobrepasaron a los egipcios, también desarrollaron una excelente astronomía predictiva que, dicho sea de paso, había sido precedida por más de mil años de matemáticas. Desde luego que se reconoce las notables diferencias entre las matemáticas griegas, las babilónicas y egipcias hacia el año 300 a. C. Por ejemplo, las matemáticas babilónicas se caracterizaban por las bondades de su sistema de numeración y por la manera como formulaban los problemas que constituían lo que se conoce como *álgebra retórica*. Las civilizaciones babilónica y egipcia tenían un común origen oriental y se asemejaban en aspectos tales como el poseer una ciencia práctica y prosaica, motivada por las necesidades cotidianas y el deseo de lucro, basada en generalizaciones empíricas (en manos de una casta sacerdotal muy organizada) cuya validez se sustentaba en la simple prueba intuitiva otorgada por el método de ensayo y error, junto con la consiguiente habilidad operatoria que les hizo posible acopiar colecciones de reglas y métodos empíricos, a manera de recetas, para calcular áreas, volúmenes, realizar construcciones, etc. Es decir, poseían reglas pero no pruebas. En otras palabras, las reglas de agrimensura de los babilonios y egipcios eran generalizaciones de la experiencia y la geometría estaba lejos de ser un cuerpo de conocimientos articulados.

A pesar de todos los méritos que se otorgue a la civilización griega por sus aportes a la ciencia, las investigaciones modernas dan cuenta de que los griegos aprendieron las primeras nociones de saberes como la astronomía y la geometría, entre otros, de los asirio-babilonios y de los egipcios, quienes muchos siglos antes, habían logrado hallazgos valiosos. Pero lo que es incuestionable es que los griegos transformaron los conocimientos y en especial las matemáticas de aquella época, en el estudio de ideas generales abordando los problemas de manera abstracta y con *inteligencia pura*, superando el estrecho marco de saberes reducidos a simples colecciones y registros de experiencias de la vida cotidiana. Se encargaron de rehacer y generalizar, en forma magistral, las múltiples experiencias que babilonios y egipcios lograron acumular durante siglos y construyeron un conjunto de axiomas a partir de los cuales pudieron llegar a constituir un vasto campo del saber geométrico en forma de ciencia deductiva, interesados, según Gray, “por el rigor y validez lógica”. Intentando teorizar sobre el mundo material adelantaron una reflexión sistemática sobre la naturaleza. Se afirma que ésta transformación fue iniciada principalmente por Tales y Pitágoras y luego continuada exitosamente por Platón, Aristóteles, Eudoxo, Euclides y muchos otros más, cuyos aportes marcaron el comienzo de procesos que en el futuro constituirían la investigación científica. Tales de Mileto fue el científico jonio de mayor relevancia en matemáticas, astronomía, y filosofía. Como hombre de negocios y de acción, en sus contactos comerciales con Egipto y Babilonia, desarrolló su interés por la ciencia “De acuerdo a la tradición griega sostenida por Heródoto y otros historiadores, fue Tales de Mileto quien en los principios del siglo VI a. C., llevó desde Egipto las matemáticas a Grecia y quien dio a esas matemáticas una característica que conservaron desde la antigüedad griega: el papel protagonista concedido desde entonces al concepto de *demostración o prueba*. Durante siglo y medio después de Tales hubo en Grecia una actividad febril en el campo de las matemáticas. Se oye hablar especialmente de Pitágoras de Samos que parece haberse iniciado alrededor del 530 a. C., y de sus seguidores, los Pitagóricos. Sus actividades fueron las ciencias, particularmente las matemáticas, y la religión; y sus dogmas religiosos estaban fuertemente inspirados en principios matemáticos de una mística del número. Sus inclinaciones dentro de las matemáticas eran hacia la aritmética y el álgebra, en las que manifestaban una decisiva influencia babilónica; ésta influencia es evidente ahora que se conoce las matemáticas babilónicas. Se dice que Pitágoras visitó Egipto y Babilonia, pero, aunque según la leyenda, aprendió las matemáticas en Egipto, y adquirió sus creencias místicas en Babilonia, es obvio que fue precisamente en Babilonia donde recibió su inspiración matemática" (Aaboe, 1964).

Los griegos emprendieron la tarea de organizar el conocimiento de acuerdo con ciertos principios que hicieran posible descifrar y explicar las leyes que rigen los fenómenos y el comportamiento de la naturaleza. Con Tales y uno de sus sucesores, Pitágoras, "comienza grosso modo la preocupación por un pensamiento matemático en sí mismo, con base en abstracciones que la mente humana construye y disocia en algunos momentos de los objetos físicos" (Arboleda, 1990). Los Pitagóricos tomaron la iniciativa de dedicarse a cultivar las matemáticas y llegaron al convencimiento de que los principios de todos los seres eran precisamente los mismos principios de los números, es decir, el número constituía el principio material de todas las cosas, asumiendo así una concepción aritmética de la naturaleza que la sintetizaron en la divisa "*todas las cosas son números*" tras su afán de someter la naturaleza al dominio de la razón. "Todas éstas ideas nos hablan de una preocupación por modelar de maneras estructurales y matemáticas las observaciones" (Moreno, 2002).

En la epistemología griega, número y figura se constituyen en las nociones matemáticas fundamentales como principios inmutables y puramente abstractos. Luego surgen dos de las principales escuelas que orientaron el pensamiento filosófico griego, a saber: el llamado *idealismo platónico y el empirismo aristotélico*.

Según Platón, la tarea intelectual y quizá la más importante del hombre consiste en distinguir la apariencia de la realidad. Es necesario conocer la realidad que nunca cambia para poder comprender y dominar el mundo de la apariencia que nos rodea y que siempre está cambiando. Para distinguir la realidad de la apariencia se requieren determinados criterios como, por ejemplo, que la existencia de un objeto real tenga una cierta independencia de nuestra percepción, que posea un determinado grado de permanencia, que sea susceptible de ser descrito con alguna precisión. De esta manera Platón llega a concebir la realidad absoluta y las entidades absolutamente reales, como límites ideales de sus correspondencias meramente relativas. Las entidades absolutamente reales son las *formas o ideas*, las cuales se conciben independientes de la percepción; son susceptibles de una definición categóricamente precisa y absolutamente permanentes, es decir, extratemporales o eternas. De acuerdo con ésta concepción hay un mundo de *formas o ideas* constituído por objetos intemporales, independientes del razonar y definidos, que se lo capta por medio de la razón, distinto del *mundo de la percepción sensible* que se lo capta por medio de los sentidos. El *mundo de las formas* es la verdadera realidad y la experiencia sensible es solamente una aproximación a aquel mundo. Las formas aritméticas y geométricas forman parte del mundo de las formas o ideas y son el tema de estudio de la matemática, la cual hace posible la inteligibilidad del mundo material. Mediante la alegoría de la caverna, con la que comienza el libro VII de la República, ilustra la idea de que los objetos materiales son como las sombras de las ideas que se arrojan al tablero de la experiencia. Las ideas son principios eternos y perfectos de todas las cosas y las cosas sólo representan imitaciones efímeras e imperfectas de aquellas, con lo cual hace una clara separación entre el mundo material y el mundo de las ideas.

El punto de vista de Aristóteles se desarrolló parcialmente en oposición a Platón y en parte también independiente de tal propuesta filosófica. Para Aristóteles, tanto la forma o esencia de cualquier objeto empírico como su materia, constituyen parte del mismo. Admite la existencia, como idea, de modelos perfectos, pero ellos se obtienen por *abstracción* a partir de diversas experiencias logradas con objetos concretos. Es decir, distingue claramente entre la posibilidad de *abstraer las características matemáticas* de objetos y la existencia independiente de esas características o sus casos particulares. De ninguna manera la posibilidad de abstracción implica la existencia independiente de aquello que se abstrae o puede abstraerse. En consecuencia el conocimiento se genera con la intervención de la intuición y la abstracción a partir del mundo material.

En este orden de ideas "la materia estudio de la matemática, es el resultado de abstracciones matemáticas que Aristóteles designa como *objetos matemáticos*" (Körner, 1977), respecto de los cuales se afirma, por una parte, que cada uno de ellos está, en cierto modo, en las cosas de las que es abstraído y por otra, que hay una multiplicidad de ellos como se necesiten en el cálculo en la discusión correspondiente [...] y se puede agregar además que un objeto empírico es uno porque se aproxima a la unidad matemática que se ha abstraído de éste y tal vez de otros objetos y de manera análoga sucede al examinar relaciones en el caso de la geometría, como redondez, circularidad, etc. Para Aristóteles "la matemática era un instrumento que ayudaba a la investigación del mundo; suministraba el lenguaje para tratar con propiedades formales como eran las propiedades aritméticas y geométricas de los cuerpos. De acuerdo a sus planes, tal esfuerzo debía tener como recompensa *la conquista de verdades sobre la naturaleza*. Esa forma que tienen los objetos de la matemática de *imponerse al pensamiento*, quizá sea la razón por la cual tanto Platón como Aristóteles, buscaron en una realidad ya constituida, la explicación de la objetividad matemática" (Moreno, 2002).

Durante mucho tiempo, la forma de organización propuesta mediante ésta metodología aristotélica, dominó y de hecho, generó una concepción de la ciencia que se ve plasmada, por ejemplo, en la obra de Newton. En esencia, se trata de modelos matemáticos de la física que son resultado de una abstracción a partir de la experiencia sensorial del científico.

De acuerdo con la epistemología aristotélica los conceptos están en la naturaleza y heredan de la misma sus propiedades y relaciones [...], para adquirir conocimiento se debería observar con sumo cuidado la naturaleza y de allí separar o abstraer los conceptos científicos. Desde esta perspectiva se adelantó una construcción teórica y una estructura metodológica que imponía serias restricciones sobre los objetos matemáticos. Tales restricciones pueden ser puestas de manifiesto en los conceptos de número y magnitud y en las relaciones entre ellos, por ejemplo. Se generó así la concepción de que en le estudio de las matemáticas el propósito era encontrar verdades únicas y necesarias sobre el mundo real. Así entonces los postulados y los teoremas de la geometría, por ejemplo, al ser deducidos a partir de las leyes del universo, permitían hacer una descripción auténtica del espacio físico.

Dentro de este marco de la epistemología aristotélica y de la consecuente concepción de los objetos matemáticos, surgió la obra de los *Elementos de Euclides*, que en su parte fundamental contiene la sistematización del conocimiento que se inicia con los axiomas provenientes de un proceso de abstracción que establece una "*relación de dependencia de los objetos matematizados con los objetos del mundo empírico*", como bien lo señala Moreno:

> La tesis: todo cuerpo de conocimiento a lo largo de su desarrollo se orienta a la búsqueda de sus principios, se tradujo, después de considerables esfuerzos, en el sistema euclidiano clásico. Sin embargo, ésta geometría discurre no sobre objetos matemáticos, sino sobre *objetos matematizados*. La intuición geométrica se desarrolla a partir de un conjunto de acciones interiorizadas. Se realiza allí una captura del objeto físico mediante el lenguaje. Los objetos matematizados pueden tener una cierta autonomía lógica pero, *ontológicamente*, permanecen dependientes de los objetos físicos y, en consecuencia, aquellos objetos están obligados a respetar los límites impuestos a los objetos físicos. Desde ésta perspectiva, el objeto "magnitud matemática" permanece subordinado al objeto "magnitud física". Por ejemplo, la magnitud matemática sólo puede ser infinita en potencia.

A partir de éstas consideraciones, se puede afirmar que en la matemática euclidiana, el *control ontológico permanente* sobre sus objetos constituye una de sus principales características y, puesto que los postulados y axiomas debían ser aceptados como ciertos, dado que son formulaciones abstractas de las propiedades fundamentales de los objetos del mundo exterior, tienen que ser "*evidentes por si mismos*". Así mismo, la forma de organización del conocimiento inspirada en la metodología y en la sistematización aristotélica de la lógica, ha ejercido un papel dominante por mucho tiempo en la ciencia; su expresión más patente es el *método axiomático* constituido en modelo general del pensamiento cuya aplicación en la geometría euclidiana comenzó con el concepto de *axioma como verdad autoevidente*.

Es ampliamente conocido que desde la época de Euclides, *los postulados de la geometría* eran considerados como *verdades autoevidentes* acerca del espacio físico y en este mismo sentido se consideraba que la geometría era como una especie de física estrictamente deductiva. De esta manera, a partir de unas verdades que eran autoevidentes se deducían otras verdades que no lo eran.

De acuerdo con Platón, la debilidad que tenían los sistemas axiomático-deductivos para poder alcanzar la verdad se debía al hecho de tener que aceptar los postulados sin la correspondiente demostración. Esta situación se presentaba en los Elementos de Euclides, porque si bien no había dificultad en aceptar los cuatro primeros postulados:

1. *Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta.*

2. *Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.*

3. *Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.*

4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

ya que estos traducen propiedades más o menos evidentes para la intuición geométrica, en cambio, el quinto postulado:

5. *Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.*

Desde el principio llamó la atención, debido a su mayor complicación y, sobre todo, porque carecía de la evidencia intuitiva que tenían los cuatro anteriores.

En otras palabras, puesto que los postulados debían ser *evidentes por sí mismos,* de acuerdo con las condiciones materiales a partir de las cuales se abstraían, la proposición en mención se presentaba como inadmisible en términos de *autoevidencia*. Se inició entonces una larga historia que desembocó en el surgimiento y el desarrollo de las geometrías no euclidianas, hecho que tornó insostenible la *autoevidencia*. A partir de este acontecimiento se pudo concluir que el prescindir del quinto postulado en la construcción geométrica no conducía a contradicción alguna y que dicho postulado sólo era una de las opciones que Euclides tenía disponible, las otras dos serían:

1. *Por un punto exterior a una recta no pasa paralela alguna, es decir, todas las rectas que pasan por un punto exterior a otra cortan a esta última.*

2. *Por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas, que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes.*

El modelo de geometría no euclidiana que se obtiene al reemplazar el primero de estos dos postulados por el postulado de las paralelas es la geometría elíptica.

La geometría no euclidiana hiperbólica es la que se obtiene al reemplazar el postulado de las paralelas por el segundo de los dos postulados anteriores.

En consecuencia, en adelante se tendrán que aceptar postulados que ya no son autoevidentes y al mismo tiempo se pone de presente “un abandono inconsciente del control ontológico del objeto matemático a favor de la estructura lógica del sistema geométrico en su conjunto [...] Se inicia lo que podríamos llamar *la tematización de la estructura* como objeto de estudio” (Moreno, 2002). Posteriormente la obra de Hilbert cambiará el panorama de modo sustancial.

Este problema de la autoevidencia está directamente relacionado con la concepción ontológica de que el razonamiento matemático estaría siempre antecedido por la realidad del objeto de que se ocupa, concepción que se asocia a las diversas modalidades de platonismo. Según esta concepción ontológica es posible atribuir a las entidades matemáticas una existencia en si mismas, esto es, considerarlas como cosas sustanciales en sí y por tanto, ellas estarían ligadas con una realidad última.

Al respecto conviene señalar que por mucho tiempo, en matemáticas, se consideró los objetos matemáticos como cosas sustanciales en sí, es decir, teniendo en cuenta su naturaleza. Pero poco a poco estos entes escapaban a todo intento de una descripción adecuada, esto es, de poder decir qué son. De esta manera se llegó a comprender que el problema del significado de los objetos matemáticos como cosas sustanciales no tenía sentido en matemáticas y que las únicas proposiciones referentes a ellos que tenían importancia eran aquellas que tienen que ver con las relaciones mutuas entre objetos indefinidos y con las reglas que rigen las operaciones con ellos. En otras palabras, en matemáticas no se requiere ni es posible decir que son los números, los puntos o las rectas.

En consecuencia, el comprender la necesidad de la desustanciación o desontologización de los objetos y conceptos matemáticos se considera como uno de los resultados más importantes y productivos en el desarrollo de la axiomática moderna y desde luego en la matemática moderna.

Como ya se dijo, (Página 82), fueron grandes las dificultades que experimentaron los matemáticos del siglo XIX para cambiar la concepción tradicional de la “antigua división artificial”, a manera de compartimentos estancos, donde los conceptos eran confinados en partes como aritmética, álgebra, geometría y análisis básicamente. Esa rígida compartimentación sólo fue posible romperla con todo el trabajo del siglo XIX y así se pudo llegar a la idea clave de la matemática moderna que expresa que lo que cuentan son las relaciones mutuas entre objetos indefinidos. Esto asociado también al carácter básico de la llamada ley de composición, que es la que permite introducir las relaciones que estructuran un conjunto, al dotarlo o proveerlo de una cierta forma o morfismo.

Para el caso de la más simple de las estructuras, como la de grupo, se tenía que la teoría de las formas cuadráticas binarias de coeficientes enteros pertenecía al mundo de la aritmética; las ecuaciones y las permutaciones pertenecían al álgebra y las transformaciones a la geometría. Sin embargo, durante bastante tiempo, mucho después de que fuera corriente la noción de grupo de transformaciones, parecía que nadie se había dado cuenta de la analogía que existía entre las teorías mencionadas. Sostiene Dieudonné que "antes de 1850, al parecer, nunca nadie afirmó que los números reales o complejos forman un grupo para la adición o que los números racionales positivos forman un grupo para la multiplicación" y, llama la atención además, sobre el hecho de que "Kronecker y aún Cayley, que tenía una cultura matemática enciclopédica, no consiguieron formular del todo la definición general de grupo. Esta no surgió hasta 1882 para los grupos finitos o (más generalmente) con un número finito de generadores, y sólo en 1893 para los grupos más generales [...] La noción de grupo fue apareciendo por si sola, al hilo del estudio de diversos problemas, en los que se encontraba subyacente de modo natural." (Dieudonné, 1989, p. 180).

Un factor importante para el surgimiento de las estructuras matemáticas fue el lenguaje conjuntista que en principio aparece como lenguaje conjuntista ingenuo, por cuanto Dedekind no consideró la necesidad de presentarlo en forma de axiomas.

En cuanto a la importancia del lenguaje conjuntista, afirma Dieudonné, que esta "reside en que permite a los matemáticos, a partir de los últimos años del siglo XIX, considerar relaciones entre objetos de naturaleza completamente indeterminada: son simplemente elementos de conjuntos considerados como objetos primitivos de una teoría axiomática. Una estructura quedará determinada por cierto número de esas relaciones primitivas sujetas a un sistema de axiomas y la teoría de dicha estructura consistirá en el desarrollo de las propiedades que únicamente se deducen de sus axiomas y que no dependen de la naturaleza de los objetos matemáticos que verifiquen esos axiomas.” (Dieudonné, 1989, p. 188, 189).

Capítulo 3

La teoría de conjuntos de Cantor

Introducción

Este capítulo constituye uno de los componentes centrales relacionado con los aportes de la obra de Cantor al propósito de la tesis. Inicialmente se hace una reflexión sobre el tema del infinito y, en especial, en cuanto se refiere a la aceptación e incorporación del infinito actual en el cuerpo teórico de las matemáticas. A continuación se estudian los trabajos de Cantor que iniciaron con el problema de la representación de funciones en series trigonométricas, particularmente, en cuanto a la unicidad de la representación de las series de Fourier que lo condujeron a la teoría de conjuntos y que trajo luego a primer plano el tema del infinito en matemáticas. Luego se analiza cómo Cantor, a partir de estas investigaciones, se propuso desarrollar una fundamentación sistemática de los números reales definiéndolos como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, hecho que le permitiría avanzar hacia el nuevo concepto de conjunto derivado de un conjunto de puntos.

Más adelante se trata la temática en torno al genial descubrimiento, de diciembre de 1873, referente a la no numerabilidad de los números reales y cómo, a partir de este resultado, llega a formular la noción de cardinalidad de un conjunto infinito. Así mismo se estudia el tema de la invención de los números ordinales transfinitos, considerando que mientras los conceptos desarrollados anteriormente habían sido motivados más o menos por problemas concretos del análisis, en este caso, se trataba del paso decisivo que llevó a Cantor a establecer la teoría de conjuntos como disciplina autónoma, cuya creación se dio sólo por razones teóricas.

En la parte final, además de la formulación de la hipótesis del continuo generalizada, se considera el tema que pone de presente que a pesar de que en su evolución los conceptos de números cardinales y ordinales estaban entrelazados, Cantor encontró el procedimiento de diagonalización que le permitió la construcción de conjuntos con cardinalidades arbitrariamente grandes sin desviarse a través de los números ordinales y, de la misma manera, cómo el desarrollo del proceso gradual de la formación de conjuntos derivados, le permitió lograr la idea de los números ordinales transfinitos que Cantor, junto con el infinito actual, consideró creaciones legítimas.

Por último, se presentan las consideraciones acerca del papel de la obra de Cantor en la perspectiva de la tesis.

3.1. El tema del infinito

Las ideas de Cantor acerca del infinito significaron, en su época, una profunda ruptura con la tradición matemática y con las concepciones de sus colegas. Sus relaciones personales con la comunidad científica fueron a menudo difíciles, razón por la cual se vio obligado a defender y legitimar sus puntos de vista. Esto lo convirtió quizá en el matemático que más reflexionó y escribió sobre el infinito.

Pero las ideas sobre conjuntos y conjuntos infinitos ya hacían presencia, en matemáticas, desde épocas anteriores a Cantor. En particular, la distinción entre infinito potencial e infinito actual provenían de Aristóteles cuando hacía referencia a los aspectos continuo y cuantitativo de las cosas. Así mismo mostró el vínculo que hay entre continuidad y divisibilidad, en tanto lo continuo es divisible al infinito y se caracteriza como aquello que es divisible en partes siempre divisibles. Esta operación de divisibilidad le permitía, dentro de lo continuo, es decir, de las magnitudes geométricas, hablar de lo infinitamente pequeño. De esta manera, Aristóteles aceptaba el infinito sólo en potencia y jamás en acto.

Este infinito potencial se manifestaba de una manera en los números y de otra en las magnitudes. Así, no podían existir magnitudes infinitamente grandes por cuanto ninguna magnitud podía exceder el tamaño del universo limitado de Aristóteles, y dado que, para los griegos, el concepto de número sólo hacía referencia a los números naturales y a los racionales positivos, no podían haber entonces números infinitamente pequeños, los cuales estarían limitados inferiormente por la unidad y por las fracciones unitarias.

En este orden de ideas, Aristóteles admite, siempre en estado potencial, tanto magnitudes geométricas infinitamente pequeñas relacionadas con el proceso de divisibilidad ilimitada, como números infinitamente grandes en la sucesión ilimitada de los números naturales.

Al respecto, Gálvez, desde un enfoque histórico-filosófico, procura “establecer una caracterización de la naturaleza del continuo matemático”, en su propósito de estudiar el nexo entre la definición de continuidad de Aristóteles y la construcción de los números reales por Dedekind y Cantor, en el siglo XIX, tratando de ofrecer “marcos explicativos que justifiquen tal filiación”, utiliza, en primera instancia, como rejilla de análisis filosófico, las categorías de concepto y objeto. Luego enmarca la investigación en el período comprendido entre la etapa histórica pre-formal que antecede a la constitución del continuo, como cuerpo formal en el siglo XIX, y el momento en el cual se convierte en “un producto original y claramente diferenciado de la continuidad aristotélica”; es decir, cuando el continuo se constituye en objeto matemático, con Dedekind y Cantor. Para tal efecto considera tres momentos o hitos principales en el desarrollo del proceso.

En el primer momento, que trata de la definición del continuo aristotélico en el siglo V

a. C., empieza por destacar los lugares y problemas donde adquiere relevancia la noción de continuidad. Aquí la cuestión central de estudio es la física de Aristóteles, en busca de "establecer el estatuto filosófico original de la noción de continuidad", justificado por el hecho de que en la mayoría de los tratados de historia de las matemáticas no se hace referencia explícita al tema, ni tampoco se precisa la relación entre la noción de continuidad aristotélica y la noción de continuo de Dedekind y Cantor, a pesar de que se acepta el vínculo entre las dos. Con tal propósito estudia con esmero tres aspectos, a saber: en primer lugar, la perquisición acerca de si la realidad de la noción de continuidad en Aristóteles es de naturaleza física, matemática o metafísica; o, "si es posible considerar una suerte de compartimiento de esta noción en esos tres niveles de realidad". En segundo lugar, indaga sobre las modalidades de pensamiento que participan en las posibles representaciones de la continuidad propuestas por Aristóteles, haciendo énfasis en el análisis de si en esa arquitectura interviene, en alguna medida, una modalidad de pensamiento. En tercer lugar, examina las condiciones que darían entrada a la noción de continuidad de Aristóteles en el campo de una teoría propiamente matemática, como la geometría de Euclides. En síntesis, en el primer momento se plantean razones que permiten juzgar la noción de continuidad de Aristóteles como un legítimo punto de partida en la historia del continuo y de la continuidad en matemáticas.

En un segundo momento, se propone hacer una revisión historiográfica de la etapa de la historia de las matemáticas relacionada con los trabajos relevantes, en el desarrollo del cálculo, en el siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, realizados por Cavalieri, Leibniz y Newton, en torno al cálculo de cuadraturas y curvaturas, en los cuales se da cuenta de la incorporación de las nociones de indivisible y de infinitesimal, y al mismo tiempo, estudia el estado de la reflexión sobre continuidad en los ambientes epistemológicos donde se hace uso de los métodos de indivisibles y de infinitesimales. Ante los "abismos lógicos" generados en el pensamiento por la noción de indivisible, plantea además, que en esta etapa de la historia del pensamiento matemático es pertinente la pregunta acerca de la concepción de rigor que tienen los matemáticos de este período, en cuyo centro se ubican las nociones de indivisible e infinitesimal y, por tanto, en las nociones de continuidad e infinitud, para luego proceder a cotejarla con la concepción griega de rigor. Así mismo, busca establecer una antesala al período de institucionalización del continuo como objeto matemático en el siglo XIX, con el fin de confrontarlo con la noción de continuidad aristotélica.

Un tercer hito lo constituye el estudio del cambio en el estatuto del continuo en el siglo XIX, a la luz del examen que contrapone [...] la definición de continuidad de Aristóteles y la creación del cuerpo de los reales por parte de Dedekind y Cantor, aspectos estos que constituyen, según el autor, los dos polos de la investigación. Entre los aspectos históricos que se analizan están, por una parte, las condiciones según las cuales Cauchy define la continuidad, consideradas no sólo como el parámetro matemático más significativo como antecedente de los resultados del siglo XIX sobre el continuo real, sino además, como la última fase de lo que se podría denominar la tradición aristotélica de la continuidad. Por otra parte, plantea que la designación del continuo como objeto matemático implica una toma de posición con respecto a la realidad de las entidades matemáticas. Para tal efecto se propone determinar bajo qué condiciones se podrían asumir las tesis mencionadas encaminadas a que resulte provechoso, para el análisis filosófico del continuo, asignarle la categoría de objeto matemático, teniendo en cuenta que este hecho implica tomar partido y reconocer en matemáticas un orden de realidad cuya tradición hunde sus raíces en la filosofía de Platón.

Finalmente aborda el estudio de la construcción de los reales de Dedekind y Cantor como el momento crucial del proceso de objetivación del continuo. Particularmente, sostiene que el traslado de las propiedades del conjunto de los reales a la recta se constituye en el gesto epistemológico del paso de la continuidad aristotélica al continuo como objeto matemático.

En la Europa medieval, durante el siglo XIV, profesores universitarios y eclesiásticos escolásticos se dedicaron al estudió cuantitativo de la variación y su representación gráfica, sobre todo en lo relacionado con el aspecto matemático. Thomas Bradwardine, procurador de Oxford, en sus obras *Geometrica Speculativa* y *Tractatus de Continuo*, se propuso demostrar que las magnitudes continuas están compuestas por un número infinito de elementos continuos, no divisibles, de la misma especie. Con relación a la noción de infinito afirmaba que el infinito actual (*Categorematic infinity*) es una cantidad sin límite, mientras que el infinito potencial (*Syncategorematic infinity*) es una cantidad pequeña que es susceptible de ser aumentada. También Richard Suiseth en su *Liber Calculation* consideró problemas, en términos retóricos, que en el simbolismo actual equivaldrían a la suma de series numéricas infinitas.

Se trataba de un tipo de problema, de sumas infinitas, como el siguiente: Si una variación se mantiene con una cierta intensidad durante la mitad de un intervalo dado de tiempo, a lo largo del siguiente cuarto del intervalo al doble de ésta intensidad, durante el siguiente octavo de dicho intervalo al triple de tal intensidad y así *ad infinitum*, entonces la intensidad promedio para todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo (o sea el doble de la intensidad inicial). Esto es equivalente a una serie infinita tal como:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2. \quad \text{(Boyer, 1959, p. 76)}$$

Así mismo Nicole Oresme estudió problemas de variación y los tradujo como problemas de sumas infinitas, esto es, de series convergentes. En este sentido, el ejemplo anterior, interpretado en términos que corresponden a la física, se expresa de la siguiente manera:

> Si un cuerpo se mueve durante la primera mitad del intervalo (temporal) con velocidad constante; a través de la mitad del intervalo restante con el doble de la

velocidad inicial; a través de la mitad del intervalo restante con el triple de la velocidad inicial y así, sucesivamente, entonces la velocidad promedio durante todo el intervalo será el doble de la velocidad inicial.

La traducción de éste problema a los términos del modelo geométrico se hace mediante la secuencia de figuras 3.1, 3.2 y 3.3. La figura 3.1 traduce el enunciado por medio de rectángulos cuya suma de áreas es dos, donde $\frac{k}{2^k}$ es el área del k-ésimo rectángulo, en la figura 3.2 se divide el área total de otra manera, la figura 3.3 es el resultado final de la nueva colocación de los rectángulos, de tal manera que se obtiene un rectángulo de base 2 y altura 1; es decir, $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots=2$. (Moreno, 1991, p. 196-197).

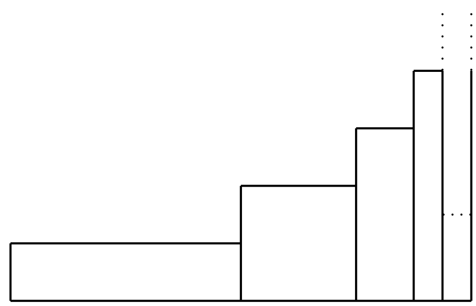

FIGURA 3.1.

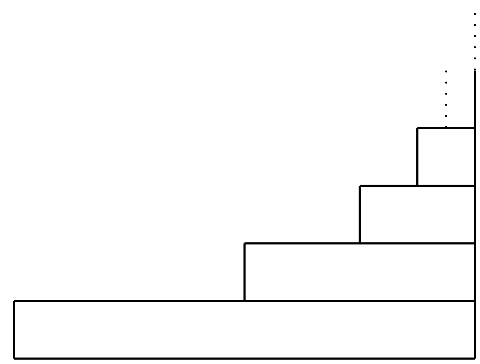

FIGURA 3.2.

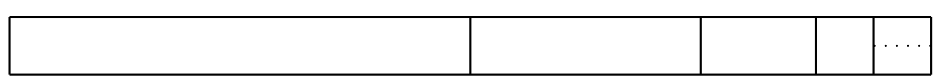

FIGURA 3.3.

En el siglo XVII se inició una nueva etapa, en la cual las matemáticas jugaron un papel muy significativo; era el periodo de las matemáticas de las magnitudes, durante el cual se constituyeron en parte fundamental del progreso técnico y científico gracias a los resultados y métodos acumulados durante el siglo XVI. Los científicos trabajaron en diversas ramas de la ciencia, estudiaron con curiosidad la naturaleza indagando sobre sus leyes y cada avance provocó incrementos imprevistos en los requerimientos de las aplicaciones del conocimiento matemático, de tal manera que, en esta época, la creatividad matemática se desarrolló en un ambiente donde las circunstancias prácticas ejercieron gran presión.

En efecto, abordar los problemas relacionados con el movimiento y la elaboración de nuevos recursos para su transformación matemática, así como atender las exigencias que planteaban los problemas de la mecánica, la astronomía y la física implicaba enriquecer las representaciones de las magnitudes y los movimientos continuos, las formas de dependencias funcionales y la elaboración de los métodos infinitesimales que constituyeron la base de las matemáticas de las magnitudes variables.

El auge de los métodos propios del cálculo infinitesimal surgido en Inglaterra, en forma de cálculo de las fluxiones de Newton, y en el continente europeo en forma del cálculo de los diferenciales de Leibniz, durante los siglos XVII y XVIII, hizo posible que el tema del infinito matemático recuperara su actividad pero siempre dentro de la atmósfera de imprecisión y ambigüedad que rodeaban a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal, los cuales se mantenían carentes de fundamento conceptual riguroso y resguardados, en cierto modo por la excelencia de los resultados y por los deslumbrantes éxitos de sus aplicaciones. Precisamente, el punto central de la crítica hacia los trabajos de los matemáticos en el siglo XVIII era la indiferencia hacia los fundamentos por el afán de búsqueda de resultados prácticos.

Al comenzar el siglo XIX, los matemáticos, sin detener su desarrollo y sus aplicaciones, iniciaron un proceso de revisión de los principios del análisis infinitesimal. El rigor en los fundamentos del análisis se cimentó en los conceptos aritméticos y en la eliminación de la intuición geométrica. Pero esta aritmetización del análisis eliminó toda consideración del infinito actual y dejó incólume el infinito potencial.

3.2. El problema de la convergencia de las series de Fourier

Hacia el año de 1869 Georg Cantor asume el cargo de Privatdozent en la Universidad de Halle donde se encuentra con Heinrich Edward Heine, quien lo invita a trabajar en un problema difícil e importante del análisis relacionado con la unicidad de la representación de una función arbitraria dada por medio de una serie trigonométrica, el cual partía del trabajo realizado por Joseph Fourier. Este problema había sido abordado infructuosamente por Dirichlet, Lipschitz y Riemann, entre otros matemáticos. Fourier había mostrado, en 1822, que la gráfica de cualquier curva que presentase tan solo un número finito de puntos de discontinuidad, denominada "*razonablemente lisa*", podía representarse, en todo un intervalo, como suma de una serie trigonométrica infinita. En otras palabras, superponiendo, unas sobre otras, un número infinito de ondas sinusoidales y cosinusoidales, en todos los puntos del intervalo, exceptuados los correspondientes a discontinuidades, la curva podía aproximarse con la precisión que se quisiera. En este caso, se dice que la serie converge hacia la curva o hacia la función que la define, "en casi todos los puntos", o también, que hay convergencia "casi por doquier". Este resultado es de gran importancia, porque sugiere que ciertas funciones complicadas podrían representarse o descomponerse en sumas de senos y cosenos, mucho más fáciles de manipular matemáticamente. Para justificar tal sustitución, hacía falta, sin embargo, alguna garantía de que hubiera sólo una de tales series trigonométricas convergente a la función. Este problema había sido resuelto parcialmente por Heine bajo las condiciones de continuidad "casi por doquier" para la función y de convergencia uniforme "casi por doquier" para la serie trigonométrica correspondiente. Estimulado por Heine, Cantor comenzó a trabajar en estas series en 1869 y, en 1870, publicó un artículo en el que mostró la unicidad de esta representación, avanzando en su propósito de establecer la unicidad en los términos más generales posibles después de eliminar dichas restricciones. En Marzo de 1870 logró su primer resultado sobre el problema en cuestión, que publicó en el Journal de Crelle, en el cual se destacaba el siguiente teorema que se conoce actualmente como el teorema de Cantor-Lebesgue:

Teorema. *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *dos sucesiones tales que* $(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx) = 0$ *para todo* x *en el intervalo abierto* (a,b), *entonces:*

$$b_n = 0.$$

Un mes después de publicado este resultado apareció en el Journal de Crelle el siguiente:

Teorema. *Si una función es continua en todos los puntos de un intervalo, su representación en serie trigonométrica es única.*

Utilizando las formas de expresión de la actualidad, la teoría de las series de Fourier trata del desarrollo de funciones, con período 2π, en términos de series trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

A continuación, Cantor se preguntó si sería posible flexibilizar las condiciones de unicidad; es decir, el paso siguiente consistiría en debilitar la exigencia de que la función fuese continua sobre la totalidad del intervalo y pudo así generalizar el resultado anterior, para dar cabida a todas las funciones que presentasen un número finito de puntos de discontinuidad, llamados por Cantor “puntos excepcionales”. El había hecho referencia al tema, señalando que no era difícil observar que la serie podía ser divergente o convergente a un valor diferente para el caso de un número finito de puntos sin cambiar la unicidad de la representación; sin embargo, sería mucho más difícil entender lo que sucedería al admitir infinitos puntos de excepción. Esto sugería que debía tenerse en cuenta la posición de tales puntos en la recta numérica. Con respecto a este problema, Cantor alcanzó un éxito notable al introducir un concepto completamente nuevo que se convirtió en el punto de partida de su estudio sistemático de “puntos de variedades” como él llamaba a los conjuntos de puntos en ese tiempo. Este trabajo apareció en el Mathematische Annalen, en 1872, el cual comenzaba con una fundamentación sistemática, definiendo los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. Sobre esta base le fue posible a Cantor definir como nuevo concepto, el de conjunto derivado de un conjunto de puntos.

3.3. Los conjuntos derivados

Al estudiar el problema de la unicidad de la representación de funciones en series de Fourier, buscando un enunciado más general para el teorema de unicidad, Cantor publicó, en 1872, un importante resultado que hacía referencia al hecho de que en tanto los puntos excepcionales se encontrasen distribuidos sobre el eje x, en forma cuidadosamente especificada, podría haber inclusive un número infinito de ellos, pese a los cuales dicha representación sería posible. El paso crucial lo constituía la descripción precisa del conjunto infinito de puntos excepcionales y para tal efecto propuso la noción de *conjunto derivado*, con la ayuda de ideas como la de punto límite que utilizó implícitamente Weierstrass (Ferreirós, 1999, p. 140) en la formulación de el teorema de Bolzano-Weierstrass. Al respecto, Recalde señala: “el concepto de punto de acumulación constituye el soporte de la teoría de conjuntos de Cantor. Con base en él Cantor define los conjuntos derivados” (Recalde, 1994, p. 134).

Cantor empieza presentando la idea de punto límite y de paso el teorema de Bolzano-Weierstrass de la siguiente manera:

> Por un punto límite de un conjunto de puntos P se entiende un punto en la recta cuya posición es tal que en cada una de sus vecindades hay infinitos puntos de P, donde puede ocurrir que además el punto pertenezca al conjunto. Por una vecindad de un punto se entenderá aquí cualquier intervalo que tenga el punto en su interior. De

> acuerdo con esto, es fácil demostrar que un conjunto formado por un número infinito de puntos tiene siempre al menos un punto límite. Ésta es una relación bien definida entre cualquier punto de la recta y un conjunto dado P, es decir el punto es o no es un punto límite, y de ésta forma con el conjunto de puntos P, el conjunto de sus puntos límites es conceptualmente co-determinado; lo denotaré con P' y lo llamaré primer conjunto derivado de puntos de P. Si el conjunto de puntos P' no consiste solamente de un número finito de puntos, éste también tiene conjunto derivado de puntos P'', el cual se llama el segundo derivado de P. Siguiendo de esta manera v veces se encuentra con el conjunto de puntos v-derivado $P^{(v)}$ de P (Ferreirós, 1999, p. 142-143).

Los ejemplos presentados por Cantor fueron: si se da el conjunto $P = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$, entonces el conjunto derivado P' está constituído por un solo punto, 0; si P es el conjunto de puntos de abscisa racional en el intervalo $(0,1)$, entonces P' es el intervalo $[0,1]$ y los demás conjuntos derivados $P^{(n)}, \ldots$ coinciden con P'. Con este tipo de ejemplos Cantor advertía que para algunos conjuntos P existe m tal que $P^{(m)} = \emptyset$ y $P^{(i)} \neq \emptyset$, cuando $i < m$. A estos conjuntos los llamó de primera especie y m-ésima clase; por otra parte, a los conjuntos P para los cuales $P^{(n)} \neq \emptyset$ para todo n, los denominó conjuntos de segunda especie.

La formulación del teorema de marzo de 1872, en el Mathematisce Annalen, es la siguiente:

Teorema. *Sea f una función definida en un intervalo real, si la serie de Fourier de la función f converge en todos los puntos del intervalo, salvo a lo sumo en un conjunto P, de primera especie, entonces ésta es única.*

De esta manera, el estudio que había realizado para las series trigonométricas suscitó un cambio en la perspectiva del trabajo en el sentido de prestar mayor atención a las relaciones entre los puntos del continuo antes que a los teoremas sobre series trigonométricas. En este punto, Cantor empieza a desarrollar conceptos de la teoría de conjuntos. Recalde sintetiza este episodio de la siguiente manera: “Entre 1870 y 1872, Cantor enfrenta el problema de la representación de las series de Fourier en toda su dimensión. [...] Además, en la búsqueda de la solución de este problema, se da cuenta de la necesidad de desarrollar una teoría de conjuntos infinitos” (Recalde, 2004b, p. 28).

3.4. La teoría de los números reales de Cantor

Avanzando en su trabajo sobre series trigonométricas, Cantor empezó a depurar la noción de número real, quizá motivado por el deseo de dar a conocer sus ideas, pues su colega Heine las presentaría en un artículo, por supuesto, dándole el crédito pertinente.

Cantor comenzó definiendo las sucesiones fundamentales de números racionales, en la actualidad conocidas como sucesiones de Cauchy. Luego definió una relación de equivalencia en el conjunto de las sucesiones fundamentales y llamó número real a una clase de equivalencia. En consecuencia, para Cantor, el conjunto de los números reales es el conjunto de las clases de equivalencia.

La primera de dos versiones sobre la construcción de los números reales, la planteó en un artículo de 1872, cuyo título era: *Sobre la extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas*. Dentro de sus investigaciones sobre las condiciones según las cuales una serie trigonométrica que converge a una función, es única, se dio cuenta de la necesidad de desarrollar una teoría satisfactoria de los números reales que le permitiera utilizar, de manera rigurosa, los conjuntos que se proponía definir. Al respecto decía:

> En lo que sigue, daré parte de una cierta extensión del teorema según el cual las representationes en series trigonométricas son unívocas. [...] Pero en este objetivo estoy obligado a dar explicaciones preliminares, aunque esto no es para la mayoría más que simples indicaciones, que pueden servir para poner en evidencia las relaciones que

aparecen siempre, en cuanto a las magnitudes numéricas, en cantidad finita o infinita, son dadas; soy conducido por aquí a dar ciertas definiciones, que serán adelantadas aquí con el solo fin de una presentación tan concisa como sea posible del teorema considerado [...] (Cantor, 1872, p. 73).

Agregaba además que

> Quisiera dar a conocer en este trabajo una extensión del teorema según el cual una función no puede ser desarrollada más que de una sola manera en serie trigonométrica. [...] Pero para alcanzar este objetivo estoy obligado a empezar dando explicaciones, o más bien dando algunas indicaciones simples destinadas a sacar a la luz las diversas maneras de las que se pueden comportar las magnitudes numéricas en número finito o infinito [...] (Cantor, 1872, p. XX).

Cantor se proponía construir los números irracionales sólo a partir de los racionales, teniendo en cuenta que estos, a su vez, se pueden definir con base en la aritmética del número natural.

Las ideas de Cantor se pueden reseñar en los siguientes términos: Proponiéndose construir los números reales, partía del conjunto de los números racionales, al que llamó dominio A, "para llegar a la noción más general de una magnitud numérica"[1]; consideró una sucesión infinita de números racionales:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3.1}$$

Entre estas sucesiones, que denominó fundamentales, tenía en cuenta las que satisfacen la propiedad de que la diferencia $(a_{n+m} - a_n)$ se hace infinitamente pequeña cuando se incrementa n, para cualquier entero positivo m. En otras palabras, cuando dado un ε arbitrario se puede encontrar un entero n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n < n_1$ y m es un entero positivo

[1] Cantor todavía utiliza expresiones referentes a la noción de número real, que evocan las ideas de Aristóteles.

cualquiera. Esta propiedad de la sucesión (3.1), afirmaba, “la expresaré por medio de las siguientes palabras: *la serie* (3.1) *tiene un cierto límite b*”.

Cantor definió una sucesión fundamental, de la siguiente manera: la sucesión infinita $\{a_n\}$ se llama una sucesión fundamental si existe un entero n_1 tal que para cualquier valor positivo ε, se cumple que: $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, para todo m y para todo $n > n_1$.

Cuando la sucesión $\{a_n\}$ cumplía la condición anterior, decía que la “sucesión infinita $\{a_n\}$ tenía un límite definido b”. Acerca del tema, Recalde observa que: “esta era estrictamente una convención para significar, no que la sucesión alcanza el límite actual b, o que se presumía que b fuese el límite, sino únicamente que cada una de tales sucesiones $\{a_n\}$ tenía asociado un símbolo definido b. Cantor fue bien explícito en usar la palabra *símbolo* para describir el papel de b” (Recalde, 1994, p. 131).

Estas sucesiones las utilizaría para ampliar el dominio A que le permitiría llegar a los números irracionales y luego obtener el dominio de los números reales, según lo expresaba

> Hablaré de magnitud numérica en sentido amplio para abordar el caso donde se tiene una sucesión infinita de números racionales:
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3.2}$$
>
> dada mediante una ley que tiene por propiedad que la diferencia $(a_{n+m} - a_n)$ deviene infinitamente pequeña cuando n crece, donde m es un número entero cualquiera, o, en otros términos, que para un ε (racional positivo) cualquiera, existe un número entero n_1 tal que $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, si $n \geq n_1$, y si m es un número entero positivo cualquiera.
>
> Expreso así esta propiedad de la sucesión (3.2): “La sucesión (3.2) tiene un límite determinado b”. (Cantor, 1872, p. 73).

Cantor asociaba, entonces, un signo b a cada una de estas sucesiones “*fundamentales*” aclarando que b no debía entenderse como el límite de la sucesión $\{a_n\}$, sino únicamente como un símbolo asociado a cada una de tales sucesiones:

> Estas palabras no tienen pues, otro sentido que el de expresar esta propiedad de la sucesión, y del hecho que asociemos a la sucesión (3.2) un signo particular b, se sigue que se debe también formar, para diferentes sucesiones de este tipo, diferentes signos b, b', b''. (Cantor, 1872, p. 73).

Esta aclaración la hacía pensando en evitar que, al presuponer la existencia del límite, se daría una situación sin salida, incurriendo en un círculo vicioso.

Posteriormente, Cantor definió relaciones de orden entre sucesiones. Considerando dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ a las cuales se asocian los símbolos b y b', respectivamente, puesto que ambas satisfacen la condición anteriormente descrita, es posible establecer un orden entre los símbolos b y b', para decir que $b > b'$, $b < b'$ o bien $b = b'$, según el comportamiento del término general $(a_n - a'_n)$. Es decir, dado ε positivo y $n > n_1$, siendo n_1 arbitrariamente grande, entonces

1. $|a_n - a'_n| < \varepsilon$ implica $b = b'$,
2. $(a_n - a'_n) > \varepsilon$ implica $b > b'$,
3. $(a_n - a'_n) < -\varepsilon$ implica $b < b'$.

Si a es un número racional y la sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de números racionales que satisface la condición de que para todos sus términos $a_n = a$, es claro que a es el límite de la sucesión $\{a_n\}$; en otras palabras, un número racional a se identifica con la sucesión constante $\{a\}$ y además, puede ser comparado con una sucesión $\{a_n\}$ asociada a b. De esta manera: $a = b$, $a < b$ o $a > b$.

Para el conjunto B, la propiedad análoga enunciada por Cantor es:

> Es posible probar rigurosamente que la diferencia $(a_n - b)$, entre el término general de una serie $\{a_n\}$ y su limite b deviene infinitamente pequeña conforme n aumenta, lo que justifica el que a b se le llame el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$.

“El conjunto de estos símbolos es un nuevo sistema B que, al ser dotado de una estructura de cuerpo ordenado y puesto en correspondencia uno a uno con los puntos de la línea recta A, constituía para Cantor el conjunto de los números reales” (Recalde, 1994, p. 132).

De esta manera, Cantor introdujo un número irracional cuando se trataba de una sucesión $\{a_n\}$ que, a pesar de cumplir la condición enunciada, no satisfacía la condición de que su límite fuera un número irracional dado. Alvarez sostiene que: “A partir de esta precisión, y sólo a partir de ella, será posible decir que una sucesión $\{a_i\}$ que satisface la condición enunciada es una sucesión convergente” (Alvarez & Barahona, 2002, p. 171-172).

Cantor extendió las operaciones aritméticas de los números racionales al dominio de los nuevos números b. Según esto, dados tres números b, b', b'' del dominio B y denotando $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ y $\{a''_n\}$ respectivamente, las sucesiones infinitas asociadas, Cantor definió las operaciones

$$b \pm b' = b'', \qquad bb' = b'', \qquad \frac{b}{b'} = b''$$

con la siguiente propiedad, expresada en términos de las correspondientes sucesiones:

$$\text{lím}(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0, \qquad \text{lím}(a_n a'_n - a''_n) = 0, \qquad \text{lím}\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0.$$

Con relación a las operaciones elementales entre un número b y un número racional a, manifestaba:

> Las operaciones elementales entre un número b dado mediante una sucesión fundamental $\{a_\nu\}$ y un número racional a dado directamente están comprendidas en lo que se acaba de estipular, haciendo $a'_\nu = a$ y $b' = a$ (Cantor, 2005, p. 112).

Aquí se observa que el dominio A está contenido en el dominio B.

Luego afirmaba:

> Después de todos estos prolegómenos, se obtiene como primera proposición *rigurosamente demostrable* que, si b es el número determinado por la sucesión

fundamental $\{a_v\}$, entonces con v creciente, $b - \{a_v\}$ se hace menor en valor absoluto que cualquier número racional concebible, o lo que es lo mismo, que: $\lim_{v=\infty} a_v = b$ (Cantor, 2005, p. 112).

Lo que significa que de todas estas definiciones se sigue que si b es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, (donde la designación "*límite de la sucesión*" encuentra justificación), entonces $(b - a_n)$ se hace infinitamente pequeño cuando n crece.

Únicamente en la medida en que son puestos en correspondencia uno a uno con los puntos de la línea recta A, los símbolos del sistema B adquieren sentido. Ahora bien, si para el caso de los números racionales esto no presenta dificultad alguna, para el caso de los irracionales, afirma Recalde, Cantor sabía que dado un punto sobre la línea, si éste no tiene una relación racional con la unidad entonces podría ser aproximado por una sucesión de puntos racionales

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

cada uno de los cuales corresponde a un elemento en A.

La sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión fundamental que se aproxima tanto como se quiera al punto dado.

Recalde, dice además, que Cantor expresaba esta condición en los siguientes términos: "la distancia del punto a ser determinado al origen 'O' es igual a b, donde b es el número correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$", y teniendo en cuenta que cada elemento de A tiene un único correspondiente en B, la unicidad de la representación de los puntos de la recta en B estaba garantizada; sin embargo, llama la atención con relación al hecho de que Cantor no pudo garantizar la correspondencia inversa: que a cada elemento b de B le correspondiera un punto de la recta, para lo cual tuvo que apelar al siguiente axioma: (citado en Dauben, 1979) "*A cada número le corresponde un punto en la línea recta, cuya coordenada es igual al número*" (Recalde, 1994, p. 133, 134).

Finalmente, es importante tener en cuenta que, cuando Cantor habla de *sucesiones fundamentales*, no está haciendo referencia a una sucesión en particular, sino caracterizando clases de sucesiones que satisfacen la condición de Cauchy: dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede encontrar un entero n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n < n_1$ y m es un entero positivo cualquiera.

De tal manera que la construcción cantoriana llega a un nivel de abstracción, por medio de una serie de tematizaciones encadenadas, que lo conducen a identificar el número real como un representante de una clase de equivalencia. Considerar las clases de equivalencia implica abandonar el dominio anterior de las sucesiones y ascender a un nivel de abstracción, que corresponde a una extensión de dominio, por medio de una operación que consiste en definir una relación de equivalencia. En consecuencia, el hecho de que Cantor haya comenzado con una fundamentación sistemática de los números reales, definiéndolos como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, es considerado como un logro que por sí solo pudo haber sido suficiente para garantizarle un lugar prominente en la historia de las matemáticas.

3.5. El infinito y el continuo

Los racionales, al igual que los reales también tienen la propiedad de ser densos. Esto significa que entre cada dos racionales hay también infinitos racionales. Este hecho representó para Cantor el primer contratiempo para la caracterización de los conjuntos infinitos y del continuo, porque a pesar de que los racionales eran densos, se podían poner en correspondencia con los números naturales que no lo eran. Un aspecto clave de la construcción de Cantor es que ella permite la identificación de dos conjuntos distintos, el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de una línea recta, de modo que fuera posible expresar en el primero, al modo aritmético, la propiedad geométrica de continuidad que se puede percibir en el segundo. Para ello Cantor consideró que los puntos de una línea recta se determinan cuando se da su distancia a un punto fijo O; la cual se puede establecer a través de una magnitud numérica [...] pero la aseveración recíproca sólo se podrá establecer como un axioma [...].

> **Axioma.** A cada magnitud numérica pertenece también, de manera recíproca, un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a ésta magnitud numérica en el sentido expuesto. Llamo a este teorema un axioma por ser de naturaleza tal que no puede demostrarse de manera general [...]. Podemos considerar entonces las diferentes magnitudes numéricas como correspondiendo una a una con los diferentes puntos de una línea recta. Para mayor claridad nos serviremos de este modo de representación y cuando hablemos de puntos tendremos siempre en cuenta el valor a través del cual lo obtenemos.

Con este axioma parece posible identificar a los conjuntos de números (Wertmenge) con los conjuntos de puntos (punktmenge) y será ésta definición la que Cantor considera que es la verdadera portadora de la esencia de la continuidad.

Dedekind por otro lado construye los números reales utilizando lo que él llamó cortadura, definición que dio después de aclarar que el conjunto de los números racionales que él designa con **R** es cerrado bajo las cuatro operaciones básicas de la aritmética y es además un conjunto bien ordenado "infinito en dos direcciones opuestas", para lo cual define los símbolos "$>$" y "$<$" tomando dos cualesquiera números reales a y b define $a > b$ y $a < b$ según la diferencia $a - b$ sea positiva o negativa respectivamente y añade:

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Siempre que a, c sean dos números distintos (o desiguales) y que b sea mayor que uno de ellos y menor que el otro, queremos expresarlo, sin temor a la reminiscencia de representaciones geométricas, diciendo: b está entre los números a y c.
2. Si a y c son números distintos, existen siempre infinitos números b que están entre a y c.

3. Si a es un número determinado, todos los números del sistema **R** se descomponen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 abarca todos los números a_1 que son menores que a, la segunda clase A_2 abarca todos los números a_2 que son mayores que a; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es o bien el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la división del sistema **R** en las dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2 (Dedekind, 1998).

En el último numeral aparece la definición de *cortadura*, es decir, a la partición del conjunto **R** en las clases A_1 y A_2 es lo que Dedekind llamó cortadura y lo denotó con (A_1, A_2), cortadura generada por un número racional a, además indica que estas propiedades "recuerdan las relaciones de lugar recíprocas entre los puntos de una línea recta L" pues si se distingue las dos direcciones opuestas de ésta recta como izquierda y derecha, entonces tomando dos puntos p y q de esta, podemos saber si p está a la derecha de q o viceversa. Indica además la analogía con los tres enunciados anteriores estableciendo una correspondencia biunívoca si se elige en la recta un origen y una unidad de medida para la medición de segmentos, con la cual se ubica a un número racional sobre la recta. De esta manera establece la correspondencia de los números racionales **R** y la recta L donde señala que la recta es mucho más rica en "individuos-punto" que el dominio **R** de los números racionales en "individuos-número" pues hay infinitos puntos de la recta que no corresponden a ningún número racional debido a que hay longitudes que son inconmensurables con una unidad de medida dada. En ese momento fue cuando Dedekind planteó que era necesario la creación de "nuevos números para que el dominio numérico adquiriera la *misma continuidad* de la línea recta", e hizo la observación de que existían infinitas cortaduras que no eran producidas por números racionales, y llamó a esto la incompletitud o discontinuidad del dominio **R** de todos los números racionales:

> Ahora, cada vez que encontramos una cortadura (A_1, A_2) que no es producida por ningún número racional, creamos un nuevo número irracional α, que consideramos completamente definido mediante esa cortadura (A_1, A_2) (Dedekind, 1998).

Con esto logró crear los números irracionales y además demostró (en *Continuidad y Números Irracionales*, Dedekind, 1998, p. 90) que el conjunto o dominio de los racionales e irracionales recién creado, que hoy se denota con $\mathbb{R}$, posee la propiedad de continuidad, es decir, que existe uno y sólo un número α que produce una cortadura (Ω_1, Ω_2) de $\mathbb{R}$.

Es conveniente recordar aquí que en su trabajo "El origen de la teoría de los conjuntos" (1995), Alvarez había sustentado que a pesar de que Bolzano y Cauchy dieron un nuevo trato a las cantidades reales, en el cual se encuentra la clave de los conceptos de continuidad y convergencia y que así mismo la clave para comprender la variación continua fue remitida al ámbito de las cantidades reales, [...] no es posible considerar aún constituida una teoría de los números reales. Este paso sólo podrá considerarse completado hacia la segunda mitad del siglo XIX y, agrega además, que las aportaciones de Heine, de Weierstrass, de Dedekind, y colateralmente de Cantor, darán el paso decisivo para la constitución definitiva del primer conjunto existente en la *matemática moderna*: el conjunto de los números reales.

Esta forma de entender los números reales se fue depurando y en su trabajo titulado "*Grundlagen einer allgeneinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883 (Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos)" Cantor presentó un completo tratamiento y llamó *sucesión fundamental*, a la sucesión (3.1) que cumple la propiedad: "*dado un ε arbitrario se puede encontrar un entero n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n < n_1$ y m es un entero positivo cualquiera*", que en la actualidad llamamos sucesión de Cauchy, donde establece el orden de los números reales, como puede verse en su trabajo de 1883:

> Una *sucesión fundamental* presenta tres casos, como puede ser rigurosamente deducido de su concepto; o bien sus elementos a_v son, para un valor suficientemente grande de v, menores en valor absoluto que cualquier número dado arbitrariamente; o bien a partir de un cierto v son mayores que un número racional positivo ρ que puede determinarse con precisión; o a partir de un cierto v son menores que una cantidad negativa racional $-\rho$ que puede determinarse con precisión. En el primer caso digo que b es igual a cero, en el segundo, que b es mayor que cero o positivo; en el tercero, que b es menor que cero o negativo. (Cantor, 2005, p. 111-112).

Si bien para ese momento se aceptaba la definición que dio Dedekind en 1872, la definición de Cantor era aceptada por algunos sectores que trabajaban sobre todo en análisis, pues Cantor se fundamentó en las propiedades métricas de los números racionales; además, como él argumentaba, era más plausible dar una definición general, es decir en el espacio n-dimensional. Se observa que él presentaba argumentos a Dedekind de que esto era así, como se lee en la carta del 15 de septiembre de 1882:

> "Un intento de generalizar su concepto de cortadura y emplearlo para una definición general del continuo no quiso darme frutos. Por el contrario mi punto de partida en las sucesiones fundamentales enumerables (ahora llamo así a sucesiones en las que los elementos se aproximan infinitamente entre sí) se acomodó sin violencia a mi intención".

Efectivamente, esta era la idea de Cantor, dar una definición que se pudiera aplicar al espacio n-dimensional. En "Los fundamentos para una Teoría General de Conjuntos" se puede percibir a un Cantor que mostraba ya cierta claridad sobre el continuo lineal y que daba argumentos de que el continuo como se pensaba antes era un concepto que suscitaba diferentes interpretaciones, las cuales por no tener una definición clara eran la causa de corrientes de pensamiento siguiendo a filósofos como Aristóteles, Epicuro, Tomás de Aquino, los cuales presentaban ideas diferentes de continuo. En cuanto a Tomás de Aquino, éste sostenía que el continuo no se componía ni de infinitas partes ni de una cantidad finita de ellas, sino que no constaba de partes en absoluto, y en "Suma Theologica, presenta una prueba aristotélica de que si bien el poder de Dios es ilimitado, él no puede hacer una cosa absolutamente ilimitada. Esto, obviamente envuelve una sutil contradicción ya que entonces, el poder de Dios no es ilimitado pues su límite lo constituye las cosas absolutamente ilimitadas" (Recalde, 1994, p. 222). Al argumento de Santo Tomás de Aquino, Cantor responde:

> Aquí vemos el *origen escolástico-medieval* de una opinión que aún se defiende hoy en día, según el cual el continuo sería un concepto no analizable o bien, como se expresan otros, una intuición pura a priori que apenas sería susceptible de determinación mediante conceptos. Todo *intento de determinación* aritmético de este *misterio* se considerará como una intromisión ilícita y será rechazada con el debido vigor. Los naturales tímidos reciben con esto la impresión de que con el «continuo» no se trata de un *concepto lógico-matemático* sino más bien de un *dogma religioso* [...] Sólo me siento obligado a desarrollar el concepto del continuo con la sobriedad lógica que resulta indispensable para su comprensión y para su empleo en la teoría de conjuntos, tan brevemente como sea posible, y teniendo en consideración sólo la teoría *matemática* de conjuntos (Cantor, 2005, p. 117-118).

En este orden de ideas filosóficas, Cantor trataba de dar definiciones del continuo, pero definió más que eso. Dio formas precisas para estudiar un conjunto de puntos, según éste fuese numerable, no numerable, perfecto o denso. La definición que Cantor dio de conjunto perfecto es la que se conoce hoy en día, es decir, un conjunto que es igual a su conjunto de puntos límites; que en las palabras de Cantor sería: un conjunto P que es igual a su conjunto derivado P', el cual se definió anteriormente ($P = P'$). Además, argumentaba que si el derivado de un conjunto P es numerable, entonces existe un número entero α para el cual

$P^{(\alpha)} = \emptyset$. Si P' es equipotente con el conjunto de los números reales entonces es posible, según Cantor, descomponerlo en dos conjuntos R y S donde el conjunto S es perfecto y el conjunto R es reductible, lo cual significa que existe algún β para el cual $R^{(\beta)} = \emptyset$, pero esto no es del todo cierto pues si tomamos el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ cuyo conjunto derivado son los números reales $\mathbb{R}$, entonces no existe un conjunto R que cumpla con la definición que daba Cantor. Lo que si es verdad, según el análisis moderno, es que todo conjunto derivado P' se puede descomponer en dos conjuntos R y S disjuntos, donde S es un conjunto perfecto o vacío y R es finito o numerable. Además Cantor argumentaba que los conjuntos perfectos por sí solos no daban la definición precisa de continuo de puntos, pero si a la inversa, es decir, que todo conjunto de puntos continuo debía ser perfecto. La razón de que no es suficiente el ser perfecto para determinar la continuidad la explicó con su famoso conjunto, que se conoce como conjunto de Cantor o discontinuo de Cantor, el cual aparece en los fundamentos como una nota al capítulo 10 de los fundamentos:

> Acerca de los conjuntos perfectos se puede demostrar el siguiente teorema: que nunca tienen la potencia de (I)[2]. Como ejemplo de un conjunto de puntos perfecto que no es denso por doquier en ningún intervalo[3], por pequeño que éste sea, menciono la colección de todos los números reales comprendidos por la fórmula:
>
> $$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$
>
> donde los coeficientes c_n han de tomar uno de los valores 0 y 2 a voluntad, y la serie puede constar de una cantidad tanto finita como infinita de términos.

Teniendo en cuenta la topología de este conjunto, Cantor añadió un concepto más para poder definir el continuo, y es el de conexidad:

[2]Es decir que los conjuntos perfectos no son numerables (potencia I = numerables , potencia II = no numerables).

[3]Lo que hoy conocemos como conjunto de medida cero.

> Llamamos a T un conjunto de puntos *conexo* si para cada dos puntos del mismo, t y t', supuesto un número ε arbitrariamente pequeño, existe siempre y de múltiples modos una cantidad *finita* de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ de T, de tal manera que las distancias $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots, \overline{t_\nu t'}$ son todas menores que ε. [...] Creo pues descubrir en estos dos predicados, «perfecto» y «conexo», las características necesarias y *suficientes* de un continuo de puntos [...]

Pero tal definición no es del todo suficiente pues los números racionales en el intervalo $(0,1)$ resultarían ser conexos. Lo que hoy conocemos por conjunto conexo en un espacio topológico es un conjunto que no es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos, y lo que se conoce como continuo de puntos es un conjunto compacto y cerrado de un espacio conexo. Pero es relevante lo que hacía Cantor por dar una definición, como él decía, *lógico-matemática,* y a pesar de ir contra la corriente, él incrementó su interés por dar una mejor idea de tal concepto y "su empeño por comprender la estructura del continuo lineal, delimita un nuevo campo de estudios que se revelará de una riqueza sin igual en los decenios subsiguientes: *La Teoría de los Espacios Topológicos* (Recalde, 1994, p. 145)".

3.6. La no numerabilidad de los números reales

En una Carta dirigida a Dedekind del 29 de noviembre de 1873 le planteaba el problema de que si era posible establecer una biyección entre los números enteros positivos y los números reales positivos o en sus palabras "*coordinar la colección de todos los individuos enteros positivos* (n) *con las magnitudes reales positivas* (x) *de tal modo que a cada individuo de una colección le corresponda uno y sólo uno de la otra*". Cantor tenía la plena seguridad de que la respuesta era no, pero no tenía una prueba de ello. También le advertía a Dedekind que se podía cometer un error al dar una respuesta superficial:

¿No nos inclinaríamos también, a primera vista, a afirmar que (n) no puede ser coordinado unívocamente con la colección $\left(\frac{p}{q}\right)$ de todos los números racionales positivos $\frac{p}{q}$? Y sin embargo no resulta difícil mostrar que (n) puede coordinarse unívocamente no sólo con aquella colección, sino también con lo más general

$$(a_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_v})$$

donde $n_1,n_2,\ldots,n_v$ son una cantidad cualquiera v de índices enteros positivos tan grandes como se quiera (Ferreirós & Gray, 2006, p. 13-14).

Por el término $(a_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_v})$ Cantor, al parecer, quería decir la v-upla $(n_1,n_2,\ldots,n_v)$. Con relación a la numerabilidad de los racionales Cantor tenía una prueba de ello en 1868, pues en éste año lo expuso en el seminario de Weiertrass en Berlín. La explicación de cómo era la demostración aparece en una carta a Goldscheider del 18 de Junio de 1886:

Basta ponerlos en el orden siguiente:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1},\ldots$$

Esto es, se toman las fracciones $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ en su forma irreducible, y se ordenan de manera que la primera vaya antes o después de la segunda según que $m+n$ sea menor o mayor que $m'+n'$; en cuanto a las fracciones para las que $m+n=m'+n'$, se ordenan de menor a mayor numerador.

Respecto a la pregunta que hizo Cantor a Dedekind, éste contestó que si bien no había respondido, pues no tenía el interés suficiente, ni ninguna aplicación evidente, había podido demostrar que la colección de los números algebraicos[4] se podía coordinar con los números enteros positivos; respecto a lo cual la respuesta de Cantor en una carta del 2 de diciembre de 1873, es en el sentido de que la demostración que él dio se parece a la demostración de las

[4]Un número real se dice *algebraico* si es raíz de una ecuación del tipo $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ donde $a_i\in\mathbb{Q}$, $0\leq i\leq n$.

ν-uplas $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$ donde los n_i son enteros positivos, pero como se verá, esto no era del todo cierto pues la demostración que dice Cantor tener no estaba bien formulada.

La pregunta de Cantor era crucial pues estaba conjeturando de alguna manera que el continuo podría ser susceptible de ser puesto en correspondencia con los enteros positivos y si no se estaría en la posición de diferenciar dos clases de conjuntos infinitos. De ésta manera revivía así el problema del infinito que planteaba tantos conflictos como la paradoja que ponía en evidencia Galileo, hacía el año de 1638, al considerar la coordinabilidad de los cuadrados de los números enteros positivos con los números naturales, contradiciendo el principio Euclidiano "de que el todo es mayor que sus partes". Dedekind se quedaría sorprendido cuando Cantor arguye que con la demostración de que los números algebraicos son coordinables con los enteros positivos y que de poder dar una respuesta a la pregunta era posible dar una nueva demostración del teorema que había demostrado Liouville en 1851 sobre la existencia de infinitos números trascendentes en un intervalo (α, β). Cantor podía ver que sus nuevas inclinaciones científicas daban fruto aún cuando de momento el iba contra la corriente pues por la época regía la tendencia sobre todas las investigaciones matemáticas, que estas tuvieran una aplicación en alguna ciencia o en problemas ya planteados por los matemáticos anteriores.

Respecto a los números trascendentes se puede decir que los primeros números conocidos de este tipo fueron los números de Liouville:

$$\alpha = 0.110001000000000000000001000\ldots,$$

donde la cifra 1 aparece en la posición $n!$. Liouville demostró que para cada n, α no es raíz de ningún polinomio de grado n con coeficientes enteros[5]. Aunque estos números no resultan ser particularmente interesantes, para los números un poco más importantes como e y π todavía

[5]En la terminología actual se podría decir que los números de Liouville son numerables, pues basta poner en correspondencia n con $n!$.

no se conocía una prueba de que eran números trascendentes. Respecto al primero de ellos, la primera prueba se debe a Hermite quien en 1873 demostró que e era trascendente y ni que decir del enigmático π, del cual sólo hasta 1882 se conoció una prueba de su trascendencia, debida a Lindemann, con la que se dio una respuesta a la pregunta planteada por el clásico problema de la matemática griega sobre la construcción, con sólo regla y compás, de un cuadrado cuya área fuese la del círculo de radio 1, es decir igual a π, o, en otras palabras, se trata de la imposibilidad de "cuadrar el círculo" con regla y compás, o de demostrar que π no es un número construible[6].

Tan sólo cinco días después de su última carta a Dedekind (7 de diciembre de 1873), Cantor pudo dar una prueba de la no correspondencia de los números reales positivos con los enteros positivos, de manera que mostraba, sin exhibir ningún número trascendente, que casi todos los números son trascendentes.

Estas ideas aparecieron en su artículo de 1874 denominado "Sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos". El artículo se divide en dos secciones, la primera muestra la correspondencia de los números algebraicos con los números naturales, la segunda muestra la no correspondencia del intervalo (α, β) con los enteros positivos. Es decir que existen muchos más números reales no construibles que los que si lo son. Entonces los números construibles son un subconjunto de los números algebraicos. Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable, en cambio el conjunto de los números reales es no numerable. En consecuencia hay muchos más números reales no construibles que construibles.

[6]Hoy se conoce que la imposibilidad de cuadrar el círculo con regla y compás es consecuencia de dos teoremas:

Teorema de Wantzell ((1814-1848) (1837)). *Un número real β es construible si, y solo si, es algebraico sobre los racionales y el polinomio irreducible del cual β es raíz tiene como grado una potencia de dos.*

Teorema de Lindemann ((1852-1939) (1882)). *π no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales; en otras palabras, π no es algebraico, es decir, π es trascendente.*

La prueba que aparece en la primera sección, según las notas de Dedekind, era casi la misma (Ferreirós & Gray, 2006, p. 173)[7] que le había comentado en la anterior carta y sin embargo no hizo nada por reclamar; en cambio, aplicó éste teorema en "Ueber die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen, 1901"; donde remitía al artículo de Cantor y afirmaba que por la misma época él dio también una demostración.

La idea es como sigue: Dado un polinomio irreducible de grado n de la forma

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{3.3}$$

donde los $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números enteros sin divisores comunes, n y a_0 positivos. Si ω es solución de (3.3), llamando altura de éste número al entero positivo definido por

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

entonces a cada número algebraico ω le corresponde una altura N y a cada altura N le corresponden finitos números algebraicos, pues se pueden construir a lo sumo finitos polinomios de altura N. En éste orden de ideas se toma la altura 1, y se designa por ω_1, al único número algebraico que le corresponde; continuando con la altura 2 y los números algebraicos correspondientes, a saber dos, se ordenan de acuerdo a su tamaño y se designan por ω_2, ω_3; de esta manera se puede continuar hasta poner éstos números en la forma:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{3.4}$$

Aquí se puede ver que Cantor argumenta que la prueba de Dedekind de la numerabilidad de los números algebraicos es casi la misma para enumerar las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, siendo cada x_i un número racional, donde Cantor arguye que para poder numerar las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es suficiente tomar $N = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ y ordenar los elementos de acuerdo con esta relación. Pero esto no es así porque la numerabilidad falla, pues si tomamos

[7] La nota de Dedekind: "Este teorema y su demostración pasaron poco después casi literalmente, incluso empleando el término técnico altura".

por ejemplo el espacio $\mathbb{R}^3$, entonces dado $N = 1$ y la segunda coordenada igual a cero, la ecuación $1 = x_1^2 + x_3^2$, tiene infinitas soluciones. Al parecer esta pudo haber sido la razón por la cual Cantor utilizó la prueba casi literalmente.

La prueba de la segunda sección se desarrolla de la siguiente manera: Dada una sucesión de números reales:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{3.5}$$

y un intervalo (α, β), se determinará un número η que no está en la sucesión (3.5), denotamos con α', β' los dos primeros números de la sucesión (3.5) que caen dentro del intervalo (excluyendo sus extremos) con $\alpha' < \beta'$; de la misma forma tomamos α'', β'', con $\alpha'' < \beta''$ los dos primeros números de la sucesión que están en el intervalo (α', β'); de la misma manera se construyen los intervalos (α^n, β^n), donde se puede ver que cada uno contiene a los siguientes.

Se puede pensar en dos casos:

1. El procedimiento se detiene para algún v, es decir, el último intervalo es (α^v, β^v) en donde, como máximo, se encuentra término de la sucesión (3.5) y naturalmente es posible extraer un número η que no esta en la sucesión.

2. El número de intervalos construidos de ésta manera es infinitamente grande, donde la sucesión $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ es creciente y con cota superior β, por tanto tiene un límite α^∞. De la misma manera la sucesión $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ es decreciente con cota inferior α y cuyo límite es β^∞. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$, el número que se busca es $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ que naturalmente no está en la sucesión, por la forma como se han definido los intervalos. Si $\alpha^\infty \neq \beta^\infty$, entonces todo número en el interior del intervalo y sus extremos no se encuentran en la sucesión (3.5).

También esta demostración sufrió una simplificación al parecer con la ayuda de Dedekind según lo hacen conocer en sus notas:

> A la carta recibida el día 8 de diciembre, respondo en el mismo día congratulándome del hermoso éxito, a la vez que doy un "reflejo especular" muy simplificado del núcleo de la demostración (que era todavía bien compleja); de nuevo, esta exposición pasó casi literalmente al artículo de Cantor, ¡si bien el giro que yo había empleado, de acuerdo con el principio de continuidad, fue evitado en el lugar correspondiente![8].

Evidentemente ésta prueba presentada aquí es mucho más sencilla y general, pues la primera prueba tomaba el intervalo $(0,1)$ y mostraba, por reducción al absurdo, que no era posible la correspondencia con los enteros positivos (Ferreirós & Gray, 2006)[9]. Cabe la pregunta: ¿por qué razón el título de la publicación no era respecto a que los números reales no son numerables? En primer lugar hay que señalar que Cantor no pensaba publicar el resultado, pero cuando Weierstrass se enteró del mismo, visitó a Cantor para tener detalles de la prueba y le recomendó no hacer énfasis en tal tema, sino más bien enfatizar en lo relacionado con los números algebraicos. Este interés, al parecer, se debe a que él deseaba definir una función especial que fuera continua y diferenciable para los números trascendentes pero no para los números algebraicos, lo cual sucedería posteriormente con base en el resultado obtenido por Cantor.

En enero 5 de 1874, Cantor va más allá y plantea a Dedekind el siguiente problema:

> ¿Es posible poner en correspondencia unívocamente una superficie (digamos un cuadrado incluyendo su frontera) con una línea (digamos un segmento de recta incluyendo sus puntos extremos), de manera unívoca tal que a cada punto de la superficie le corresponda un punto de la línea, e inversamente a cada punto de la línea un punto de la superficie?

[8]Se refiere a que Cantor toma los dos casos posibles en su demostración en vez de aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass para encontrar η.

[9]Véase la carta del 7 de diciembre de 1873 donde se muestra ésta prueba.

Si bien Cantor pensaba que era muy difícil exhibir una demostración y al parecer inclinado al no, encontraría que si era posible dar la respuesta en forma afirmativa. Continuó trabajando en el problema, hasta que el 20 Junio de 1877 envió a Dedekind una demostración de que las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y un valor real y, con $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y, tomados en el intervalo $[0,1]$, podrían ser puestos en correspondencia biunívoca.

La idea de Cantor era utilizar para cada una de las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la representación decimal única de un número que se encuentra en el intervalo $[0,1]$ y utilizar la parte decimal para formar otro número que se encuentra en éste intervalo; entonces, si cada x_i con $i = 1, \ldots, n$, es de la forma:

$$x_i = 0\,.\,a_{i1}a_{i2}\ldots a_{i\nu}\ldots, \text{ con } a_{i\nu} \in \{0,1,2\ldots,9\},$$

podemos formar un número

$$y = 0\,.\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu\ldots,$$

donde $\beta_{(k-1)n+i} = a_{ik},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots$; e inversamente si se parte de $y = 0\,.\,\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu\ldots$ con la relación anterior podemos formar la n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Sin embargo Cantor no se da cuenta de que esta olvidando los números de representación finita, tal como sucede con el número:

$$\frac{1}{5} = 0\,.\,2 = 0\,.\,19999\ldots$$

Este error lo encontró Dedekind, y le señaló que la correspondencia uno a uno fallaba, a lo cual Cantor responde:

> Por desgracia tiene Ud. toda la razón en su objeción; afortunadamente, sólo afecta a la demostración y no al asunto; pues demuestro en cierto modo más de lo que pretendía[10], ya que he puesto en relación unívoca un sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de variables

[10]Recuérdese que él consideraba que tal correspondencia no era posible.

reales ilimitadas con una variable y, contenida en $[0,1]$, pero que no toma todos los valores del mismo, sino todos con excepción de algunos y''. Más cada uno de los valores que le corresponden y' lo toma solo una vez, y esto es según creo lo esencial. Ya que ahora puedo poner a y' en relación unívoca con otra variable t, que recibe todos los valores ≥ 0 y ≤ 1 (Ferreirós & Gray, 2006, p. 191-192).

La última frase del párrafo anterior, al parecer, hace pensar que él ya tenía un resultado al respecto, el cual se refiere a que los números irracionales se pueden poner en correspondencia con los números reales. Cantor envía una carta a Dedekind el 25 de junio 1877, donde utiliza la misma idea de la demostración, pero tomando solo los números irracionales en el intervalo $[0,1]$ y de esta manera se quita el problema de los números con representación decimal finita. En ésta carta demuestra, efectivamente, que los números irracionales en el intervalo $[0,1]$ se pueden relacionar unívocamente con los números pertenecientes a éste intervalo. Además muestra que el intervalo $(0,1]$ puede ser biunívocamente relacionado con $[0,1]$ (ver figura 3.4) y con aplicación sucesiva de éste teorema muestra que inclusive si se quitan del intervalo $[0,1]$, los números a_n con $n = 1,2,\ldots$ tales que $a_n < a_{n+1}$, $a_n = 1$, todavía es posible relacionar biunívocamente con el intervalo $[0,1]$.

Cantor presenta una notable simplificación de su teorema: Dada una variable $y \in (0,1)$ (y número irracional) y otra variable $x \in (0,1)$, entonces los valores de la variable y se pueden hacer corresponder uno a uno con los valores de la variable x, lo cual lo denota con $x \sim y$.

En la demostración considera la sucesión de todos los números racionales a_n en el intervalo $[0,1]$; una sucesión de números irracionales $\rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ y una variable h que toma todos los valores en $[0,1]$, excepto los valores de a_n y ρ_n.

Entonces tenemos que, en las notaciones de Cantor:

$$x \equiv \{h, \rho_n, a_n\},$$

$$y \equiv \{h, \rho_n\},$$

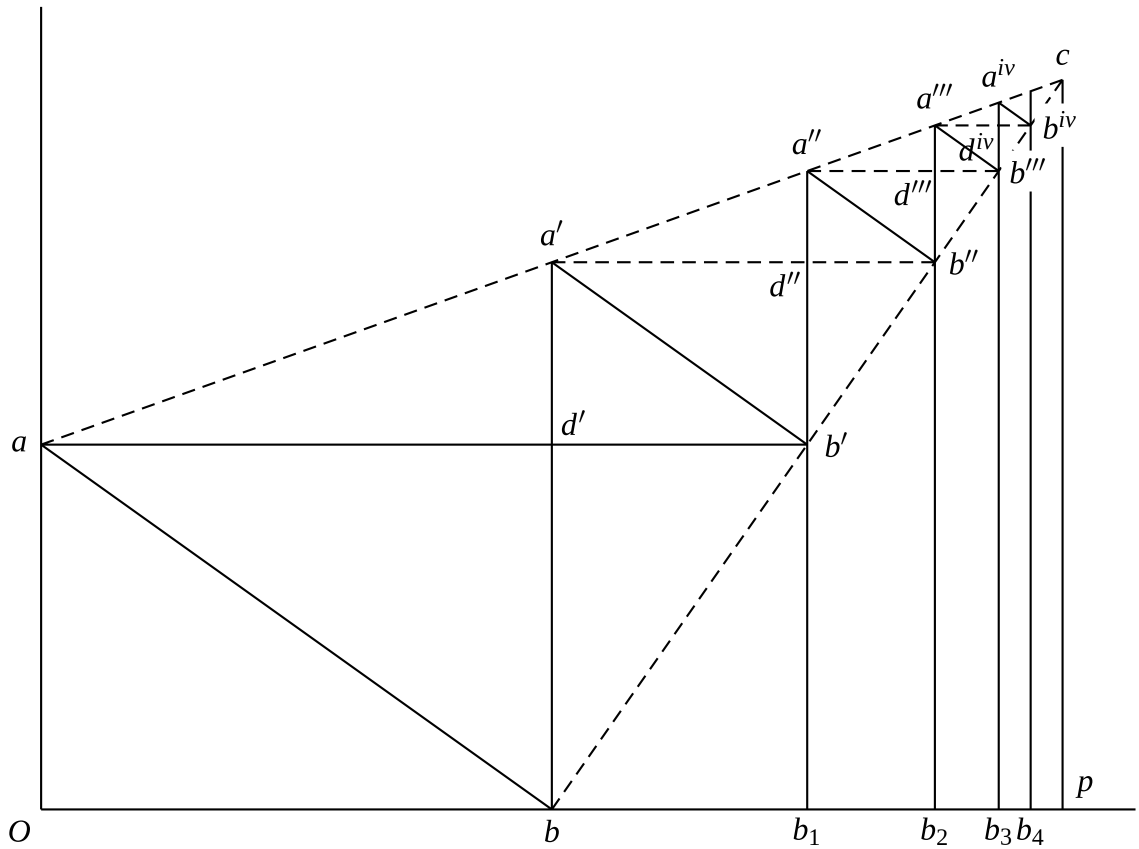

FIGURA 3.4. Cantor prueba mediante ésta curva la equipotencia del intervalo $[0,1]$ con $(0,1]$. Esta se compone de segmentos paralelos de recta $ab, a'b', a''b'', \ldots$ y c; donde $Op = pc = 1, Ob = \frac{1}{2}, bb_1 = \frac{1}{4}, b_1b_2 = \frac{1}{8}, \ldots$, $Oa = \frac{1}{2}, a'd' = \frac{1}{4}, a''d'' = \frac{1}{8}, \ldots$

pero sabemos que

$$y \equiv \{h, \rho_{2n-1}, \rho_{2n}\}$$

y

$$h \sim h, \qquad \rho_n \sim \rho_{2n-1}, \qquad a_n \sim \rho_{2n}$$

de donde $x \sim y$ (x es equipotente con y).

En la prueba se hace evidente el uso, que hace Cantor, de la numerabilidad de los conjuntos de números de la forma $\rho_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$, así como de la correspondencia biunívoca de los números naturales con los números pares e impares.

3.7. Los números transfinitos

En su célebre trabajo de 1878, titulado "Una contribución a la teoría de variedades", Cantor mostraba que los irracionales y los reales tienen la misma cardinalidad[11] y a la vez señalaba que los números irracionales no son numerables. En dicho artículo se puede encontrar definido el concepto de potencia o equivalencia:

> Si dos variedades bien definidas M y N pueden ser coordinadas unívocamente y completamente, elemento con elemento (que, si es posible en una forma, siempre se puede hacer de muchas otras formas), emplearemos en lo que sigue la expresión, que esas variedades tienen la misma potencia o también que ellas son equivalentes.

En los términos actuales, se llaman conjuntos de igual cardinalidad o equipotentes. También plantea, sin prueba, que si los conjuntos M y N no tienen la misma potencia, M es equipotente a una parte de N o N es equipotente a una parte de M (Ferreirós, 1999, p. 188).

Cantor, a partir de la paradoja advertida ya por Galileo, desde la emergencia misma de la noción de conjunto infinito, elaboró un criterio de comparación del tamaño de conjuntos infinitos. Además planteó dos teoremas que serían importantes en su trabajo posterior sobre los números transfinitos, que en la actual terminología, se formularían así:

1. Si M es un conjunto numerable, entonces cualquier subconjunto infinito de M es numerable.

2. Si $M, M', M'', \ldots$ es una sucesión finita o infinita de conjuntos numerables, su unión es numerable.

[11] Cantor llama Potencia a lo que hoy se conoce como cardinalidad.

Conviene mencionar aquí las concepciones de Cantor relacionadas con la noción de dimensión, a la cual se refiere en los siguientes términos:

> Se trata de mostrar que las superficies, cuerpos, e incluso los dominios continuos de dimensiones ρ pueden ser coordinados unívocamente con líneas continuas, esto es, con dominios de solo una dimensión; y que por tanto las superficies, cuerpos, e incluso los dominios de ρ dimensiones, tienen la misma potencia que las curvas. Esta consideración parece oponerse a la que reina de modo general entre los representantes de la nueva geometría, ya que hablan de dominios simplemente infinitos, doblemente, triplemente,..., ρ-uplemente infinitos (Ferreirós & Gray, 2006).

En este punto es oportuno el comentario de Recalde, en su tesis de 1994: "Cantor está planteándose la necesidad de adoptar procedimientos de rigor, en temas de la indagación matemática en momentos en los cuales se procedía con demasiada ligereza conceptual".

Al hablar del concepto de cardinalidad, Cantor entraba en polémica con Dedekind cuando hacía referencia a una variedad de ρ dimensiones; afirmaba por ejemplo:

> [...] Me llamó la atención que todas las investigaciones convincentes que se han realizado en este campo (la Geometría) parten a su vez de un supuesto no demostrado, el cual no me pareció evidente sino más bien necesitado de una fundamentación. Me refiero al supuesto de que una variedad continua de ρ dimensiones requiere, para la determinación de sus elementos, ρ coordenadas reales independientes entre sí, y que dicho número de coordenadas no puede ser aumentado ni reducido para una misma variedad.

Cantor aseguraba que esa suposición requería una demostración y que por tal razón planteó el problema de que sí era posible relacionar unívocamente un dominio continuo de ρ dimensiones con un dominio continuo de una dimensión a algunos colegas, en la conmemoración de Gauss en Gotinga; y se quedó sorprendido cuando encontró tal demostración, "lo veo, pero no lo creo" exclamó pues el estaba inclinado a que la respuesta era no, además dice:

> Ahora me parece que todas las deducciones filosóficas o matemáticas que hacen uso de aquella suposición errónea (que el número de dimensiones es fijo) son inadmisibles. Más bien habrá que buscar la distinción que existe entre los dominios de diferente número de dimensiones en aspectos totalmente diferentes, y no en el número de coordenadas independientes tomado como característica.

Dedekind replica que el número de dimensiones de una variedad continua es, sin duda, el más importante invariante de la misma, aún cuando pareciera verse anulada con la demostración de Cantor. Efectivamente lo que Cantor probó fue que la cardinalidad era igual más no que la dimensión de una variedad continua de $\rho > 1$ dimensiones era uno. Cantor respondía a Dedekind que no tenia intención de oponerse a las concepciones que venían siendo aceptadas, pero si deseaba clarificarlas; además argumentaba que con referencia a las coordenadas independientes, si se toma el concepto de coordenada en general, sin hacer ningún supuesto sobre la naturaleza de las funciones que intervienen, es posible, según había mostrado, hacer que el número de coordenadas independientes, unívocas y completas, sea cualquier número prescrito (Cantor, 2005) Cantor hace referencia a la relación de correspondencia que se puede encontrar entre conjuntos de igual cardinalidad para los cuales existe siempre una biyección, y luego se aproximaría, por primera vez, a un enunciado que implicaría la hipótesis del continuo, en términos de que por medio de un proceso inductivo, que en ese momento no exponía, consideraba posible afirmar que el número de clases de variedades lineales, haciendo referencia a conjuntos de números reales, es finito y exactamente igual a dos. Esta sería una versión débil de la hipótesis del continuo, donde un conjunto de números reales es numerable o es equipotente con los números reales.

Ya habiendo madurado sus ideas sobre conjuntos de puntos Cantor publica en 1883 su trabajo titulado "Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos, una Investigación Matemático-Filosófica"; donde aparece la teoría de los números transfinitos y advierte en la primera sección:

> La dependencia en que me veo respecto a esta extensión del concepto de número es tan grande, que sin esta última apenas me sería posible dar sin violencia el menor paso adelante en la teoría de conjuntos [...] pues se trata de una extensión de la serie de los verdaderos números más allá del infinito.

Por otro lado distinguió los infinitos como infinito propio (actual o en acto) e infinito impropio (potencial), pero tal y como los definía ahí, estos eran infinitos en acto. "Cantor era consciente de que la incorporación práctica del infinito actual en sus trabajos le permitía extender el concepto de número más allá de los niveles existentes" (Recalde, 1994); pero se debe tener en cuenta que por la época regía el legado de las ideas de Aristóteles, y era común identificar a Dios con lo infinito, de no haberlo hecho así, se estaría en la posición de explicar a Dios mediante un razonamiento, pero esto naturalmente era una herejía "omnis determinatio est negatio (toda determinación es negación)", así que Cantor obró con mucha cautela y trató de convencer a teólogos y filósofos de que los números transfinitos son tan naturales que cabe ponerlos en medio de lo finito y lo divino (Absoluto-Dios)[12].

Para poder generar los números transfinitos, definió conjunto bien ordenado en los siguientes términos:

> Entenderemos por conjunto bien ordenado todo conjunto bien definido en el cual los elementos están enlazados unos con otros por medio de una sucesión determinada, según la cual exista un primer elemento del conjunto, y a cada uno de los elementos (supuesto que no sea el último de la sucesión) le siga otro elemento determinado, e igualmente a

[12]Precisamente, Cantor utilizó el término transfinito por concesión a los teólogos

> todo subconjunto arbitrario de elementos, finito o infinito, le corresponda un elemento determinado que es el inmediato sucesor a todos ellos en la sucesión (a menos que no haya absolutamente ninguno en la sucesión que los siga a todos ellos (Cantor, 2005, p. 89).

A esto agrega tres principios:

1. *Primer principio de generación*, que se basa en la idea, según la cual, dada la existencia de un número, el siguiente se genera añadiendo una unidad. Es decir, se producen nuevos ordinales mediante la adición sucesiva de unidades.

2. *Segundo principio de generación*: Dada una sucesión ilimitada de números enteros o transfinitos, se genera un nuevo número, considerándolo como el límite de estos números, es decir, el número inmediatamente mayor que todos ellos. Esto es, el mínimo número mayor que cualquier componente de la sucesión.

De esta manera Cantor toma la sucesión de los enteros positivos:

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

y creó el primer número transfinito ω como el representante de la sucesión anterior, y consideró al número ω como el límite al cual tienden los números ν; haciendo la salvedad de que es el primer número entero que les sigue a todos los números ν; luego aplicando reiteradamente el primer principio generó los números:

$$\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots, \omega+\nu, \ldots$$

A esta sucesión de números transfinitos le aplicó el segundo principio y generó el número $\omega+\omega$ el cual se denota con 2ω; a este número transfinito le aplicó el primer principio y obtuvo

$$2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3, \ldots, 2\omega+\nu, \ldots$$

A esta sucesión de números transfinitos le aplicó el segundo principio y generó el número $2\omega+\omega$ el cual se denota con 3ω. Continuando de esta manera generó números de la forma $\mu\omega+\nu$, a los cuales les aplicó el segundo principio y generó el número que Cantor denotó con ω^2. Naturalmente si se continúa con éste procedimiento al número anterior le siguen números como:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

De ésta manera se llega a números de la forma:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu \tag{3.6}$$

y, como consecuencia de los dos principios, estos números deben tener un número superior a ellos; a este número Cantor lo denotó con ω^ω. Se puede observar que estos números son ordinales, y pueden continuar sin restricción.

3. Entonces, incluyó el *Tercer principio de restricción o de limitación*, según el cual, sólo se creará un número transfinito ordinal con ayuda de los otros principios. Si la totalidad de los números obtenidos previamente es numerable, mediante una clase numérica conocida y disponible, es decir, con la ayuda de los dos principios se generan números α que siguen en una sucesión determinada así:

$$\omega,\omega+1,\ldots,\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\cdots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,\ldots,\omega^\omega,\ldots,\alpha,\ldots$$

la cual está condicionada a que los números anteriores a α, forman un conjunto que es numerable.

El conjunto de los números transfinitos ordinales creados con los dos principios se puede ver que es numerable, pues si consideramos (3.6), y consideramos el número $N=\mu-1+|\nu_0|+|\nu_1|+\cdots+|\nu_{\mu-1}|+|\nu_\mu|$, es suficiente razonar como en la demostración de la numerabilidad de los números algebraicos, además demostró por reducción al absurdo que la colección de los números α definidos anteriormente son no numerables, y que ésta cardinalidad es la que sigue inmediatamente a la cardinalidad de los primeros números. Este era un camino que Cantor seguía para poder relacionar la segunda clase de números con los números reales y así poder demostrar la hipótesis del continuo, pero lamentablemente no le dio resultado. Aquí Cantor formuló el teorema que se conoce hoy como El teorema de Cantor-Bernstein:

> Si se tiene cualquier conjunto bien definido M de la segunda potencia, un subconjunto M' de M y subconjunto M'' de M', y se sabe que este último M'' se puede poner en correspondencia biunívoca con el primero, M, entonces también se puede siempre poner en correspondencia biunívoca el segundo, M', con el primero, y en consecuencia también con el tercero (Ferreirós & Gray, 2006, p. 131).

Aunque Cantor jamás pudo demostrar este teorema, en 1897, cuando se realizaba el seminario de Cantor en Halle, el joven Felix Berstein de 19 años, logró una demostración correcta. Como es sabido, este teorema también es conocido como teorema Schröder-Berstein, pues Schröder presentó una demostración, en 1896, que resultó incorrecta. Se conoce también que, 10 años antes, Dedekind tenía ya una demostración que jamás publicó.

Además, sobre la base de los conjuntos ordenados definió las operaciones de adición y multiplicación de los números ordinales transfinitos, aclarando que tales operaciones no son conmutativas, debido a que el orden de los factores es esencial, pues $1+\omega=\omega$, mientras que $\omega+1$ es un ordinal transfinito distinto y posterior a ω; y también $\omega 2=\omega$, en tanto que 2ω es un ordinal transfinito diferente de ω; es decir, al conjunto $\{1,1,2,3,\ldots\}$ le corresponde el número ordinal transfinito ω y al conjunto $\{1,2,3,\ldots,1\}$ le corresponde $\omega+1$, de manera similar se explica para la multiplicación.

En los fundamentos para una teoría general de conjuntos Cantor toca un punto crucial para el futuro de la matemática; en el capítulo 8, él expresa su visión de la matemática:

> [...] Es de gran importancia para la matemática; a saber, que para el desarrollo de su material de ideas esta última tiene que considerar única y exclusivamente la realidad inmanente[13] de sus conceptos, y no tiene por tanto ninguna obligación de comprobar su realidad transiente [...] La matemática es totalmente libre en su desarrollo, y sólo está limitada por la consideración autoevidente de que sus conceptos sean consistentes en si mismos [...] (Ferreirós & Gray, 2006, p. 106).

Cantor ofrecía razones para que sus teorías fueran aceptadas, pues Kronecker, muy influyente en la sociedad matemática, atacaba continuamente sus ideas, ya que según su concepción la matemática era una ciencia empírica, pero éste tenía un soporte matemático-filosófico en el cual basaba sus ideas; de esta manera se podría decir que Cantor realizó las primeras aproximaciones a las futuras ideas de Hilbert respecto a que la existencia matemática equivale a la consistencia del sistema axiomático del que se trate. Volviendo a los números transfinitos Cantor hacía un reclamo en cuanto a que los números complejos que no pueden ser considerados ni positivos ni negativos. Si éstos han dado un gran impulso al desarrollo del análisis y se los acepta o por lo menos se tiene la idea de aceptarlos como números; entonces, por qué no intentar aceptar los números transfinitos que obedecen a una concepción similar, inclusive más sencilla que la de pasar de los números reales a los números complejos; además, argüía que no se le debía temer a las nuevas definiciones pues no son un peligro, y advertía:

> [...] Me parece que toda limitación superflua del impulso de investigación matemática lleva consigo un peligro mucho mayor, tanto mayor porque no es posible extraer de la esencia de la ciencia ninguna justificación real para ello; puesto que la esencia de las matemáticas radica en su libertad [...] Si Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite y Riemann hubiesen estado obligados a someter

[13] Aquí cita al filósofo Spinoza: “Por idea adecuada entiendo la idea que, considerada en sí misma sin relación con el objeto, tiene todas las propiedades o denominaciones intrínsecas de una verdadera idea”.

continuamente sus ideas a un control metafísico, ciertamente no disfrutaríamos de la grandiosa estructura de la moderna teoría de funciones; la cual, a pesar de haber sido proyectada y lograda en completa libertad y sin ulteriores propósitos; sin embargo manifiesta su significado *transiente* en su aplicación a la mecánica, la astronomía y la física matemática [...] (Ferreirós & Gray, 2006, p. 107).

Si bien los números transfinitos tienen un espíritu de creación libre, Cantor dió una argumentación sobre la base de sus teorías. Sus principios de generación son una fabulosa creación, el primero de ellos garantiza que todo número tenga un sucesor, esto es, se supone, una manera de imitar la estructura de los números naturales y entramar la definición de conjunto ordenado que el mismo dio, con estos números. De esta manera Cantor se trató de liberar de que sus números creados por el primer principio sean atacados o rechazados, con el segundo principio trata de imitar el procedimiento que él usó para definir un irracional que es básicamente obtener este irracional por medio de una sucesión de números racionales, pero aquí es donde está la genialidad de Cantor, pues con el segundo principio logró crear el primer transfinito ω que es el límite al cual tienden los números ν, en la sucesión $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, considerando a ω como el mayor de cualquiera de los números ν, aunque no es claro cómo argumentar este procedimiento pues obtener un número como límite de una sucesión creciente que no está acotada despierta ciertas sospechas, pero este principio es clave, como se acaba de ver, pues sin el los números transfinitos no existirían y cualquier discusión sobre éstos sería inútil. Este es el punto central y aquí Cantor hizo uso de las matemáticas libres sin el temor a los nuevos conceptos. Las nuevas ideas de Cantor tendrían un gran eco en toda la comunidad matemática pero después de la publicación de sus trabajos. Pero no se debe olvidar que sin una axiomatización de la teoría de conjuntos, los números transfinitos generarían contradicciones y se harían evidentes las paradojas, que se harían más manejables y admisibles dentro de una teoría axiomática de conjuntos, paso que Cantor lastimosamente nunca dio. Como se puede ver, Cantor también definió el tercer principio, el principio de restricción o limitación, el cual "establece, de una manera regular y armoniosa, conjuntos de ordinales a los que Cantor llama clases numéricas, que a su vez permiten definir una serie de cardinalidades sucesivas (Ferreirós & Gray, 2006)".

En los fundamentos para una teoría general de conjuntos, Cantor escribe que no hay un número ordinal transfinito que sea el último y que además es posible asociar a cada uno de éstos un número cardinal transfinito y formula la hipótesis generalizada del continuo generalizada, que se expresa de la siguiente manera $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, cuando hace referencia a que el conjunto de todas la funciones reales tiene la potencia $\aleph_2$, es decir mayor que la del continuo. En 1892 en su trabajo titulado "Sobre una cuestión elemental de la Teoría de Conjuntos" presenta el método de diagonalización, mostrando que un conjunto M conformado por todos los elementos de la forma $E = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, donde cada x_i es m o w, con $i = 1, 2, 3, \ldots$, no es numerable. La idea es sumamente sencilla; coloca los elementos del conjunto M de forma matricial y genera un elemento $F = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ que no está en M, el cual se forma tomando como referente la diagonal principal de tal matriz, es decir, si el elemento en la diagonal principal es $a_{ii} = m$ entonces y_i toma el valor w. Además advierte que éste simple principio permite mostrar que dado un conjunto L se le puede asignar otro M que es de potencia mayor que L. Este no es más que el Teorema de Cantor, y presenta una prueba en términos del siguiente ejemplo: toma el conjunto de los números reales como L y el conjunto M de todas la funciones f con dominio L y cuyo rango es el conjunto $\{0,1\}$; fácilmente se muestra que M no tiene una potencia menor que L, pues si se toma el subconjunto M' de M formado por las funciones que tienen el valor 0 para x_0 y 1 para el resto, entonces, M' es equipotente con L. Pero tampoco es igual; pues si este fuera el caso, podríamos tener que a cada función f de M le corresponde a un elemento a_0 de L, es decir, estaríamos en la posibilidad de escribir f_α, pero esto es imposible ya que se puede construir una función g que no corresponda a ninguna función f_α de la siguiente manera:

$$g(a_0) = 1 \text{ si } f_\alpha(a_0) = 0, \text{ y } g(a_0) = 0 \text{ si } f_\alpha(a_0) = 1 \text{ para todo } a_0 \in L.$$

Cantor había demostrado que para cualquier conjunto se cumple que su cardinal es siempre estrictamente menor que el cardinal de su conjunto potencia; resultado este conocido como el Teorema de Cantor. De esta manera estableció el primer cardinal transfinito $\aleph_0$, luego un infinito de tamaño mayor, $\aleph_1 = c$. Además, de la aplicación de este teorema, afirmó la existencia de una serie ilimitada de números transfinitos cada vez mayores y en 1897 formuló la paradoja de los alephs: si todos los alephs forman un conjunto transfinito A, entonces éste tendrá un cierto cardinal Ω, pero el teorema de Cantor implicaría que existe un cardinal mayor que Ω; en consecuencia, el nuevo cardinal pertenecería a A, pero a la vez no podría pertenecer a éste. En Cartas enviadas a Dedekind y en particular a Hilbert, en 1897 plantea que se deben distinguir dos clases de conjuntos bien ordenados, los que son *conjuntos disponibles*[14] y los que no lo son, y sólo cuando son *disponibles* podemos pensar en un conjunto transfinito. Recuérdese que respecto a la hipótesis del continuo que formuló Cantor, es decir, que no hay conjunto alguno cuyo cardinal esté entre $\aleph_0$ y c, la cual aún no ha sido ni demostrada ni refutada. Gödel, en 1938, demostró que si se toma el sistema de Zermelo-Fraenkel, la hipótesis del continuo no puede ser refutada en él. Demostró además, que si se anexa ésta proposición a la teoría de conjuntos como otro axioma, nada sucede; en otros términos, que si los axiomas de la teoría de conjuntos junto con la hipótesis del continuo fueran inconsistentes, la teoría de conjuntos, independientemente, también lo sería y que lo mismo sucedería con el axioma de elección. Es decir, no puede demostrarse que sean falsos ni la hipótesis del continuo ni el axioma de elección.

Paul Cohen, al probar en 1963, que si se supone que fuesen falsos tampoco se llega a contradicción alguna, encontró la salida al tema. En consecuencia, no se puede probar que

[14]Según Cantor: se entiende por conjunto disponible toda multiplicidad en la cual todos los elementos pueden ser pensados sin contradicciones como coexistentes, y por tanto como una cosa en sí.

sean válidos ni que sean falsos; simplemente son dos nuevos axiomas independientes de los demás. Se puede razonar con ellos o sin ellos y hasta contra ellos. Jamás se caerá en contradicción pero si se construirán matemáticas distintas. (Lichnerowicz, 1973).

Lo anterior destaca a Cantor como uno de los matemáticos excepcionales "que han establecido ideas y demostraciones tan originales e impactantes por su resultado, como simples por el método" (Ferreirós & Gray, 2006); y desde luego, por la originalidad de ideas como los números transfinitos.

Atreverse a enumerar y contar lo infinito representaba un paso muy arriesgado, con claras implicaciones filosóficas, contraviniendo múltiples advertencias previas. Algunos se habían anticipado con la admonición de que someter lo infinito a tratamiento numérico constituiría un claro caso de anatema. El matemático ruso-alemán fue consciente de todo ello, y decidió afrontar los riesgos con arrojo [...] Ningún otro matemático le acompañó por entonces, en la investigación de cuestiones tan abstractas como la hipótesis del continuo o como la teoría de los números transfinitos (Ferreirós & Gray, 2006).

Finalmente, y a pesar de tantas adversidades, la obra de Cantor mereció el reconocimiento de los más grandes matemáticos, pues según Ferreirós: Hilbert y su amigo Minkowski habían hecho de su autor un héroe, más o menos desde 1895, "forjando la imagen de todo un campeón de la matemática moderna" (Cantor, 2005, p. 63).

En términos similares destaca este hecho Recalde cuando señala que si bien en un principio las concepciones de Cantor encontraron fuerte oposición, poco a poco su tratamiento de los conjuntos infinitos fue incorporado, por matemáticos como Jordan, en los trabajos de análisis y teoría de funciones y también en los casos de Baire, Borel y Lebesgue quienes, junto con Hadamard influyeron de manera directa en las primeras investigaciones de Fréchet. Con la aceptación por los matemáticos de las ideas de Cantor, comienzan las aplicaciones no sólo a conjuntos de puntos sino a conjuntos constituidos por elementos de naturaleza variada tales como los conjuntos de curvas tratados por Ascoli, los conjuntos de las “funciones de línea” de Volterra y los conjuntos de funciones generalizadas, a partir de las cuales surgió el análisis funcional. También se mencionan los “trabajos de Hilbert sobre ecuaciones integrables que contribuyeron a catalizar esta dinámica de generalización en el análisis, a través de la introducción del espacio de Hilbert”. [...] Se señala además que: “En un artículo publicado en 1918, Fréchet se apoya más decididamente en la técnica transfinita cantoriana, la cual la aplica a conjuntos abstractos para extender propiedades de conjuntos lineales” (Recalde, 1994, p. 163-164).

Tiene razón Ferreirós, cuando al referirse a Cantor, afirma que tanto la importancia de su obra como las peculiaridades de su vida y el haber contribuido a la creación de la Unión de Matemáticos Alemanes engrandecieron su figura ante los ojos de Hilbert y su gente y por lo tanto no era casualidad que a Cantor dedicase el primero de los problemas que expuso en 1900 en el Congreso de París. Esta decisión no se debía sólo a la indudable elegancia y profundidad del problema del continuo, sino que también llevaba consigo un mensaje que hacía énfasis en la concepción matemática de Hilbert, que era la llamada “apuesta de Gotinga”, la cual impulsaba los métodos más modernos en matemáticas (Cantor, 2005, p. 64).

3.8. El papel de la obra de Cantor en la perspectiva de la tesis

Como se conoce ampliamente, los números transfinitos, constituyen una de las creaciones más sorprendentes en toda la historia de las matemáticas por medio de la cual Cantor se atrevió a legislar, jerarquizar y clasificar el infinito actual, en un momento en el cual el infinito era un concepto intuitivo y un objeto de reflexión filosófica antes que matemática, que venía desde los tiempos de Aristóteles. Este atrevimiento de Cantor, varios matemáticos de aquella época, como Gauss, lo consideraron una transgresión, por cuanto la misma rompía las viejas concepciones que impedían a los matemáticos tratar con el infinito actual considerado como ilegítimo. Los planteamientos de Cantor sobre los órdenes de infinitud corresponden a un caso típico de lo que, en los términos actuales, se denomina “matemática pura”; entendida esta denominación en el sentido de que los problemas que se tratan no son tomados de otras ciencias o disciplinas relacionadas, sino que nacen o se originan en el proceso interno de desarrollo del propio conocimiento matemático, como resultado de o enlazado con soluciones obtenidas para problemas anteriores, como es el caso de determinar la cardinalidad o la potencia del conjunto de los números reales. (Cantor, 2005, p. 36) Hay muchas evidencias en cuanto a que los problemas que inquietaban a Cantor eran tan puros y abstractos, que los matemáticos no entendían el sentido de sus investigaciones, como lo testimonian las palabras de Charles Hermite que, hacia 1883, después de revisar en “*Acta Mathematica*” las traducciones de artículos de Cantor, escribía a Mittag-Leffler en los siguientes términos:

> La impresión que las memorias de Cantor hacen en nosotros es desastrosa. Leerlas nos parece a todos una completa tortura [...] Nos ha sido imposible encontrar, entre los resultados que pueden entenderse, uno solo que tenga un interés real y presente.

Crítica esta que aplica a la demostración de la equipotencia de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

El mismo Hermite cuenta que Émile Picard había leído los *Grundlagen* “sin dejar de maldecir al autor”, y sólo Poincaré, “si bien juzga dichas ideas muy prematuras en el estado actual del análisis, cree como usted que tienen importancia”. La opinión de Poincaré acerca de los “Fundamentos” se refleja en la siguiente cita:

> [...] Así, esos números de la segunda y sobre todo de la tercera clase tienen un poco el aire de una forma sin materia, lo que repugna al espíritu francés. [...] Sería necesario, para hacerla accesible, dar algunos ejemplos precisos a continuación de cada definición, y además poner las definiciones al comienzo en lugar de ponerlas al final. Se le permitiría

así al lector francés que comprendiera este bello trabajo, pese a la ignorancia en que está de las investigaciones anteriores del autor (Cantor, 2005, p. 37).

En cambio hoy, agrega Ferreirós, "leemos los *Grundlagen* con la convicción de que es una contribución capital al pensamiento matemático y una obra genial". Las críticas y las "intrigas" que, según creía Cantor, orquestaban contra él Kronecker y sus seguidores, lo obsesionarían cada vez más, todo lo cual, advierte Ferreirós, "recuerda que en los trabajos de Cantor no se trata de una tendencia matemática *neutra*, por así decir, sino de una clara toma de partido por el *enfoque abstracto* que iba consolidándose precisamente en aquella época" (Cantor, 2005, p. 38).

Este avance del enfoque abstracto se ponía en evidencia, de manera especial, en los aportes de Riemann a la teoría de funciones, en los de Dedekind a la teoría de números algebraicos, o en los del mismo Cantor a la teoría de series trigonométricas y de conjuntos de puntos. Pero de nuevo el avance en el enfoque abstracto ocasionó las voces de protesta "que recomendaban volver a los procedimientos más calculísticos, típicos de la matemática del siglo XVIII". Como se conoce, en Alemania, el mayor y más influyente detractor de la matemática abstracta fue Kronecker, quien sostenía que "todo debía reconducirse a desarrollos algorítmicos basados en los números naturales, lo que implicaría una reforma del análisis en sentido constructivista, comenzando con el repudio de los números irracionales" (Cantor, 2005, p. 38).

Los planteamientos de Cantor en defensa de la matemática abstracta los presenta Ferreirós como una opción que se caracteriza por ser una descripción muy interesante, a pesar de que la considera especulativa y con tintes de idealismo, de la filosofía subyacente a la matemática abstracta. Observa además que Cantor establece una distinción clave entre la matemática y otras ciencias, advirtiendo que la matemática no es una ciencia empírica y que no hay razón alguna para que los conceptos de los que trata tengan que limitarse a lo "realmente existente" en el mundo físico, por lo cual no se requiere restringirlos con arreglo a criterios de realidad externa, a la cual hace referencia Cantor con el término “transiente” que se supone es de origen teológico. Es decir, para Cantor, la matemática se desarrolla de manera totalmente libre. Esta libertad se entiende en términos de independencia frente a la experiencia sensible o a la intuición. Todas estas características de libertad, orientación abstracta y tendencia purista, Cantor las sintetiza en su famosa frase: “*La esencia de la matemática radica precisamente en su libertad*” (Cantor, 2005, p. 40).

El hecho de proclamar la libertad o creación libre en la matemática pura, considerando la consistencia con el cuerpo establecido de resultados matemáticos, como el único criterio de validación o legitimación, son testimonio de que en el caso de Cantor no se trataba de una simple visión formal de las matemáticas, puesto que él busco siempre legitimar sus nuevas creaciones, todo lo cual lo cataloga como un matemático moderno radical.

Cabe recordar que Cantor proponía que los únicos requisitos que se deben exigir que cumplan los conceptos matemáticos son:

- La consistencia interna o ausencia de contradicciones,
- La coherencia con los conceptos matemáticos previamente aceptados, y
- Que resulten fructíferos, en el sentido de que tengan implicaciones de importancia.

En cuanto a la incorporación del infinito actual, Recalde señala que este hecho “dio lugar a procedimientos novedosos que abrieron perspectivas y temáticas cada vez más amplias”. Agrega además, que esto planteó la necesidad de unificación de conceptos de uso corriente en espacios diversos como algo indispensable para evitar la repetición y falta de estructuración; lo cual haría posible trabajar de conformidad con los nuevos enfoques de rigor orientados a organizar de manera sistemática y con economía de pensamiento un cuerpo teórico. Cabe tener en cuenta aquí, que más tarde Bourbaki considera la economía de pensamiento como el rasgo más descollante de lo que permite realizar el método axiomático.

Observa también Recalde que, por ejemplo el programa de generalización y sistematización que se propuso adelantar Fréchet, dotando de una estructura topológica simple a los espacios abstractos, al reconocer que en distintas teorías concretas del análisis y la teoría de funciones se manejaba de manera aislada la noción de proximidad, tenia sentido "dentro de un contexto intelectual de aceptación progresiva de nuevos enfoques y procedimientos relacionados con el infinito actual y con el continuo" (Recalde, 1994, p. 161-162). Y esa recomposición y renovación de un campo teórico, afirma, se debía al impacto de los trabajos de Cantor. Sostiene también que la generalización de los procedimientos y técnicas del infinito actual, empleados libremente y sin prejuicio alguno por Cantor, "desbloqueó de muchos problemas la imaginación y permitió entender los espacios de puntos infinitos como un todo"; siendo más importante aún el permitir "descubrir propiedades que no podrían percibirse restringiéndose a concepciones del infinito potencial para las cuales los conjuntos infinitos solo existían como proceso" (Recalde, 1994, p. 162-163).

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la importancia y el carácter excepcional de la obra matemática de Cantor está fuera de toda duda, pues lo confirman la originalidad de sus geniales ideas, la simplicidad de su método y lo impactante de sus resultados. Todos estos elementos: enfoque abstracto, tendencia purista, creación libre, consistencia interna, coherencia conceptual, sumados al reconocimiento de Hilbert que lo exaltaba como paladín de la matemática moderna, son testimonio indiscutible de que Cantor no solamente señaló la ruta, sino que contribuyó, junto con el enfoque conjuntista-estructural de Dedekind, a la formación de la noción abstracta de estructura del álgebra moderna. Además, porque dichos elementos configuraron el imaginario, como "mundo de libertad total", en el cual tendrían cabida las estructuras matemáticas, es decir, los objetos típicamente abstractos de la matemática moderna.

Capítulo 4

El enfoque estructural de Dedekind

Introducción

Es conveniente realizar el estudio del enfoque estructural de Dedekind señalando inicialmente las ideas básicas y los propósitos que constituyeron el sustento de su obra matemática y hacer referencia, de manera breve, a sus concepciones y metodología de trabajo, ya que este tema se abordará de manera específica más adelante.

En efecto, son las nociones de conjunto y aplicación las que utilizó desde finales de 1850 en sus trabajos relacionados con el álgebra y posteriormente con base en estas mismas nociones desarrolló la fundamentación del concepto de número. Sobre la base de la noción de *ideal* fundó la *teoría de números algebraicos*. Considerando las matemáticas como un edificio cuyos cimientos están constituidos por los fundamentos de la teoría de conjuntos, contribuyó a clarificar, de manera esencial, las nociones básicas del álgebra actual, tales como: *grupo*, *anillo*, *ideal*, *campo*, *módulo*; en otras palabras, los *conjuntos* dotados de *estructura*. De la misma manera, temas que formaron parte de su trabajo matemático fueron los fundamentos de las matemáticas, los números reales, la teoría de Galois, la teoría de las funciones algebraicas, la topología de conjuntos y los principios del análisis, entre otros.

En cuanto a su método de trabajo, al mismo tiempo que se dedicaba a resolver los problemas concretos de cada caso, siempre se mantenía atento a los temas referentes a los fundamentos. Como lo destaca Ferreirós, existe una perfecta coherencia entre su concepción de los fundamentos y su teoría de los números algebraicos, y agrega además "*lo mismo se aplica a su enfoque de la teoría de Galois, o de las funciones algebraicas, o de los principios del análisis o a sus fragmentos sobre topología. Por eso no es posible entender adecuadamente su visión del sistema numérico sin considerar a la vez el modo en que las partes superiores de la matemática encajaban en ella*" (Ferreirós, 1994, p. 259).

Motivado por su descontento con la fundamentación que entonces tenían, o mejor, de la que carecían el cálculo y el sistema numérico, o la aritmética de los números reales, siempre tuvo presente los requerimientos del análisis y del álgebra y se esforzó por establecer un rigor deductivo como base para un marco general, constituido por la teoría de conjuntos y aplicaciones, que pudiera abarcar toda la matemática clásica y en el cual se pudieran hacer deducciones válidas, sin que esto constituyera un tipo de constreñimiento a su visión sobre otros temas, sino tratando de definir, para el caso del cálculo por ejemplo, un sistema completo, esto es, cerrado para las operaciones aritméticas que satisficieran las leyes del álgebra elemental y "*aritmético en el sentido de que sus operaciones estarían definidas en último término sobre la base de las operaciones entre números naturales, y no debía hacerse mención alguna de ningún objeto geométrico*", (Bunn, R., 1984, p. 287). Cabe recordar aquí sus palabras al comenzar el prólogo de su obra *¿Qué Son Y Para Que Sirven Los Números?*:

> Lo que es demostrable, no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo, no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de la ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números, ni aún en las exposiciones más recientes. Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es solo una parte de la lógica, estoy manifestando ya que considero el

> concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es mas bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento. Mi respuesta fundamental a la pregunta que se establece en el titulo de este escrito es: los números son creaciones libres del espíritu humano, sirven como medio para concebir más fácil y claramente la diversidad de las cosas. Mediante la construcción puramente lógica de la ciencia de los números, y mediante le dominio numérico continuo que con ella se obtiene, nos encontramos por ves primera en situación de investigar con precisión nuestras representaciones de espacio y tiempo, relacionándolas con este dominio numérico creado en nuestra mente (Dedekind, 1998, p. 97).

Es ampliamente reconocido el esfuerzo de Dedekind por encauzar las matemáticas en una ruta de desarrollo sistemático que preparó las condiciones para alcanzar los niveles de abstracción que hoy se conocen. Específicamente tales contribuciones se hacen manifiestas, de manera clara, tanto en las nociones básicas del álgebra moderna como en temas fundamentales como los números reales, la teoría cantoriana de conjuntos y en la topología de conjuntos. Todo lo cual justifica con suficiencia el hecho de considerar a Dedekind como un antecesor y uno de los más importantes precursores de Bourbaki, como el mismo Dieudonné lo ha advertido. Precisamente el estudio de las filiaciones entre los trabajos de Dedekind y de figuras como Noether y Bourbaki, ha sido un tema que ha convocado la atención de los historiadores de las matemáticas durante el último cuarto de siglo.

4.1. El papel de las nociones de conjunto y aplicación

Como ya se ha dicho, al finalizar los años 1850, según Ferreirós, Dedekind comenzó a utilizar las nociones de conjunto y aplicación cuando introdujo los conceptos básicos del álgebra moderna como: ideal, anillo, cuerpo, módulo y al hablar de grupo (introducido por Galois) usó también las nociones de isomorfismo, homomorfismo y se ocupó aún de clases infinitas de polinomios. Posteriormente aplicó tales nociones en el estudio de los fundamentos del sistema numérico y hacia 1872 tenía el convencimiento de que con base en esas mismas nociones como dos ideas primigenias se podían desarrollar la aritmética, el álgebra y el análisis. "Hay que decir que Dedekind fue el primer matemático que introdujo explícitamente la noción general de aplicación y estudió en detalle sus propiedades, pero nunca consideró la posibilidad de reducir las aplicaciones a conjuntos, sino que empleó ambas nociones como ideas primitivas" (Ferreirós, 1994). Ferreirós sostiene además que: "casi parece más correcto leer *¿Qué son y para que sirven los números?* (1888) como un libro sobre teoría de conjuntos, que como un libro acerca de los números naturales. Pero la formación de un planteamiento conjuntista de la matemática es en su caso algo muy anterior a la aparición de cualquiera de estos escritos" (Dedekind, 1998). En este libro enseña cómo utilizando únicamente los conceptos de conjunto y aplicación se puede definir la estructura de los números naturales. En el mismo libro expone los fundamentos con los cuales abarca todo el sistema numérico y las operaciones aritméticas, definidos en términos de conjuntos y aplicaciones. Por los años de 1870 se da cuenta que al introducir conjuntos de números como en el caso del concepto de ideal, todo se podía trabajar de manera "puramente aritmética". De esta forma y con firme persuasión aboga por el empleo del lenguaje conjuntista en la matemática pura, trabajando sin cesar con este enfoque en la sistematización y reformulación de las nociones fundamentales de la aritmética, del álgebra y del análisis ["Dedekind propuso un tratamiento conjuntista-estructural de la teoría de números algebraicos, indicando que ese planteamiento era también el correcto en álgebra. Con esto se separaba radicalmente de la práctica establecida en su tiempo, e introducía un giro que puede denominarse revolucionario. En estas investigaciones, los conjuntos se convertían ya en los objetos centrales de la teoría, y aparecían las diversas relaciones y operaciones que Dedekind presentó en su libro de 1888, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos abstracta” (Dedekind, 1998)]. Recuerda Ferreirós que “en otros trabajos inéditos mostró cómo continuar definiendo los números enteros y racionales al modo habitual —como clases de pares—, y en un articulo de 1872 presentó la definición de los números reales por medio de cortaduras. En cuanto a los complejos, la idea de definirlos mediante pares se conocía desde la obra de Hamilton (1837; 1853)”.

Los fundamentos con base en los cuales establece las conocidas definiciones de los números naturales, los enteros, los racionales y los reales en términos conjuntistas los expone en el libro de 1888 y de este modo todo el sistema numérico y las operaciones aritméticas, quedan definidos en términos de conjuntos y aplicaciones.

Para el caso del análisis, también concibió que las funciones bastaría definirlas como aplicaciones de los reales en los reales o de los complejos en los complejos, es decir, funciones reales y funciones complejas; siguiendo así las ideas de Dirichlet y de Riemann, del concepto de función como noción abstracta.

Así mismo, al hablar del álgebra de aquellos tiempos, se hace referencia al álgebra numérica centrada en las nociones de cuerpo, anillos de enteros, módulos e ideales que el mismo introdujo; temática esta que constituía lo más avanzado y abstracto de su época, es decir, subconjuntos de números complejos o de polinomios con ciertas estructuras bien definidas, en términos de nociones previas, las cuales serían la base del álgebra moderna. En la publicación de su teoría de números algebraicos o teoría de ideales, en el año de 1871, en un apéndice a las lecciones sobre la teoría de números de Dirichlet, Dedekind presenta una reorientación del trabajo relacionado con esta materia que tendría impacto sobre toda el álgebra, por cuanto reformula la temática sobre los números algebraicos y sus propiedades en términos de conjuntos de números. Sostiene además Ferreirós, que Dedekind prefirió un enfoque conjuntista, a pesar de no ser habitual en esa época ni siquiera en el caso del álgebra;

afirmación que sustenta haciendo referencia a los años 1850 “[...] cuando Dedekind asiste a las clases de Riemann y realiza sus primeros trabajos originales en álgebra, y sobre los fundamentos de la aritmética. En lecciones sobre álgebra que imparte en Göttingen, Dedekind presenta la teoría de Galois en una versión muy moderna, analizando las interacciones entre (lo que hoy llamamos) los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio. Aquí es original y moderna la idea de que la teoría tiene que ver esencialmente con extensiones de cuerpos” (Ferreirós, 1994). En este orden de ideas, Dedekind, presenta en 1871, la noción de cuerpo.

Es de esta manera como Dedekind se familiariza con el lenguaje conjuntista en el discurso algebraico y también, en 1858, mediante su famosa definición de los números reales, por medio de cortaduras, introduce este lenguaje en los fundamentos de la aritmética, puesto que las cortaduras son simplemente clases infinitas de números racionales, dotadas de una cierta estructura de orden.

A propósito del problema de los números irracionales, Dedekind, desde 1858, tenía la convicción de que el concepto de límite, para que fuese un concepto riguroso, habría que desarrollarlo de una manera puramente aritmética, es decir, sin referencia geométrica alguna. En otras palabras, se quería establecer la diferencia entre las magnitudes geométricas continuas y los números racionales. De acuerdo con el pensamiento de Galileo y de Leibnitz, la continuidad de los puntos de una recta se debía a su densidad, o sea al hecho de que entre dos puntos distintos cualesquiera siempre se encuentra otro; pero, a pesar de que los racionales son densos no forman un continuo. Al respecto, Ferreirós afirma que el año de 1872 “[...] fue, de hecho, el año en que se dieron a conocer todas las principales definiciones de los reales, incluyendo la de Weierstrass y la de Cantor. Estas definiciones difieren entre sí: Weierstrass define los reales como series convergentes de racionales, Cantor los define como sucesiones de Cauchy sobre los racionales, Dedekind como cortaduras en los racionales. Pero en todos los casos se trata de constructos complejos e infinitarios que se introducen sobre la base del conjunto de los números racionales. La rigorización del análisis había llevado con Cauchy, al empleo de límites y desigualdades como base, y a una definición abstracta de conceptos como el de función continua. Pero aún con esto no era posible demostrar todos los teoremas básicos, por ejemplo el teorema del valor intermedio para funciones continuas o la existencia de un límite para toda sucesión monótona creciente y acotada. Para ello hacía falta una definición rigurosa de los reales, que establecieran con solidez la propiedad fundamental de 'continuidad', según se decía entonces, o *completitud de los números reales*, este fue el mérito de los tres grandes matemáticos alemanes, cuyas teorías pueden verse, retrospectivamente al menos, como dependientes de la noción de conjunto, o de nociones más complejas que solo pueden explicarse sobre la idea de conjunto infinito", (Ferreirós, 2004)[1].

Analizando este problema, Dedekind pudo darse cuenta de que, en el fondo, la continuidad de un segmento depende de la propiedad de que es un único punto el que produce su división en dos clases tales que todo punto de una de las dos esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase. Así encuentra la esencia de la continuidad y formula su conocido principio:

> Si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, separando la línea recta en dos porciones.

Dedekind considera que esta proposición es un axioma mediante el cual se atribuye la continuidad a la línea recta.

[1]Todo el programa de inyección de rigor en la estructura del análisis matemático, es lo que se conoce como *Aritmetización del Análisis*. Sin duda, su propósito central fue confinar el razonamiento matemático al ámbito numérico señalando, de paso, los peligros de una dependencia acrítica de la intuición geométrica (Moreno, 2002).

En vista de que los números racionales no logran “llenar” o “copar” los puntos de la recta, se necesita incorporar nuevos números que se pondrán en correspondencia con los puntos que quedan sobrantes. Entonces Dedekind introduce el concepto de cortadura considerando la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es inferior a todo número de la segunda. A esta forma de división de los números racionales se le llama una cortadura. Si a las mencionadas clases de números racionales se las designa mediante A_1 y A_2, entonces la cortadura se denotará (A_1, A_2). Según Dedekind, cada número racional produce una cortadura que tiene la propiedad de que, entre los números de la primera clase, existe un número que es el mayor o que, entre los números de la segunda clase, existe un número que es el menor. Recíprocamente, toda cortadura en los números racionales para los cuales existe el mayor de los números en la primera clase o el menor de ellos en la segunda, esta determinada por un número racional.

No obstante Dedekind agrega que es posible mostrar que existen infinidad de cortaduras que no están determinadas por números racionales. En efecto, si por ejemplo, se sitúan en la primera clase todos los números racionales negativos y todos los números positivos cuyo cuadrado es inferior a D, no siendo D el cuadrado de un número natural, y en la segunda clase todos los demás números racionales, entonces esta cortadura no esta determinada por número racional alguno. Para cada una de estas cortaduras se crea un nuevo número “irracional” que queda completamente definido mediante esta cortadura. En este caso se dice que dicho número corresponde a esta cortadura o que produce la cortadura.

Posteriormente, Dedekind estudia las relaciones entre las cortaduras, con el fin de obtener una base para la disposición ordenada de todos los números reales. La comparación de dos cortaduras (A_1, A_2), producida por el número real α y (B_1, B_2), producida por el número real β, permite definir la identidad:

$$\alpha = \beta \qquad \text{ó} \qquad \beta = \alpha$$

y la designa entre ellas

$$\alpha > \beta \qquad \text{ó} \qquad \alpha < \beta.$$

Más adelante Dedekind presenta las tres propiedades fundamentales de los números reales:

1. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$ entonces $\alpha > \gamma$ y se dirá que el número β está entre α y γ.

2. Si α, γ son dos números cualesquiera diferentes, entonces existen infinitos números diferentes de β que están entre α y γ.

3. α es un número real cualquiera entonces todos los números reales se dividen en dos clases A_1 y A_2, de tal manera que cada una de ellas posee un número infinito de elementos; cada elemento de A_1 es inferior a α y cada elemento de A_2 es superior a α. El número α puede ser asignado a cualquiera de las clases.

Dedekind agrega, además de las tres propiedades anteriores, que el dominio de los números reales posee también la propiedad de la continuidad, la cual se expresa en los siguientes términos:

> Si el sistema de los números reales está dividido en dos clases A_1 y A_2 de tal manera que cada elemento de A_1 es inferior a todos los elementos de A_2, entonces existe un único número por el cual se produce esta separación.

En el siguiente paso Dedekind presenta las operaciones con los números reales, aunque solo define explícitamente la operación de adición, considerando que las otras operaciones se pueden definir de una manera análoga. Así mismo Dedekind introduce también la noción de intervalo, volviendo al teorema de análisis que motivó tales investigaciones, el cual es demostrado mediante la noción de cortadura, y señala la equivalencia de este teorema con el principio de continuidad.

La teoría que presentó Dedekind resultó lógicamente satisfactoria a pesar de ciertas imprecisiones como la de no especificar de donde proviene el número irracional que produce la cortadura o por que tal número es distinto de la cortadura.

A pesar de que este movimiento emprendido con el propósito de llevar a cabo la aritmetización del análisis fue aceptado por la mayoría de los matemáticos de entonces, algunos se opusieron radicalmente, entre ellos Paul du Bois-Reymond, Kronecker, Hankel.

La elaboración de una teoría lógica y adecuada de los números racionales, fue una obra posterior de varios matemáticos como Martin Ohm, Weierstrass, Peano y el mismo Dedekind.

En conclusión, al establecerse las estrechas relaciones entre álgebra, teoría de números y conjuntos, se puede afirmar que el programa de fundamentación de la matemática de acuerdo con el pensamiento de Dedekind queda sustentado en las nociones de conjunto y aplicación.

4.2. La ruta hacia las ideas básicas del álgebra moderna

Hacia el año 1854 fecha en la cual Dedekind obtiene su “Habilitación” (Habilitation), aún se desconocía el rumbo que tendría su campo de investigación; pero a partir de ahí y durante un período que va de 1855 a 1858 desarrolla un proceso formativo especialmente en las temáticas orientadas por Dirichlet, avanzando y profundizando en su conocimiento de las matemáticas superiores; contando además con la figura de Riemann de quien permaneció muy cerca y además publicó sus trabajos inéditos.

Manteniendo estrechas relaciones con Dirichlet, asistió a sus conferencias y en especial a aquellas sobre Teoría de Números, todo lo cual le permitió darse cuenta de los vacíos existentes en sus conocimientos matemáticos y de los medios para superarlos. A partir de tales conferencias y de sus discusiones, Dedekind manifiesta que la variedad de métodos que pueden ser empleados en cada una de las pruebas y los enunciados mismos de los teoremas constituyen una de las principales atracciones de la teoría de números. Dirichlet señaló cómo se podría acercar a su teoría de números evitando pasos formales y enfocándose directamente sobre las propiedades aritméticas de los números algebraicos. Dedekind asimiló significativamente las orientaciones de Dirichlet en cuanto al rigor de la teoría de números y a la necesidad de analizar cuidadosamente cada prueba para encontrar el verdadero núcleo del problema y el método de prueba más conveniente para abordarlo directamente. De esta manera, Dirichlet también se constituyó en el punto de referencia en cuanto a las cuestiones de rigor.

Durante algún tiempo Dedekind estuvo dedicado a temas de geometría proyectiva y de teoría de probabilidades, después de lo cual, en 1855, inició el estudio de un nuevo trabajo algebraico que sería determinante en su futura carrera investigativa. Comenzó con el trabajo que Gauss había desarrollado sobre ecuaciones ciclotómicas en sus *Disquisitiones arithmeticae*. Al respecto, Ferreirós recuerda que Dedekind fue el último doctorando del "*príncipe de la matemática*", siendo este además un referente fundamental para su obra matemática y a su vez, Dedekind participó en la edición de las obras completas de su maestro. Así mismo, el haber podido acceder a sus manuscritos le permitió disponer de una fuente importante de sugerencias.

Posteriormente se dedicó a la investigación sobre la teoría de ecuaciones de Abel y Galois. Al terminar el año comenzó un estudio formal de la llamada "aritmética superior", concretamente trabajos de Kummer, Eisenstein y otros más que son considerados hoy como contribuciones a la teoría de números algebraicos. Con base en esto, en los semestres de invierno de 1856 /57 y 1857/58, ofreció conferencias sobre la teoría Gaussiana de ecuaciones ciclotómicas y sobre "*álgebra superior*", que él esencialmente identificó con la teoría de Galois. Señala Ferreirós, citando a Porkert (1977), que esta fue la primera vez que en un curso universitario se incluía una discusión sustancial sobre el trabajo de Galois.

En este nuevo campo, Dedekind obtuvo sus primeros resultados significativos. No obstante, más que como una parte de su trabajo este período puede ser considerado como de reformulación, sistematización y conclusión de las grandes contribuciones de sus predecesores. Una reformulación que resultó altamente significativa fue el trabajo sistemático e independiente de Dedekind sobre los prerrequisitos de la teoría de grupos para la teoría de Galois. De este modo pudo reconocer que la teoría tenía relación con extensiones de cuerpos y presentó por primera vez lo que es considerado ahora como el centro de la teoría y en el lenguaje moderno hace referencia a las relaciones entre los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio (Ferreirós, 1999)[2].

Al respecto, Ferreirós subraya que "el hecho de que Dedekind ofrezca semejante visión ya en los años 1850 resulta casi desconcertante, ya que la comunidad matemática solo se enfrentará a una visión abstracta de los grupos unos treinta años después [...] Ese hecho parece tener que ver con la posición filosófica y metodológica de Dedekind frente a la matemática, que le condujo al logicismo [...]. Otro aspecto fundamental del trabajo es que Dedekind se da cuenta de que la noción de cuerpo es esencial para la teoría de Galois" (Ferreirós, 1998).

Sobre este tema se hará referencia específica más adelante al tratar el concepto de cuerpo.

El tratado de Dedekind de 1858, como se ha dicho y lo reafirma Ferreirós, citando a Scharlau (1982) y Corry (1996), llegó a ser el primer libro de texto sobre "*álgebra moderna*". Por esta misma época Dedekind también estuvo a la cabeza en el estudio de la teoría de grupos y llegó a realizar una prueba del teorema de *homomorfismo*.

> Recordemos que la noción de homomorfismo es una idea central común a todos los aspectos del álgebra moderna. Se trata de una aplicación de un sistema algebraico a un sistema algebraico análogo que preserva la estructura. De manera precisa, en cuanto se hace referencia a la teoría de grupos, la noción de homomorfismo se define de la siguiente

[2]Dado un polinomio $p(x)$ en $F[x]$, el anillo de polinomios en x sobre F, se asocia con $p(x)$ un grupo al que se llama el *grupo de Galois de* $p(x)$. Existe una relación muy estrecha entre las raíces de un polinomio y su grupo de Galois. En realidad, el grupo de Galois resultará ser un cierto grupo de permutaciones de las raíces del polinomio.

manera:

Una aplicación ϕ de un grupo G en un grupo $\hat{G}$ se dice que es un *homomorfismo* si para cada a, b elementos cualesquiera de G, siempre se tiene $\phi(a,b) = \phi(a)\phi(b)$, en $\hat{G}$.

Por otra parte, si ϕ es un homomorfismo de G en $\hat{G}$, *el núcleo de* ϕ, denotado K_ϕ, se define por:

$$K_\phi = \{x \in G \ / \ \phi(x) = \tilde{e},\ \tilde{e} : \text{ elemento identidad de } \hat{G}\}.$$

Además, un homomorfismo ϕ de G en $\hat{G}$ se dice que es un *isomorfismo* si la aplicación ϕ es inyectiva; y la condición necesaria y suficiente para que un homomorfismo ϕ de G en $\hat{G}$, con núcleo K_ϕ, sea un isomorfismo de G en $\hat{G}$ es que $K_\phi = (e)$.

Entonces el *Teorema de Homomorfismo*, en los términos actuales, se enuncia así: *Sea ϕ un homomorfismo de G en $\hat{G}$ con núcleo K. Entonces $G/K \approx \hat{G}$.*

Al trabajar en la teoría de ecuaciones pudo darse cuenta de su gran productividad y esto mismo le dio fundamento para esclarecer las nociones sobre teoría de cuerpos, con base en lo cual, hacia 1871 elaboró la definición de cuerpo. Así mismo, se conoce que adelantó una investigación sobre la descomposición de los polinomios en factores irreducibles.

Para destacar la importancia de este tema y observar que no se trata de un hecho aislado en la obra de Dedekind, conviene hacer una especie de digresión al respecto.

Dicho tema corresponde a una teoría general que es análoga a la teoría de la descomposición de los números enteros en factores primos. Esta correspondencia se puede evidenciar recordando algunas ideas elementales. Por ejemplo, tanto los números primos en los enteros, como los polinomios irreducibles unitarios sobre un cuerpo arbitrario, son infinitos. En este sentido se puede hablar también de los polinomios que desempeñan en el anillo de los polinomios el mismo papel que los números primos en el anillo de los números enteros. Así mismo, al hecho de excluir los números 1 y -1

en el estudio de las descomposiciones de los enteros en factores primos, corresponde el caso en el cual, en el tema de los polinomios, solamente se trata con polinomios de grado mayor o igual que uno. En cuanto al caso de los divisores de grado mayor que cero, pero menor que n de un polinomio $p(x)$ de grado $n \geq 1$, con coeficientes pertenecientes al cuerpo F, estos pueden existir o no pueden existir en el anillo $F[x]$. En el primer caso, el polinomio $p(x)$ se llama *reducible* sobre el cuerpo F, en el segundo caso, *irreducible* sobre este cuerpo.

Un polinomio $p(x)$ de grado n es reducible en el cuerpo F, si se puede descomponer sobre este cuerpo (o sea, en el anillo $F[x]$) en el producto de dos factores de grados menores que n:

$$p(x) = a(x)b(x).$$

Un polinomio $p(x)$ en $F[x]$ se dice que es *irreducible* sobre el cuerpo F sí siempre que $p(x) = a(x)b(x)$ pertenece a $F[x]$, entonces uno de los dos polinomios, $a(x)$ o $b(x)$, tiene grado cero; es decir, es una constante y el otro es de grado n.

Se debe tener en cuenta que se puede hablar de *reducibilidad* o *irreducibilidad* de un polinomio solamente con respecto a un cuerpo dado F, puesto que, un polinomio que es irreducible en este cuerpo puede ser reducible en cierta extensión de él. Por ejemplo, el polinomio:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

es irreducible en el cuerpo de los números racionales, pero es reducible en el cuerpo de los números reales.[3]

[3]El polinomio $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$, donde $i^2 = -1$, es irreducible sobre el cuerpo de los reales, pero no lo es sobre el cuerpo de los complejos.

El polinomio $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ es reducible sobre el cuerpo de los racionales, sin embargo, ambos factores del segundo miembro, son irreducibles sobre los racionales y sobre los reales, pero son reducibles sobre los complejos.

Con relación a las reformulaciones y resultados antes mencionados Ferreirós sostiene que Dedekind no hizo publicación alguna debido a la duda sobre el reconocimiento que habría tenido en su trabajo, ya que, probablemente este tipo de orientación de lo abstracto carecería aún de seguidores. Se estima también que Dedekind quizá consideró de poco valor las simples reformulaciones de Gauss y Galois y en lo que respecta a resultados originales, el prefirió esperar hasta llevarlos a su culminación. No es desconocido el hecho de que su rigurosa minuciosidad y/o escrupulosidad en la preparación de una publicación obró, en cierto modo, contra sus propios intereses.

En síntesis, al finalizar los años 1850, Dedekind comenzó a introducirse con mucha firmeza en dirección de lo que después sería el álgebra estructural moderna, avanzando hacia una reformulación conceptual y abstracta de lo que en esos momentos correspondía al trabajo algebraico y a la teoría de números y para este propósito empleó, como ya se hecho referencia, el lenguaje conjuntista. Los resultados que pudo alcanzar deben ser considerados como triunfos de sus principios metodológicos y de las prioridades que el estableció en el dominio del álgebra. En este sentido se propuso entender el álgebra de tal manera que las respectivas construcciones teóricas fueran desarrolladas satisfactoriamente y en concordancia con la orientación moderna.

A pesar de que al comienzo de esta sección se haya hablado de la poca claridad que en el momento de su "*Habilitación*" tenía Dedekind con relación a su futuro campo de investigación, Ferreirós considera que dicha lectura de 1854 "sobre la introducción de nuevas funciones en matemáticas" resulta de interés por dos razones. En primer lugar, porque ya se muestran algunos de los rasgos que caracterizarían por toda su vida el pensamiento de Dedekind, entre los cuales está el profundo interés por el problema del rigor y también el propósito de entender el proceso histórico de las matemáticas. Se afirma al respecto que algunos de tales rasgos se revelarían a través de expresiones que caracterizan su trabajo como un todo; como por ejemplo, cuando hacía referencia al gran arte de la sistematización que, según él, consiste en volver una y otra vez a las definiciones por amor a las leyes o verdades en las cuales ellas desempeñan un papel. Este arte de la sistematización lo condujo a transformar muchos de los conceptos básicos en los cuales se fundamentaban las matemáticas de su tiempo. En la misma lectura sostenía que la introducción de nuevas funciones, o nuevas operaciones, es la clave para el desarrollo de las matemáticas y analizó las particularidades de este proceso señalando que en contraste con otras ciencias, en matemáticas no hay espacio alguno para la arbitrariedad. También discutió cuidadosamente los fundamentos de la aritmética, ofreciendo un excelente compendio de sus ideas en aquellos tiempos. Así, presentó la idea de desarrollar gradualmente la aritmética desde los números naturales hasta los complejos, a través de etapas sucesivas en las cuales se definen nuevos números y operaciones. Este sería el programa que realizaría en sus posteriores trabajos fundacionales.

No obstante, aquí es conveniente tener en cuenta, por una parte, que a partir de 1872 Dedekind había centrado su trabajo en el problema de la definición de nuevos números, manteniendo estos dentro de los límites del mismo sistema numérico; mientras que en 1854 había hecho énfasis en el problema de extender las operaciones a extensiones o ampliaciones de los sistemas numéricos. Este cambio tiene especial importancia a luz del hecho de que desde 1872 y de allí en adelante utilizó los conjuntos como el medio que le permitió definir o "crear" nuevos números y de esta manera la teoría de conjuntos se convirtió "en una herramienta de las investigaciones matemáticas, y en especial para el desarrollo de un planteamiento conjuntista estructural en álgebra" (Ferreirós, 1998). Por otra parte, es importante tener en cuenta, como lo destaca Ferreirós, que en la lectura de su "*Habilitación*" no se encuentra ni el más leve indicio de la noción de conjunto. Esto tiene más significado si se considera que su definición de los reales mediante cortaduras se remonta a 1858 y que la noción de conjunto es utilizada una y otra vez en su trabajo algebraico de 1856 a 1858.

Todo esto sustenta el punto de vista de que las ideas de Riemann influyeron en persuadir a Dedekind sobre la utilidad de la noción de conjunto. Ferreirós recuerda que “Dedekind asistió a todos los cursos impartidos por Riemann entre 1854 y 1858, en los que esté se ocupó de ecuaciones diferenciales parciales, de integral definida, y de funciones de variable compleja, especialmente funciones elípticas y abelianas [...] Los trabajos de Riemann dieron claves fundamentales para el posterior desarrollo de la matemática. [...] Su obra matemática se orienta hacia planteamientos abstractos prefigurados por el propio Dirichlet, pero que Riemann lleva genialmente hacia delante. Las nuevas nociones abstractas que introdujo, como las superficies de Riemann en teoría de funciones complejas, y las variedades de la geometría diferencial, constituyen el modelo al que Dedekind refirió siempre su introducción de nuevos conceptos algebraicos (cuerpo, anillo, módulo, ideal)” (Ferreirós,1998).

Dedekind, respecto a su relación con Riemann escribe “[...] Además trato mucho a mi excelente colega Riemann, que sin duda es tras o incluso junto a Dirichlet el más profundo matemático vivo, y pronto será reconocido como tal, si su modestia le permite publicar algunas cosas que, ciertamente, de momento solo serán comprensibles a unos pocos. La relación con ambos es inestimable y es de esperar que acabe trayendo sus frutos”. Sobre la influencia de Riemann también se hará referencia específica al tratar el concepto de función.

4.3. Los orígenes y las transformaciones del concepto de función

Los orígenes del concepto de función se podrían ubicar en las primeras relaciones observadas entre dos variables, cuyas huellas llegarían hasta las matemáticas babilónicas y egipcias, sin embargo, desde la perspectiva de esta tesis es conveniente iniciar estas consideraciones a partir de los trabajos de Euler. En efecto, en 1748, en su obra “*Introductio* *in analysim infinitorum*”, define la función de una cantidad variable como una “*expresión analítica*” formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes. Esta designación del concepto de función comprende los polinomios, las series de potencias y las expresiones trigonométricas y logarítmicas.

A continuación se propuso realizar una clasificación de las funciones; en primera instancia, en continuas y discontinuas. Las funciones continuas pueden ser especificadas mediante una expresión analítica única. Se debe tener en cuenta que el sentido de función continua en el siglo XVIII correspondía al que hoy se da en términos de función analítica. “Las funciones discontinuas corresponden a aquellas con representación precisa de varias expresiones analíticas y también aquellas que dan cuenta de curvas construidas de cualquier manera por ejemplo por el trazo libre de la mano” (Recalde, 2004b, p. 6). Dentro de las funciones continuas distinguía las algebraicas y las trascendentes. Definió función algebraica como aquella en la cual sólo son posibles las operaciones algebraicas con la variable independiente. Las funciones trascendentes permiten una representación por medio de series de potencias o series infinitas; tal es el caso de funciones como las exponenciales, trigonométricas y logarítmicas. Euler destacó dentro de las funciones algebraicas, por una parte, las funciones racionales, que incluían además de las cuatro operaciones aritméticas habituales, potencias enteras de la variable, y por otra señaló que “cuando las potencias son positivas, se denominan enteras, y cuando la variable figura en denominadores se llaman fraccionarias. Las funciones irracionales son aquellas en las que la variable esta afectada por radicales” (Recalde, 2004b, p. 6). Para completar esta clasificación, Recalde agrega que “muchas de las funciones definidas a trozos, que en la actualidad aceptamos como continuas, no lo serán bajo la óptica de Euler. Como tampoco serán continuas las funciones generadas por un movimiento voluntario de la mano” (Recalde, 2004b, pp. 6, 8).

Según Recalde: “la clasificación de nociones matemáticas, que de alguna manera prefiguran el concepto de función, están ligadas al estudio de las curvas, ya sea provenientes de la geometría clásica o de trayectorias reguladas por algún movimiento” (Recalde, 2004b, p. 1). Recuerda además, que la distinción entre curvas geométricas y mecánicas, de acuerdo con la propuesta de Descartes, se hace mediante la representación algebraica como parte del método analítico cartesiano que genera, mediante la “algebrización” de la geometría, un cambio ontológico que hace posible la incorporación de una nueva representación de los objetos geométricos. Agrega además que con Newton el tratamiento algebraico se constituye “en una potente maquinaria de representación que prefigura la noción analítica de función”, estableciendo, de esta manera la primacía de la “formula sobre la curva” que supera “la simple acción de relacionar variables” y que mas bien “se puede interpretar como el inicio de un tratamiento explicito del objeto función”. En este orden de ideas, se puntualiza además que Newton, en sus investigaciones del periodo de 1665 a 1666, denota las curvas mediante la relación entre dos variables, a la manera de lo que hoy se expresa con la abscisa y la ordenada por medio de formulas o expresiones ampliamente conocidas. “Sin embargo, Newton va más allá que la simple acción de relacionar variables. Hay momentos en que la *ordenada* emerge con categoría de objeto; por lo menos esta es una interpretación plausible del tratamiento que aparece de forma explícita en carta enviada a Leibniz el 26 de octubre de 1676, en la cual Newton, utiliza reiteradamente la expresión: sea la ordenada $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz+zz}$” (Recalde, 2004b, p. 3).

Wussing llama la atención sobre el hecho de que con frecuencia no se tiene en cuenta que en Euler, no solamente se encuentra el concepto de función orientado por Bernoulli, sino aún otro concepto de función de naturaleza más general. “En su *Cálculo diferencial* de 1755 habla, en general, de una función de ciertas magnitudes de otras magnitudes, cuando varían las últimas dependiendo de las primeras:

> Sean ahora magnitudes dependientes de otras, tales que ninguna de ellas puede sufrir

> una variación sin que a la vez ocasione una variación de las otras: entonces de aquellas cuya variación resulta como causa de la variación de las otras se dice que son función dé estas; definición que se extiende tan lejos que comprende en sí todas las claves de cómo una magnitud se puede determinar mediante otra. Si por tanto x significa una magnitud variable, entonces toda magnitud que de alguna manera dependa de x, o puede ser determinada por ella, se llama función de x.

Pero esta definición de Euler, con claros visos de futuro, no consiguió imponerse en aquella época y sólo más adelante una mayor y más profunda discusión de las crecientes dificultades matemáticas empujarían eficazmente en esta dirección. Euler había ya lanzado al aire la pregunta de si toda curva que puede ser trazada arbitrariamente con la mano se puede entender como la imagen de una función: esta cuestión, discutida vehementemente, no pudo ser resuelta por las matemáticas del siglo XVIII" (Wussing, 1998, p. 203).

De tal manera que a comienzos del siglo XIX no había claridad sobre el concepto de función y este era uno de los temas de interés de los matemáticos de la época. "Hankel señala que los mejores libros de texto de al menos la primera mitad del siglo no sabían qué hacer con el concepto de función. Algunos definían una función esencialmente en el sentido de Euler; otros requerían que y variara con x de acuerdo con alguna ley, pero no explicaban lo que quería decir ley; algunos usaban la definición de Dirichlet; y aún otros no dieron definición alguna. Pero todos dedujeron consecuencias a partir de sus definiciones que no estaban implicadas lógicamente por alas definiciones" (Kline, 1992, p. 1255).

Otro de los temas que suscitó la más intensa discusión fue la consideración de si se podía pensar como función una curva mixta como el caso de la curva en *hoja de sierra*. Es decir, el caso tenía que ver con el discernimiento de si era o no adecuada la clasificación de las funciones en continuas, no continuas y mixtas. Esta discusión volvió a surgir con el estudio de las ecuaciones diferenciales que modelaban los problemas del movimiento de la *cuerda* *vibrante* y de la *difusión del calor*.

Fourier, al comenzar el siglo XIX y en su "*Theorie analytique de la chaleur*" de 1822, sostenía que toda curva, incluyendo desde luego las curvas no conexas, podía ser representada como gráfica de una función desarrollable mediante una serie trigonométrica. Esto ocasionaría mayores dificultades, paradojas y desacuerdos sobre todo si el uso de las series se hacía sin referencia a la convergencia y divergencia de las mismas. A pesar de que esta concepción, que cuestionaba el significado clásico dado a la expresión *representación analítica*, resultó ser muy polémica[4], a Fourier le permitió, como prueba de su agudeza, comprender las consecuencias que la misma tendría para una nueva definición de función. Afirma Recalde (Recalde, 1994, p. 59) que en los trabajos de Fourier se observa una búsqueda de generalidad que se debe destacar. Es decir, se trata de "la búsqueda de una teoría matemática subyacente a todas las demás, o en otras palabras, la búsqueda de una conceptualización fundamentadora basada posiblemente en la conciencia de que su método trascendía el problema particular de la difusión del calor".

En este sentido, en la *Teoría del Calor* de 1822 se refiere a una función como una sucesión de valores cualesquiera y considera que no existe razón alguna para interpretar las ordenadas por medio de la misma expresión analítica ya que las mismas, en ningún caso, obedecen a una única ley matemática. Recalde presenta la versión de la definición de función que daba Fourier, en los siguientes términos:

> En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f(x)$ y todas ellas tienen valores numéricos concretos, ya

[4]Bobadilla hace referencia a la oposición de Lagrange con respecto a las diferentes concepciones de función en Fourier. Afirma que: "como en el caso de la cuerda vibrante, sus objeciones se concentraban en los aspectos matemáticos, particularmente en la representación en series trigonométricas de *funciones arbitrarias*. Lagrange permanece aferrado al punto de vista global de la función (una función conocida en un pequeño intervalo esta determinada sobre toda la recta). Además él está muy en contra de la afirmación de Fourier según la cual «*una función par puede tener un desarrollo en series de funciones impares*»" (Bobadilla, 2001, pp. 65-66).

> sean positivos, negativos o nulos.
>
> No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada.

Y en la misma obra, el autor afirma que fue Cauchy quien "proporcionó una salida conceptual al problema de la caracterización de las funciones continuas y discontinuas [...] Cauchy inicia su *Curso de Análisis* presentando su definición de función:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversa cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable.

[...] En seguida, presenta una clasificación general de funciones, similar en algunos aspectos a la de Euler" (Recalde, 2004b, p. 13).

Con Cauchy se abandona las representaciones explícitas de Euler y las series de potencias de Lagrange y se introducen nuevos conceptos en el tratamiento de las funciones (Kline, 1992, p. 1252).

A propósito Wussing afirma: "como resultado de todas estas intensas discusiones quedó claro que la identificación de *función* con *expresión analítica* no se podía sostener mucho más tiempo y que en su lugar había de resaltarse la dependencia mutua de magnitudes para establecer un principio de definición del concepto de función" (Wussing, 1998, p. 204). Agrega además que: la primera manifestación clara de este giro conceptual, que condujo a una segunda etapa en la historia del concepto de función, se encuentra en un trabajo de Lobachevski del año 1834 sobre series trigonométricas, en el que afirma:

> El concepto general sugiere que como función de *x* se denomine a un número que esta dado para todo *x* y que varía progresivamente con *x*. El valor de la función se puede dar bien por medio de una expresión analítica mediante una condición que ofrezca un medio de examinar todos los números y de elegir uno de ellos, bien, por último, puede existir la dependencia pero permanecer desconocida.

Con relación al término *progresivamente*, hace además el siguiente comentario: "La utilización de la palabra *progresivamente* (o paulatinamente, *postepenno* en el original ruso), alude a que Lobachevski tenía siempre ante sus ojos exclusivamente funciones continuas; pero el importante texto, en el que renuncia a una correspondencia según una fórmula de las ordenadas con las abscisas, señalaba el camino hacia la moderna definición. La definición dada por Dirichlet en 1837 en su trabajo «*Sobre la representación de funciones completamente arbitrarias mediante series de senos y cosenos*» coincide casi exactamente en su contenido con la de Lobachevski[5]. También Dirichlet definió una función continua de una variable que varia continuamente; además dejaba caer la obligación de una ley de formación unitaria" (Wussing, 1998, pp. 204-205). La definición de Dirichlet expresa que *y* es una función de *x* cuando a cada valor de *x* en un intervalo dado le corresponde un único valor de *y*. Por otra parte, no importa si en todo este intervalo *y* depende de *x* de acuerdo a una ley o más, o si la dependencia de *y* respecto de *x* puede expresarse por medio de operaciones matemáticas. (Klein, 1992, p. 1254).

Hankel, en 1870, en su obra "Estudio sobre las funciones no continuas y que oscilan infinitamente" presenta la siguiente definición de función:

[5]Recalde expresa que: "En su artículo de 1837; *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représentar une fonction arbitraire*, Peter Gustav Lejeune - Dirichlet (1805-1859) plantea no ver ningún inconveniente en aceptar funciones que no estén sujetas a ninguna ley analítica. Para él, f es una función si ella hace corresponder a todo valor de x un valor bien determinado de $f(x)$. En seguida presenta el ejemplo de la función característica de los racionales como prototipo de estas funciones. [...] Sin embargo, Dirichlet estaba equivocado, puesto que si bien esta función es totalmente discontinua, ella es representable analíticamente [...]" (Recalde, 2004b, p. 22). Esta función tiene el valor 1 para todos los valores racionales de *x* y el valor 0 para todos lo valores irracionales de *x*.

> Una función se dice y de x si a cada valor de la magnitud variable x que se mueve dentro de un cierto intervalo le corresponde un determinado valor de y; no importa si y depende de x en todo el intervalo según la misma ley o no; si la dependencia se puede expresar mediante operaciones matemáticas o no. (Wussing, 1998, p. 205).

Como se puede observar con esta definición, Hankel, elimina tanto la exigencia de una "*fórmula – expresión*" para la definición de función, como la relación del concepto de función con el de continuidad.

4.4. La noción de aplicación

Las indagaciones sobre los antecedentes históricos de la noción de aplicación en la obra Matemática de Dedekind dan cuenta de que junto con la noción de conjunto, las dos nociones hacen presencia en el mismo tiempo, esto es, a finales de los años 1850, desde cuando, según Ferreirós "El enfoque conjuntista (de Dedekind) estaba ya básicamente claro [...]". En esta época su trabajo algebraico se orientaba a estudiar algunos temas de teoría abstracta de grupos relacionados con las nociones de isomorfismo y homomorfismo; y también clases infinitas de polinomios. De esta manera inicia la articulación del álgebra con el lenguaje conjuntista. Así mismo, en su proyecto de fundamentación de la aritmética se dio cuenta que todo podía ser desarrollado en términos de conjuntos, con la convicción de que las nociones fundamentales de la aritmética, del álgebra, del análisis y de la matemática pura en general se podían sistematizar y reformular de acuerdo con este punto de vista. Sin embargo, se debe tener en cuenta que Dedekind no desarrolló este enfoque en términos de una teoría exclusivamente conjuntista como lo pone en evidencia en el libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888), en cuya introducción, orienta todo el énfasis en la noción de aplicación sin hacer mención alguna de la noción de conjunto, lo cual no significa que haya contradicción por cuanto toda la obra matemática de Dedekind, como ya se ha dicho, tiene como fundamento la teoría de conjuntos y las aplicaciones, considerando como ideas primitivas las nociones de conjunto y aplicación, a partir de las cuales llevaría a cabo una de las principales preocupaciones que tenia que ver con la creación de una marco de conceptos de tales alcances que fuera competente para englobar toda la matemática clásica, sustentada en el rigor deductivo, hecho este que lo identifica como el más distinguido precursor de Bourbaki.

Así por ejemplo, siguiendo adelante con su propósito de fundamentación, en su obra de 1888 explica de qué manera se puede definir tanto el conjunto de los números naturales como todo el sistema numérico, su estructura y las operaciones aritméticas mediante conjuntos y aplicaciones. Al respecto, Ferreirós sostiene que los principios básicos planteados en dicha obra surgieron cuando Dedekind evidenció que la función sucesor se podía entender como una aplicación de los naturales en los naturales. “Los números naturales iban a quedar caracterizados como un conjunto dotado de una cierta aplicación interna que le confiere una estructura particular; los demás tipos de números se obtendrían por construcción conjuntista hasta alcanzar el cuerpo de los números complejos; y las operaciones se desarrollarían sobre la base de la aplicación sucesor, por extensiones progresivas” (Dedekind, 1998).

Para el caso del álgebra hay que tener en cuenta que en aquella época Dedekind estudiaba las nociones de cuerpo, anillo, ideal, grupo, esto es, subconjuntos de números complejos dotados de ciertas estructuras que se podían definir a partir de los conceptos de conjunto y aplicación. Pero la idea básica de sus indagaciones algebraicas son las aplicaciones que preservan estructuras, es decir los morfismos[6]. “Las estructuras algebraicas consideradas entonces no eran sino subconjuntos de los números complejos, cerrados para ciertas operaciones; y los morfismos entre estructuras introducidos por Dedekind no eran,

[6]En las últimas versiones de su teoría de ideales, Dedekind hizo énfasis en las diferencias entre la noción general de aplicación o «sustitución» y la noción de aplicaciones que preservan estructuras.

como hemos visto, más que casos particulares de aplicación. En cuanto al análisis, ya hemos indicado que Dirichlet había planteado la noción de función (real) en sentido abstracto, como una correspondencia cualquiera entre valores numéricos; sin duda, Dedekind era consciente de que esto no era más que una aplicación entre conjuntos. Como los números reales y complejos se obtenían mediante construcción conjuntista, las simples nociones de conjunto y aplicación ponían a su alcance toda la gama de funciones del análisis" (Dedekind, 1998).

De la misma forma para el caso de la topología de subconjuntos de números reales y de números complejos se aborda la teoría de funciones a partir de aplicaciones o funciones reales y/o complejas. En otras palabras, tomando como base las nociones de conjunto y aplicación era posible fundar la aritmética, el álgebra y el análisis.

Por otra parte, en diversos momentos, el concepto de función estuvo presente en las temáticas de su actividad académica. Por ejemplo, durante el periodo comprendido entre los años 1854 y 1858, Dedekind asistió a todos los cursos impartidos por Riemann sobre ecuaciones diferenciales parciales, integral definida, funciones de variable compleja y en especial funciones elípticas y abelianas. Así mismo en la década de 1860 a 1870 se ocupó de la edición de importantes escritos de Riemann, Gauss y Dirichlet y particularmente hacia 1867 edita las obras completas de Riemann con la ayuda de Heinrich Weber quien colabora también en un trabajo fundamental sobre teoría de funciones algebraicas de una variable.

Desde 1872 se refiere a la noción de función, de manera sistemática, con el significado de aplicación. Más adelante, hacia 1887, a partir de sus trabajos en álgebra, teoría de números y teoría de conjuntos, Dedekind llegó a una concepción general en el sentido de aplicación de un conjunto, no necesariamente numérico, en otro.

Con base en las reflexiones anteriores y teniendo en cuenta que se considera a Dedekind como el matemático que introdujo por primera vez y de manera explícita el concepto general de aplicación y al mismo tiempo estudió detalladamente sus propiedades, resulta conveniente hacer referencia a los términos en los cuales él entendió esta noción. Al respecto, Ferreirós afirma que la publicación de Scharlau del manuscrito de Dedekind sobre teoría de Galois se inicia en los siguientes términos:

> **Articulo 1.**
>
> **Definición.** Por *sustitución* se entiende en general todo proceso mediante el cual ciertos elementos $a, b, c, \ldots$ se transforman en otros $a', b', c', \ldots$, o son reemplazados por estos; en lo que sigue consideramos solo las sustituciones en las que el complejo de los elementos reemplazantes $a', b', c', \ldots$ es idéntico al de los reemplazados $a, b, c, \ldots$. (Scharlau, 1981, p. 60), (Citado por Ferreirós).

Dedekind utiliza en este caso la palabra "*sustitución*" para referirse a lo que hoy se entendería como "*aplicación*", respecto a lo cual Ferreirós puntualiza que la interpretación correcta, en el lenguaje moderno, seria utilizar el término *aplicación*. Esto "Queda plenamente confirmado por otro texto de Dedekind escrito unos veinte años después [...]" (Dedekind, 1998).

El texto al cual se hace referencia expresa lo siguiente:

> Sucede muy frecuentemente en la matemática y en otras ciencias que, cuando se encuentra un sistema Ω de cosas o elementos ω, cada elemento determinado ω es reemplazado por un elemento ω' que se le hace corresponder de acuerdo con una cierta ley; se acostumbra a denominar un acto semejante sustitución, y se dice que mediante esta sustitución el elemento ω se transforma en el elemento ω', e igualmente el sistema Ω se transforma en el sistema Ω' de los elementos ω'. La terminología resulta algo más cómoda si, como queremos hacer nosotros, se concibe esta sustitución como una representación del sistema Ω, y de acuerdo con ello se llama ω' la imagen de ω, e igualmente a Ω' la imagen de Ω (Nota:) Sobre esta facultad mental de comparar una

> cosa ω con una cosa ω', o relacionar ω con ω', o hacer corresponder a ω, ω', sin la cual no es posible en absoluto pensar, descansa también, como intentaré demostrar en otro lugar, la ciencia entera de los números. (Dirichlet-Dedekind, 3ª edición, 1879, p. 470.) (Citado por Ferreirós).

Aún cuando parezca extraño el hecho de que hable de sustitución, sin embargo, si se analiza ésta palabra en la terminología del álgebra moderna se puede entender mejor el pensamiento de Dedekind en cuanto a este caso. En efecto, (hoy) se llama sustitución de grado n a toda aplicación biyectiva de un conjunto formado por los primeros n números naturales sobre sí mismo, o toda aplicación biyectiva de un conjunto de n símbolos: $i_1, i_2, \ldots, i_n$ en otro conjunto $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$ donde α_i denota el número o elemento que en la sustitución reemplaza al número o elemento i, $i = 1, 2, \ldots, n$. En el mismo sentido, se llama permutación de los n números o símbolos, a toda disposición de los mismos en un orden determinado.

Así mismo, en la terminología de la teoría de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, finitos o infinitos, de elementos de cualquier naturaleza, si de un modo determinado, a cada elemento x de A se pone en correspondencia un elemento y de B, y sólo uno, se dice que se ha definido una *aplicación* o una *representación* de A en B. En este caso, el elemento y se llama imagen o representación de x.

Es claro entonces que Dedekind, con la palabra *sustitución*, hacía referencia principalmente a la correspondencia entre dos conjuntos y en una primera etapa tendría la connotación de estar restringida a aplicaciones biyectivas; sin embargo, como en sus investigaciones en álgebra estaba interesado en aplicaciones que preservan estructuras, analiza sólo *morfismos,* como lo confirma Ferreirós al citar un fragmento de los años 1855/58, que tiene por título "De los estudios de los grupos", en el cual "aparece un apartado sobre *Equivalencia de grupos*, que en palabras de Emmy Noether ofrece una elaboración del «teorema del homomorfismo» tan precisa como sólo se ha hecho habitual en los últimos tiempos (Dedekind, 1930, vol. 3, p. 446). Dedekind considera una correspondencia entre los objetos de un grupo M y los de un complejo (conjunto) M', tal que a cada producto de elementos de M corresponda el producto de sus imágenes. Demuestra que M' es un grupo, y por lo que sigue queda claro que está considerando la posibilidad de que la aplicación sea no sólo un isomorfismo, sino quizá un homomorfismo: introduce la noción del núcleo N del homomorfismo, y muestra cómo la partición M/N da lugar a un isomorfismo —o, como dice Dedekind, una «equivalencia»— entre el grupo cociente M/N y la imagen M'; poco después utiliza el término «*sustitución*» para la correspondencia indicada (o. c., 440-442)" (Ferreirós, 1991).

Lo anterior da cuenta de que desde finales de los años 1850, la noción de *aplicación* era ya conocida por Dedekind con la denominación de *sustitución* referida a aplicaciones no inyectivas. Agrega además Ferreirós que, en su obra *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Dedekind conectó, de manera original, el análisis del número como ordinal con su teoría de conjuntos y aplicaciones, ya que según su concepción todos los conjuntos numéricos tienen una misma estructura, la cual caracteriza al conjunto de los números naturales. Treinta años más tarde, Dedekind volvió a tomar su antigua noción de «*sustitución*» con el nombre de *representación* o *aplicación* o *Abbildung* en alemán[7].

Después de considerar aplicaciones cualesquiera, introdujo la definición de «*aplicación inyectiva*», en términos de "*representación similar* o *clara* (definición 2)", habiendo definido previamente el concepto de "*representación de un sistema* (definición 1)". Posteriormente definió también "*representación de un sistema en sí mismo* (definición 3)". Las definiciones mencionadas son las siguientes:

[7]Ferreirós señala que "la terminología sólo se hace más cómoda en alemán, donde «*aplicación*» se dice «*Abbildung*», que viene a significar algo parecido a «*representación*», en el sentido en que un cuadro puede representar a un objeto. Nuestro uso lingüístico sigue aquí al francés, lo que no es la mejor elección. Por este motivo y por la conexión entre el término y la filosofía de la matemática de Dedekind, nuestra traducción empleará sistemáticamente la palabra «*representación*»" (Dedekind, 1998, p. 28).

Definición 1. Por una *representación* φ de un sistema S se entenderá una ley según la cual a cada elemento determinado s de S se le *asigna* una cosa determinada, que se llama la *imagen* de s y se designa con $\varphi(s)$; decimos también que $\varphi(s)$ *corresponde* al elemento s, que $\varphi(s)$ *resulta o se produce* a partir de s mediante la representación φ, que se *transforma* en $\varphi(s)$ mediante la representación φ. Si ahora T es una parte cualquiera de S, en la representación φ de S está contenida igualmente una representación determinada de T, que para simplificar puede designarse mediante el mismo símbolo φ, y que consiste en que a cada elemento t del sistema T le corresponde la misma imagen $\varphi(t)$ que posee t como elemento de S; igualmente se llama *imagen* de T y se designa $\varphi(T)$ el sistema que consiste en todas las imágenes $\varphi(t)$, con lo que también queda definido el significado de $\varphi(s)$. La asignación de determinados signos o nombres a sus elementos puede considerarse como ejemplo de representación de un sistema. La más sencilla representación de un sistema es aquella a través de la cual cada uno de sus elementos se transforma en sí mismo; la llamaremos representación *idéntica* del sistema.

Definición 2. Una representación ϕ de un sistema S se llama *similar* (*o clara*) cuando a diferentes elementos a, b del sistema S les corresponden siempre diferentes imágenes $a' = \phi(a)$, $b' = \phi(b)$. Como en este caso de $s' = t'$ se sigue siempre, inversamente, $s = t$, cada elemento del sistema $S' = \phi(S)$ es la imagen s' de un elemento s único y completamente determinado del sistema S, de acuerdo con lo cual se le puede contraponer a la representación ϕ de S una representación *inversa* del sistema S', que puede ser designada $\overline{\phi}$, que consiste en que a cada elemento s' de S' le corresponde la imagen $\overline{\phi}(s') = s$ y claramente es siempre una representación similar. Es evidente que $\overline{\phi}(S') = S$, que además ϕ es la representación inversa correspondiente a $\overline{\phi}$, y que la representación $\overline{\phi}\phi$ compuesta[8] de ϕ y $\overline{\phi}$ es la representación

[8]**Definición.** Si ϕ es una representación de un sistema S y ψ una representación de la imagen $S' = \phi(S)$, de aquí resulta siempre una representación θ *compuesta* de ϕ y ψ, que consiste en que a cada elemento s de S le corresponde la imagen

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\phi(s))$$

idéntica de S.

Definición 3. Si ϕ es una representación similar o disimilar de un sistema S y $\phi(S)$ es parte de un sistema Z, llamamos a ϕ representación de S en Z, y decimos que S es representado en Z mediante ϕ. De ahí que llamemos a ϕ representación del sistema *S en sí mismo* cuando $\phi(S)$ "*es parte*" de S.

Es ampliamente conocido que el concepto de función o aplicación de un conjunto en otro juega un papel esencial en las matemáticas modernas por su importancia y universalidad. En términos formales, ésta noción se define de la siguiente manera:

> Si S y T son conjuntos no vacíos, entonces una aplicación de S en T es un subconjunto M de $S \times T$, tal que para toda s de S hay un solo t de T tal que el par ordenado (s,t) está en M.

Sin embargo, a pesar de la precisión que otorga esta definición al concepto, es usual pensar en una aplicación, como una regla o ley que asocia a cada elemento s de S algún elemento t de T, donde la regla o ley consiste en asociar s de S con t de T si y solo si el par (s,t) está en M (esta regla se puede expresar también en términos de aplicar o transformar s en t). Entonces se dice que t es la imagen de s bajo la aplicación.

Como ya se ha dicho y se reafirmará más adelante, las nociones de conjunto y aplicación son para Dedekind las ideas centrales para la comprensión de la aritmética, la teoría de números algebraicos, el álgebra y el análisis; y a pesar de que es él quién introduce por primera vez la noción de aplicación, lo hace en términos completamente modernos[9], y en

donde una vez más $\phi(s) = s'$. Esa representación θ puede designarse abreviadamente por $\psi \cdot \phi$ o $\psi\phi$, y la imagen $\theta(s)$ por $\psi\phi(s)$, donde se debe tener muy en cuenta la posición de los símbolos ϕ, ψ, porque el signo $\phi\psi$, en general carece de significado y sólo tiene sentido cuando $\psi(S')$ "es parte" de S.

[9] "El concepto de aplicación de Dedekind es el concepto moderno en toda su generalidad, y aparece aquí por vez primera en la historia de la matemática. El término empleado por el autor es «*Abbildung*», y los matemáticos alemanes siguen usándolo para denotar «*aplicación*»; esto constituía un argumento a favor de traducirlo simplemente de la forma habitual. Pero «*Abbildung*» es una palabra muy polisémica: significa «representación»,

la forma como expone este concepto advierte, sin lugar a dudas, el grado de importancia y universalidad mencionados.

4.5. La noción de cuerpo

En concordancia con lo expuesto en la sección anterior respecto a las nociones de conjunto y aplicación, para el caso de sus investigaciones tanto en álgebra como en teoría de números algebraicos y demás temas de su interés, el enfoque estructural de Dedekind se desarrolla tomando como fundamento los conjuntos con una determinada estructura y las aplicaciones que preservan dichas estructuras.

Dedekind había logrado pleno dominio sobre el significado y la importancia de las nociones de conjunto y aplicación en la fundamentación de la matemática. Con base en estas dos nociones, los números naturales quedaban caracterizados como un conjunto dotado de una estructura especial otorgada por una cierta aplicación interna. Mediante construcción conjuntista, iniciando con estos números, por extensión o ampliación se obtendrían los enteros y por extensión de los mismos lograr la construcción formal de un conjunto en el cual estuvieran contenidos estos y para cuyos elementos fueran válidas las cuatro operaciones aritméticas usuales de adición, sustracción, multiplicación y división. Es decir, se obtendría así el conjunto de los números racionales con la propiedad de ser cerrado para las cuatro operaciones racionales. De la misma manera se obtendría $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, por extensión de $\mathbb{Q}$ y así mismo, por construcción conjuntista, alcanzar el cuerpo de los números complejos y continuar con una ramificación de la red de cuerpos más allá de los cuerpos numéricos

«imaginación», e incluso «pintura», cosa que justifica que hablemos de «originales» e «imágenes». Por otro lado, la palabra «aplicación», no parece especialmente apropiada para el uso que le dan los matemáticos, y cómo la terminología de Dedekind es en general muy alejada de la nuestra, he pensado que no había inconveniente en utilizar «representación» (aunque no ignoro que tiene otros usos técnicos en matemáticas). Ésta palabra permite formar términos derivados con más comodidad, parece en principio más apropiada que «aplicación» para lo que se quiere expresar, y sugiere connotaciones mentalistas o logicistas que caracterizan muy bien la posición de Dedekind en filosofía de la matemática” (Dedekind, 1998, p. 185).

usuales.

El trabajo en la teoría de Galois le permitió alcanzar una nueva comprensión del papel desempeñado en la misma por la noción de cuerpo. Para entender la razón de este hecho, basta tener en cuenta, por ejemplo, lo que hoy se conoce con respecto a los *automorfismos*. Estas aplicaciones isomorfas de un cuerpo sobre sí mismo, están vinculadas con las propiedades más profundas de los cuerpos y son un poderoso instrumento para el estudio de dichas propiedades en el marco de la teoría de Galois.

Ferreirós afirma que hacia el año 1871 Dedekind recuerda que en el curso de sus conferencias de 1856/58, se había convencido de que "el estudio de la relación algebraica entre números sería más conveniente sobre la base de un concepto que estuviera directamente relacionado con los más simples principios aritméticos". De igual forma, en el manuscrito, Dedekind emplea el nombre de "dominio racional" y utiliza la notación S para el cuerpo base de los polinomios en estudio. "El dominio racional" comprende todos los números que son "racionalmente representables" por medio de las raíces de los polinomios o son "funciones racionales" de dichas raíces (Scharlau, 1981, pp. 84-89) (citado por Ferreirós, 1999).

Edwards (Edwards, 1980, p. 343) ha resaltado que la idea de Dedekind de emplear una sola letra mayúscula S, o más tarde K, en lugar de una notación como $\mathbb{Q}(\alpha)$ es algo característico de su filosofía de las matemáticas. Sorprende entonces que la concepción matemática de Dedekind lo lleve a anticipar aún estos detalles, ya que en los términos actuales $\mathbb{Q}(\alpha)$ hace referencia a la *adjunción* del elemento α al cuerpo $\mathbb{Q}$, como sucede por ejemplo en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$[10]. En otras palabras, con esta notación se entiende que el cuerpo $Q(\alpha)$ se ha obtenido por adjunción del elemento α al cuerpo $\mathbb{Q}$, siendo $\mathbb{Q}(\alpha)$ el subcuerpo mínimo que contiene a $\mathbb{Q}$

[10]Recuérdese que si K es un cuerpo y F un subcuerpo, $F \subset K$, se dice que el cuerpo K es una extensión o ampliación del subcuerpo F. Si se toma en K, la intersección F_1 de todos los subcuerpos, que contienen a F y a cierto elemento $\alpha \in K$, el cual no pertenece a F, entonces F_1 será el cuerpo mínimo que contiene al conjunto $\{F, \alpha\}$. Se dice que la ampliación F_1 del cuerpo F se ha obtenido por *adjunción* del elemento α al cuerpo F, y este hecho es el que refleja la escritura: $F_1 = F(\alpha)$. De la misma manera, se puede hablar del subcuerpo $F_1 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ del cuerpo K, que se obtiene al *adjuntar* a F, n elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ del cuerpo K.

y a α. Así, en el ejemplo citado, la ampliación o extensión $\mathbb{Q}(\alpha)$ del cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, consta de los números de la forma $a+b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, y se obtiene por adjunción del número $\sqrt{2}$ al cuerpo de los números racionales[11].

Se entiende entonces por que Dedekind consideró que con la notación $\mathbb{Q}(\alpha)$ se deformaría la noción de cuerpo. Al respecto Ferreirós explica que "En una carta a Lipschitz del 10 de junio de 1876, Dedekind llega a manifestar su rechazo del punto de vista que da lugar a la notación —habitual hoy— de una extensión finita de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}(\alpha)$". La notación $\mathbb{Q}(\alpha)$ "presupone algún teorema que demuestre que es posible caracterizar los números del cuerpo como polinomios en (alguna indeterminada), de manera que Dedekind prefiere utilizar como base la definición dada en la segunda edición de las *Vorlesungen*: «un cuerpo finito es aquel que solo posee una cantidad finita de divisores (subcuerpos)» (Dedekind, 1930, vol. 3, p. 224)". Comenta además que este tema está relacionado con los principios metodológicos que comparte con Riemann, según lo expresa el mismo Dedekind en los siguientes términos:

> Mi esfuerzo en teoría de números se encamina a basar la investigación, no en formas de representación o expresiones accidentales, sino en nociones básicas simples, y con ello —aunque esta comparación quizá suene presuntuosa— alcanzar en este domino algo similar a lo que Riemann en el dominio de la teoría de funciones; no puedo reprimir el comentario ocasional de que en mi opinión los principios riemannianos no son aplicados de forma consecuente por la mayoría de los autores, incluso en las obras más recientes

[11]En un documento de 1877, Dedekind define un cuerpo finito (extensión finita de $\mathbb{Q}$) como el conjunto de todos los números de la forma:

$$\phi(\theta) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \cdots + x_{n-1}\theta^{n-1} + x_n\theta^n$$

donde x_i es un elemento de $\mathbb{Q}$. Esta notación es similar a la moderna $\mathbb{Q}(\alpha)$ para las extensiones finitas de $\mathbb{Q}$. En su carta a Lipschitz, Dedekind hace referencia a esta definición en el sentido de la deformación que sufre la noción de cuerpo con la notación $\mathbb{Q}(\alpha)$ puesto que considera que la misma se basa en una forma de representación que es algo arbitraria, ya que θ podría ser reemplazada por muchos otros números y la definición presupone que tales cambios parten de un cuerpo invariante (Dedekind, 1930-1932, vol.3, p. 468-469). Por lo tanto, él considera, se debe preferir, por razones de principio la definición empleada en 1871: "un cuerpo finito es el que posee un número finito de divisores (subcuerpos)".

> sobre funciones elípticas; la teoría simple es deformada casi siempre por la inmiscusión innecesaria de formas de representación, que sin embargo debían ser propiamente el resultado y no los medios de la teoría. (Dedekind, 1930, vol.3, p. 468-469, o Lipschitz, 1986, p. 59-60)[12].

Desde finales de 1860, Dedekind comenzó a emplear la denominación “Körper” (“cuerpo”) para sus antiguos “dominios racionales” y planteó de manera explícita su relación con los más simples principios aritméticos, al considerar que los cuerpos “reproducen” a través de las cuatro operaciones básicas, las tradicionales cuatro “especies” de la aritmética elemental (Dedekind, 1930-1932, vol. 1, p. 239-242; vol. 3, p. 409).

La escogencia del nombre “Körper” se justifica por cuanto un cuerpo numérico constituye un sistema que posee ciertas cualidades o propiedades de completitud y cerradura como una “totalidad orgánica” o una “unidad natural”, análogas a las entidades que en la geometría, en las ciencias naturales y en la vida de la sociedad humana tienen la denominación de cuerpos (Dedekind, 1894, nota 452)[13].

Sostiene Ferreirós que debe haber sido a finales de 1850 cuando Dedekind llegó a la convicción de que la noción de cuerpo y las respectivas operaciones, lo mismo que las “sustituciones” o cuerpos de homomorfismos, conducían, por una parte, a la teoría de Galois, y por otra, a la teoría de ideales (Dedekind, 1930-1932, vol. 3, p. 401). Pero según Haubrich (Haubrich, 1999, cap. 6) (citado por Ferreirós, 1999), Dedekind realmente llegó a identificar el álgebra con la teoría de cuerpos. Hacia 1873, propuso definir tentativamente el “álgebra formal” o “propiamente dicha” como “la ciencia de las relaciones entre cuerpos”, explicando también que la relaciones entre ecuaciones se pueden traducir dentro de las relaciones entre

[12] Las bases teórico conjuntistas en la teoría de cuerpos de Dedekind, por ejemplo, marchan paralelas con la fundamentación teórico conjuntista de las variedades de Riemann.

[13] Es ampliamente conocido que en la mayoría de las lenguas del continente europeo se siguió la elección de Dedekind del término cuerpo; mientras que en las traducciones al inglés y eventualmente al español se usa la palabra “campo”.

cuerpos. Esta concepción se puede encontrar nuevamente en la versión final de la teoría de ideales, donde se pone de presente que el álgebra se equipara con la parte de los cuerpos y la teoría de grupos contenidos en la teoría de Galois. Se señala también que este hecho constituye un interesante paralelismo con la concepción de Riemann, en cuanto a que el papel fundamental que desempeña la noción de cuerpo en álgebra, según Dedekind, es análogo al de las funciones analíticas abstractas que se definen en la teoría de funciones de Riemann, o en el caso de sus variedades en la teoría de magnitudes (incluyendo la topología) y también en geometría. Se menciona que el mismo Dedekind hizo referencia a este hecho, en 1871, sin nombrar a Riemann (Dedekind, 1930-1932, vol. 3, p. 396-397). De esta manera, guiado por su convicción, compartida con Riemann, en el sentido de que cualquier rama de las matemáticas se debe basar en un concepto fundamental, Dedekind llegó a una concepción de álgebra que podría ser demasiado restrictiva para esa época, pero que resultaría acorde con las normas y el rigor matemático del siglo XX.

Se considera que la primera presentación pública que hace Dedekind de la noción de cuerpo se puede encontrar justamente a comienzos de 1871, en la exposición de la teoría de ideales; la cual aparece en el décimo suplemento de las *Vorlesungen* de Dirichlet "sobre la composición" de las formas cuadráticas binarias. Este suplemento comienza con una exposición de los trabajos de Gauss y Dirichlet, a la que Dedekind hizo algunas contribuciones originales y, a continuación, hace una extrema generalización de la misma. Afirma que será conveniente adoptar un punto de vista avanzado e introducir una noción que parece muy apropiada para servir de fundamento para el álgebra superior y para aquellas partes de la teoría de números relacionadas con ella. La manera como Dedekind introduce la noción de cuerpo es la siguiente:

> Mientras intentamos introducir al lector en estas nuevas ideas, nos situaremos en un punto de vista algo superior, y comenzaremos introduciendo una noción que parece muy

> apropiada para servir de fundamento al álgebra superior y a las partes de la teoría de números conectadas con ella.
>
> Entenderemos por *cuerpo* todo sistema de infinitos números reales o complejos, que es de tal forma cerrado y completo en sí mismo, que la adición, sustracción, multiplicación y división de dos cualesquiera de esos números produce siempre un número del mismo sistema. El cuerpo más simple está constituido por todos los números racionales, el mayor cuerpo por todos los números (complejos). Decimos que un cuerpo A es un *divisor* del cuerpo M, y éste un *múltiplo* de aquél, si todos los números contenidos en A se encuentran también en M; se ve con facilidad que el cuerpo de los números racionales es divisor de todos los otros cuerpos. La reunión de todos los números que están contenidos simultáneamente en dos cuerpos A, B, constituye de nuevo un cuerpo D, que puede denominarse *máximo* común divisor de ambos cuerpos A, B, ya que evidentemente todo divisor común de A y B es por necesidad un divisor de D; igualmente existe siempre un cuerpo M que puede denominarse *mínimo* común múltiplo de A y B, ya que es un divisor de todos los demás múltiplos comunes de ambos cuerpos. Si además a cada número a del cuerpo A le corresponde un número $b = \phi(a)$ de manera que $\phi(a+a') = \phi(a) + \phi(a')$, y $\phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$, los números b constituyen (en caso de que no todos sean nulos) igualmente un cuerpo $B = \phi(A)$, que es *conjugado* de A y resulta de A mediante la *sustitución* ϕ; inversamente, también $A = \theta(B)$ es en ese caso conjugado de B. Dos cuerpos conjugados con un tercero son también conjugados entre sí, y todo cuerpo es conjugado de sí mismo (Dedekind, 1930, vol. 3, pp. 223-224) (citado por Ferreirós, 1991, pp. 115-116).

Analizando esta definición, Dugac (Dugac, 1976, p. 29) ha puesto de relieve que no del todo se puede sobreestimar la importancia de este fértil episodio de la historia de la teoría de conjuntos y del lenguaje de los conjuntos. Aquí se incorporan todas las ideas cruciales relacionadas con las nociones de conjunto y aplicación utilizadas en el álgebra, y Dedekind da abundantes pruebas del dominio que había alcanzado sobre el enfoque de la teoría de conjuntos a partir de 1871. No cabe duda de que los lectores contemporáneos hayan encontrado dificultades para seguir sus orientaciones puesto que estaban acostumbrados a un álgebra y a una teoría de números formuladas en términos más elementales de números y ecuaciones o formas. Por lo tanto se mantuvieron alejados de una firme confianza sobre las ideas conjuntistas en estos dominios razón por la cual la exposición de Dedekind llamó más la atención por parte de los lectores que se mantenían a la expectativa para aceptar o rechazar esos nuevos puntos de vista.

Ferreirós advierte que la terminología empleada por Dedekind puede parecer extraña, por lo cual amerita hacer algunos comentarios sobre el texto. Puntualiza que es evidente "que Dedekind está presentando los correlatos de las operaciones conjuntistas: inclusión o «división», intersección o «máximo común divisor», unión o «mínimo común múltiplo», y aplicación o «sustitución»". La escogencia de esta terminología está encaminada a extender los problemas de la teoría elemental de números, manteniendo un paralelismo estricto en los términos en que se formulan los teoremas teóricos elementales sobre números y sus análogos en la teoría de números algebraicos. Es evidente que sus definiciones de "divisor" y "múltiplo" se refieren a las dos partes de una inclusión; "máximo común divisor" denota la intersección de dos cuerpos y "mínimo común múltiplo" la unión, en el sentido del cuerpo más pequeño que contiene dos cuerpos dados. La terminología utilizada para los cuerpos era análoga a la usada para los módulos e ideales, aunque hay que tener en cuenta que si para los cuerpos A "ser divisor de" B significa $A \subset B$, para el caso de los ideales significa $B \subset A$. Tratándose de los enteros, la inclusión de los ideales principales corresponde a la divisibilidad de sus generadores, y esto condujo a Dedekind a establecer la analogía entre inclusión y división que empleó a lo largo de su trabajo sobre la teoría de ideales y el álgebra. Dedekind fue muy consciente de la arbitrariedad de esta terminología matemática y de la necesidad de formular explícitamente todas las propiedades pertinentes de las nociones implicadas.

Se debe mencionar también que el hecho de que Dedekind haya presentado las nociones de inclusión, unión, intersección y aplicación en su obra de 1888 constituye una clara evidencia de que estas ideas tienen origen en su obra algebraica.

4.6. Los números algebraicos

Hoy se conoce que todo polinomio de *grado n* con coeficientes racionales tiene n raíces en el cuerpo de los números complejos, algunas de las cuales (y aún todas ellas) pueden no pertenecer al cuerpo de los números racionales. No obstante, cualquier número real o complejo no puede ser raíz de algún polinomio de coeficientes racionales. Los números complejos y, particularmente, los números reales que son raíces de tales polinomios, reciben el nombre de *números algebraicos*. Entre los números algebraicos se destacan los números racionales, como raíces de los polinomios de primer grado que tienen coeficientes racionales, y también cualquier radical de la forma $\sqrt[n]{a}$, donde el subradical a es un número racional, por ser raíz del binomio $x^n - a$.

Cuando el número α es algebraico, el mismo será incluso raíz de un polinomio de coeficientes enteros y, por tal razón, será raíz de uno de los divisores irreducibles de este polinomio, el cual tiene también coeficientes enteros. Un polinomio irreducible de coeficientes enteros que tiene como raíz al número α se determina unívocamente, salvo un factor constante, esto es, de un modo único en absoluto, si se exige que los coeficientes de este polinomio sean primos entre sí (en este caso se hace referencia a un polinomio primitivo)[14].

[14]Se llama polinomio primitivo, sobre el anillo $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, al polinomio $\varphi(x)$, cuyos coeficientes no contienen factor común irreducible alguno, es decir estos son primos entre sí. Según el conocido lema de Gauss, el producto de dos polinomios primitivos es también un polinomio primitivo.

Si α es una raíz de dos polinomios irreducibles $p(x)$ y $q(x)$, el máximo común divisor de éstos debe ser distinto de la unidad, por lo cual en virtud de su irreducibilidad, dichos polinomios pueden diferenciarse entre

Los números algebraicos que son raíces de un mismo polinomio irreducible sobre el cuerpo de los números racionales, se llaman *conjugados entre sí*[15]. En consecuencia, todo el conjunto de los números algebraicos se descompone en clases finitas disjuntas de números conjugados entre sí[16]. El conjunto de todos los números algebraicos es un subcuerpo del cuerpo de los números complejos. Es decir, que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de números algebraicos son también números algebraicos.

La nueva temática que abordaría Dedekind, es el conjunto de los números algebraicos y en particular los enteros algebraicos[17]. Esta temática sobre la cual centraría su atención se inició con la teoría de ideales de 1871. Afirma Ferreirós que hacia 1856, Kummer había logrado estudiar enteros algebraicos únicamente de una cierta clase de cuerpos $\mathbb{Q}(\alpha)$, llamados ciclotómicos, para los cuales se tiene que $\alpha^m = 1$. De esta manera se planteaba un importante problema matemático que consistía en extender la teoría de Kummer a enteros algebraicos cualesquiera. Kronecker y Dedekind se dedicaron a trabajar en torno a este problema, porque según parece, tenían en común algunas motivaciones y aún orientaciones metodológicas, además de cierta visión sobre las relaciones entre el álgebra y la teoría de números. Según Haubrich (1999) (citado por Ferreirós) se puede conjeturar que esta orientación fue estimulada en ambos personajes por Dirichlet. Los dos centraron sus esfuerzos en este tema, pero por las dificultades que él mismo planteó solo después de catorce años Dedekind logró encontrar la clave de su teoría definitiva. Agrega Ferreirós que entre las dificultades que impidieron a Dedekind alcanzar con anterioridad su objetivo se cuentan insatisfacciones metodológicas más que dificultades intrínsecas de la generalización misma de la teoría. Al

sí únicamente en un factor de grado cero.

[15]Se debe tener en cuenta que el concepto de números algebraicos conjugados entre si es distinto del concepto de números complejos conjugados.

[16]Una característica de los números racionales consiste en que todo número racional, como raíz de un polinomio de primer grado, no tiene números conjugados distintos de sí mismo.

[17]Cuando K siendo un dominio de integridad, es una extensión o ampliación algebraica finita del cuerpo $\mathbb{Q}$, o K es un cuerpo, generado por todos los números algebraicos complejos, se habla de números *enteros algebraicos*. Un elemento r de K se llama entero (entero sobre $\mathbb{Z}$), si es raíz del polinomio unitario $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ en $\mathbb{Z}[x]$ (Un polinomio es unitario si su coeficiente mayor es igual a la unidad).

respecto hace referencia a una carta a Selling del 28 de abril de 1877, en la cual escribe:

> En estos temas de teoría de números, el desarrollo riguroso es con diferencia la cuestión fundamental, y hay una distancia realmente considerable entre la intuición y el verdadero desarrollo de una teoría. [...] El objetivo de la teoría general de ideales era evidente una vez resuelto por Kummer el caso especial de ciclotomía, y desde mi punto de vista solo podía tratarse ya del modo de *fundamentación*, es decir de la introducción de aquellas nociones que condujeran realmente a ese objetivo; al menos para mí, este objetivo, el establecimiento de las leyes generales de la divisibilidad de los números enteros algebraicos, era completamente claro desde el principio, sin ninguna comunicación con Kronecker. (Dugac, 1976, p. 160-161).

De acuerdo con su concepción, la preocupación de Dedekind se concentraba en la estructuración de la teoría, ya que el problema de la extensión de los resultados de Kummer lo consideraba relativamente trivial.

Precisar la definición de número entero algebraico constituía un serio obstáculo para lograr generalizar la teoría de Kummer; en otras palabras, se requería tener un concepto claro acerca de cuales eran los objetos cuya divisibilidad se tenía que investigar, sin lo cual todos los esfuerzos resultarían estériles.

A propósito Edwards (1980) da a conocer su opinión en el sentido de que la teoría general se alcanzaría de manera inmediata después de solventar dicha dificultad. Los números enteros algebraicos habían sido definidos tanto por Kummer como por sus antecesores, entre quienes estaban Eisenstein y Dirichlet, de un modo estrictamente formal. Al principio se hacía referencia a ellos utilizando expresiones como números complejos que se componían a partir de las terceras raíces de la unidad, u otras similares para el tema mencionado[18]. Todo lo cual

[18]Ferreirós (1991) aclara que el título de un artículo de Eisenstein, publicado en 1844 en el *Journal für die reine und angewandte mathematik* de Creelle era precisamente "*números complejos formados por raíces terceras de la unidad*".

ponía en evidencia el hecho de que al no haber conciencia de estar trabajando en cada caso en un cuerpo bien determinado, se tenía que pensar, en términos más imprecisos de números complejos en general. Además, al examinar detalladamente los "*números ciclotómicos*", tal como los definía Kummer, según Ferreirós, "se consideraba primero una raíz de la unidad, esto es, un número complejo tal que $\alpha^m = 1$, y los números a estudiar eran todos los polinomios en α, para los que era posible, utilizando ciertos resultados algebraicos de Gauss, dar la forma simplificada

$$f(\alpha) = r_0 + r_1\alpha + \cdots + r_{\mu-2}\alpha^{\mu-2}, \text{ con } \alpha^\mu = 1 \text{ y } r_i \in \mathbb{Z}\text{".} \tag{4.1}$$

Kummer delineó su teoría en estos términos, en sus cruciales artículos de 1847 y 1851 tratando con números complejos formados a partir de raíces de la unidad y de números enteros. La nueva forma de definir los "enteros" sería entonces en términos de números complejos compuestos por expresiones de la forma indicada en (4.1) en la cual todos los coeficientes r_i son enteros racionales (Kummer, 1975, vol. 1, p. 165-92, 363-484) (citado por Ferreirós, 1999, p. 98).

A pesar de que Kronecker y Dedekind tenían posturas radicalmente opuestas en casi todo lo referente a la teoría de números algebraicos, para este caso ambos propusieron una misma solución. Un número que pertenece a $\mathbb{Q}(\alpha)$ es un número entero siempre y cuando sea raíz de un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (Dedekind, 1871, p. 236). Ni Dedekind ni Kronecker dieron razones de su definición, como tampoco indicaron la trayectoria histórica que condujo a ella. Sin embargo, no es difícil conjeturar como ocurrió, pero sin lugar a dudas se estaba hablando de una idea decisiva (Scharlau, 1981; Haubrich, 1999, cap.7) (citado por Ferreirós). En los años 1850, ambos matemáticos se ocuparon de la teoría de Galois y ambos llegaron a pensar en el papel desempeñado por la noción de cuerpo. Dedekind analizó el trabajo de Kummer después de un estudio detallado de la teoría de Galois y parece que interpretó sus resultados de acuerdo con el punto de vista de los cuerpos de números desde el comienzo. Esto debe haber sugerido la idea de determinar el sistema de números enteros a partir de la noción de cuerpo y según parece, ambos matemáticos llegaron de esta manera a la definición correcta de los números enteros (Haubrich, 1999, cap.7) (citado por Ferreirós).

Entre 1856 y 1857, Dedekind reconoció que, en general, el subconjunto de los números enteros algebraicos de un cuerpo de números dado no es de la forma $\mathbb{Z}[\alpha]$; es decir que no era correcto extender $\mathbb{Z}$ de manera "ingenua" a $\mathbb{Z}[\alpha]$, sino que, por el contrario, el anillo de los enteros debía ser determinado a partir de $\mathbb{Q}(\alpha)$. En este orden de ideas, la teoría de Kummer, de tratar los "números complejos compuestos de raíces de la unidad y números enteros", al pasar a situaciones más generales, conducía a confusiones e impedía su misma generalización. Esta dificultad se superó solo cuando "se comenzó a pensar claramente en términos de cuerpos de números algebraicos, es decir, cuando se llegó a la idea de que lo definitorio era la extensión del «domino $\mathbb{Q}$» a otro «domino $\mathbb{Q}(\alpha)$»" (Ferreirós, 1991). Según sus propias explicaciones, finalmente la orientación de sus ideas hacia la teoría de cuerpos le permitió lograr, de manera directa, la definición correcta de número entero algebraico.

En el periodo comprendido entre 1858 y 1862 Dedekind se propuso trabajar en un primer intento de formular una teoría totalmente general de la factorización de números enteros algebraicos, lo cual implicaba la necesidad de estudiar las propiedades algebraicas del conjunto de los enteros en un cuerpo. De acuerdo con Haubrich (1999) (citado por Ferreirós), hacia 1860 Dedekind había logrado importantes resultados sobre los números enteros algebraicos, como probar que las sumas, las diferencias, y los productos de enteros algebraicos son también enteros; es decir, se tenía la estructura de anillo y además con la propiedad de cerradura por cuanto las raíces de un polinomio con coeficientes en dicho conjunto son también enteros algebraicos. De la misma manera introdujo la noción de módulo y algunos resultados básicos al respecto, y como prueba de su dominio sobre el lenguaje teórico conjuntista aplicado al álgebra, alcanzó importantes resultados en este campo.

Una vez resuelto el problema de la definición de números enteros, ya era posible intentar la generalización de la teoría de Kummer de distintas maneras. Kronecker, de acuerdo con su tendencia constructivista, buscó un acercamiento que hizo posible la determinación de factores ideales (Edwards, 1980; 1990). En cambio Dedekind, desde su orientación conceptual-abstracta, finalmente evitó la postulación de factores ideales y estableció una teoría que trataba de ciertos conjuntos de números algebraicos, los cuales llamó *ideales* para honrar el trabajo inicial de Kummer; pero hasta 1860 él todavía estaba lejos de este punto de vista (Ferreirós, 1999).

4.7. La teoría de ideales

4.7.1. Antecedentes

La teoría de ideales aparece en 1871, veinte años después de haber obtenido su doctorado. Este es quizá su primer trabajo de tal importancia que es considerado su obra maestra. Ferreirós señala que este programa surge durante los años que van de 1830 a 1840, habiendo logrado su madurez hacia 1871. El hecho de que Dirichlet hubiera trabajado en estos temas influyó para que Dedekind, hacia el año 1856, emprendiera de manera decidida su trabajo en este problema.

La primera versión de la teoría de ideales la presentó en la segunda edición de las «*Lecciones sobre teoría de números (1871)*». Una característica relevante de su exposición tiene que ver con su propuesta metodológica en la cual la teoría de conjuntos desempeña un papel esencial. En efecto, el problema de la factorización de ideales se separa del enfoque que hasta ese momento estaba basado únicamente en términos de números; Dedekind en cambio hace su propuesta sobre toda esta temática en términos de conjuntos, así como lo había hecho en la fundamentación del sistema numérico y siendo coherente con su enfoque conjuntista de toda la matemática.

Pero antes de avanzar en el estudio de la teoría de ideales, resulta conveniente tener en cuenta algunos antecedentes como es el caso de analizar las circunstancias históricas que dieron origen a esta teoría. Así por ejemplo, en el contexto del problema de determinar si varios sistemas de ecuaciones tienen solución en los enteros y de buscar algunas o todas las soluciones, el cual se remonta a la antigüedad, Euler, hacia 1770, dio un paso audaz al usar números complejos con tal propósito. También, en los artículos 191-193 de la parte II de su *Álgebra*, consideró el problema de indagar cuando una expresión de la forma $x^2 + cy^2$ puede ser un cubo perfecto, donde c es fijo y x e y son enteros[19]. En primer lugar Euler notó que la expresión podía ser factorizada como $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$. Asumiendo que $-c$ no es un cuadrado perfecto, Euler afirmaba que cuando los dos multiplicandos no tienen un factor común, porque el producto es un cubo, cada factor debe ser el cubo de un número común de la forma $p + q\sqrt{-c}$ donde p y q son enteros. Si $x + y\sqrt{-c}$ es igual a $(p + q\sqrt{-c})^3$ para algunos enteros p y q, entonces $x - y\sqrt{-c}$ es igual a $(p - q\sqrt{-c})^3$. Expandiendo los productos y tomando las partes reales y partes imaginarias iguales, le fue posible a Euler demostrar que $x^2 + 2$ es un cubo únicamente cuando $x = \pm 5$, y $x^2 + 4$ es un cubo únicamente cuando $x = \pm 2$ o $x = \pm 11$. Pero estas consideraciones que hacía Euler resultarían inconsistentes al suponer que los enteros de la forma $x + y\sqrt{-c}$ se comportaban siempre como enteros ordinarios, en cuyo caso sería válido el teorema de factorización única; pero para anillos de enteros más generales, surgirían casos en los cuales no se cumpliría dicho teorema. Por ejemplo, entre los números complejos de la forma $x + y\sqrt{-5}$, el número 6 puede ser expresado como el producto $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ o el producto cuyos factores son 2 y 3; pero a pesar de que 3 divide al producto, no divide al factor $(1 + \sqrt{-5})$ ni al factor $(1 - \sqrt{-5})$ por lo cual no seria primo.

[19]Esta expresión está relacionada con la ecuación Diofántica $x^2 - dy^2 = N$ (donde N y d son enteros), conocida comúnmente como ecuación de Pell, nombre que se cree posiblemente fue asignado equivocadamente por Euler, puesto que se afirma también que la misma nunca fue considerada por Pell.

Así mismo el cuadrado perfecto 9 se podría expresar como el producto $(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, aún cuando ni $(2+\sqrt{-5})$ ni $(2-\sqrt{-5})$ sea el cuadrado de un número de la forma $x+y\sqrt{-5}$.

Las distintas generalizaciones que los matemáticos realizaron en la segunda mitad del siglo XIX, en el campo de los números y en su aritmética, conducirían a la idea abstracta de estructura. Gauss propuso la extensión de la idea de número entero a los llamados *enteros gaussianos*, que son simplemente los números complejos de la forma $a+b\sqrt{-1}$, en los cuales a y b son enteros ordinarios. En el sistema de los *enteros gaussianos* cualquier número se puede expresar de forma única como producto de números primos. Por su parte, Dedekind hizo tal generalización mediante su teoría de enteros algebraicos, los cuales poseen una aritmética propia, en la que se generalizan de manera satisfactoria los casos que son válidos para los enteros. Es claro que, estos sistemas de "*números enteros*" no tenían una estructura de cuerpo, por cuanto los elementos no nulos carecían de inversos para la multiplicación en general; sin embargo, si satisfacían las demás propiedades características de los cuerpos numéricos y por lo tanto constituían dominios de integridad. Pero el problema central que introducían estas generalizaciones de la noción de número entero consistía en que llevaban a la pérdida de la propiedad de factorización única. Por este motivo tanto Dedekind como Kummer introdujeron en la aritmética el concepto de «*ideal*» a partir de la noción de «*anillo*».

La ruta por la cual Kummer llegó a la teoría de Ideales fue señalada por el intento de demostrar el *Último Teorema de Fermat*, llamado también la *Teorema Magno de Fermat*, el cual establece que si n es un número natural mayor que 2, no existen números naturales x, y y z que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$. Kummer consiguió demostrar el teorema para un amplio conjunto de exponentes, sin lograr una demostración general. El mismo Fermat había desarrollado una demostración para el caso $n = 4$ aplicando su método del "descenso infinito[20]". Por su parte Euler hizo una demostración para $n = 3$, en la cual como hecho

[20]El método del "descenso infinito" (*descente infinie*) se puede enunciar, más o menos, en los siguientes términos: si, suponiendo que un problema admite una solución entera $n > 0$, se deduce que posee una solución

notable usó números complejos de la forma $a+b\sqrt{-3}$, donde a y b son enteros, los cuales constituyen el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. El método que utiliza Euler consiste en reproducir en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ la aritmética de $\mathbb{Z}$, suponiendo de manera ingenua e incorrecta que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ también podía haber una representación única en producto de números primos en el mismo sentido que lo establece el teorema fundamental de la aritmética. En 1828 Dirichlet y en 1830 Legendre, probaron la conjetura de Fermat para $n=5$ utilizando esencialmente el mismo método de Euler. Más tarde, en 1832, Dirichlet lo demostró para $n=14$. Posteriormente, hacia 1835 Lamé presentó una demostración extensa y compleja para $n=7$, la cual contenía errores y quedaron dudas sobre la posibilidad de extender este método para el caso $n=11$. Sin embargo se hacía evidente la necesidad de introducir otras ideas para atacar el problema.

Al tratar el problema general, Lamé retoma una idea de Lagrange quién había planteado la posibilidad de introducir raíces n-ésimas de la unidad en el estudio del problema de Fermat.

La principal razón por la cual se introducen números algebraicos en la teoría de números radica en que con estos números se obtiene información sobre las ecuaciones Diofánticas. Tal es el caso de la ecuación $y^2+2=x^3$, respecto de la cual Fermat afirmó que las únicas soluciones enteras son $y=\pm 5$ y $x=3$. Utilizando los números enteros algebraicos de la forma $a+b\sqrt{-2}$, es posible factorizar el primer miembro de la ecuación y obtener $(y+\sqrt{-2})(y-\sqrt{-2})=x^3$. Continuando la discusión del caso se constata que los números algebraicos de la forma $a+b\sqrt{-2}$ permiten deducir hechos relativos a los números enteros ordinarios. En este orden de ideas, algunos matemáticos observaron que es posible obtener una factorización similar de la expresión x^n+y^n utilizando la raíz n-ésima compleja de la

---

entera $n'>0$, $n'<n$, entonces el problema no admite soluciones enteras positivas. Este método lo inventó Fermat para demostrar el teorema que establece que «todo número primo resultante de sumar una unidad a un múltiplo de cuatro se puede descomponer siempre en suma de dos cuadrados de números enteros». La idea básica consiste en demostrar que si el teorema no es cierto para algún número primo que resulte de sumar una unidad a un múltiplo de cuatro, entonces tampoco es cierto para algún número primo menor que el anterior y que se obtenga de la misma manera. Descendiendo indefinidamente, se ve que también es falso para el más pequeño de tales números primos. El paso central del método consiste en que debe existir un número primo aun menor para el que no se cumple el teorema, lo cual contradice la posibilidad de elegir un elemento mínimo.

unidad[21].

Kummer encontró que la dificultad primordial que impedía desarrollar una demostración general del teorema de Fermat tenía que ver con la factorización de la expresión $x^n + y^n$, ya que al pretender factorizar dicha expresión mediante la resolución de la ecuación $x^n + y^n = 0$, para x en función de y, los enteros algebraicos que son raíces de la ecuación no satisfacen necesariamente el teorema fundamental de la aritmética; en otras palabras, puede suceder que no sean factorizables de manera única. Pero estas equivocaciones e intentos fallidos constituyeron los gérmenes que condujeron a la creación, de cierta manera, de una nueva aritmética hacia el año 1846, anticipándose a los trabajos de Dedekind en este sentido.

Al trabajar en el contexto de las investigaciones para su teoría de restos bicuadráticos, Gauss, hacia el año 1828, dio un paso crucial afrontando el problema, mediante la extensión de los temas de teoría de números, para lo cual se propuso analizar, de manera autónoma, la divisibilidad de los llamados "enteros gaussianos o complejos gaussianos $\mathbb{Z}[i]$", e introdujo para este caso, entre otras, las nociones de unidad y número primo, las cuales satisfacían las mismas leyes establecidas en el libro VII de los elementos de Euclides y así pudo demostrar un análogo del teorema fundamental de la teoría de números.

Proponiéndose generalizar los resultados del paso dado por Gauss, Ernst Kummer estudió anillos de polinomios en w de la forma $a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_{p-1} w^{p-1}$, con coeficientes enteros, donde w es la raíz p-ésima de la unidad[22]. Estos son los llamados números

[21] Todas la raíces n-ésimas complejas de la unidad vienen dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right); \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Todos los valores de la raíz n-ésima de un número complejo α se pueden obtener multiplicando uno de estos valores por todas las raíces n-ésimas de la unidad. El producto de dos raíces n-ésimas de la unidad también es una raíz n-ésima de la unidad, lo mismo que toda potencia de la raíz n-ésima de la unidad es también una raíz n-ésima de la unidad. Sin embargo, para todo n existen raíces n-ésimas de la unidad que no son raíces de la unidad de orden menor las cuales se llaman *raíces primitivas n-ésimas de la unidad*.

[22] Cuando $w = e^{2i/p}$ se tiene que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{p-2} + w^{p-1} = 0$.

ciclotómicos que corresponden a la aritmética del anillo $\mathbb{Z}[w]$[23] que hoy es llamado anillo ciclotómico. Téngase en cuenta que si $w = w_p$ es una raíz p-ésima primitiva de la unidad, siendo p un número primo, se puede escribir:

$$z^p = x^p + y^p = x^p - (-y^p) = (x+y)(x+wy)\cdots(x+w^{p-1}y).$$

Pensando en que esta factorización tiene lugar en el anillo $\mathbb{Z}[w]$, Kummer llegó a suponer que la descomposición de todo elemento de este anillo en factores primos era única tal como en el caso del anillo de los enteros y de los complejos, y en consecuencia siendo este un dominio de factorización única, la conjetura de Fermat para el p primo correspondiente sería verdadera en general, de lo cual fue disuadido por Dirichlet.

Hacia 1844, Kummer reconoció que una descomposición única en factores primos dejaba de existir para ciertos casos, el primero de los cuales ocurría cuando $p = 23$. Apenas hasta 1972 se demostró que el anillo $\mathbb{Z}[w]$ es de factorización única solo para números primos menores que 23. Más adelante, fruto de un estudio profundo y original de los números ciclotómicos en 1846, Kummer publicó una teoría en la que se proponía remediar la situación, restableciendo esa importante propiedad, mediante la introducción formal de unos singulares divisores imaginarios que los llamó *números primos ideales*. Esto le permitió dar una condición suficiente sobre el número primo n para el cual sería válida la conjetura de Fermat. Tales primos para los cuales es válido el Teorema de Fermat son llamados «regulares». El método de Kummer hizo posible probar la conjetura para los números primos ubicados en el rango entre 3 y 100, con excepción de los números 37, 59 y 67 llamados «primos irregulares». Kummer y Dimitri Mirimanoff también se propusieron atacar esos casos aplicando otros argumentos, pensando que de esta manera se podría demostrar el teorema para infinitos números primos[24], pero hoy se sabe precisamente que el método no funciona para una

[23] El anillo de enteros algebraicos $\mathbb{Z}[w]$, del cuerpo $\mathbb{Q}(w)$, está constituido por la totalidad de los números complejos de la forma $a_0 + a_1 w + \cdots + a_{n-1} w^{n-1}$, donde los a_i son todos enteros racionales.

[24] Ampliando las técnicas utilizadas por Kummer y Mirimanoff, otros matemáticos lograron hacer retroceder

cantidad infinita de números primos.

Entre las consecuencias más importantes que se derivan del *Último Teorema de Fermat* está el hecho de haber permitido plantear la pregunta ¿Para cuales números primos p es un dominio de factorización única el anillo $\mathbb{Z}[w_p]$?, la cual constituye un tema crucial para la teoría de números, considerada aún de mayor importancia que el teorema mismo. De la misma manera, los trabajos realizados por Wiles con el propósito de demostrar dicho teorema, constituyen una profunda contribución a la teoría de números, así no se hubiera alcanzado tan anhelada demostración. (La demostración definitiva del *Último Teorema de Fermat* fue lograda por el matemático inglés Andrew Wiles y anunciada el 26 de octubre de 1994[25]) (Stewart, 1977).

Frente a un panorama que mostraba un obstáculo aparentemente insuperable, Kummer,

---

aún más las fronteras; tal es el caso de Wagstaff quien, hacia el año 1980, alcanzó a demostrar que el *Último Teorema de Fermat* es válido para todos los exponentes n, hasta $n = 125000$ (Stewart, 1977).

[25]En el mes de Junio de 1993, en un congreso sobre teoría de números, celebrado en el Instituto Isaac Newton de Cambrige, centro internacional de investigación matemática, se había anunciado que Wiles ofrecería tres conferencias sobre sus investigaciones acerca del tema "Formas modulares, curvas elípticas y representaciones de Galois". El objetivo de estas investigaciones era el *Último Teorema de Fermat*. Pero el razonamiento presentado por Wiles en estas conferencias revelaba una importante laguna debida a la idea de utilizar la construcción de un sistema de Euler, idea que tuvo que abandonar para completar la demostración, asumiendo en su lugar "la hipótesis de que ciertas algebras de Hecke son intersecciones locales completas". Por este motivo, el 6 de diciembre de 1993, Wiles, en un mensaje por correo electrónico, se refería a las "especulaciones" con relación a su trabajo sobre la conjetura de Taniyama-Shimura y el *Último Teorema de Fermat*, explicando que durante el proceso de revisión del mismo habían surgido ciertos problemas de los cuales solo quedaba uno sin resolver, consistente en el cálculo final de una frontera superior establecida con precisión en el caso semiestable (de la representación cuadrada simétrica asociada a una forma modular), para el grupo de Selmer hallado mediante la conjetura de Taniyama-Shimura. Finalmente el 26 de octubre de 1994, Karl Rubin, mediante un mensaje a través del correo electrónico, informaba: "Esta misma mañana se han publicado dos manuscritos:

«Modular elliptic curves and Fermat's last teorem», de Andrew Wiles. (ideas de las conferencias de Cambrige).

«Ring theoretic propeties of certain Hecke algebras», de Richard Taylor y Andrew Wiles. (propiedad que se necesitaba para completar la demostración).

La primera publicación (que es larga) da a conocer una demostración de, entre otras cosas, el *Último Teorema de Fermat* basada en la segunda publicación (que es breve) para realizar un paso crucial" (Stewart, 1977).

La teoría de curvas elípticas contiene grandes problemas sin resolver, y el mayor de todos es la denominada *conjetura de Taniyama-Shimura para curvas elípticas semiestables*, que establece que toda curva elíptica se puede expresar de forma paramétrica, mediante las adecuadas funciones modulares, de la misma forma que la "curva pitagórica" $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$ es decir, la circunferencia trigonométrica, se expresa de forma paramétrica mediante las funciones seno y coseno. Considerando la relación entre la ecuación $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, en números enteros a, b, c y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; al expresar: $x = \cos A = a/c$; $y = \operatorname{sen} A = b/c$, el punto (x, y) esta en la circunferencia parametrizada $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$ (Stewart, 1977).

trabajando en un problema relacionado con las leyes de máxima reciprocidad, es decir, con las condiciones en las cuales se cumple la ecuación $a \equiv b^n (\operatorname{mód} p)$, encontró una manera de recuperar la unicidad de la factorización no solo para los enteros ciclotómicos sino para cualquier sistema de números algebraicos. Para tal efecto introdujo *formalmente* los llamados «*factores ideales*» y desarrolló la teoría de los *números ideales*, los cuales, de acuerdo con su postulación inicial nada tenían de números, puesto que un número ideal p es simplemente una relación entre números realmente existentes que se comportan a la manera de una congruencia módulo p, pero sin olvidar que no existe número p alguno como módulo para dicha congruencia. Una manera de conjurar este comportamiento de los números ideales consistía en interpretarlos como números auténticos dentro de un sistema más amplio de números algebraicos, y la otra opción sería de considerarlos como un conjunto de números dentro del sistema original. Kummer demostró que sí era posible la factorización única de los números algebraicos utilizando los números ideales primos, a pesar de que no siempre era posible factorizarlos mediante números primos. Así para el caso de la factorización del número 6 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, se tendrían las dos descomposiciones siguientes:

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

Kummer tuvo la genialidad de postular la existencia de los números «primos ideales» p, q, r[26], que no pertenecen al anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ puesto que son simplemente “símbolos”, pero que al cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} 2 &= p^2 & 1 + \sqrt{-5} &= pq \\ 3 &= qr & 1 - \sqrt{-5} &= pr \end{aligned}$$

hacen posible recuperar el teorema fundamental de descomposición única en factores primos.

Con respecto a estos «números» Kummer afirmaba:

[26]Lo números «primos ideales» p, q, r no pertenecen al anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ puesto que son simplemente símbolos.

> Dado que los números complejos ideales, como factores de números complejos, hacen el mismo papel que los factores existentes, los designaremos a partir de ahora de la misma manera que a aquellos, por $f(\alpha)$, $g(\alpha)$, etc., de modo que $f(\alpha)$, por ejemplo, será un número complejo que satisface un cierto número determinado de condiciones características para los factores primos ideales, haciendo abstracción de la existencia del número $f(\alpha)$. (cit. en Edwards, 1980, p. 342.).

De esta manera, como fruto de sus indagaciones, Kummer encontró un modo de recuperar la unicidad de la factorización en números primos pero no para el caso concreto de los enteros ciclotómicos, sino para cualquier sistema de números algebraicos.

A propósito de los «símbolos» p, q, r propuestos por Kummer, es oportuno tener en cuenta que este tipo de hechos no ha sido excepcional en matemáticas[27], sino que se trata de un caso de los llamados *elementos ideales* que se introducen en matemáticas para completar o redondear una teoría, de tal manera que se permita enunciar en ella teoremas o propiedades generales que no requieran nombrar casos excepcionales. Hilbert al discutir el papel de los *elementos ideales* en matemáticas, presentó argumentos que ponían en evidencia que el infinito es un elemento ideal; asimismo en la geometría se introducen puntos y rectas en el infinito como elementos ideales que permiten enunciar en general, teoremas acerca tanto de la existencia como del número de raíces de una ecuación arbitraria, como es el caso del teorema fundamental del álgebra y, desde luego, los factores ideales hicieron posible enunciar, en general, las propiedades de divisibilidad entre los números enteros algebraicos.

[27] Recuérdese que en 1545 Cardano, resolviendo la ecuación $x(10-x)=40$ salió del apuro con las soluciones $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$. Entonces "dejando a un lado las torturas mentales que esto implica" según palabras de Cardano, al sustituir esta supuesta solución en la ecuación, se tiene que:

$$x(10-x)=(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=5^2-(\sqrt{-15})^2=25-(-15)=40$$

tal y como debe ser (es decir, "no tiene sentido, pero funciona"). Cardano afirmaba en su momento "así se manifiesta la sutileza de la aritmética, cuyo fin es tan refinado como inútil".

4.7.2. Los ideales en el enfoque de Dedekind

Antes de los trabajos de Gauss, la aritmética se presentaba como una especie de saber constituido por hechos aislados. Es precisamente Gauss quien, además de sintetizar los aportes de sus predecesores, con su monumental obra *Disquisitiones Arithmeticae*, que aparece en el año de 1801, consolida las bases fundamentales de la moderna teoría de números y le otorga una auténtica dimensión científica. No obstante hasta esa época, la teoría de números era concebida como un tratado únicamente de enteros, a pesar de que, esporádicamente, en los trabajos de algunos matemáticos y en particular en los de Euler, los números complejos hacían presencia pero solo en calidad de herramientas para el cálculo de los resultados de dicha teoría.

Los temas que Gauss desarrolló en las *Disquisitiones* eran los siguientes: la relación de congruencia entera, la teoría de residuos cuadráticos, formas cuadráticas y cuerpos ciclotómicos. Posteriormente, en 1832, propuso una extensión del campo de la aritmética a los números imaginarios y estudió las características de la divisibilidad de los enteros gaussianos [$(a+bi)$ con a, b, enteros]. En esta propuesta, quizá demasiado audaz para el momento, motivada por la necesidad de ciertos resultados con residuos bicuadráticos, Gauss planteaba que los enteros gaussianos eran imprescindibles en el estudio de la reciprocidad bicuadrática y al mismo tiempo sugirió que otras leyes de reciprocidad de grado superior requerirían de la introducción de otras clases de números complejos, exigiendo así una extensión de la aritmética.

> El tema de los residuos bicuadráticos hace referencia al estudio de las leyes de correspondencia, es decir, sobre la relación entre la solubilidad de dos congruencias $x^{\lambda} \equiv b(\text{ mód } q)$ y $x^{\lambda} \equiv q(\text{ mód } p)$. Si $\lambda = 2$, se tiene una reciprocidad cuadrática; si $\lambda = 3$, una reciprocidad cúbica; si $\lambda = 4$, una reciprocidad bicuadrática, y así sucesivamente.

> Gauss estableció la ley de reciprocidad cuadrática en las *Disquisitiones* y llegó a publicar hasta seis pruebas diferentes por cuanto dicha ley es el resultado clásico más importante a partir del cual se desarrolla sistemáticamente la teoría de números. Se trata entonces de obtener leyes de reciprocidad de grado superior "por ejemplo, dado un entero k y un número primo p, ¿Qué se puede decir de la resolubilidad de la congruencia $x^4 \equiv k (\text{ mód } p)$? La búsqueda de leyes de reciprocidad, como también el intentar resolver el Último Teorema de Fermat, han dado lugar a un extraordinario auge de dos ramas de la teoría de números: la teoría algebraica de números y la teoría analítica de números" (Gentile, 1985).

Así las cosas, el tema de las leyes de reciprocidad era uno de los principales en la teoría de números durante el siglo XIX y según Kummer, en 1850, el problema abierto más interesante (Haubrich, 1999, cap. 1) (citado por Ferreirós). Otro de los temas que los matemáticos consideraban importantes era el referente al estudio de las formas cuadráticas binarias:

$$ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Al respecto, Lagrange había introducido la noción de formas "equivalentes"; por su parte Gauss al estudiar el tema detenidamente, consideró las clases de formas equivalentes y también definió una "composición" de formas. Es oportuno resaltar que tales formas con dicha "composición", interpretadas en el lenguaje moderno, constituyen un grupo abeliano. Después de la propuesta de Gauss de 1832, algunos de los matemáticos alemanes más importantes tales como Jacobi, Kummer y Eisenstein, intentaron probar leyes de reciprocidad de grado superior. El siguiente paso decisivo lo daría Kummer quien probó, en 1861, la correspondiente ley de reciprocidad para todo primo regular p. Hacia los años 1840 había comenzado a trabajar en el caso cúbico, pero en 1844 encontró el difícil obstáculo de que la reciprocidad cúbica requería del empleo de los números enteros algebraicos del anillo $\mathbb{Z}[\alpha]$, donde α es una raíz de la unidad (es decir $\alpha^\mu = 1$), y fue entonces, cuando Kummer constató que, para el caso general, una descomposición de estos números complejos en factores primos dejaba de ser única, como en el caso ya citado de las dos descomposiciones:

$$6 = 2 \times 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

en la factorización del número 6 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, para lo cual propuso la brillante idea de postular la existencia de los números «primos ideales» *p*, *q*, *r* que no pertenecen al anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, puesto que son simplemente símbolos, que con las condiciones presentadas anteriormente (4.7.1) permiten recuperar el teorema fundamental de descomposición única en factores primos (Ferreirós, 1999).

El mismo Kummer se había manifestado bastante desconcertado al considerar tales números primos ideales que eran solo símbolos y por consiguiente no se tenía certeza de su existencia, pero que al ser asumidos como elementos de $\mathbb{Z}[\alpha]$ satisfacían exactamente las mismas leyes formales, como cualquier elemento de ese anillo (Edwards, 1980) (citado en Ferreirós, 1999). Según Haubrich (1999) (citado por Ferreirós), la manera como fue afrontado este problema, puede atribuirse que tuvo origen en una cierta carencia de rigor en su presentación o quizá en algunos vacíos importantes en sus pruebas. No obstante, lo relevante es que en estos hechos se encuentra, en potencia, la idea germen que llevaría eventualmente a una nueva teoría de números ideales, intentando explicar las propiedades de factorización de números algebraicos en general y de establecer un análogo del teorema fundamental de la teoría de números, también para el caso general.

Es ampliamente conocida la importancia y la vigencia de todos los conceptos referidos en esta temática, tanto en el álgebra moderna como en la teoría de números, razón por la cual resulta conveniente y oportuno, a manera de digresión, mostrar cómo los mismos están articulados en el estado actual de la teoría.

Del álgebra elemental se conoce que el caso de la extracción de la raíz *n*-ésima del elemento unitario 1, (que para abreviar se denominará simplemente unidad), es de particular importancia. Esta raíz tiene n valores, por lo cual se habla de las raíces n-ésimas de la unidad. Todas estas raíces (n-ésimas complejas) vienen dadas por la formula:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

a partir de la cual se observa que: la raíz cuadrada de la unidad tiene dos valores: 1 y -1; la raíz cuártica tiene cuatro valores: 1, -1, i y $-i$; los valores de la raíz cúbica son: 1, w_1, w_2 donde:

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

En una primera generalización, se tiene que *todos los valores de la raíz n-ésima de un número complejo se pueden obtener multiplicando uno de estos valores conjugados por todas las raíces n-ésimas de la unidad*.[28]

Generalizando un poco más, se observa que las raíces n-ésimas de la unidad aparecen relacionadas con los llamados polinomios ciclotómicos. Para definir estos polinomios se utiliza el concepto de raíz n-ésima primitiva de la unidad, cuya definición, en términos elementales, es la siguiente: *la raíz n-ésima de la unidad w es primitiva cuando, y sólo cuando, sus potencias w^k, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$ son diferentes, es decir, si con ellas se agotan todas las raíces n-ésimas de la unidad*. En general: si w es una raíz primitiva n-ésima de la unidad, el número w^k es una raíz primitiva de la unidad cuando, y sólo cuando, k es primo con n.

En términos más generales, dado un número natural n, una raíz n-ésima de la unidad es cualquiera de los n números complejos distintos que son raíces del polinomio $x^n - 1$.[29] Una

[28] Así mismo tanto el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad, como toda potencia de la raíz n-ésima de la unidad y también el número recíproco de la raíz n-ésima de la unidad es una raíz n-ésima de la unidad.

[29] La ecuación $x^n - 1 = 0$ se llama ciclotómica porque sus soluciones están estrechamente relacionadas con la construcción de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo dado.

raíz n-ésima *primitiva* de la unidad w es una raíz n-ésima de la unidad tal que cualquier potencia positiva más pequeña que n no es igual a uno, es decir,

$$w^k \neq 1 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq k < n.$$

Cada raíz n-ésima w de la unidad debe ser k-ésima primitiva para algún k único tal que $1 \leq k \leq n$.

El polinomio $\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - w_i)$, donde las w_i son las raíces n-ésimas de la unidad en $\overline{F}$ y φ es la función "fi"de Euler, es el n-ésimo polinomio ciclotómico sobre el cuerpo F.

Se define el campo de descomposición K de $x^n - 1$ sobre un cuerpo F como la n-ésima extensión ciclotómica de F.

Según esto, el polinomio $x^n - 1$ tiene n ceros diferentes en el campo de descomposición K. Estos n ceros forman un grupo cíclico de orden n. Por otra parte, se conoce que un grupo cíclico de orden n tiene $\varphi(n)$ generadores y para el caso de los polinomios ciclotómicos, de acuerdo con su definición, estos $\varphi(n)$ generadores del grupo cíclico de orden n son exactamente las n-ésimas raíces primitivas de la unidad.

Considerando la definición del n-ésimo polinomio ciclotómico sobre F, dado que un automorfismo del grupo de Galois $G(K/F)$[30] debe permutar las raíces n-ésimas primitivas de la unidad, se tiene que $\Phi_n(x)$ queda fijo bajo todo elemento de $G(K/F)$ considerado como extendido de manera natural hasta $K[x]$. De esta manera, $\Phi_n(x) \in F[x]$. En particular, para el caso $F = \mathbb{Q}$, $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y se puede demostrar que $\Phi_n(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$. En este orden de ideas, si w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, se puede considerar el caso de las extensiones del cuerpo $\mathbb{Q}$ obtenido mediante la agregación o adjunción a $\mathbb{Q}$ de algunas raíces de la unidad, y de esta manera se obtiene $\mathbb{Q}[w]$ que es el cuerpo de descomposición de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. En otras palabras, $\mathbb{Q}[w]$ es el cuerpo ciclotómico obtenido por adjunción a los racionales de raíces primitivas de la unidad. A manera de ejemplo que sintetiza y muestra la

[30] $G(K/F)$ es el grupo de automorfismos del cuerpo K relativos a un subcuerpo F de K.

articulación actual de estos conceptos, se tiene:

Teorema. *El grupo de Galois de la n-ésima extensión ciclotómica de* $\mathbb{Q}$ *tiene* $\varphi(n)$ *elementos y es isomorfo al grupo formado por los enteros positivos menores que n y primos relativos con n bajo la multiplicación módulo n.*

Coroloario. *El grupo de Galois de la* p*-ésima extensión ciclotómica de* $\mathbb{Q}$ *para un primo* p *es cíclico de orden* $p-1$.

Volviendo al tema inicial, el proceso que llevaría a una nueva teoría de números algebraicos no era ni lineal ni continuo (Haubrich, 1999) (citado por Ferreirós). Para Kummer y sus sucesores, los números ideales eran simplemente una herramienta necesaria para la prueba de leyes de reciprocidad de grado superior. Debido a la concepción tradicional de la teoría de números, los números complejos eran considerados todavía con cierta desconfianza y la comprensión de la aritmética de los números algebraicos era muy limitada. En el centro de la atención, en lugar de los números ideales como medios auxiliares o en el de los números algebraicos, estaba la teoría de congruencias, incluyendo leyes de reciprocidad y la teoría de formas cuadráticas binarias, entre otros temas.

Dentro de este contexto solo Kronecker y Dedekind emprendieron el proyecto de desarrollar una teoría general de números enteros algebraicos. Serían estos dos matemáticos quienes, algunos años más tarde, introducirían dos novedades cruciales: la ampliación de la teoría de números a todas las clases de números algebraicos, como Gauss lo había propuesto y además, preocupados por los problemas suscitados por los números ideales, trataron de dar fundamentos satisfactorios a esta teoría. Kummer, hacia 1847, había solucionado el problema de la factorización de los enteros algebraicos ciclotómicos que, en términos modernos, son los enteros de cuerpos ciclotómicos ($\mathbb{Q}(\alpha)$, con $\alpha^{\mu} = 1$). La teoría de Kummer trataba de los números complejos compuestos por raíces de la unidad y números enteros. De acuerdo con Edwards (1980) (citado por Ferreirós), existe evidencia de que Kronecker habría logrado una teoría general antes de 1858, pero él se abstuvo de publicarla y aún de dar indicios de sus métodos hasta 1882 (Edwards, 1980, p. 329-330). La teoría de Kronecker comprende también los casos más generales de cuerpos de funciones algebraicas, estudiados por Dedekind y Weber hacia 1882. Por su parte, Dedekind trabajó en este proyecto en un periodo de 14 años, con algunas interrupciones, hasta que finalmente encontró una generalización satisfactoria en el año de 1870, la cual implicó una ruptura con la tradición e hizo su emergencia con la publicación de la teoría de ideales de 1871.

La problemática de la teoría de números o aritmética superior, en el siglo XIX, presentaba un panorama bastante ambiguo, el tema central de atención lo constituía la teoría de números enteros algebraicos como una generalización de los aportes que Kummer había hecho hasta 1856; en cambio la teoría de las formas cuadráticas binarias pasó a un segundo plano y las leyes de reciprocidad ni siquiera fueron tenidas en cuenta por Dedekind, para quién, en ese momento, el tema sobre el cual gravitaba su atención eran los enteros algebraicos y en especial los conjuntos de números algebraicos como cuerpos y anillos.

La generalización de los trabajos de Kummer, que hacia 1856 se concretaban en el tratamiento de los enteros algebraicos de los cuerpos ciclotómicos, constituía un problema que para Kronecker y Dedekind era de mucho interés y al cual dedicaron sus esfuerzos, pero ya se ha mencionado el grado de dificultad que encerraba el mismo. A pesar de que las concepciones de Kronecker y Dedekind, con respecto a esta materia no sólo eran diferentes sino totalmente opuestas, frente a este problema parece ser que tenían en común ciertas motivaciones que involucraban aún orientaciones de tipo metodológico y una determinada visión de las relaciones entre el álgebra y la teoría de números[31].

La propuesta de Kronecker y Dedekind, como solución al problema mencionado, fue la

[31] Se puede conjeturar que este hecho se debe a la influencia de Dirichlet en ambos matemáticos, los cuál tiene sentido por cuanto, como entusiasta lector de las Disquisitones Arithmeticae, Dirichlet estuvo de acuerdo con la propuesta de Gauss de la extensión del campo de la aritmética, y él siempre hizo énfasis en la fundamentación de la teoría de formas sobre los principios de la teoría de números (Haubrich, 1999) (citado por Ferreirós).

definición: *un número de* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *es entero si es raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros*. En otras palabras, en general e independientemente del subcuerpo de números complejos del que se trate, la definición de número entero en los anteriores términos es válida. Asimismo α es un número entero si es raíz de un polinomio de grado *n*, en el cual el coeficiente de x^n es 1, y los demás coeficientes son enteros. Se supone que el hecho de que, durante la década a partir de 1850, ambos matemáticos estudiaron la teoría de Galois les permitió entrar en contacto y comprender la importancia de la noción de cuerpo dentro de la misma. Por su parte Dedekind analizó la obra de Kummer después de un estudio muy detallado de la teoría de Galois e hizo una lectura correcta desde el punto de vista de los cuerpos de números. De esta manera, Kronecker y Dedekind, llegaron a formular una definición acertada de los números enteros (Sharlau, 1981; Haubrich, 19s99) (citado por Ferreirós, 1999).

Aspectos metodológicos y heurísticos de la teoría de ideales

Después de precisar la conceptualización de los números enteros para el caso general, en términos de cuerpos de números algebraicos, ya se hacía posible también la generalización de la teoría de Kummer. Sin embargo, esto no significa que este paso pudiera llevarse a cabo de manera única. Como es natural, la concepción constructivista de Kronecker lo llevaría a investigar en el sentido de indicar con efectiva precisión los factores ideales. Para Dedekind, en cambio, el punto central de la generalización de la teoría de Kummer no tenía que ver con la generalización misma, sino sobre todo con la metodología, porque su interés era lograr su estructura y, en consecuencia, desde su enfoque conjuntista y abstracto, buscaría establecer una teoría en la cual sus objetos serían determinados conjuntos de números algebraicos y a estos conjuntos, honrando el trabajo pionero de Kummer seguramente, los llamó *ideales*. "Algo de lo cual Kummer estaba demasiado lejos" (Ferreirós, 1999).

Cabe recordar que Kummer había señalado las propiedades que debía tener un número entero algebraico para que fuera divisible por un número ideal, antes que definir con propiedad los números ideales. Para tal efecto proponía el polinomio irreducible

$$F(x) = x^{\mu} - \frac{1}{x} - 1$$

que define al entero ciclotómico α de la ecuación

$$f(\alpha) = \gamma_0 + \gamma_1 \alpha + \cdots + \gamma_{\mu-2} \alpha^{\mu-2}$$

y utilizaba ciertas congruencias para determinar los factores ideales de cualquier número primo $p \in \mathbb{Z}$. Entonces, Dedekind tratando de buscar la generalización de la teoría de Kummer, en un primer intento, entre 1856 y 1862, empezó basándose también en las congruencias de orden superior y alcanzó a avanzar pero sin lograr llegar a la meta deseada. Se mantuvo en la línea de Kummer mientras dependía de la postulación de números primos ideales y se aproximó a la determinación de factores ideales en el caso que tenía que ver con el polinomio irreducible $F(x)$ asociado a cada entero ciclotómico α[32]; pero, nuevamente surgiría un inconveniente, ya que, para el caso general, en cualquier momento se presentarían excepciones a pesar de que fuera posible acometer la descomposición en factores ideales para todo tipo de enteros algebraicos y de esta manera obtener descomposiciones para gran parte de los números enteros [Por este motivo, Dedekind no publicó la teoría que había desarrollado hasta ese momento (1860) (Ferreirós, 1991)]. Es decir, Dedekind se encontró con el caso de cuerpos que contenían números (primos) cuyos factores primos ideales no se podían estudiar utilizando las congruencias de orden superior, y hasta 1862, no había logrado desarrollar una demostración del teorema de factorización que fuera válida para el caso general. Por cuestiones de trabajo (Escuela Politécnica de Zürich, 1858) y por tener que dedicarse a la preparación para la publicación de los trabajos de Gauss, Riemann (1862), lo mismo que la

[32]Los factores primos ideales, para todo primo $p \in \mathbb{Z}$ son esencialmente determinados por ciertas congruencias de orden superior que tienen que hacerse con $F(x)$.

primera edición de las *Vorlesungen* de Dirichlet, Dedekind interrumpió la investigación en la teoría de números algebraicos.

En el año de 1869 emprendió la preparación de la segunda edición de las Vorlesungen de Dirichlet, hecho este que, según Ferreirós, lo animó a intentar nuevamente desarrollar una teoría general de números ideales. Después de retomar el tema y continuar desarrollando el mismo durante un año llegó a convencerse de que el camino que lo llevaría a encontrar una salida satisfactoria al problema, era proponer una nueva formulación de la parte central de la teoría y en lugar de trabajar directamente sobre los números algebraicos y sus propiedades, fiel a su enfoque conjuntista, optó por una reorientación impensada reformulando toda la temática en términos de la teoría de conjuntos, es decir, en términos de conjuntos de números. De esta manera, empieza por presentar la noción de cuerpo, trata además de anillos de enteros, de módulos y, desde luego, de ideales. Esta aparentemente imprevista decisión de Dedekind tendría un efecto definitivo en el álgebra en general y junto con la noción de grupo, las nociones de cuerpo, anillo, módulo e ideal entrarían a formar parte de la base del álgebra moderna.

Para analizar, desde la perspectiva metodológica, las razones por las cuales Dedekind tomó la decisión de dar una reorientación a su trabajo sobre la teoría de ideales y reformular toda la temática correspondiente en términos de conjuntos de números, es conveniente tener en cuenta que Dirichlet, Riemann y Dedekind, siguiendo la línea de Gauss, impulsaron una concepción de las matemáticas fuertemente abstracta que identificó al llamado "*grupo de Götingen*", en contraposición con el enfoque "*constructivista*" de la escuela de Berlín. Dicha concepción se caracterizó por "una fuerte unidad metodológica" (Ferreirós, 1991). Hay que recordar también la influencia de Dirichlet en su trabajo sobre teoría de números y en el planteamiento del "problema de encontrar un desarrollo riguroso de toda la aritmética". De tal manera que su perspectiva metodológica estaba guiada por el enfoque conceptual abstracto y la tendencia por la aritmetización, coherente con “la idea de que el progreso de la matemática depende de la creación de nuevos objetos y nuevas nociones”, a lo cual habría que agregar también “el hecho de haber encontrado la definición conjuntista de ideal, que satisfacía plenamente los requisitos metodológicos a los que venía adhiriéndose desde finales de los años 1850” (Ferreirós, 1991). En consecuencia, la teoría tenía que ser reestructurada a partir de la definición de ideal según su enfoque conjuntista abstracto, abandonando desde luego su primer intento que, entre los años 1856 y 1862, desarrolló basándose en las congruencias de orden superior, respecto a lo cual, el mismo Dedekind expone dos argumentos en los siguientes términos:

> Aunque estas investigaciones me llevaron muy cerca del objetivo que buscaba, con todo no pude decidirme a publicarlas porque la teoría adolecía fundamentalmente de dos imperfecciones. La primera consiste en que la investigación de un dominio de números enteros algebraicos se basa en la consideración de un número determinado y de la ecuación que le corresponde, concebida como congruencia, y en que las definiciones de los números ideales (o más bien, de la divisibilidad por números ideales) que así se obtienen, como consecuencia de esta forma de representación concreta que elegimos, no permiten reconocer de antemano el carácter de *invariancia* que realmente corresponde a esas nociones; la segunda imperfección de esta fundamentación consiste en que a veces aparecen excepciones características que exigen un tratamiento especial. (Dedekind, 1930, vol. 1, p. 202).

En este orden de ideas, Dedekind sostiene que al definir las nociones de cuerpo, entero algebraico e ideal, de manera abstracta, no se requiere de “formas de representación particulares”, sugiriendo así la necesidad de buscar definiciones invariantes[33] de los objetos

[33]Una característica metodológica propia tanto de la matemática moderna como de la matemática actual la constituye la búsqueda de definiciones invariantes de los objetos de la teoría. Este era uno de los conceptos que mostraba las posturas radicalmente opuestas entre Kronecker y Dedekind.

de la teoría.

En cuanto a la segunda objeción por la cual Dedekind abandonó el desarrollo de la teoría de ideales por la vía de las congruencias superiores, el punto de vista que defendía estaba encaminado a la búsqueda de una teoría general, pues consideraba que una teoría es completamente satisfactoria solamente cuando alcanza su máxima generalidad. En este punto se pone en evidencia su diferencia sobre el tema con Kummer, cuyo interés era simplemente el cálculo de los factores primos de los enteros ciclotómicos ya que consideraba su teoría de números ideales como un simple instrumento para aplicarlo en la investigación de las leyes de reciprocidad. Aún más, para Kummer le era indiferente el tener que emplear varios métodos distintos que inclusive pudieran depender del conocimiento de propiedades particulares de la clase concreta de los números que eran objeto de investigación y pensaba además que tal diversidad de casos no sólo era inevitable sino positiva y en consecuencia criticó la teoría de Dedekind por su abstracción y generalidad. Dedekind por su parte, preocupado por los errores que generarían las concepciones de Kummer consideró necesario definir con precisión los ideales y su multiplicación. Esta inquietud la expresó en los siguientes términos:

> Kummer no definió los propios números ideales, sino solo la divisibilidad por estos números. [...] Aunque esta introducción de nuevos números sea totalmente legítima, de todos modos es de temer que, por el modo de expresión elegido al hablar de determinados números ideales y de sus productos, así como por la analogía supuesta con la teoría de los números racionales, se vea uno llevado a conclusiones precipitadas y demostraciones insuficientes, y en efecto este peligro [écueil] no fue evitado completamente. Por otro lado, una definición exacta y que sea común a todos los números ideales que se trata de introducir en el dominio numérico O, y al mismo tiempo una definición general de su multiplicación, parecen tanto más necesarias cuanto que estos números no existen en absoluto en el dominio numérico considerado O. (Dedekind, 1877, p. 268).

En una carta a Lipschitz del 10 de junio de 1876, acerca del problema de la existencia de los números ideales afirma:

> En mi teoría de los números enteros algebraicos nunca se habla de números ideales, sino solo de ideales, es decir, de sistemas de números, todos los cuales disfrutan de la clara luz solar de la existencia real dentro del domino *O*. (Lipschitz, 1876, p. 62) (citado por Ferreirós, 1991).

Además de la necesidad del rigor, como una razón esencial del nuevo enfoque, que esta relacionado también con la desconfianza ante el supuesto de "números" que no existen realmente, surgían problemas referentes a la adecuación de los métodos empleados para alcanzar los objetivos teóricos que se buscaban. Dedekind siempre separó claramente los problemas que tenían que ver con polinomios y ecuaciones algebraicas, de aquellos relacionados con teoría de números, aún cuando reconoció que ambos tipos de problemas estaban íntimamente relacionados. Precisamente el hecho de juntar los temas de teoría de números con otros totalmente ajenos, cuando Kronecker hacía uso del llamado "artificio metódico de los coeficientes indeterminados", al tratar el problema de los factores ideales mediante un rodeo a través de un anillo de polinomios (Edwards, 1980) (citado por Ferreirós, 1991) era la principal crítica que le hacía al punto de vista de Kronecker. En la década de 1890, Dedekind hizo críticas similares contra la orientación de Hurwitz para tratar la teoría de ideales, influenciado en cierta medida por el enfoque de Kronecker (Dedekind, 1930-1932, vol. 2, p. 53) (citado por Ferreirós, 1999).

Dedekind plantea además la exigencia de que cada teoría debe ser desarrollada de manera autónoma, esto es, a partir de sus propios medios característicos, sin recurrir a elementos ajenos tomados de otras teorías; en otras palabras, esta es la forma como él explica lo que significa que cada teoría sea formulada y desarrollada en forma "*pura*". Esta demanda la plantea con frecuencia en sus escritos; en especial, en aquellos que tienen que ver con la fundamentación de la aritmética, manifiesta el requerimiento de que esta debe ser desarrollada a partir de sus propios principios.

Encaminado a satisfacer este requisito de "*pureza*", Dedekind proponía el siguiente método: cada vez que se encontrase un resultado nuevo, que pudiese emplear cualquier tipo de medios auxiliares, se debía hacer el esfuerzo por comprenderlo en un nivel más profundo transformando las demostraciones y simplificándolas hasta identificar aquello que constituye el núcleo que expresa el contenido puro que se halla detrás del primer resultado y de esta manera se lograría aislar el mencionado contenido "puro" que pudiera estar detrás de resultados complejos. Dedekind describió en estos términos la forma en que, por ejemplo, transformó un enfoque de la teoría de ideales algo similar a la de Hurwitz, en la cuarta versión de su teoría de ideales (ver Dedekind, 1930-1932, vol. 2, p. 50-58).

El significado de "puro", en el contexto de la teoría de números, debe entenderse como expresado en términos de números, conjuntos de números y homomorfismos. Esta concepción pone en evidencia que sus investigaciones en este campo siempre estaban orientadas de manera coherente con el punto de vista de la aritmetización, es decir, todos los conceptos o los objetos complejos deben ser genéticamente reducidos a los números naturales. Por otra parte, la teoría debe ser estrictamente deductiva y, por supuesto, las formas auxiliares de representación deben ser reemplazadas por conceptos abstractos. Una reformulación de cualquier resultado preliminar en estos términos debería concluir en definiciones de los conceptos básicos, caracterizando las principales propiedades de los objetos de estudio y, en consecuencia, ofrecerían una base sólida para un desarrollo deductivo de toda la teoría. Una vez logradas las principales definiciones, el esfuerzo final que debiera hacerse estaría encaminado a adaptar, lo más cercana y directamente posible, todos los medios de prueba a aquellas propiedades básicas y al lenguaje. Esencialmente, este era el método que Dedekind aplicó en los casos de grupos, ideales y cortaduras, como también en su trabajo de acuerdo con el enfoque conjuntista.

Dedekind era consciente además, de que estas nuevas condiciones requerirían asumir una postura que estuviera en disposición de aceptar nuevas definiciones, nuevos enfoques teóricos y medios de prueba que la mayoría de matemáticos rechazaría prefiriendo el lenguaje tradicional en el cual habían sido formados. Al respecto, él claramente lo expresa:

> Pero en esto muy pocos me darán la razón; la mayoría considera simple todo aquello que se le ha hecho familiar mecánica e inconscientemente, a través de la práctica de toda una vida, y no considera en absoluto qué larga es a menudo la cadena de pensamientos que entra aquí en juego. (Carta a Frobenius del 8 de febrero de 1895, en Dugac, 1976, p. 283).

"En el caso de los ideales, esto resultó ser una verdadera premonición: aunque aceptaron la noción de ideal como conjunto de números, Hurwitz y Hilbert abandonaron la definición conjuntista-estructural propuesta por Dedekind, a favor de otras elaboradas en términos formalistas que recuerdan a Kronecker. Solo en 1930 con la aparición del Moderne Algebra de van der Waerden, influido decisivamente por Emmy Noether, se recuperó la definición propuesta por Dedekind sesenta años antes" (Ferreirós, 1991).

Estas exigencias metodológicas sobre la reestructuración de las teorías en forma "pura" afectaron el acercamiento de Dedekind a la teoría de los ideales, caso en el cual, en términos de exigencias metodológicas, esta teoría coincide claramente con la construcción del sistema numérico. Dedekind expuso esta relación en la introducción a un artículo suyo, en francés del año 1887, en el cual equipara los ideales con los números reales definidos mediante cortaduras, puesto que en ambos casos, el problema consiste en la introducción de nuevos "elementos aritméticos" (Dedekind, 1887, p. 268-269). Dedekind sintetizó las exigencias comunes, en los cuatro puntos siguientes:

1. "La aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma" (Dedekind, 1872, p. 321), esto

es, debe mantenerse al margen de elementos extraños, ya se trate de la noción de magnitud en el caso de los números reales o del empleo de polinomios en el caso de los ideales.

2. Cuando se introduzcan nuevos elementos, éstos han de definirse por medio de las operaciones y fenómenos dados en los ya conocidos; por ejemplo, la aritmética de $\mathbb{Q}$ y las cortaduras sirven para definir los números reales, de igual modo que la aritmética de $\mathbb{C}$ es la base de las operaciones sobre ideales.

3. La definición de los nuevos elementos debe ser completamente general e invariante: no se deben definir unos números reales como raíces, otros como logaritmos, etc., del mismo modo que no deben emplearse distintos métodos para determinarlos factores ideales (como hacía Kummer).

4. La definición ha de constituir un fundamento sólido para la estructuración deductiva de la teoría; debe permitir la definición de las nuevas operaciones y la demostración de los teoremas pertinentes.

Estos cuatro requisitos básicos operan de la misma manera en el contexto de la teoría de ideales como en la teoría de números reales y en la de los números naturales, ya que justamente fueron concebidos con el propósito de presentar el marco general dentro del cual sería posible fundamentar y desarrollar satisfactoriamente la totalidad de la aritmética, el álgebra y el análisis de aquel momento (Ferreirós, 1991).

La nueva noción teórico-conjuntista de ideal debió ajustarse a la rigurosa metodología establecida por Dedekind sobre la base de sus planteamientos acerca de la teoría de ideales. En realidad, el lenguaje de los conjuntos siempre fue una herramienta fundamental y muy útil que le permitió cumplir todos sus requisitos al tratar de aplicar sus principios en los más diversos contextos; pues, como ya se ha dicho, para Dedekind, las nociones de conjunto y aplicación, como ideas primitivas, formaban parte de la lógica esencial para derivar la matemática. En el siglo XIX los conjuntos fueron concebidos como clases lógicas y, como se sabe, desde el punto de vista lógico, una clase es simplemente el correlato extensional de un concepto. Esta fue entonces la concepción de Dedekind durante mucho tiempo y, a pesar de que parece haber querido abandonarla a cambio de un enfoque abstracto en su obra de 1888, extrañamente, la reconstrucción que Dedekind hace, del proceso que le condujo a la noción conjuntista de ideal, ofrece una diáfana confirmación sobre la manera como se utilizaba esa transición lógica concepto/clase, hasta tal punto de haberse constituido en un apoyo heurístico para la concepción de la teoría[34].

Haciendo referencia al primer enfoque del problema de la factorización de ideales mediante congruencias superiores, Dedekind hace la introducción de su reconstrucción y lo expresa en los siguientes términos:

> No he llegado a la teoría general y sin excepciones [...] más que tras haber abandonado enteramente el antiguo enfoque más formal, y haberlo reemplazado por otro que parte de la concepción fundamental más simple y fija la mirada inmediatamente en el fin. En este enfoque, ya no tengo necesidad de ninguna creación nueva, como la del *número ideal* de Kummer, y basta completamente la consideración del *sistema de números realmente existentes* que llamo un *ideal*. Como la potencia de este concepto reposa en su extrema simplicidad, y como mi deseo es ante todo inspirar confianza en

[34]Se debe tener en cuenta que Dedekind era logicista y que durante el siglo XIX la teoría de clases era fundamental y un punto central para la lógica, como lo confirman las doctrinas de Boole, Peirce, Peano y Schröder; por tales razones, Dedekind no consideró necesaria la justificación de que los conjuntos formaban parte de la lógica, ya que ésta era una de las propuestas tradicionales del logicismo de finales del siglo XIX. Según los planteamientos logicistas, los conceptos desempeñaban un papel clave en la lógica y además, esta escuela, afirmaba la existencia de una relación directa entre conceptos y clases.

Por otra parte el desarrollo del enfoque logicista coincidió con el momento en el cual hacía emergencia la teoría de conjuntos en el panorama de las matemáticas y hacia el año de 1870 aparecieron en Alemania diversas publicaciones en las cuales se utilizaban los conjuntos para fundamentar la noción de número, para desarrollar la teoría de funciones reales, para los avances en el álgebra e inclusive en el campo de la geometría. Aún más, durante el último tercio del siglo XIX, el movimiento logicista defendía la tesis de la reducción de la matemática a la lógica (Ferreirós, 1994).

> esta noción, intentaré desarrollar la serie de ideas que me han conducido a este concepto. (Dedekind, 1877, p. 268).

En la introducción al artículo “Sur la théorie des nombres entiers algébriques”, publicado en 1876/77, describió el camino que lo condujo a formular la teoría de la factorización de enteros algebraicos en términos de ideales. La introducción fue considerada como una descripción histórica del proceso de sus propias reflexiones en las cuales él “escribió cada palabra solo después de la más cuidadosa reflexión” (Lipschitz, 1986, p. 59). Esta descripción es de especial interés ya que muestra sus supuestos implícitos, incluyendo concepciones subyacentes con relación a la noción de conjunto.

Es de notar cómo Dedekind afirma que el enfoque teórico-conjuntista de la teoría de ideales partiendo de la más simple concepción básica, fija la mirada directamente en el fin. Esto puede ser interpretado literalmente como que la concepción fundamental más simple es la noción de conjunto, y los conjuntos llamados ideales se determinan fijando la mirada directamente en la meta de establecer la teoría de la divisibilidad de los enteros de un cuerpo. Estudiando el conjunto de los múltiplos de un entero dado, determina dos propiedades características de este tipo de conjunto y define un ideal, inversamente, condicionado a la satisfacción de esas dos propiedades.

Dedekind deseaba tener una definición precisa y general de todos los factores ideales en consideración, así como una definición general de la multiplicación de los mismos. Este hecho es coherente con sus exigencias metodológicas, pero también fue un resultado de sus experiencias previas con las ideas de Kummer y su primera teoría. No se había dado una definición general de todos los factores primos ideales y el propio Kummer no definió satisfactoriamente el producto de factores ideales, lo cual Dedekind consideró como la causa de algunas deficiencias en sus pruebas (Haubrich, 1999, cap. 2) (citado por Ferreirós). Bajo estas condiciones, tenía la expectativa de que una definición articulada de todos los ideales hiciera posible una prueba general del teorema fundamental, que no se había podido lograr con su primera teoría. En ésta, Dedekind introdujo los factores ideales y definió la divisibilidad de los mismos en conexión con una o más relaciones de congruencia que debían satisfacer o no los enteros algebraicos. Los factores ideales se introducían mediante determinadas relaciones de congruencia que Dedekind entendía como "propiedades" $a, b, c, \ldots$ que pueden poseer o no los números en consideración. Entonces, se tendría una definición explícita de los números ideales y de su multiplicación si: por una parte, fuera posible establecer qué tienen en común todas estas propiedades empleadas para introducir los factores ideales; y por otra, también fuera posible señalar cómo a partir de dos propiedades a, b se deduce una tercera c, de manera que el factor ideal que corresponde a la tercera pueda llamarse producto de los factores correspondientes a las dos primeras (Ferreirós, 1999). En este punto, Dedekind plantea:

> Este problema queda esencialmente simplificado por las reflexiones siguientes. Como tal propiedad característica a no sirve para definir el propio número ideal, sino solo la divisibilidad de los números contenidos en O por un número ideal, se ve uno conducido naturalmente a considerar el conjunto A de todos los números α del domino O que son divisibles por un número ideal determinado; en lo que sigue, llamaré a tal sistema A, para abreviar, un ideal, de manera que a todo número ideal determinado le corresponde un ideal determinado A. Pero como, recíprocamente, la propiedad a, es decir, la divisibilidad de un número α por el número ideal, consiste únicamente en que α pertenece al ideal correspondiente A, en lugar de las propiedades $a, b, c, \ldots$, por medio de las cuales se ha definido la introducción de los números ideales, se podrán considerar los ideales correspondientes $A, B, C, \ldots$, para establecer su carácter común y exclusivo. (Dedekind, 1877, p. 270).

El paso de las propiedades de congruencia hacia el lenguaje de los conjuntos que las satisfacerían, que Dedekind consideró como sugerido de manera natural para el problema en discusión, era bastante extraño y difícil de comprender para sus contemporáneos, siendo éste uno de los motivos por los cuales la teoría de ideales no era generalmente aceptada hasta los años 1890. Lo que hacía que para él este hecho resultara natural, era su familiaridad con los conceptos de la lógica tradicional, según los cuales la transición de una propiedad a una clase era en realidad absolutamente natural, y sobre todo, su confianza en el enfoque teórico conjuntista que sustentaba una concepción lógico-abstracta de las matemáticas. Sin estas consideraciones la relación entre las matemáticas y los conjuntos o cualquier concepción lógica, parecería completamente falta de claridad.

Bajo estas condiciones, Dedekind se vio en la necesidad de encontrar las propiedades que caracterizan el tipo de conjuntos anteriormente mencionados, es decir, una definición general de ideales consistente en condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto de números enteros pudiera ser un ideal, y puesto que el objetivo de la teoría era el de establecer las leyes de divisibilidad para números enteros algebraicos, los números enteros también tuvieron que ser analizados desde la perspectiva de la teoría de conjuntos. Esto lo hizo sin dificultad considerando los llamados «*ideales principales*», los cuales son conjuntos de números enteros que son divisibles por un número entero algebraico dado α. Al estudiar este caso, Dedekind fue capaz de encontrar dos condiciones que juzgó apropiadas para una definición general de ideales. En efecto, el conjunto de los múltiplos de α debe satisfacer las dos condiciones siguientes:

I. *Las sumas y las diferencias de dos números cualesquiera del sistema A son siempre números del mismo sistema A.*

II. *Todo producto de un número del sistema A por un número del sistema O es un número del sistema A.* (Dedekind, 1877, p. 271).

Es decir, todo subconjunto de *O* que cumpla estas dos propiedades, independientemente de que sea o no el conjunto de múltiplos de un entero α, se llamará ideal[35].

De este modo obtuvo una definición invariante y general que estaba basada exclusivamente en la noción de conjunto y en las propiedades aritméticas previamente definidas de los números complejos y que además cumplía las exigencias analizadas anteriormente. Sin embargo, Dedekind, debido a su trabajo de muchos años con números ideales, consideró la necesidad de comprobar si la nueva definición tenía sentido en ese contexto. Esto también se hacia necesario, porque todavía tenia dificultades con los métodos de prueba tomados de su primera teoría y entonces tuvo que demostrar que existía un isomorfismo entre ambos enfoques (Haubrich, 1999, cap. 10) (citado por Ferreirós). Dedekind se esforzó por demostrar, después de muchos intentos fallidos y con grandes dificultades, que cualquier ideal, en el sentido definido anteriormente, era cualquier conjunto de múltiplos de un entero dado (un ideal principal) o un número ideal en el viejo sentido. En realidad, esto corresponde al contenido del “teorema fundamental” que puede ser encontrado en su primera versión de la teoría de 1871. La idea básica de ir de un factor ideal a su ideal correspondiente, sugirió a Dedekind, por primera vez una manera de demostrar el teorema fundamental en toda su generalidad.

Como se puede observar, el punto de vista de la teoría de conjuntos resultó crucial tanto para establecer la nueva definición básica, como para la nueva estrategia de prueba que finalmente satisfizo la demanda de generalidad.

Los ideales cumplieron todas las exigencias planteadas por Dedekind concernientes a definiciones, pruebas y al acercamiento conceptual abstracto a las matemáticas en general. Esta parece haber sido la razón por la cual él tomó partido por el tema y por el enfoque

[35] La definición de ideal que aparece en los actuales libros de álgebra moderna, se expresa prácticamente en los mismos términos: Un subconjunto no vacío U de un anillo conmutativo R, se llama un ideal bilateral de R si: I. cuando $a \in U$ y $b \in U$ entonces $(a-b) \in U$, y II. Para todo $a \in U$ y $r \in R$, tanto ar como ra están en U.

El concepto de *ideal* desempeña, en la teoría de anillos, un papel análogo al que desempeña el concepto de *subgrupo normal* en la teoría de grupos.

conjuntista de la teoría de números algebraicos, a pesar de que aun después de 1870 y no obstante lo novedoso de su acercamiento, esto fue difícil de comprender para sus contemporáneos (Ferreirós, 1999).

Desarrollo y estructuración de la teoría de ideales

Como ya se ha dicho Dedekind y Kronecker consideraban que el punto de partida para lograr la extensión de la teoría de Kummer para anillos de enteros más generales tenía como requisito encontrar la definición correcta de número entero y, en consecuencia, iniciaron el proyecto de desarrollar una teoría general para todas las clases de números algebraicos, en los términos que Gauss lo había propuesto y también trataron de fundamentar satisfactoriamente la teoría de los números ideales. En este sentido, para generalizar los trabajos de Kummer relacionados con el tratamiento de los enteros algebraicos de los cuerpos ciclotómicos, propusieron la definición que precisaba que un número de $\mathbb{Q}(\alpha)$ es entero si es raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros. La generalización de la teoría de Kummer sería posible después de dilucidar el tema de la conceptualización general de los números enteros en términos de cuerpos de números algebraicos. Pero para Dedekind el punto clave de la generalización tenía que ver principalmente con la metodología mediante la cual se lograría estructurar la teoría de los números ideales de acuerdo con el punto de vista conjuntista y abstracto, para lo cual tomó la sorprendente y audaz decisión de reformular el problema en términos de la teoría de conjuntos.

Dedekind manifestaba que entre 1856 y 1862, animado por el trabajo de Kummer en la determinación de factores ideales de cualquier número primo, mediante el uso de ciertas congruencias de orden superior, avanzó considerablemente en su investigación, pese a lo cual no decidió publicar los resultados, por cuanto la teoría obtenida de esa manera la consideró insatisfactoria en dos aspectos: uno de ellos hacía referencia al hecho de que las definiciones de los números ideales, o mejor, la divisibilidad por números ideales "que así se obtienen, como consecuencia de esta forma de representación concreta [...] no permiten reconocer de antemano el carácter de *invariancia* que realmente corresponde a esas nociones[36]" (Dedekind, 1930, vol. 1, p. 202). El otro tenía que ver con la fundamentación misma y consistía "en que a veces aparecen excepciones características que exigen un tratamiento especial" (Dedekind, 1930, vol. 1, p. 202). Entonces, Dedekind afirma que su nueva teoría, es decir, la teoría de ideales, por el contrario, se basa exclusivamente en conceptos como cuerpo, número entero, o ideal, los cuales se pueden definir sin recurrir a representación particular de números. Agrega además que, de esta manera, el primer aspecto insatisfactorio desaparece y, justamente por el carácter extremadamente simple de estos conceptos se muestra que en él las pruebas de las leyes generales de divisibilidad no hacen distinción alguna de caso.

Avigad (2006) afirma que al extender estos desarrollos matemáticos pueden darse resultados favorables o desfavorables. Así cuando un sistema $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ de números enteros, en una extensión finita de números racionales, se considera una base para el anillo de números enteros en ese cuerpo, cada elemento del anillo se puede expresar de manera única como:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_k w_k$$

donde $a_1, \dots, a_{k-1}$ son enteros ordinarios. En este caso, lo favorable sería que cuando un anillo de números enteros en una extensión finita de $\mathbb{Q}$ tiene una base de la forma $\{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{k-1}\}$ para algún elemento θ, la teoría de congruencias superiores de Dedekind

[36] Según Edwards para reformular la teoría de Dedekind de 1871 a la manera de Kummer y generalizarla a cuerpos de números arbitrarios, habría que representar cada factor ideal por un par (ϕ, p) donde p es un número primo que pertenece a $\mathbb{Z}$ y ϕ es un entero del cuerpo K que satisface las dos condiciones:

1. Si ϕ no es congruente con $0 (\text{mód}\, p)$, es decir, ϕ/p no es un entero del cuerpo K.
2. Si α y β son enteros del cuerpo K tales que $\alpha\beta \equiv 0 (\text{mód}\, p)$, entonces o bien $\alpha\beta \equiv 0 (\text{mód}\, p)$ o bien $\beta\alpha \equiv 0 (\text{mód}\, p)$.

Se dice que un entero β de K es divisible μ veces por el factor ideal del caso si $\beta\alpha^\mu \equiv 0 (\text{mód}\, p^\mu)$. Dedekind en lugar de definir un ideal mediante un par representante (ϕ, p), prefirió la definición conjuntista de ideal por ser simple e invariante.

proporciona una generalización de la teoría de los divisores ideales en el sentido de Kummer; pero esto no sucedería cuando cada anillo de números enteros carece de una base de esa forma. En cierto modo, Kummer se podría considerar afortunado por cuanto, excepcionalmente, este es el caso de los números enteros ciclotómicos[37].

Sin embargo, después de analizar otros casos similares se pudo concluir que es posible prescindir completamente de la teoría de las congruencias superiores y considerar representaciones más generales de divisores ideales. En consecuencia, Dedekind establece como criterios importantes para la teoría de divisores ideales, los siguientes:

- Generalidad: en el sentido de que la teoría debe aplicarse a anillos de números enteros más allá de los enteros ordinarios, esto es, a enteros gaussianos, enteros ciclotómicos, y a los anillos de los enteros cuadráticos que eran utilizados por Euler.

- Uniformidad: en cuanto a que la teoría debe abarcar todos estos casos, y, de hecho, una definición de los divisores ideales debe dar cuenta de todos los divisores ideales en un anillo dado de números enteros. Además, tanto como sea posible, las pruebas deben cubrir todas las situaciones uniformemente sin distinción de casos.

- Familiaridad: según la cual el propósito general es restablecer la propiedad de factorización única, tan importante para los números enteros ordinarios, de tal manera que sea posible llevar resultados a los nuevos dominios.

Dedekind demuestra además, a través de todos sus escritos, desde su Habilitation en 1854, que es un profundo conocedor del papel que juegan las definiciones en la estructuración de una teoría. Destaca que, en los dominios extendidos, las operaciones deben mantener su validez en general como la tienen en los dominios restringidos. Esta es una de las exigencias

[37] En general, se puede encontrar siempre el entero algebraico θ tal que $\{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{k-1}\}$ es una base para el cuerpo de los números complejos formado por el sistema de combinaciones lineales de esos elementos usando coeficientes racionales.

ya planteadas anteriormente en el sentido de que al introducir elementos nuevos, en la reestructuración de las teorías en forma "pura", estos deben ser definidos, en forma general e invariante, por medio de las operaciones y fenómenos dados en los ya conocidos. De la misma manera, para la estructuración deductiva de una teoría, la definición debe constituir un fundamento firme que posibilite fijar con exactitud y claridad las nuevas operaciones y la demostración de los teoremas pertinentes.

En el caso de los divisores ideales enfatiza también que estos objetos dentro de un desarrollo teórico se deben identificar con las "cosas", entendiendo por "cosa" todo objeto de pensamiento. Agrega además, que la definición de nuevos objetos debe ser independiente de la manera como se representan y las discusiones que los implican no deben depender de representación particular alguna, de tal manera que una "cosa queda completamente determinada por todo aquello que se puede decir o pensar de ella" (Dedekind, 1998).

Sostiene Avigad que en una segunda versión de la teoría de ideales de Dedekind, que fue publicada entre los años 1876 y 1877, se encuentran por lo menos dos diferencias significativas con relación a la versión de 1871. La primera tiene que ver con el tratamiento de la multiplicación de los divisores ideales. En la presentación de 1871, después de definir la noción de ideal, Dedekind define la divisibilidad de un entero algebraico α por un ideal a, dando a entender que α es un elemento de a. Luego define la divisibilidad de un ideal por otro, en términos como "b divide a", queriendo decir que todo elemento de a es un elemento de b. Sin embargo, sería mucho más natural decir que b divide a siempre que haya otro ideal c tal que "$bc = a$". En el desarrollo de esta etapa, no obstante, Dedekind no puede hacer esto, porque todavía no había definido la multiplicación de ideales. En 1871, el problema de la factorización única se expresó en términos de lo que sería el teorema fundamental que establece que todo ideal es el mínimo común múltiplo de todas las potencias de ideales primos que lo dividen, donde el mínimo común múltiplo de cualquier conjunto finito de ideales es definido como su intersección. La multiplicación de ideales no desempeña papel alguno en la demostración, y solo será definida posteriormente. Aquí entonces se presenta otra diferencia con la versión de 1877, en la cual, la multiplicación de ideales se define mucho antes y juega un papel central en la presentación de la teoría. Este cambio es explicable si se tiene en cuenta, como ya se ha señalado anteriormente, la preocupación de Dedekind por el papel que desempeñan las definiciones en la estructuración de una teoría.

Dedekind publicó la versión final de la teoría de ideales en el año de 1894, en los suplementos de la cuarta edición de las “*Lectures*” de Dirichlet, la cual es notablemente diferente a las versiones anteriores, y en 1895 presentó también una descripción adicional a la versión intermedia realizada en 1887.

Al finalizar la sección anterior se ha dicho que Dedekind obtuvo una definición de ideal invariante y general basada exclusivamente en la noción de conjunto y en las propiedades aritméticas de los números complejos, satisfaciendo así todas las exigencias planteadas con relación a las definiciones, operaciones, pruebas de acuerdo con el enfoque conceptual abstracto de las matemáticas en general.

Continuando el desarrollo del enfoque conjuntista propone las siguientes definiciones: se entiende que un entero α es divisible por β si está contenido en el ideal principal de β, que se denota $O(\beta)$; así mismo si $O(\alpha)$ esta contenido en $O(\beta)$, entonces α es divisible por β. A partir de esta completa analogía que se establece entre la inclusión de ideales y la divisibilidad de números, Dedekind define: un ideal a es divisible por un ideal b si todos los números de a están contenidos en b.

De esta manera la divisibilidad se reduce a una noción puramente conjuntista, y en consecuencia, tiene sentido afirmar que el ideal p es primo solo cuando es divisible por O y por p. Por otra parte, la multiplicación de dos ideales en términos algebraicos estará dada en los siguientes términos: si α toma valores en el ideal a, y β en el ideal b, los productos de la forma $\alpha\beta$ y las sumas de dichos productos formarán también un ideal, llamado el producto de los ideales *a* y *b*, el cual es denotado *ab*.

Dedekind mismo hizo énfasis en que la mayor dificultad que había que superar para la fundación de la teoría de ideales residía en la demostración del teorema:

Teorema. *Si el ideal c es divisible por el ideal a, entonces existe un ideal b y solo uno que satisface la condición* $ab = c$.

Mediante este teorema era posible determinar la relación entre la divisibilidad y la multiplicación de ideales y su demostración fue posible casi al finalizar la teoría. Según Avigad (2006), Dedekind trató de obtener una prueba simple del mismo relacionada directamente con los conceptos de los enteros o una prueba de uno de los tres teoremas siguientes que son de igual importancia para la fundamentación de la teoría:

Teorema. *Cada ideal m, multiplicado por un ideal n, puede ser convertido en un ideal principal.*

Teorema. *Cada módulo finito m, diferente de cero, que consiste ya sea de enteros o de números fraccionarios algebraicos, a través de la multiplicación por un módulo n, cuyos números se forman a partir de los m de manera racional, puede convertirse en un módulo mn, que contiene el número I y consta solo de números enteros.*

Teorema. *A partir de m números algebraicos* μ_r *no todos nulos, se pueden obtener, de manera racional, m números* ν_s*, que satisfacen la ecuación:*

$$\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \cdots + \mu_m\nu_m = I,$$

así como la condición de que todos los m^2 *productos* $\mu_r\nu_s$ *son enteros.*

Vale la pena hacer referencia, en términos modernos a los conceptos de esta bien calificada como la obra maestra de Dedekind para ilustrar sus alcances. En efecto, como ya se ha advertido, los ideales están asociados a los homomorfismos en la teoría de anillos de tal forma que hay una analogía entre la relación que existe de concepto de subgrupo normal con la estructura de grupo y el concepto de ideal con la estructura de anillo. Tal analogía lleva a una construcción, sobre anillos, semejante a la del grupo cociente de un grupo por un subgrupo normal, y, como bien se conoce, estos subgrupos normales, son en último término, núcleos de homomorfismos. De manera más precisa, basta recordar que: si U es un ideal de un anillo A, entonces A/U es un anillo y es una imagen homomorfa de A. Esto es lo que se llama la construcción del *anillo cociente* de un anillo por un ideal, con la cual, se puede trasladar a los anillos los teoremas de homomorfismos de los grupos. Así se tiene el teorema:

Teorema. *Sean A y A' anillos y ϕ un homomorfismo de A sobre A' de núcleo U. Entonces A' es isomorfo a A/U. Además hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales de A' y el conjunto de ideales de A que contienen a U. Esta correspondencia puede obtenerse asociando a cada ideal W' en A' el ideal W de A definido por $W = \{x \in A/\phi(x) \in W'\}$. Con W así definido A/W es isomorfo a A'/W'.*

Por otra parte, puesto que un cuerpo no tiene más imágenes homomórficas que él mismo o el anillo trivial que consiste en el elemento cero, no es posible simplificar un cuerpo por la aplicación de un homomorfismo. Bajo estas consideraciones, las herramientas con las cuales se puede relacionar la estructura de anillo general con la estructura de cuerpo, son los homomorfismos, los ideales y los anillos cociente.

Precisando mejor las cosas, las condiciones según las cuales un cuerpo es la imagen homomorfa de un anillo se especifican en el lema:

Lema. *Si A es un anillo conmutativo con elemento unitario cuyos únicos ideales son (0) y el mismo A, entonces A es un cuerpo.*

Es claro entonces que el enfoque y los aportes de la obra de Dedekind han dejado una profunda huella en las matemáticas y en especial en la matemática moderna.

Capítulo 5

Conclusiones generales

Teniendo en cuenta la diversidad de cuestiones tratadas y referenciadas en este trabajo, el principal propósito de este capítulo es destacar los dos temas centrales relacionados con la *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*, considerando los aportes hechos en la obra de Cantor y la de Dedekind, desde una perspectiva histórico-epistemológica, sin eliminar la posibilidad de dar cabida a algunas ideas que no se han incluído en las discusiones iniciales y que permiten atisbar cómo se amplían los alcances de las nociones de conjunto y estructura en el entramado de la matemática moderna; aunque no sea fácil reunir, en un número muy limitado de epígrafes, temas que tienen innumerables formas de ramificación como sucede con los conceptos fundamentales de las matemáticas, los cuales al articularse unos con otros aumentan considerablemente la diversidad y la complejidad de las relaciones que por tal motivo se generan.

Por lo tanto, al intentar hacer esta especie de síntesis conceptual sobre las principales temáticas desarrolladas a lo largo de la tesis, se trata de evitar la presentación de una imagen de simple yuxtaposición de ideas inconexas, y, por el contrario se procura hallar la historia oculta en las teorías desde cuando empezaron a desarrollarse, sin desconocer ni desdeñar los resultados logrados en el pasado, en concordancia con la unidad histórica de las matemáticas, que se puede ver reflejada en el surgimiento de cada una de sus nociones y teorías, a pesar de que estas se caractericen por elevados niveles de abstracción y de generalidad.

Por otra parte, es importante mostrar que las estructuras matemáticas conocidas no son construcciones inmutables, ni entes acabados, ni en su número, ni en su esencia, puesto que su vitalidad depende de la fecundidad de los axiomas que las definen y de los nuevos axiomas y combinaciones de axiomas que surgen al relacionarse entre si, razón por la cual no es posible anticipar que fácilmente se agoten todas las consecuencias que se pueden extraer de los axiomas.

Rigor y axiomatización

El rigor matemático no es ni casual ni arbitrario; es de naturaleza profundamente histórica. Es decir, ha evolucionado con el desarrollo de las matemáticas. Además, las exigencias de rigorización tienen que ver en cada momento con las ideas acerca de los objetos matemáticos a los que se haga referencia. En este sentido, el desarrollo riguroso del análisis, por ejemplo, requirió de la elaboración de una teoría de los números reales, precisando sobre todo lo que tenía que ver con la continuidad, ya que las tradicionales relaciones con la noción de magnitud, que conducían a supuestos que no se expresaban formalmente, habían sido un obstáculo para lograr una teoría satisfactoria de tales números.

La común influencia de Riemann sobre Cantor y Dedekind explica que haya una gran coincidencia en los trabajos de estos dos matemáticos, especialmente en cuanto a la relación entre aritmética y geometría; puesto que los dos destacaron el requerimiento en la geometría de un axioma que garantizara la continuidad del espacio y la posibilidad de construir el continuo numérico en la aritmética. Debido a las implicaciones que tenía el continuo geométrico, el concepto de número real no se había podido elaborar de manera clara. Para esclarecer el concepto de continuo matemático había que cubrir el vacío que constituía el concepto de número irracional. Weierstrass, Dedekind, Meray y Cantor, independientemente y con métodos distintos, emprendieron esta obra que conduciría a dilucidar en forma definitiva el concepto de continuo matemático. Weierstrass mediante series finitas o infinitas, Dedekind con las cortaduras y Meray y Cantor con sucesiones racionales monótonas convergentes.

Después de construidos los números reales a partir de los racionales, el rigor y la construcción de los primeros quedaba sustentado en los segundos y estos a su vez en los números naturales. De acuerdo con la concepción de Weierstrass y su escuela, todo el análisis que requería fundamentalmente el empleo de desigualdades y, por consiguiente, la variación sobre el cuerpo de los números reales, se apoyaba en la aritmética del número natural. Kronecker planteaba la exigencia de que "es necesario que todos los resultados de la más profunda investigación matemática sean expresables en las sencillas formas de las propiedades de los números naturales".

En estos términos, el rigor en el análisis se alcanzaría al culminar la aritmetización y la matemática quedaría fundamentada en el número natural, pero este, en último término se apoyaría en la intuición o en un componente extra matemático como lo sugería Kronecker ("Dios créo los números naturales, el resto lo hizo el hombre"). Sin embargo, la intuición también debía ser eliminada por los mismos motivos que lo había sido en los demás campos de la matemática. Pero para que se de esa eliminación sería necesario sustituirla por algún otro elemento o justificarla de alguna otra manera y en este caso la aritmetización llegaría a un punto sin salida; no obstante, Dedekind en una carta a Lipschitz del 27 de julio de 1897 afirmaba:

> Un infalible método para el análisis (de todas las suposiciones explícitas o tácitas) [...] es reemplazar todas las expresiones nuevas por términos arbitrarios carentes de sentido, si está bien construido el edificio no debe ser modificado, y afirmo que, por

ejemplo, mi teoría de los números reales aguanta la prueba.

Lo que quiere decir Dedekind es que ha empleado implícitamente lo que más adelante sería el método axiomático.

Durante los últimos tres cuartos del siglo XIX, iniciando con Ohm en Alemania y Peacock en Inglaterra, dice Ferreirós, que es posible observar una pequeña tendencia de desarrollos que gradualmente fueron preparando la emergencia de una mentalidad axiomática. Estos autores desistieron de atenerse a asunciones empíricas con relación a los objetos matemáticos e intentaron desarrollos puramente deductivos de sus teorías, basándose en el análisis cuidadoso de los supuestos implicados. Esta preparación gradual, desde luego, estaba todavía muy lejos de las axiomáticas del siglo XX, caracterizadas por el énfasis en la libertad de constituir sistemas axiomáticos consistentes, puesto que aún la noción misma de axioma debía desarrollarse y evolucionar en el proceso. En las primeras etapas del desarrollo, una aproximación axiomática se veía simplemente como un juego simbólico, a pesar de que los miembros de la escuela británica si alcanzaron a distinguir, al tratar con sistemas abstractos de leyes algebraicas, entre condiciones formales e interpretaciones. Sin embargo, la idea de que una generalización puramente formal pudiera tener sentido y ser aceptable con miras a una posterior interpretación era el punto más difícil de comprender, como lo confirma la expresión de De Morgan cuando afirmaba que el álgebra simbólica parecía "a primera vista [...] algo así como un asunto de símbolos hechizados, dando vueltas al mundo en busca de un significado". Aunque su metodología explícita puso mayor énfasis sobre otros puntos, autores pertenecientes a la tradición británica del álgebra simbólica siempre dedicaron esmerada atención a la posibilidad de dar interesantes interpretaciones matemáticas para sus sistemas abstractos de leyes. En los libros de Peacock y sus seguidores se encuentran ejemplos de interpretaciones, y De Morgan llegó aún a distinguir dos partes fundamentales del álgebra. Llama "álgebra teórica" a la parte que trata de los símbolos y sus leyes formales de combinación, y “álgebra lógica” a la parte que estudia el método de interpretación del álgebra teórica. Análogas consideraciones se aplicaron a desarrollos de este tipo en Alemania, como es el caso del programa adelantado por Martin Ohm, en el cual, según dice Ferreirós, estaría el origen de las exigencias de rigor de aquella época. Este programa estaba “formulado de la manera más general en términos de fundamentar la aritmética, el álgebra y el análisis exclusivamente sobre la noción de número natural”, (Ferreirós, 1991, pp. 143-144). Agrega además, que Ohm, al considerar los números naturales como algo dado, presentó las operaciones básicas en relación con el significado intuitivo de los números y de ahí dedujo una serie de ecuaciones fundamentales. De esta manera se establecían las bases para desarrollos futuros; siendo el interés de Ohm, ante todo, “la extensión rigurosa del dominio numérico y de las definiciones de la igualdad y las operaciones”[1]. Con relación a este tema, Ferreirós sostiene que Weierstrass y Dedekind hicieron planteamientos básicos esencialmente idénticos a los de Ohm, por lo que se supone hubo una influencia directa. Posteriormente los sucesores de Ohm abandonaron su punto de vista y se ajustaron al desarrollo del análisis de acuerdo con la concepción de Cauchy, lo cual condujo poco a poco a desviaciones relacionadas con la manera de desarrollar la construcción.

Pero el verdadero problema que no permitía proponer en abstracto un sistema de objetos con determinadas características, consistía en que no era posible asegurar la existencia real de un sistema con tales condiciones que no diera lugar a contradicciones; en términos modernos, esto significa que no se podía garantizar la consistencia del sistema. En el siglo XIX, la construcción de un modelo era la única manera de demostrar la consistencia de un sistema, pero en sus comienzos los métodos para la construcción de modelos eran muy limitados, por cuanto los recursos disponibles para dichas construcciones o interpretaciones estuvieron restringidos a las interpretaciones aritméticas o geométricas. En estos momentos el

[1]El interés por realizar esta extensión estaba motivado en la exigencia de que las operaciones indirectas o inversas de sustracción, división y radicación fueran válidas en general, de la misma manera que las directas.

surgimiento de la teoría de conjuntos y de una noción abstracta de estructura serían cruciales para atenuar estas limitaciones, y la construcción del sistema de los números reales constituyó uno de los ejemplos pioneros del uso de medios teórico-conjuntistas para la construcción de modelos.

Se puede concluir entonces, siguiendo a Ferreirós, que hacia 1870 no existían medios para elaborar modelos de un sistema axiomático para la recta real y, en consecuencia, una formulación de un sistema con tales condiciones resultaría arbitraria y poco rigurosa. En este caso las teorías de Weierstrass, Dedekind, Cantor y Meray se podían considerar como modelos de los números reales elaborados sobre la base de los números racionales y en tal sentido desempeñaron un papel esencial en la elaboración de las condiciones necesarias que hicieron posible un planteamiento axiomático.

Hay que recordar que Cantor y Dedekind, quienes coincidían notablemente en las discusiones sobre la relación entre aritmética y geometría, como resultado de sus investigaciones, lograron poner en claro la necesidad de un axioma de continuidad o completitud, para asegurar la continuidad del espacio, mientras que en aritmética era posible construir el continuo numérico. Este axioma se constituía en un requisito indispensable para poder llevar a cabo una axiomatización adecuada de los números reales.

Tenía que darse previamente una experiencia y una discusión muy amplia como la que se dio, en la elaboración de modelos, por una parte y por otra, habría que contar con que la teoría de conjuntos estuviera disponible, incrementando así considerablemente la flexibilidad de las herramientas matemáticas apropiadas para elaborarlos. De esta manera se hizo posible, finalmente, proponer tratamientos estrictamente axiomáticos.[2]

A pesar de que el programa de Ohm conducía de manera natural a una construcción más o menos satisfactoria de los enteros y los racionales; en cuanto al problema relacionado

[2] Ferreirós afirma que no conoce de algún historiador que haya indicado la influencia de este tipo de factores en el desarrollo del enfoque axiomático.

con las nuevas dificultades que traían consigo los números reales, Ferreirós observa que, en Alemania, quienes tenían el mérito de haber logrado superar estas dificultades de principio fueron Weierstrass y Dedekind, quienes hacia 1860 utilizando métodos distintos, en correspondencia con sus concepciones fundamentales, desarrollaron teorías independientes. El enfoque de Cantor podía ser considerado todavía como una reformulación de la teoría de Weierstrass, destacable por sus habilidades técnicas, por su correcta adaptación a las necesidades prácticas del análisis y apto para la generalización.

De esta manera se puede concluir que un sistema de axiomas para los números reales no habría sido considerado como una solución al problema que los matemáticos afrontaban alrededor de 1870, ya que tal sistema sólo habría tenido el significado de un artificio formalístico arbitrario. En consecuencia, los modelos, que para los números reales, fueron elaborados sobre la base de los racionales, jugaron un papel históricamente clave en la preparación de la mentalidad axiomática moderna, poniendo en evidencia las propiedades fundamentales que se requerían para lograr axiomatizar el sistema de los números reales. Sólo después de que fueron formulados esos modelos y con el moderno enfoque conjuntista como fundamento, le fue posible a Hilbert avanzar hacia el punto de vista axiomático propio del siglo XX.

En opinión de Ferreirós, el surgimiento de las axiomáticas no puede ser visto como un desarrollo directo de aproximaciones formalísticas, lo cual es tan incorrecto y anacrónico como considerar el álgebra simbólica británica también como el resultado de un movimiento puramente formalístico. Sin embargo, en matemáticas, siempre está presente la propensión a hacer este tipo de simplificaciones apresuradas, que reflejan visiones simplistas y lineales al margen del conocimiento del desarrollo histórico de los conceptos y teorías.

Es ampliamente conocido que la noción de conjunto surgió dentro del panorama de las matemáticas, inaugurando la era de la matemática moderna; su desarrollo ha sido estudiado extensamente, en especial relacionado con la obra de Cantor. Al estudiar esta temática, en su obra “El nacimiento de la teoría de conjuntos 1854-1908”, Ferreirós considera la conveniencia de distinguir entre: teoría abstracta de conjuntos, que hace referencia a la teoría de conjuntos como objeto de investigaciones autónomas y enfoque conjuntista cuando se trata de la teoría de conjuntos como herramienta fundamental o lenguaje básico de la matemática. Hecha esta distinción destaca la gran importancia que ha tenido el enfoque conjuntista en el siglo XX como elemento unificador y sistematizador de la matemática moderna, razón por la cual se desarrollan estas conclusiones, referidas a los aportes de Cantor y Dedekind, en el sentido de la tesis, enmarcadas en dicho enfoque conjuntista.

Fundamentación de la matemática en el enfoque conjuntista de Dedekind

Dedekind planteaba además de una exposición rigurosa y satisfactoria de los números reales, su convicción de fundamentar la matemática y la teoría de conjuntos en términos de conjuntos y aplicaciones. En su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?*, de 1888, Dedekind proponía las bases de toda una concepción de la matemática pura, capaz de abarcar la aritmética, el álgebra y el análisis, tomando como fundamento la teoría de conjuntos. Según el enfoque de Dedekind, el marco general en el cual fundamentaba la matemática eran las nociones de aplicación y conjunto. En otras palabras, tenía la convicción de que la aritmética, el álgebra y el análisis se podían desarrollar utilizando únicamente esas dos nociones elementales.

Ferreirós sostiene que parece más correcto leer dicha obra como un libro sobre teoría de conjuntos, antes que como un tratado acerca de números naturales, aunque “la formación de un planteamiento conjuntista de la matemática es, en su caso, algo muy anterior a la aparición de cualquiera de estos escritos”. Afirma que el hecho de que en 1871, un año antes de la aparición de su escrito *Continuidad y números irracionales*, Dedekind haya propuesto un tratamiento conjuntista-estructural de la teoría de números algebraicos, indicando que ese planteamiento era también correcto en álgebra, permitía entender claramente dicha situación. Esto constituía un cambio revolucionario mediante el cual se alejaba de manera radical de la práctica establecida en su tiempo.

Tomando como fundamento la noción de conjunto, estableció la teoría de números algebraicos sobre la base de la noción de ideal. De esta manera Dedekind se constituyó en el primer matemático que introdujo las nociones de cuerpo, anillo, ideal, subgrupos, subcuerpos, etc.; en otras palabras, los conjuntos dotados de una estructura que caracterizan el álgebra moderna. Posteriormente, continuando esta misma orientación, desarrolló sus trabajos encaminados a la profundización en temas relacionados con los números algebraicos adentrándose además en la teoría de funciones algebraicas.

Al finalizar los años 1850 Dedekind empezó a utilizar las nociones de conjunto y aplicación en sus trabajos relacionados con el álgebra, y posteriormente se dedicó a aplicar estas nociones al estudio de los fundamentos del concepto de número.

Una característica notable del trabajo matemático de Dedekind es el hecho de que al mismo tiempo que se centraba en la solución de los problemas concretos de cada caso, siempre estaba atento a las cuestiones concernientes a los fundamentos. Como ejemplo justo de los resultados de tal concepción y de esta precisa metodología en la investigación, su teoría de números algebraicos mantiene una estricta coherencia con su concepción sobre los fundamentos, y en el mismo sentido se puede hablar en el caso de su enfoque de la teoría de Galois, o de las funciones algebraicas, o de los principios del análisis, o de los temas que desarrolló sobre topología. Por tales razones, para poder entender, de manera adecuada, su enfoque sobre el sistema numérico, es necesario tener en cuenta, al mismo tiempo, cómo se articulaban en ella las partes superiores de la matemática.

Entre los objetivos que se esforzó por alcanzar en su obra está el de crear un marco, con base en las nociones de aplicación y de conjunto, que fuera competente y apropiado para abarcar toda la matemática clásica, sustentado en el rigor deductivo. Así por ejemplo, al desarrollar sus ideas sobre el sistema numérico, nunca perdió de vista los requerimientos del análisis y del álgebra de su tiempo.

Las anteriores consideraciones permiten entender el sentido de la afirmación de que Dedekind es el principal precursor de Bourbaki. Es oportuno entonces recordar aquí lo que al respecto se ha dicho al comienzo de la tesis, con relación al propósito central de la obra de Bourbaki, la cual tenía que ver básicamente con aspectos tales como: poner de manifiesto los principios de un lenguaje formalizado único, indicando a su vez cómo se podría redactar en dicho lenguaje la teoría de conjuntos y luego, dado que cada una de las ramas de la matemática se puede exponer en términos de la teoría de conjuntos, mostrar la forma de inserción de estas diversas ramas en dicha teoría.

En la mencionada obra de 1888, Dedekind mostró la manera de definir el conjunto de los números naturales y su estructura empleando únicamente conjuntos y aplicaciones. Para tal efecto estableció las operaciones sobre los números naturales utilizando el principio de inducción y definiciones recursivas. La base de este enfoque era la función sucesor concebida como una aplicación $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. De acuerdo con el enfoque de Dedekind, afirma Ferreirós, que las herramientas que surgieron en los años 1850, en el campo del álgebra, habían demostrado ser lo único esencial para fundamentar el sistema numérico, al concebir la matemática básicamente como teoría de los números, junto con sus operaciones y funciones, quedando así fundada en la lógica. Para resolver el problema de establecer el principio de inducción sobre una base sólida propone la noción de cadena. Ferreirós considera que mediante esos elementos teóricos, Dedekind pudo dar una caracterización abstracta de los números naturales, la cual es equivalente a los axiomas de Peano y observa además que influyó en este autor. Sostiene también que resulta altamente probable que el conocimiento de las ideas de Dedekind en 1882 tuviera una influencia heurística en el desarrollo de la idea cantoriana de ordinal transfinito y que, de la misma manera, condicionó el giro de Cantor hacia la concepción de la teoría de conjuntos como fundamento de la matemática. En consecuencia, el aporte de Dedekind a la teoría de conjuntos es muy significativo y el sistema deductivo que erigió se constituyó en un modelo para futuras axiomatizaciones como la propuesta por Hilbert.

Por lo que se ha dicho, se reconoce la obra de Dedekind de 1888 como uno de los principales aportes que impulsaron la concepción logicista de las matemáticas, pero sobre todo por su influencia en el desarrollo de la concepción axiomática de Hilbert para quien el método axiomático estaba enmarcado en el propósito esencial de la concepción abstracta de la axiomática que emergió al finalizar el siglo XIX y que definitivamente acogió como propia la matemática moderna. Valga la oportunidad de recordar aquí las palabras de Dieudonné:

> "Más que por sus geniales descubrimientos, es quizá por el sesgo de su espíritu que Hilbert ha ejercido la más profunda influencia en el medio matemático: él enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente, es decir, a tratar de reducir cada teoría a su esquema lógico más estricto, desembarazado de la técnica contingente del cálculo" (Dieudonné, 1962, p. 318).

El enfoque conjuntista-estructural de Dedekind en el álgebra

El origen de una visión conjuntista del álgebra se configuró a partir de la concepción conjuntista de los objetos básicos del álgebra, la aceptación del infinito actual, la visión abstracta de la noción de grupo y el surgimiento de la noción de aplicación, que Dedekind llamó “*sustitución*”, elementos estos que se conjugaban y hacían presencia en su obra desde 1850, de tal manera que, hacia la década de 1860 había logrado trazar los rasgos básicos correspondientes a un enfoque conjuntista de la matemática pura.

En 1871, Dedekind publica, en un apéndice a las lecciones sobre teoría de números de Dirichlet, su teoría de números algebraicos o teoría de ideales. Al respecto, Ferreirós comenta que Dedekind presenta una reorientación de su trabajo en este campo que al final afectaría al álgebra en general. Esta reorientación es considerada brusca por cuanto en lugar de trabajar directamente sobre los números algebraicos y sus propiedades, Dedekind reformula todo el tema en términos de conjuntos de números. En este sentido, empezó presentando las nociones de cuerpo, anillo de enteros, módulos e ideales que, junto con la noción de grupo, constituirán la base del álgebra moderna.

De acuerdo con el enfoque conjuntista reformula todo el problema de la factorización de enteros algebraicos en términos de la teoría de conjuntos. Según Dedekind, un ideal es un conjunto de enteros que es cerrado para las operaciones de suma y diferencia y también para el producto de sus elementos por enteros del cuerpo correspondiente. Para resolver el problema básico de la factorización de enteros algebraicos define las nociones de producto de ideales e ideal primo, demostrando que, dado un cuerpo cualquiera de números algebraicos, todo ideal admite una única descomposición como producto de ideales primos.

Esta manera de plantear los temas era totalmente desconocida por los matemáticos de aquella época, aún tratándose del álgebra. Para entender la manera cómo llegó a esta reformulación es necesario tener en cuenta que hacia los años 1850, Dedekind asistió a las clases de Riemann y desarrolló sus primeros trabajos originales en álgebra y en fundamentos de la aritmética. En las lecciones sobre álgebra que imparte en Göttingen, Dedekind presenta la teoría de Galois en una versión muy moderna, analizando las interacciones entre lo que hoy se denominan los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio. Entonces surgió la idea original y moderna de que la teoría se relacionaba esencialmente con extensiones de cuerpos. Como consecuencia de este hecho Dedekind llegó a considerar la noción de cuerpo como básica para el álgebra, y en este sentido la presentó en 1871. Hacia 1850, Dedekind realizó además algunos estudios sobre teoría abstracta de grupos, utilizando las nociones de isomorfismo y homomorfismo y también trabajó con clases infinitas de polinomios. Es así como se familiarizó con el lenguaje conjuntista tanto en el contexto del álgebra, como en el de los fundamentos de la aritmética, por cuanto la misma definición de los números reales mediante cortaduras, que es de 1858 hace parte de ese lenguaje, ya que se trata de clases infinitas de números racionales con una cierta estructura de orden. No obstante, advierte Ferreirós, que hasta este momento Dedekind todavía no había visto la conveniencia de utilizar ideas conjuntistas en la teoría de números algebraicos. En cambio, la familiaridad con la noción de cuerpo le había permitido considerar el concepto adecuado de entero algebraico sin el cual no era posible resolver satisfactoriamente el problema de la factorización. Inicialmente, siguiendo la tradición, abordó el enfoque de Kummer y trató de resolverlo empleando congruencias superiores que implicaban dar un rodeo a través de un anillo de polinomios; pero debido a que para el caso general aparecían siempre excepciones que impedían encontrar, de esta manera, una solución completamente general y además porque tal enfoque se oponía a su preferencia por una aproximación conceptual a los problemas matemáticos, abandonó el enfoque de congruencias cercano a Kummer y optó por formular todo el problema en términos de conjuntos de números. Fue así como hacia 1870 logró proponer una definición de ideal como solución general que además evitaba tener que considerar polinomios y congruencias. Esta definición de ideal es la que se utiliza hoy en el álgebra y Dedekind la propuso en los siguientes términos:

> Un ideal es un conjunto A de números enteros del cuerpo K que satisface dos

> propiedades fundamentales: (1) Las sumas y diferencias de dos números de *A* son siempre números contenidos en *A*, y (2) Todo producto de un número de *A* por un entero cualquiera de *K* es de nuevo un número de *A*. (Dedekind, 1930, vol. 3, p. 251).

En consecuencia, todo podía realizarse en términos de números y conjuntos de números, es decir, de una forma que Dedekind denomina "puramente aritmética". En este sentido, por razones matemáticas y metodológicas, la teoría se reformuló en términos conjuntistas.

El enfoque conjuntista se manifestaba entonces, del modo más explícito, en una teoría como la de ideales, con lo cual se reformulaba todo el problema de la factorización de enteros algebraicos en términos conjuntistas, mostrando claramente la importancia que tendría la concepción conjuntista en el álgebra.

Junto con estos problemas aparecen los requisitos metodológicos que imponía Dedekind en sus trabajos aritméticos, tanto si fueran elementales o trataran de ideales. Tales requisitos se sintetizan en una concepción estricta de la estructura deductiva de las teorías matemáticas, que implica una nueva concepción de las definiciones. Los requisitos metodológicos que exigía Dedekind, recuerda Ferreirós, se referían exclusivamente a la manera como deben definirse las nociones fundamentales de una teoría y como debe realizarse el desarrollo deductivo de la misma. Las exigencias comunes son, en síntesis, del siguiente tipo: (1) pureza y simplicidad en el desarrollo, (2) carácter constructivo de las nuevas definiciones con respecto a las nociones y operaciones propuestas, (3) generalidad e invariancia de las nuevas nociones, y (4) integración plena de las definiciones en la estructura deductiva de la teoría (Ferreirós, 1991, p. 136).

Desde cuando Dedekind logró formular su teoría de ideales en estos términos, se declaró convencido defensor del uso del lenguaje conjuntista en matemática pura y, observa Ferreirós, que toda su vida trabajó en sistematizar y reformular las nociones clave de la aritmética, el álgebra y el análisis desde ese punto de vista. Dice también que en años posteriores continuó perfeccionando su teoría de ideales y, en la última versión de 1894, incluyó una discusión detallada de la teoría de Galois presentada en términos del grupo de automorfismos del cuerpo de descomposición. En cierto sentido, cerró el círculo de sus reflexiones sobre las relaciones íntimas entre álgebra, teoría de números y conjuntos.

Este hecho de gran importancia en la obra de Dedekind se ha procurado destacarlo, en la subsección 4.7.2, explicando, desde el estado actual de la teoría, la red de conceptos tales como: raíces n-ésimas de la unidad, raíces primitivas, grupos cíclicos de orden n, representación irreducible de un grupo de este tipo, polinomios ciclotómicos irreducibles, obtención del cuerpo ciclotómico por adjunción a los racionales de raíces primitivas de la unidad. El sentido de esta explicación está en considerar que si se fija en el momento oportuno, se delimita la red de conceptos fundamentales con su significado actual en la teoría, entonces se da transparencia al esclarecimiento de los acontecimientos que dieron lugar a la introducción de los conceptos en cada nodo y las relaciones de los eslabones.

Hay que advertir, desde luego, que en el fondo de estas consideraciones hay una concepción filosófica de la historia que plantea que el formalismo matemático permite aclarar la manera como se concretó la búsqueda de objetividad en la historia. La organización simple de los conceptos en la presentación axiomática permite entender en lo esencial el devenir de las ideas y conceptos, al menos en los momentos cruciales de “normalización” de la teoría y de constitución de sus principales objetos matemáticos. Después de fijar la red de conceptos en la teoría “normal”, se retoma la narración histórica. De esta manera, cada una de las etapas de la narración histórica va integrando, en un mismo horizonte, distintos acontecimientos que de otra manera podrían aparecer caóticos y contingentes, sin responder a una necesidad.

La fundamentación de la matemática y el planteamiento conjuntista abstracto de Cantor

El planteamiento conjuntista abstracto y el tema del infinito suponían indudables rupturas con las ideas tradicionales de la época tanto en las ciencias como en las matemáticas, y puesto que la teoría de conjuntos implicaba una nueva concepción sobre los objetos básicos de la matemática, naturalmente se relacionaba con nuevas concepciones sobre sus fundamentos y de la misma manera el tema del infinito que, como bien se conoce, estuvo estrechamente ligado con el desarrollo de dicha teoría. En este mismo sentido, las concepciones de Cantor, al respecto, suponían también una ruptura de grandes dimensiones. Haciendo referencia al infinito actual, Ferreirós sostiene que este concepto era aceptado por un grupo significativo de matemáticos alemanes de finales del siglo XVIII y del siglo XIX como Schultz y Bolzano quienes precedieron en el estudio del tema a Dedekind, Frege y Cantor. Observa también que la aceptación de constructos geométricos en el infinito fue una característica de la teoría de funciones complejas de Riemann, siguiendo el modelo de la geometría proyectiva que justamente constituía una profunda ruptura con la tradición, que en el caso de Steiner estaba asociado a la aceptación del infinito actual ya que este introdujo un lenguaje que anticipaba las nociones de conjunto infinito y de aplicación al mostrar la utilidad de tales planteamientos en geometría. Steiner, agrega, influyó en su alumno Riemann y también en Dedekind y Cantor.

En cuanto al tema de la introducción del infinito actual en matemáticas, recuerda Ferreirós, que el infinito ya estaba presente desde hace mucho tiempo en forma implícita, en la medida en que existían concepciones no constructivas de la geometría, de la aritmética y especialmente del análisis; en consecuencia, las innovaciones de la teoría de conjuntos sólo suponían una explicitación de algo preexistente. Kronecker y Weierstrass como defensores de la tendencia a los enfoques constructivos, basada en un plan para estructurar rigurosamente la matemática mediante una aritmetización radical, especialmente en el análisis, se oponían a la tendencia abstracta, en forma más extrema en el caso de Kronecker que en el de Weierstrass.

Ferreirós, llama la atención sobre el cambio progresivo que experimentó Cantor hacia el planteamiento abstracto, propio de Göttingen, que defendían Riemann y Dedekind y lo plantea como un argumento a favor de la explicación de que dicho cambio se debió a la influencia de Riemann y Dedekind.

Las nociones topológicas

Con sus nociones de teoría abstracta y topología de conjuntos, Cantor contribuyó notablemente tanto a la fundamentación de la noción de variedad como a la caracterización de las propiedades de las variedades discretas y continuas de Riemann y específicamente sus investigaciones de 1877 pusieron en discusión la noción de dimensión.

A partir de las investigaciones conjuntistas de Cantor sobre los números reales surgió la idea de cardinalidad de un conjunto, que se convirtió en el principal estímulo para su trabajo en la teoría de conjuntos. Así mismo, Cantor y Dedekind, por una parte, pusieron en claro la necesidad de un axioma de continuidad, requisito indispensable para poder axiomatizar de manera adecuada los números reales y, por otra, coincidieron, como reflejo de la común influencia de Riemann, en la discusión sobre la relación entre aritmética y geometría, destacando que ésta necesitaba de un axioma para garantizar la continuidad, en tanto que en aritmética era posible construir el continuo numérico. A partir de las nociones de punto de acumulación, del principio y el teorema de Bolzano-Weierstrass, Cantor presentó, en 1872, la idea de conjunto derivado, que constituyó un avance decisivo en la teoría de conjuntos de puntos, y uno de los orígenes de la teoría de conjuntos transfinitos.

En cuanto a la teoría topológica de conjuntos, Cantor, aunque no de manera exclusiva, realizó gran parte de las contribuciones fundamentales como: la noción de conjunto derivado y sus diversas ramificaciones, conjuntos de primera especie, conjuntos aislados, perfectos, cerrados, densos, punto interior y conjunto abierto, nociones estas que resultarían de interés para la teoría de funciones, como en las aplicaciones para el caso complejo hechas por Mittag-Leffler y Poincaré. Posteriormente Cantor, lo mismo que Stolz y Harnack, definieron de varias maneras la noción de contenido que fue antecesora de la noción de medida.

Ferreirós comenta como peculiaridad de la teoría de conjuntos de Cantor, que a pesar de que sus nociones encontrarían aplicación en diversas ramas de la matemática, la motivación por la que fueron desarrolladas no se explica por ningún problema de investigación abierto en análisis, ni en ninguna otra rama, si no que desde su descubrimiento de diferentes potencias transfinitas en 1873, estuvo guiado por temas más generales y filosóficos. Al respecto presenta la siguiente cita de Dauben:

> Cantor [...] se vio llevado a centrar su atención en la manera en que se pueden definir conjuntos de puntos con varias propiedades específicas. Además, su enfoque requería del desarrollo de una teoría rigurosa de los números reales. Esto era un paso necesario antes de que los conjuntos de puntos de estructura complicada pudieran ser identificados, descritos y analizados satisfactoriamente. También fue el primero en darse cuenta de que había diferencias de magnitud entre los conjuntos infinitos que tenían que ser identificadas, y este descubrimiento probó ser un punto de inflexión en su estudio de los conjuntos infinitos como un tema totalmente independiente de la teoría de funciones. (Dauben, 1979, p. 28).

Agrega además, con relación a este texto, que parece necesario decir que la diferencia entre Cantor y otros matemáticos no puede buscarse en la formulación de una teoría de los irracionales, ni en la dedicación a definir conjuntos de puntos con varias propiedades especificas, puesto que, sobre todo, Cantor estaba convencido de que la noción de potencia o cardinalidad tendría un valor central para la investigación matemática, pero esta idea ha resultado incorrecta en buena medida. Por otra parte estaba preocupado principalmente por la precisa caracterización abstracta del continuo. De esta manera, los problemas de lo transfinito, del continuo y de la cardinalidad, fueron los motores del desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor. Se entiende entonces por qué para sus contemporáneos esta teoría resultara algo extraña, demasiado filosófica y alejada de los problemas concretos de las matemáticas.

El momento era tan altamente estimulante para el desarrollo de consideraciones topológicas y de la teoría de la medida, en conexión con la teoría de integración y de series trigonométricas, que aún matemáticos con poca tendencia a planteamientos abstractos, como du Bois-Reymond e incluso Hankel, realizaron contribuciones fundamentales. Esto, señala Ferreirós, debe llevar a tratar de establecer distinciones más finas al considerar las contribuciones de esta época. Pero de todas maneras lo que si queda claro es que sólo Cantor y Dedekind dieron el primer paso hacia teorías abstractas de conjuntos. También hay que tener en cuenta que tanto Dedekind como Cantor hicieron contribuciones relacionadas con las ideas topológicas de Riemann, tratando de fundamentar y clarificar las nociones de continuidad y dimensión que éste había presupuesto (Ferreirós, 1991, p. 203).

La noción de potencia o cardinal

En el desarrollo de la teoría de conjuntos transfinitos, Cantor avanzó prácticamente solo, a pesar de la contribución inicial de Dedekind sobre los cardinales infinitos, al demostrar la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos y colaborar en la crítica de las demostraciones de Cantor. Por tal motivo se considera acertado calificar a Cantor, como lo hace Dauben, de creador de la teoría de conjuntos transfinitos.

El trabajo de Cantor en el periodo que va de 1873 hasta 1878, comprendía, desde el comienzo de la investigación de los cardinales transfinitos, hasta el establecimiento de los resultados principales y la definición de la noción de potencia o cardinal transfinito, que surgió en el año de 1873, como consecuencia del descubrimiento de la no numerabilidad de los números reales. Sin embargo, debido a la influencia de la escuela de Berlin, en la primera publicación de Cantor al respecto no hizo énfasis en dicha noción sino que presentaba toda la investigación con un enfoque relativamente constructivo. Así, la noción de potencia sólo se conoció en 1878 en el momento de la presentación de su prueba de la equipotencia de los continuos de cualquier dimensión. El producto final de las investigaciones realizadas entre 1873 y 1878, fue lograr establecer que sólo existían dos potencias para los principales conjuntos infinitos conocidos, o bien tenían la potencia de los números naturales, o la de los números reales. No obstante, se abrieron muchos interrogantes, como por ejemplo, en cuanto a la existencia de potencias intermedias o de potencias mayores. Sólo cuatro años después, con el tema de los ordinales transfinitos, Cantor logró avanzar en la solución de estos problemas.

El trabajo de 1878, observa Ferreirós, permitió destacar que Cantor tenía en mente, en primer lugar, la teoría de variedades riemannianas, antes que dedicarse de inmediato a la teoría de funciones, lo cual se aclara más con el resultado de 1882 sobre movimiento continuo en espacios discontinuos. Hacia el año de 1878, agrega, uno de los objetivos básicos de Cantor era contribuir a aclarar las nociones fundamentales de la teoría de variedades, y este objetivo persistió en los años siguientes. Luego presentó una serie de resultados elementales, al respecto, algunos de los cuales se convertirían posteriormente, en teoremas de demostración problemática; como es el caso de la pregunta abierta sobre la invariancia de la dimensión, que sería demostrada en 1911 por Brouwer (Ferreirós, 1991, p. 236). Las ideas sobre topología de conjuntos, junto con estas nociones topológicas, con las de la topología algebraica y las nuevas nociones desarrolladas por Brouwer conformarían luego una rama autónoma de la matemática.

Afirma Ferreirós, que en esta época surgieron varios hechos que enturbiaron la vida de

Cantor, como es el caso de la ruptura en las relaciones y correspondencia con Dedekind en 1874, a raíz de la publicación de un artículo, las dificultades con la comunidad matemática hacia 1878, su enfermedad mental, el debilitamiento del apoyo de la escuela de Berlín, el cambio de medios de publicación para sus trabajos y el abandono definitivo, por diez años, de las revistas matemáticas, todo esto solo contrastado con el hecho positivo de su participación en la creación de la Unión de Matemáticos Alemanes (DMV) hacia el año de 1890.

El continuo y los ordinales transfinitos

Las investigaciones desplegadas entre 1873 y 1878 tuvieron como objeto de análisis la noción de potencia. A partir de un amplio estudio de casos concretos, Cantor encontró únicamente dos potencias diferentes, y de esta manera surgió la hipótesis del continuo[3] como un problema del que esperaba proporcionar una solución positiva; por lo cual se empeñó en demostrarlo durante la última parte de su vida, pero sus esfuerzos fueron infructuosos[4]. En aquella época no estaba en condiciones de establecer una teoría más general de las potencias infinitas, con la cual se pudiera dar respuesta a esa hipótesis o permitiera determinar la existencia de potencias mayores que la del continuo. Esta situación se mantendría hasta la aparición, en 1883, de los *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, que constituye el verdadero punto de inflexión en su análisis de los conjuntos transfinitos (Ferreirós, 1991, p. 276).

En 1879 fue publicada la serie titulada "Sobre variedades de puntos lineales e infinitas" en

[3]La hipótesis del continuo consiste en afirmar que el cardinal del continuo, (es decir, el cardinal del conjunto de los números reales, o lo que es igual, el del conjunto integrado por todas las partes del conjunto de los números racionales), es el primer cardinal no numerable, que se nota $\aleph_1$ (alef uno), utilizándose para el infinito numerable, (el del conjunto de los números enteros, o de los números racionales), la notación $\aleph_0$ (alef cero). La hipótesis generalizada del continuo, (abreviadamente: HGC), consiste en afirmar que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todo ordinal α ($2^{\aleph_\alpha}$ equivale al conjunto de las partes de $\aleph_\alpha$ o al conjunto de las aplicaciones de $\aleph_\alpha$ en 2, considerando a este último como un conjunto cuyos únicos elementos son 0 y 1).

[4]"Esta demostración hubiera constituido, sin lugar a dudas, el más bello resultado de la teoría de conjuntos, y habría representado la culminación de sus trabajos sobre el tema". (Apéry & otros, 1988, p. 311).

los *Mathematische Annalen*, que tenía como primer objetivo estudiar de manera conjunta y sistemática las nociones antes descubiertas y, en especial, todo lo referente a la interrelación entre conjuntos derivados y cardinalidad. Este estudio tenía como objetivo final determinar con precisión la potencia del continuo, es decir, se pretendía demostrar la hipótesis formulada en 1878. De esta manera, la noción de potencia se constituía en una poderosa herramienta para la matemática. Cantor le asignó a esta noción el lugar de concepto clave de la teoría de variedades porque siempre estuvo convencido de que ese era su estatus conveniente.

Con relación a dicha serie de artículos, Ferreirós comenta, que en la segunda entrega, ha podido observar claramente la influencia de la teoría de ideales de Dedekind, a propósito de las nociones conjuntistas básicas manejadas por Cantor; lo cual muestra que era perfectamente consciente del contenido conjuntista del trabajo de Dedekind, y dice además, que tal contenido influyó en sus propias concepciones. Por otra parte observa, que el análisis de conjuntos derivados y cardinalidad le llevó a establecer el notable teorema de que para todo subconjunto P de $\mathbb{R}^n$, existe un número α de la primera o segunda clase de números, tal que $P^{(\alpha)}$ es el conjunto vacío o un conjunto perfecto. Así mismo, señala Ferreirós, que en el camino hacia este resultado, Cantor fue necesitando una serie de herramientas cada vez más complejas, teniendo que establecer nociones topológicas íntimamente relacionadas con los conjuntos derivados, como la de conjunto aislado, perfecto o cerrado, y entonces, la noción de conjunto perfecto le dio la posibilidad de establecer una definición abstracta de la continuidad aplicable directamente a $\mathbb{R}^n$, lo que constituyó uno de los apartados de los "Fundamentos". Desde ese punto de vista fue que propuso como ejemplo de "perfecto diseminado" su famoso "conjunto ternario" o "discontinuo de Cantor".

Analizando las contribuciones de los "*Fundamentos*" se puede concluir que la noción de número ordinal transfinito constituye el aporte clave. Esta noción está estrechamente relacionada con la idea de conjunto bien ordenado. En la investigación que realizó en 1882, Cantor se orienta hacia la consideración de conjuntos transfinitos ordenados, con lo cual le fue posible interpretar los "símbolos de infinitud", que había introducido anteriormente, como números ordinales. Con referencia a este hecho Ferreirós considera que es muy plausible que las ideas de Dedekind hayan ejercido un papel heurístico fundamental en este giro dado por Cantor; dice también, que el examen detallado de los ordinales de la segunda clase, $\mathbb{Z}(\aleph_0)$, era imprescindible para culminar el estudio de conjuntos derivados y cardinalidad, y que el nuevo paso permitía finalmente establecer una teoría general de las potencias transfinitas. Amplía su observación afirmando que Cantor era consciente de la importancia de este paso, pero a la vez de cómo iba, de manera radical, en contra de las convicciones constructivas que predominaban en Berlin, y cuando Cantor presentaba en los "Fundamentos" una apasionada defensa de la metodología abstracta, enfocada particularmente contra Kronecker, se habría llegado al momento de su abandono definitivo del enfoque (relativamente) constructivo aprendido con sus maestros berlineses, a favor de las concepciones representadas por Riemann y Dedekind, y en ese mismo trabajo, señala, que Cantor resaltó también ideas clave para su teoría de conjuntos como la que expresa el teorema del buen orden, que nunca conseguiría demostrar satisfactoriamente.

Después de los "Fundamentos" entregó una última parte de la misma serie de artículos, en la que finalmente se presentaron todas las particularidades soportadas en las nuevas nociones, e igualmente emprendió el estudio de la potencia de los conjuntos perfectos que, de acuerdo con la hipótesis cantoriana, es la potencia del continuo. Cantor se dio cuenta que para demostrarla se requería probar que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es la unión de un conjunto numerable y otro perfecto, pero este resultado sólo le fue posible establecer para el caso de subconjuntos cerrados. El establecimiento de un isomorfismo entre un conjunto denso de abiertos y los racionales era la clave del teorema de equipotencia entre los conjuntos perfectos y el continuo. Ferreirós alude que en el artículo de 1887 "Principien einer Theorie der

Ordnungstypen", aparecían nuevos esfuerzos para atacar la hipótesis del continuo, y Cantor daba el paso definitivo de considerar la nueva matemática pura como teoría de conjuntos. Dice además, que la teoría de números ordinales transfinitos no obtuvo la aclamación universal e inmediata que Cantor parece haber esperado; observa, por ejemplo, que Weierstrass y Dedekind no mostraron especial interés, y Cantor sólo se veía confortado por Mittag-Leffler. De tal manera que cuando se sintió traicionado por éste, le pareció que la comunidad matemática le había dado la espalda, y se volvió a filósofos y teólogos; pero esta situación cambió con la publicación de los "Beiträge" (1895/97), dos artículos que sistematizaban la teoría abstracta cantoriana y sirvieron para revitalizar la investigación conjuntista.

Consideraciones epistemológicas desde la perspectiva de la Educación Matemática

En el campo interdisciplinario de la Educación Matemática, las matemáticas constituyen uno de sus fundamentos, pero no sólo consideradas en el nivel de teorías formales sino también, desde una perspectiva histórica-epistemológica, como el resultado de procesos socioculturales. En consecuencia, se requiere entender que la Educación Matemática debe fundamentarse sobre todo en los procesos de construcción donde el sujeto participa activamente, lo cual tiene un significado y un valor teórico y metodológico importante fuera de toda duda. A partir de esta fundamentación, enmarcada en un contexto académico, social e histórico, es posible determinar nuevas perspectivas tanto para la Educación Matemática, como para las matemáticas mismas.

Por otra parte, es esencial tener en cuenta que las visiones sobre la naturaleza de las matemáticas, por fortuna, han ido evolucionando en el sentido de cuestionar el modelo de las matemáticas infalible, absoluto, alejado de la intuición empírica y de la realidad material que ha sido dominante por mucho tiempo. En cambio las nuevas visiones comprenden mejor la estrecha relación entre matemáticas y sociedad, de tal manera que se integran en su seno las influencias sociales y culturales, que se apoya en su historia y en la historia de las ciencias, para establecer la lógica intelectual sobre la cual se fundamente la práctica educativa de la manera más conveniente. Así mismo hay que tener en cuenta que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas resulta crucial el establecimiento de profundos vínculos con su filosofía, ya que las orientaciones filosóficas que se asuman, no pocas veces desempeñan un papel excepcional en el transcurrir de la educación y de las ciencias en general. No resultan acertados, entonces, los enfoques según los cuales las ciencias se consideran como simples lenguajes puros o propietarios de una lógica absoluta y rígida en la cual no caben las opiniones, ni la incertidumbre, ni las decisiones humanas; por el contrario, el discurso académico y científico debe estar siempre abierto a la reflexión permanente y aún al pensamiento especulativo.

Al respecto resultan más acertadas las palabras de Arboleda cuando comenta sobre la referencia de Schwartz acerca de la "necesidad de ir más allá de las primeras apreciaciones sobre la naturaleza del trabajo científico", en el sentido de que puede ser instructivo, diríase quizá formativo, develarle al lector de un libro bien escrito cuales han sido las alegrías y sufrimientos de su autor, ya que "la mayor parte del tiempo es necesario enseñar de manera imperativa y dogmática", haciendo posible entonces que "de tiempo en tiempo [...] los alumnos no solamente investiguen, sino que también conozcan la historia de las ciencias", mostrando, en el caso de las matemáticas, "la extensión de los espacios franqueados por nuestros predecesores hasta llegar al estado actual de perfección. Igualmente, es necesario que sepan que si una teoría está bien hecha, aunque algunos aspectos suyos permanezcan inciertos, probablemente éstos serán los más interesantes para futuras investigaciones. El propósito de una ciencia no es atragantar con ideas bien hechas y bien acabadas, sino imaginar concepciones nuevas. Y éstas generalmente se engendran al superar obstáculos internos" (Arboleda, 2007).

De acuerdo con estas consideraciones se trata de analizar algunos aspectos sobre las concepciones y los aportes de Cantor y Dedekind, relacionados con el tema de la tesis.

Para Cantor:

> "La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sólo está limitada por la consideración autoevidente de que sus conceptos sean consistentes en sí mismos, así como que estén en relaciones fijas, determinadas por definiciones, con los conceptos construidos antes, ya presentes y acreditados. En particular, para la introducción de nuevos números sólo está obligada a dar definiciones de ellos mediante las cuales se les conferirá tal determinación y, bajo ciertas circunstancias, tales relaciones con los antiguos números, que pueden ser distinguidos unos de otros con precisión en cada caso. En cuanto un número satisface todas estas condiciones, puede y debe ser considerado en matemáticas como existente y real" (Cantor, 2005, pp. 106-107).

Según esto, se puede observar la concepción platónica de Cantor, de acuerdo con la cual conocer es simplemente evocar algo que ya existe en el mundo de las ideas. Este enfoque de Cantor corresponde a lo que hoy se conoce como matemática abstracta, en la cual se privilegia lo dado, sobre lo construido. De la misma manera, cuando se trata de la introducción de conceptos matemáticos, plantea que los únicos requisitos que se debe tener en cuenta para tal efecto son la consistencia interna o ausencia de contradicciones, la coherencia con los conceptos matemáticos previamente aceptados, y el ser fructíferos, que tengan implicaciones de importancia. Cantor hace diferencia además entre dos tipos de realidad para los objetos matemáticos, a saber: *la realidad intrasubjetiva o inmanente y otra realidad que denomina transubjetiva o transiente*. La realidad inmanente hace referencia a la aceptabilidad de los conceptos en el dominio del pensamiento puro; en otras palabras, esta realidad se garantiza cuando se satisfacen las condiciones de no contradicción y de coherencia. La realidad transiente tiene que ver con la existencia real de los conceptos o su capacidad de representar relaciones o procesos del mundo externo; es decir, corresponde a un concepto en el sentido de que él represente un elemento o una relación del mundo físico. Cantor sostiene que la matemática "tiene que considerar única y exclusivamente la realidad inmanente de sus conceptos, y no tiene por tanto ninguna obligación de comprobar su realidad transiente" (Cantor, 2005, p. 106).

Con respecto a su visión platónica de los conjuntos, Ferreirós observa que el texto más claro lo constituye la definición de conjunto que Cantor propone en una nota a los "Fundamentos":

> Entiendo por *variedad* o *conjunto*, en general, toda multitud que puede pensarse como unidad, es decir, toda colección de elementos definidos que pueden reunirse en un todo por medio de una ley; y con esto, creo definir algo emparentado con el $\varepsilon\acute{\iota}\delta o\varsigma$ o $\acute{\iota}\delta\acute{\varepsilon}\alpha$ platónico, así como con lo que Platón llama $\mu\iota\chi\tau\acute{o}\nu$ en su diálogo Filebo, o el sumo bien. [...] El propio Platón indica que estas nociones son de origen pitagórico [...] (Cantor, 1883, p. 204 nota 1).

Según la concepción de Cantor los conjuntos transfinitos existen en el "mundo de las ideas", en otras palabras, los números transfinitos son objetos en un mundo ideal, o ideas en la mente divina, lo que pone en claro su concepción platónica. Como lo señala Ferreirós, la convicción de que se trataba de ideas en la mente divina, llevó a Cantor hasta tal punto que terminó por creer que accedía a ellos por contemplación, lo cual constituye también una explicación a su extrema confianza en la objetividad y validez absoluta de las nociones conjuntistas. Esto está relacionado también con la convicción de que todo lo posible está realizado en el mundo. Con relación a esta posibilidad y de la unidad del todo que abarca a Dios, el mundo físico y el mundo mental, Ferreirós comenta que desde este punto de vista, Cantor estaba convencido de la aplicabilidad directa de sus nociones conjuntistas a la explicación de la naturaleza y que diversos testimonios suyos apuntan a que uno de los motivos básicos de su investigación conjuntista fue la creencia en que ésta era un prerrequisito esencial para lograr una explicación orgánica de la naturaleza, siguiendo la línea de Spinoza y de Leibniz.

En conclusión, una de las más importantes razones que movieron su obra matemática habrían sido quizá sus convicciones filosóficas.

En cuanto a la existencia de los objetos matemáticos, en la obra de Dedekind, se presentan las dos modalidades que fueron motivo de debate en el siglo XIX, es decir, la discusión entre construcción y creación. Hay que recordar que para el constructivismo un objeto matemático existe sólo si es construible, esto es, si tal objeto se puede mostrar por medio de los pasos de un proceso. En el caso de la creación, que es una modalidad más abstracta, se aceptan como dadas ciertas condiciones previas. Así, por ejemplo, para el caso de los números reales, se parte de los enteros para construir los racionales, los cuales no se construyen sino que se crean a partir de los enteros. Pero si los racionales se consideran como un dominio de cortaduras, se trata entonces de una construcción, en donde se encuentra que hay cortaduras que no son generadas por un número racional. En este caso, tiene lugar lo que Dedekind llama "la creación libre" del entendimiento, por cuanto ante esa carencia, el matemático toma la decisión de admitir la existencia, por una necesidad lógica, de otros números nuevos que son los llamados irracionales. Se debe tener en cuenta además que en esta "creación libre" hay autonomía e independencia con relación a la evidencia sensible. Así las cosas, Dedekind presentó la idea de desarrollar gradualmente la aritmética, desde la sucesión de los números naturales hasta los números complejos, a través de etapas sucesivas en las cuales son definidos nuevos números y operaciones, pero con la condición fundamental de mantener inmodificables, en el nuevo dominio numérico, las propiedades del dominio anterior. Así mismo sostenía que el más grande arte de la sistematización consistía en volver una y otra vez sobre las definiciones, por amor de las leyes o verdades en las cuales ellas desempeñan su papel. Este arte lo condujo a transformar muchos de los conceptos fundamentales en los cuales se sustentaban las matemáticas de aquellos tiempos. Para Dedekind, la introducción de nuevas funciones o nuevas operaciones era la clave para el desarrollo de las matemáticas y al analizar las peculiaridades de estos procesos matemáticos señalaba que en matemáticas no hay lugar para arbitrariedades, en contraste con lo que puede suceder en otras ciencias.

Al respecto, Arboleda señala que "[...] Dedekind concibe la extensión gradual de los sistemas numéricos como una introducción de objetos nuevos mediante una cascada de sucesivas abstracciones basadas en niveles previos de existencia y, cuestión más importante aún, reduciendo siempre tales existencias a predicaciones sobre los naturales"; y resalta además "que el pensamiento de Dedekind es subsidiario de un cierto enfoque estructural en virtud del cual los objetos matemáticos son entidades de naturaleza cualquiera cuya existencia está determinada por determinadas relaciones aritméticas" (Arboleda, 2007). De esta manera, el rigor y la construcción entre los reales queda apoyado en el número racional, que a su vez lo hace en la aritmética del número natural, pero siempre manteniendo las propiedades del dominio anterior. Más adelante, los conjuntos serán los medios que le permitirán a Dedekind definir o crear nuevos números.

Continuando con esta reflexión, hay que recordar que la concepción de Dedekind era logicista, la cual se refleja, por ejemplo, al comenzar el prólogo de su libro *¿Qué son y para que sirven los números?*:

> Lo que es demostrable, no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo, no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de las ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números [...] Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una

> parte de la lógica estoy manifestando, ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento. [...] Los números son creaciones libres del espíritu humano, sirven como medio para concebir más fácil y claramente la diversidad de las cosas. [...] Mediante la construcción puramente lógica de la ciencia de los números, y mediante el dominio numérico continuo que con ellas se obtiene, nos encontramos por vez primera en situación de investigar con precisión nuestras representaciones de espacio y tiempo, relacionándolas con este domino numérico creado en nuestra mente. (Dedekind, 1888).

Agrega luego que el considerar atentamente lo que se hace al contar una cantidad o número de cosas, conduce "a observar la capacidad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, o representar una cosa mediante otra, facultad sin la cual sería absolutamente imposible el pensamiento". Considera así mismo que toda la ciencia de los números debe tener este único fundamento, que es absolutamente indispensable. Según el pensamiento de Dedekind las nociones matemáticas tienen la particularidad de ser resultado de las leyes lógicas, pero llama la atención el hecho de que la concepción logicista de Dedekind se sustenta en las nociones de conjunto y aplicación, o mejor aún en una teoría de conjuntos y aplicaciones, pero no hace mención alguna de si se trata de una lógica proposicional o de predicados. Para Dedekind, la teoría de conjuntos y aplicaciones forma parte de la lógica y por esta razón su programa de fundamentación conduce al logicismo.

Es importante destacar que desde su concepción logicista, Dedekind consideró que las nociones de conjunto y aplicación formaban parte de la lógica, específicamente aquella parte que era fundamental para derivar la matemática, pero no llegó a afirmar que la lógica se redujera a la teoría de conjuntos y aplicaciones.

Ferreirós observa que en el siglo XIX, en la época de Dedekind, lo habitual era considerar las clases como parte central de la teoría lógica, pero que el caso de la noción de aplicación era muy distinto, por cuanto esta noción no figuraba en tratado de lógica tradicional alguno y fue precisamente Dedekind quien la introdujo por primera vez en matemáticas, por lo cual consideró la necesidad de argumentar que efectivamente las aplicaciones eran parte de la lógica. De allí que al comienzo de su obra de 1888, después de manifestar su posición logicista, escribe:

> Considerando atentamente lo que hacemos al contar una cantidad o número de cosas, nos vemos llevados a observar la capacidad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra, o representar una cosa mediante otra, facultad sin la cual sería absolutamente imposible el pensamiento. En mi opinión [...] la ciencia entera de los números debe erigirse sobre este único fundamento, que en todo caso es indispensable. (Dedekind, 1888).

En los posteriores trabajos fundacionales de Dedekind hay que hacer una diferenciación importante en el sentido de que mientras en 1854 había hecho énfasis en el problema de la extensión o ampliación de las operaciones de los sistemas numéricos, a partir de 1872 enfatizaría en la definición de nuevos números manteniendo estos dentro de los límites del mismo sistema numérico. Este cambio tiene especial importancia a la luz del hecho de que desde 1872 en adelante, por medio de los conjuntos, podrá definir o crear nuevos números; aunque desde finales de los años 1850 venía considerando conjuntos infinitos, y los métodos que desarrolló en su obra de 1888 tendrían gran importancia en la teoría de conjuntos del siguiente siglo. Además, su contribución fue decisiva para que la teoría de conjuntos se convirtiera en una herramienta para las investigaciones matemáticas y, en especial, para el desarrollo de un enfoque conjuntista-estructural en álgebra.

En cuanto a la formación de un planteamiento conjuntista de la matemática, Ferreirós advierte, que en el caso de Dedekind, es algo muy anterior a la aparición de sus escritos sobre los números, y que una indicación clara de este hecho es que en 1871, un año antes de la aparición de su obra "*Continuidad y números irracionales*", Dedekind propuso un tratamiento conjuntista-estructural de la teoría de números algebraicos, indicando que este planteamiento era también el correcto en álgebra; lo cual se considera como un giro revolucionario con relación a la práctica establecida en su tiempo. Ferreirós, observa además, que en estas investigaciones, los conjuntos se convertían ya en los objetos centrales de la teoría, y aparecían las diversas relaciones y operaciones que Dedekind presentó en su libro de 1888 desde el punto de vista de la teoría de conjuntos abstracta (Dedekind, 1998, pp. 22-23).

Otro hecho importante es que, mientras en su *Habilitationsvortrag* de 1854 no se hace mención alguna de la noción de conjunto y que, además, su definición de los números reales por medio de cortaduras se remonta a 1858, la noción de conjunto es utilizada por Dedekind, repetidamente, en su trabajo algebraico de 1856 a 1858. Este caso corrobora el punto de vista de que las ideas de Riemann influyeron en persuadir a Dedekind sobre la utilidad de la noción de conjunto, ya que, como se sabe, cuidadosamente siguió sus cursos, de 1855 a 1856, sobre teoría de funciones, los cuales los consideró siempre como un modelo para sus propias investigaciones.

De acuerdo con la opinión de Ferreirós, el estudio del desarrollo de los puntos de vista de Riemann ofrece una respuesta parcial a las preguntas acerca de cómo, el lenguaje de los conjuntos, emergió desde las matemáticas clásicas, y cómo los conjuntos llegaron a ser considerados como un fundamento para las matemáticas. Advierte que Riemann entendió las superficies de su teoría de funciones y las variedades de su geometría diferencial, basadas en la noción de "*relaciones extensivas*", es decir, de clases o conjuntos. Sobre esta base, él propuso una revisión de la noción clásica de magnitud, al considerar las variedades como fundamento satisfactorio para la aritmética, la topología, la geometría y, en general, para las matemáticas puras.

A pesar de que en los trabajos de Riemann no se encontraba una teoría de conjuntos autónoma, ni siquiera en la topología de conjuntos de puntos, sino una muy general y todavía intuitiva reconceptualización de las matemáticas, tiene sentido pensar que sus embrionarias ideas pueden haber estimulado a otros autores a valorar la promisoria noción de conjunto y, de esta manera, dice Ferreirós llevar más lejos el programa de una reformulación de las matemáticas. Por lo cual resulta acertado considerar que las ideas de Riemann han influido en desarrollos más amplios y en un nivel programático general y no en la manera habitual de técnicas o resultados matemáticos particulares.

El supuesto de que posiblemente el uso del lenguaje conjuntista por parte de Dedekind pudiera haber sido incidental o quizá restringido a conjuntos finitos, no es acertado, por cuanto, según Ferreirós, el manuscrito sobre la teoría de Galois revela un claro conocimiento del papel desempeñado por los cuerpos de números concebidos como conjuntos infinitos. Y además otro trabajo del mismo periodo, sobre congruencias superiores, escrito en 1856 y publicado al año siguiente es una prueba incontestable. Se hace referencia a que allí Dedekind empleó la palabra "*System*", usada también por Riemann y "*Klasse*", usada por primera vez, en el sentido de clase de equivalencia, por Gauss en su teoría de composición de formas cuadráticas. Riemann había usado también la noción de "*clase de funciones algebraicas*" en su teoría de funciones. Por su parte, Dedekind presentó, de manera clara la noción de clase de equivalencia junto con las operaciones que él consideraba completamente análogas a las operaciones aritméticas ordinarias. Hacía énfasis en el hecho de que todas las funciones de una clase tienen sus cualidades características en común, lo cual dice Ferreirós, llama la atención a la luz de la lógica tradicional. Es de notar también que mientras Gauss, al hablar de clases de formas cuadráticas, de manera muy cautelosa evitaba expresarse en términos que implicaran la existencia del infinito actual, Dedekind y Riemann no tenían tales prejuicios filosóficos; por el contrario, Dedekind consideró las clases infinitas como objetos naturales para un matemático y, con excepción de Bolzano, ningún otro matemático había hecho tal consideración en los años 1850. Por lo tanto, Riemann y Dedekind, sin desconocer el caso de Cantor en quien influyeron ambos, son los dos ejemplos más significativos de matemáticos que más tempranamente introdujeron el lenguaje de los conjuntos en la investigación matemática.

No está por demás volver a recalcar sobre los planteamientos iniciales y señalar que para contrarrestar y superar la "forma imperativa y dogmática" con la que se desarrolla el trabajo en el aula, actuando más como administradores de los conceptos, teorías, teoremas y algoritmos matemáticos, es conveniente o quizá necesario, presentar, comunicar y analizar las concepciones, los imaginarios, los obstáculos internos, los aspectos inciertos y junto con las tareas concretas estudiar la importancia de construir ideas generales, entre muchos de los aspectos que son relevantes y desde la perspectiva histórica-epistemológica deben estar al alcance de las indagaciones en el campo de la Educación Matemática.

Finalmente, resulta pertinente tener en cuenta las reflexiones que hace Takahashi al referirse a la concepción de Bourbaki que, como se ha dicho en el Anexo A, en su obra abordo el estudio de las matemáticas como una jerarquía de estructuras utilizando de manera sistemática, la noción de estructura para obtener "una exposición unificada de todas las ramas básicas de la matemática, que descansa sobre sólidos fundamentos"(Campos, 1994, p. 561-562). Desde cuya perspectiva se consideraba la matemática moderna en sus cimientos para edificarla sobre bases axiomáticas rigurosas según el pensamiento de Hilbert, como lo señala Campos. agrega Takahashi, que desde esa perspectiva Bourbaki procedió "a separar los diversos aspectos específicos para reagruparlos alrededor de un pequeño número de nociones esenciales, esto es, clasificando los diversos constituyentes de acuerdo con las estructuras a que pertenecen, puede aplicarse toda la potencia de la maquinaria almacenada en el estudio de los grandes tipos de estructuras"; a partir de las estructuras algebraicas, ordinales y topológicas. Pero, a pesar de que dicha visión se propusiera un desarrollo unificado de las matemáticas que llevara a realizar una considerable "economía de pensamiento"y contribuyera a suministrar la "inteligibilidad profunda"de las matemáticas; señala también que "el advenimiento del estudio de las estructuras no marca en modo alguno la culminación de la evolución de la matemática. Su misma tendencia hacia la síntesis ha conducido a construcciones muy cargadas de significado en multitud de campos, cuya compresión y manejo empieza a presentar dificultades. Las ideas simplificadoras parecen provenir esta vez de la Teoría de Categorías introducida en 1940 por Eilenberg y Mc. Lane y en donde, con un nuevo paso hacia la abstracción, se consideran clases completas de conjuntos provistos de estructuras homólogas junto con las funciones compatibles correspondientes". Llama la atención sin embargo sobre la repercusión de estos enfoques en la enseñanza y cultivo de la matemática: "Ante los nuevos rumbos que progresivamente toma esta ciencia y sus consecuentes reorganizaciones internas es conveniente observar que si bien todo docente debe poseer una visión global de su disciplina y tener ideas acertadas acerca de sus tendencias y problemas actuales, no debe entenderse que las ordenaciones estrictamente lógicas señalan el mejor camino a seguir en la enseñanza". Agrega además, que "la actividad matemática cotidiana, [...] continua siendo, en la gran mayoría de los casos, un paciente avance a través de una maraña de conocimientos técnicos y corazonadas, razonamientos y analogías en busca siempre de hechos y relaciones significativas que finalmente aparecen bajo la forma de definiciones, teoremas y demostraciones".

Finalmente, advierte que "tanto el aprendizaje como el trabajo matemático involucran entonces otros aspectos que no pueden ser eliminados sin riesgo de causar daños irreparables en el desarrollo de la matemática"[5].(Takahashi, 1975. p. 125 - 127)

[5]Son bien conocidas también las advertencias de Morris Klein en su obra "El fracaso de la matemática moderna"y de René Thom en su artículo: "son las matemáticas "modernas'ún error pedagógico y

filosófico?"(Piaget & otros, 1980. p. 115 - 129)

Anexo A

Complemento sobre la Formación de la Noción Abstracta de Estructura Algebraica

Introducción

El complemento que se presenta a continuación se ha escrito atendiendo las recomendaciones de uno de los lectores del manuscrito de la tesis. Las observaciones y sugerencias formuladas hacen referencia a dos temas:

1. Profundización sobre “la noción abstracta de estructura algebraica”.
2. Acerca de “la formación de la noción abstracta de grupo y, en particular, al papel jugado en ese proceso de abstracción por los movimientos concretos y los desplazamientos de las figuras geométricas”.

Estos dos temas se han desarrollado al estudiar la *Formación de la noción abstracta de estructura de grupo*. Para tal efecto de consideran tres aspectos: A.1.1 La Estructura de Grupo en la Teoría de Ecuaciones Algebraicas, A.1.2 La Estructura de Grupo y el Proceso de Ampliación y Generalización del Concepto de Número y A.1.3 La Noción de Estructura de Grupo Implícita en la Geometría.

Además de dar respuesta a las mencionadas observaciones y sugerencias, se ha tratado de presentar argumentos históricos y epistemológicos encaminados a esclarecer que el proceso de la *Formación de la noción abstracta de estructura de grupo*, tuvo como raíces históricas: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, a partir de las cuales surgió la *noción de estructura matemática* como resultado de la toma de conciencia de profundos *fenómenos de isomorfismos* mediante el discernimiento y la puesta en evidencia, según Bourbaki, de “las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas [...] en apariencia muy distintas”.(Bourbaki 1962, p. 39).

También se han tenido en cuenta, en la revisión general sugerida, los aspectos formales relacionados con el manejo de la bibliografía y demás.

A.1. Acerca de la Formación de la Noción Abstracta de Estructura de Grupo

No cabe duda que, en los últimos tiempos, el concepto de *estructura* ha alcanzado una posición central en matemáticas, básicamente por cuanto se ha llegado a reconocer la importancia de su estudio como herramienta fundamental que permite al matemático, entre otras cosas, promover un desarrollo unificado de las matemáticas,[1] realizando una considerable “economía de pensamiento” al evitar la repetición innecesaria de los razonamientos en diversos contextos particulares y que, en concordancia con el fin esencial

[1] “Una de las características de la Matemática Bourbakista es su extraordinaria *unidad*; no hay apenas idea en una teoría que no tenga repercusiones notables en muchas otras; sería absurdo y contrario al espíritu mismo de nuestra ciencia quererla dividir en compartimentos rígidos, a la manera de la división tradicional en Álgebra, Análisis, Geometría, etc., totalmente caduca hoy día.”(Dieudonné, 1987)

de la axiomática, contribuye a suministrar “la inteligibilidad profunda de las matemáticas”, mediante el discernimiento y la puesta en evidencia de “las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de teorías consideradas [...] en apariencia muy distintas” (Bourbaki 1962, p. 39, 43).

Son estas algunas de las razones por las cuales se ha generado una tendencia de pensamiento en términos de estructuras, fruto de lo cual, de manera consciente, el Grupo Bourbaki, para citar el caso emblemático, ha abordado el estudio de las matemáticas como una jerarquía de estructuras, utilizando de manera sistemática, la noción de estructura para obtener “una exposición unificada de todas las ramas básicas de la matemática, que descansa sobre sólidos fundamentos”(Campos, 1994, p. 561-562). Desde esta perspectiva, “Bourbaki considera la matemática moderna en sus fundamentos para edificarla sobre bases axiomáticas rigurosas según el pensamiento de Hilbert; codifica y clarifica el lenguaje matemático gracias a la lógica formal y a la teoría de conjuntos (Cantor, Dedekind); unifica esta ciencia mediante el establecimiento de estructuras comunes a sus diversas ramas”(Campos, 1994, p. 561).

Teniendo en cuenta que la tendencia a la unificación, ligada al surgimiento y a la evolución de las estructuras, es una de las características de la matemática moderna que ha prevalecido hasta la época actual, es conveniente hacer referencia a algunos de los hechos y momentos relevantes que podrían interpretarse como intentos de gestación y manifestación de dicha corriente de pensamiento. Tal es el caso, por ejemplo, del propósito de la *escuela pitagórica* expresado en su insignia fundamental “*todas las cosas son número*”. Más concretamente, Descartes consideró también que había creado una ciencia única, al enlazar en la geometría analítica, los métodos del álgebra y la geometría, partiendo de la idea de elegir los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas, pensando en introducir las operaciones aritméticas en la geometría, con la particularidad de que la multiplicación tendría la propiedad clausurativa, mediante la introducción de un segmento considerado como unidad y la construcción de la cuarta magnitud proporcional, donde ya se avizora, muy tempranamente, la *operación* en términos de lo que hoy se conoce como *ley de composición interna*; lo que daría lugar a una prefiguración implícita de estructura algebraica entre los segmentos. Algo semejante a lo que haría Gauss, más de un siglo después, con la *composición de formas cuadráticas*. Es de destacar también el resultado que, en esta tendencia, produjeron los lazos establecidos por Félix Klein entre la geometría y la teoría de grupos, en su "*Programa de Erlangen*"de 1872, con lo cual consiguió unificar y "explicar en que consiste la geometría, mediante la estructura de grupo"(Campos, 1994, p. 562); lo mismo que las aplicaciones de esta teoría al análisis, hecha por Sophus Lie, de cuya generalización surgieron las teorías de álgebras y grupos de Lie; sin olvidar, desde luego, los aportes de Lagrange, Abel, Galois, Cayley..."y una gran parte de las investigaciones de la escuela alemana de la segunda mitad del siglo XIX"(Campos, 1994, p. 562).

A.1.1. La Estructura de Grupo en la Teoría de Ecuaciones Algebraicas

En el siglo XVIII, los problemas que impulsaron el desarrollo posterior del álgebra tenían que ver con el tema de la teoría de ecuaciones algebraicas, la cual incluía no solo la formación de la teoría general de las ecuaciones, sino además la acumulación de procedimientos para su resolución. El trabajo científico alrededor de estos problemas condujo, al mismo tiempo, a la reestructuración de los fundamentos del álgebra, ligada con la *ampliación del concepto de número*, con los procedimientos del cálculo aritmético, con la teoría de números y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico - literal. A partir del desarrollo de éstos aspectos, que en esencia determinaban el contenido y el objeto del álgebra de finales del siglo en mención, se requirió y a la vez fue posible avanzar al tratamiento de problemas cualitativamente nuevos, los cuales estarían relacionados con el surgimiento, hacia el futuro, de la teoría de Galois y la teoría de grupos. Dichos problemas, bajo la denominación de "*aritmética universal o general*", eran los temas que constituían una ciencia única, que ocupó el centro de atención de eminentes matemáticos de aquella época, especialmente en el marco de la "*Aritmética Universal*"de Newton, publicada en 1707.

Después aparecieron otras monografías cuyo contenido era una construcción sistemática del álgebra, y entre ellas, en 1767, la famosa "*Aritmética Universal* ", de Euler en la cual se destacaba el álgebra como ciencia independiente. Esta obra, que fue traducida a varios idiomas, ejerció gran influencia en la determinación de la problemática científica del álgebra y en la estructuración de los cursos universitarios sobre esta materia. su contenido era muy variado, desde la teoría general y los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas; sistemas de ecuaciones lineales; métodos de búsqueda de soluciones enteras de las ecuaciones de primer grado y de grados superiores, y aún temas de teoría de números tales como una demostración del *gran Teorema de Fermat* para los casos $n = 3$, $n=4$ (como se verá en la sección 4.7.1). Así se podía advertir no sólo el comienzo sino, de manera importante, el resultado y el estado de la formación del álgebra en el siglo XVIII, convirtiéndose en la *ciencia de las ecuaciones algebraicas*, en la cual se incluía la elaboración del aparato simbólico-literal necesario para la resolución de ecuaciones. Igualmente, conservando en su composición los métodos numéricos, por una parte, el álgebra interactuaba con la aritmética de manera muy estrecha y, por otra, había una interpretación de los métodos y problemas algebraicos y la teoría de números, básicamente en el dominio relacionado con el análisis diofántico.

En este punto, desde la perspectiva de la evolución del contenido científico del álgebra y del proceso de creación de las premisas para un nuevo período de su evolución histórica, “la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico-literales” estarían determinados por la “*generalidad del concepto de número*”(Ríbnikov, 1974, p. 313)

En síntesis, el contenido principal del álgebra del siglo XVIII estaba constituído por la temática relacionada con la resolución de ecuaciones. Los matemáticos realizaron enormes esfuerzos encaminados a resolver este que era el problema central del álgebra durante aquella época, fruto de lo cual surgió una gran cantidad de trabajos que se conocieron a través de numerosas publicaciones. Entre las direcciones que encauzaron tales esfuerzos se destaca aquella que se formó a partir de los intentos de buscar un algoritmo algebraico legítimo tal como el método de Tartaglia-Cardano, para hallar la solución de la ecuación cúbica, y el de Ferrari para la ecuación de cuarto grado, que fuera también válido para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto. Entre los innumerables intentos que se realizaron con este propósito se pueden mencionar los trabajos de Tschirnhaus, Euler y Waring que, desde luego, resultaron infructuosos, ya que, en el fondo, los matemáticos de aquella época solo disponían de recursos algebraicos elementales para resolver el mencionado problema. Por estas razones, muchos trabajos se orientaron a hallar por aproximación las raíces de las ecuaciones, utilizando tanto métodos gráficos, a partir de la geometría analítica, como numéricos; de tal suerte que se despejaron las perspectivas para el desarrollo teórico del álgebra, mediante diversas investigaciones en torno a los problemas de la resolubilidad por radicales de las ecuaciones algebraicas y la demostración del teorema fundamental del álgebra. Entre los matemáticos que trabajaron sobre estos y otros problemas relacionados con el teorema fundamental del álgebra estaban Dt’Alember, Euler, Lagrange y Gauss.

Fue entonces cuando Lagrange, precisando la demostración de Euler, introdujo y elaboró la teoría de las funciones invariantes o semejantes únicamente para sustituciones de un mismo grupo. En la teoría de Lagrange se consideraba la semejanza de funciones simétricas de las raíces de la ecuación para el caso en el que se diferencien entre sí todos los $2k$ valores que ellas pueden tomar, respecto a todas las permutaciones de las raíces. Lagrange demostró, con relación a las funciones semejantes, que éstas se expresan, unas a través de las otras, en forma racional, por medio de los coeficientes de la ecuación dada.

En vista de que el único camino que tenían los matemáticos para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto eran los medios algebraicos elementales de aquella época y el único motivo que guiaba los innumerables esfuerzos e intentos era una especie de certeza o garantía intuitiva de la posibilidad de encontrar un algoritmo similar a los de Ferrari o los de Tartaglia y Cardano, al menos para el caso de las raíces reales, Lagrange se propuso determinar las razones por las cuales resultaban eficaces los métodos conocidos para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, al igual que los hechos o señales reveladoras y suceptibles de dar luces en la investigación de métodos también eficaces para el caso de ecuaciones de grado mayor que cuatro; para tal efecto analizó rigurosamente los mencionados métodos, lo cual le reveló que las soluciones de la ecuación original se obtendrían en términos de las soluciones de ciertas ecuaciones auxiliares llamadas *resolventes*, expresión que, según parece, fue introducida por Euler al rededor del año 1732. Pero quién inició el estudio de las *resolventes* fue el matemático francés Vandermonde, cuando presentó a la Academia de París, en 1770, una memoria con el titulo de “Sur la résolution des équations”, en la cual trató no solamente de la solución de las ecuaciones de segundo y tercer grado, sino que también presentó soluciones para la ecuación de cuarto grado y para ciertas ecuaciones de grado mayor. Precisamente afirmaba que la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$ se podía resolver mediante radicales cuando n es un número primo y verificó esta afirmación para el caso $n \leq 11$.

Hacia el año de 1771, Lagrange presentó ante la Academia de Berlín un amplio estudio sobre el mismo problema, titulado *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones*, en el cual abrió un nuevo período en el estudio de la teoría de ecuaciones, superando el trabajo de Vandermonde, al examinar desde diversas direcciones las soluciones de las ecuaciones de segundo, tercero, cuarto y grados superiores. Pero antes de avanzar en el tema es conveniente ilustrar el caso, de manera elemental, considerando la ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

.

Mediante la transformación $x = y - \dfrac{p}{3y}$ se obtiene la ecuación *resolvente* $y^6 + qy^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$ que es cuadrática en y^3. En efecto, si $S = y^3$, se obtiene:$S^2 + qS - \dfrac{p^3}{27} = 0$. Las raíces s_1 y s_2 de esta ecuación se pueden calcular en términos de los coeficientes de la ecuación $x^3 + px + q = 0$; pero para volver a y, a partir de S, se debe resolver la ecuación $y^3 - S = 0$. De tal suerte que, si α es una raíz cúbica particular de la unidad, esto es, $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, por lo que se conoce, los valores de y que satisfacen la ecuación *resolvente* son:

$$\sqrt[3]{s_1}, \qquad \alpha\sqrt[3]{s_1}, \qquad \alpha^2\sqrt[3]{s_1}, \qquad \sqrt[3]{s_2}, \qquad \alpha\sqrt[3]{s_2}, \qquad \alpha^2\sqrt[3]{s_2},$$

y las soluciones distintas de la ecuación $x^3 + px + q = 0$, son

$$x_1 = \sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} \qquad x_2 = \alpha\sqrt[3]{S_1} + \alpha^2\sqrt[3]{S_2} \qquad x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{S_1} + \alpha\sqrt[3]{S_2},$$

expresadas, desde luego, en términos de las raíces s_1, s_2 de la ecuación *resolvente*. Posteriormente, Lagrange observó que se debía tratar de establecer una relación considerando a y como función de x, en razón de que es la ecuación *resolvente* la que permite la resolución de la ecuación inicial.

Volviendo al caso de la ecuación cúbica general: $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$[2], tanto para Lagrange como para Vandermonde, la idea básica era considerar la expresión $t = x + \alpha y + \alpha^2 z$ donde x, y, z son las soluciones de esta ecuación y α es una raíz cúbica de la unidad $(\alpha \neq 1)$.

Lagrange observó que, dependiendo del orden en que se tomen las raíces x, y, z, a t le corresponderían seis valores. En otras palabras, los seis posibles valores que podría tomar t dependerían de las seis permutaciones de las raíces x, y, z. Advierte también que estos seis valores son soluciones de la ecuación de sexto grado:

$$f(S) = (S - t_1)(S - t_2)(S - t_3)(S - t_4)(S - t_5)(S - t_6) = 0,$$

cuyos coeficientes, en virtud de que son funciones simétricas de los seis valores de t ($t_i, 1 \leq i \leq 6$), son también funciones simétricas de x, y, z, y por lo tanto, pueden ser expresados en términos de los coeficientes de la ecuación cúbica dada inicialmente. Lagrange seguramente denominó *resolvente a la ecuación anterior (f(S)=0)*, porque, a pesar de ser de mayor grado que la original, se puede resolver, por ser una ecuación cuadrática en S^3, como se vio en el ejemplo anterior, aplicando, en primer lugar, la fórmula para la ecuación cuadrática y después extrayendo la raíz cúbica. Para tal efecto, basta tener en cuenta que los seis valores

[2] Siguiendo el desarrollo que, sobre el tema, se hace en van der Waerden y en el libro *Recorriendo el álgebra*

de t pueden ser ordenados de la manera siguiente:

$$t_1 = x + \alpha y + \alpha^2 z \quad t_2 = \alpha t_1 = \alpha x + \alpha^2 y + z \quad t_3 = \alpha^2 t_1 = \alpha^2 x + y + \alpha z$$
$$t_4 = x + \alpha z + \alpha^2 y \quad t_5 = \alpha t_4 = \alpha x + \alpha^2 z + y \quad t_6 = \alpha^2 t_4 = \alpha^2 x + z + \alpha y$$

Esto implica que:

$$(S - t_1)(S - t_2)(S - t_3) = (S - t_1)(S - \alpha t_1)(S - \alpha^2 t_1) = S^3 - t_1^3,$$

para los primeros tres factores.

De igual manera para los otros tres factores:

$$(S - t_4)(S - t_5)(S - t_6) = (S - t_4)(S - \alpha t_4)(S - \alpha^2 t_4) = S^3 - t_4^3;$$

entonces: $f(S) = (S^3 - t_1^3)(S^3 - t_4^3) = S^6 - (t_1^3 + t_4^3)S^3 + (t_1^3 t_4^3)$

Aquí, como se ha visto, basta aplicar la fórmula para la ecuación cuadrática en S^3 y luego extraer la raíz cúbica.

A pesar de que los seis valores de t se obtienen a partir de la solución de la ecuación *resolvente*, las soluciones de la ecuación cúbica son:

$$x = \frac{1}{3}[(x+y+z)+t_1+t_4]$$
$$y = \frac{1}{3}[(x+y+z)+t_3+t_5] = \frac{1}{3}[(x+y+z)+\alpha^2 t_1+\alpha t_4]$$
$$z = \frac{1}{3}[(x+y+z)+t_2+t_6] = \frac{1}{3}[(x+y+z)+\alpha t_1+\alpha^2 t_4]$$

Luego, el único problema radica en identificar t_1 y t_4 (entre las seis soluciones de la *resolvente*) o mejor, después de resolver la ecuación $f(S) = 0$ y una vez conocidos los seis valores de t, hay que identificar t_1 y t_4 entre estas seis soluciones de la ecuación *resolvente*. Lagrange estudió el problema de determinar cual de las t_i $(1 \leq i \leq 6)$ se debía utilizar en las anteriores fórmulas. Para tal efecto, advirtió que si t es cualquiera de las seis soluciones de la ecuación resolvente y siendo: $w = (x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\alpha^2 y+\alpha z)$ simétrico en x, y, z y en consecuencia conocido, entonces las tres raíces de la ecuación cúbica serían:

$$x = \frac{1}{3}[(x+y+z)+t+\frac{w}{t}]$$
$$y = \frac{1}{3}[(x+y+z)+\alpha t+\frac{w}{\alpha t}]$$
$$z = \frac{1}{3}[(x+y+z)+\alpha^2 t+\frac{w}{\alpha^2 t}]$$

Para generalizar el método de Lagrange, de manera natural, en la búsqueda de la solución de la ecuación de cuarto grado, eligiendo i, una de las dos raíces primitivas de la unidad de orden 4 y si x, y, z, r, son las raíces de la ecuación cuártica en mención, la fórmula análoga para x será:

$$x = \frac{1}{4}[(x+y+z+r)+\sqrt[4]{(x+iy-z-ir)^4}+\sqrt[4]{(x-y+z-r)^4}+\sqrt[4]{(x-iy-z+ir)^4}].$$

De acuerdo con Lagrange y Vandermonde, para que fuera posible la solución de la ecuación de cuarto grado, sería suficiente evaluar sólo una de estas expresiones subradicales.

La identificación de la solución se haría a partir del siguiente análisis: considerando $t = x-y+z-r$, entonces las $4! = 24$ permutaciones de x, y, z, r originan únicamente seis valores diferentes de t, los cuales son:

$$\pm(x-y+z-r), \;\; \pm(x+y-z-r), \;\; \pm(x-y-z+r).$$

Cada uno de estos valores aparece cuatro veces. Ahora, si se denotan estos seis valores por $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$, entonces la ecuación *resolvente* asociada con los mismos es:

$$\begin{aligned} f(S) &= (S-t_1)^4(S+t_1)^4(S-t_2)^4(S+t_2)^4(S-t_3)^4(S+t_3)^4 = 0 = [g(S)]^4 \\ &= [(S^2-t_1^2)(S^2-t_2^2)(S^2-t_3^2)]^4 \end{aligned}$$

En estos términos, t_1^2, t_2^2, t_3^2, son las raíces de una ecuación cúbica conocida puesto que los coeficientes de g(S) son funciones simétricas en t_1^2, t_2^2, t_3^2 y, por lo tanto, son simétricas en x, y, z, r.

En vista de que se puede resolver la mencionada ecuación cúbica, es posible obtener las raíces t_1^2, t_2^2, t_3^2 y al extraer la raíz cuadrada, se tendrían los valores de t identificados como: $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$. En consecuencia, las soluciones de la ecuación de cuarto grado son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}[(x+y+z+r)+t_1+t_2+t_3], \\ y &= \frac{1}{4}[(x+y+z+r)-t_1+t_2-t_3], \\ z &= \frac{1}{4}[(x+y+z+r)+t_1-t_2-t_3], \\ r &= \frac{1}{4}[(x+y+z+r)-t_1-t_2+t_3], \end{aligned}$$

Al analizar el comportamiento de la *ecuación resolvente* para el caso de las ecuaciones de tercero y cuarto grados, se observa que el grado de la *ecuación resolvente* crece rápidamente de manera que es mayor que el grado de la ecuación inicial. En efecto, para la ecuación de tercer grado la *resolvente* tiene grado $3! = 6$ en S, pero este se disminuye por motivos relacionados con los grupos de permutaciones de las raíces, por cuanto dicha *resolvente* se reduce a una ecuación cuadrática en S^3 que se resuelve con el método conocido.

En el caso de la ecuación de cuarto grado, la *resolvente* tiene grado $4! = 24$ en S, pero la misma se reduce a una ecuación de grado $3! = 6$ en S^4, la cual se puede resolver por tratarse de una ecuación cúbica en S^2. Estos hechos obedecen al número de raíces primitivas de la unidad. Efectivamente, si:

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4,$$

y se elige, $\alpha = -1$, entonces la *ecuación resolvente*, $f(S) = [g(S)]^4$, es la cuarta potencia de la ecuación $g(S)$, de grado seis, y es resoluble por lo que ya se ha dicho.

A continuación se puede advertir por qué las consideraciones y los procesos realizados en la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados no funcionan al pretender extenderlos para la resolución de la ecuación de quinto grado. Específicamente, en este caso, todas las raíces de la unidad diferentes de uno (1) son primitivas, es decir, hay cuatro raíces primitivas y además, por lo que ya se ha observado, si se pretende resolver la ecuación quíntica, la *resolvente* tendría grado $5! = 120$, que se reduce a una ecuación de grado 24 en S^5. Esto también se puede justificar mediante un procedimiento análogo al desarrollado en los casos anteriores. Entonces, como ahora la expresión o función lineal de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, de la ecuación, es:

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5; \quad \alpha^5 = 1; \alpha \neq 1;$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha t &= x_5 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4;\\
\alpha^2 t &= x_4 + \alpha x_5 + \alpha^2 x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha^4 x_3;\\
\alpha^3 t &= x_3 + \alpha x_4 + \alpha^2 x_5 + \alpha^3 x_1 + \alpha^4 x_2;\\
\alpha^4 t &= x_2 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha^3 x_5 + \alpha^4 x_1.
\end{aligned}$$

Aquí se pueden observar dos hechos importantes: en primer lugar, que los términos de estas expresiones están ordenados en correspondencia con la aplicación a t de las sucesivas potencias de la permutación cíclica $(x_1x_2x_3x_4x_5)$; y, en segundo lugar, que, la *resolvente* $f((S)$ consta de 24 factores, lo cual pone en evidencia la imposibilidad de resolver "*por radicales*"la ecuación de quinto grado.

A partir de la solución de la ecuación de cuarto grado, Lagrange formuló la conjetura de que si fuera posible encontrar un polinomio $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, con respecto a las cinco raíces de la ecuación de quinto grado, y que sólo pudiera tomar 3 o 4 valores al permutar las cinco raíces de las $5! = 120$ maneras, entonces sería posible resolver "por radicales"la ecuación de quinto grado.

Sin embargo, a comienzos del siglo XIX Ruffini, discípulo de Lagrange, justificó la imposibilidad de existencia de un polinomio con tales características. Mediante el estudio de los sistemas de todas las permutaciones de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, logró demostrar que el número p de permutaciones de un sistema de ese tipo es un divisor de 120 y que el número de polinomios distintos que es posible formar partiendo de f y aplicando las 120 permutaciones de las raíces x_i, es $\dfrac{120}{p}$. Finalmente demostró que $\dfrac{120}{p}$ en ningún caso puede ser igual a 3 o a 4, como Lagrange lo mencionaba en su conjetura.

Fueron todos estos resultados los que condujeron a Lagrange a considerar el problema de la resolución de ecuaciones en términos de permutaciones de las raíces y, en consecuencia, el problema se reducía al estudio de los diferentes valores que pueden tomar las combinaciones elegidas de las raíces cuando se las permuta de todas las maneras posibles. De esta forma, demostró que las raíces de las ecuaciones *resolventes* son funciones lineales de las raíces buscadas y de las raíces de la unidad.

La idea central de Lagrange consistía en que la consideración de los valores que toma una función racional cuando se permutan sus variables conducía directamente a la teoría de las permutaciones o a los grupos de sustitución. Precisamente, la importancia del trabajo con las *resolventes* radicaba en que traía consigo el hecho de resaltar el tema de las permutaciones de las raíces de una ecuación algebraica. Este tema llegó a ser fundamental para el álgebra abstracta hasta tal punto que en sus comienzos esta rama de las matemáticas se centró en el estudió de los grupos de permutaciones. Así mismo el tema de las *resolventes* se constituyó en un elemento de enlace de la teoría de la resolubilidad de ecuaciones con las estructuras algebraicas.

Posteriormente Cauchy, con el propósito de generalizar los resultados logrados por Ruffini y Abel, sobre el problema de la imposibilidad de resolución de la ecuación de quinto grado por radicales, introdujo la noción de permutación con un enfoque enteramente nuevo, que más tarde sería decisivo. Para tal efecto representó un permutación de un determinado número de objetos, designados por letras, dispuestas en un cierto orden, en una línea o renglón, mediante una ley o regla que hacía corresponder a cada objeto de la primera línea o renglón, un objeto de la segunda que tuviera el mismo rango, de la siguiente manera que llamó sustitución:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

Pero, en vista de que esta representación sólo sería útil para un número pequeño de objetos, en sus razonamientos utilizó la notación abreviada $\binom{A}{B}$, en la que A y B son permutaciones cualesquiera de cierto número de objetos considerados. El hecho más novedoso y de mayor importancia consistió en *componer* dos sustituciones. Para tal efecto, al trata de componer la sustitución $\binom{A}{B}$ con $\binom{C}{D}$ en este orden, la composición de las dos la designó por $\binom{A}{B}\binom{C}{D}$, pero como en el proceso la segunda es transformada en una sustitución $\binom{B}{E}$, para cierta permutación E; entonces la composición la expresó así $\binom{A}{B}\binom{B}{E} = \binom{A}{E}$.

De la misma forma, consideró la composición de varias sustituciones $\binom{A}{B}\binom{C}{D}\binom{E}{F}\binom{G}{H}$.

Análogamente, la sustitución compuesta o "producto"de K sustituciones iguales a una sustitución $\binom{A}{B}$, la designó por $\binom{A}{B}^K$. Designó también la sustitución idéntica $\binom{A}{A}$ y, desde luego, habría considerado el caso $\binom{A}{B}\binom{B}{A} = \binom{A}{A}$.

Tratando este tema Dieudonné observa que a pesar de ser evidente la analogía con la composición de funciones, "para las matemáticas del siglo XIX, habría demasiadas diferencias entre un conjunto finito y una recta como para que pudiesen pensar en una unificación, que no se producirá hasta Dedekind y Frege"(Dieudonné, 1989, p. 165). Y como ya se ha señalado anteriormente y corroborado también por las palabras de Dieudonné, para las matemáticas del siglo XIX fue difícil liberarse de la concepción tradicional de la división de las matemáticas en partes como aritmética, álgebra, geometría, análisis, que se caracterizaban por los objetos matemáticos estudiadas en cada una de ellas, y con relación a la formación de la noción abstracta de *estructura algebraica* y, específicamente a la *estructura de grupo*, que fue la primera que surgió, la teoría de las formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros pertenecía a la aritmética, las ecuaciones y permutaciones al álgebra, las trasformaciones a la geometría, y en tales condiciones la definición general de grupo sólo apareció hasta el año 1882, para los grupos finitos y para el caso general sólo hasta el año 1893 (Dieudonné, 1989, p. 180).

Se observa además que a comienzos del siglo XIX se originó en las matemáticas "una tendencia firme hacia una abstracción y una generalidad creciente", de tal manera que, a mediados del siglo, el cambio en su esencia, había sido tan profundo que sus resultados serían irreconocibles incluso para los más sobresalientes matemáticos del siglo XVIII; y a pesar de que, excepción hecha de las mentalidades creadoras, el antiguo punto de vista persistía, las matemáticas iniciaron su mejor momento en vía a la *abstracción* y a la *generalización* orientadas hacia la creación de "métodos universales"y "teorías amplias"que tuvieron como antecedentes muchos aportes, entre los cuales sobresalen los trabajos de Lagrange. Así se generó el mencionado proceso de "la metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas"que desembocaría en la noción de *estructura* y que constituye la contribución de mayor importancia que han logrado todos los sucesivos propósitos encaminados a "ampliar el concepto de número"(Bell, 2002, p. 197). Tema que se desarrollará en la siguiente sección A.1.2.

A.1.2. La Estructura de Grupo y el Proceso de Ampliación y Generalización del Concepto de Número

Debido al carácter marcadamente abstracto del concepto de número, a pesar de que la aritmética antecedió en el orden histórico a las demás ramas de las matemáticas desde la época de la civilización babilónica, su desarrollo fue muy intrincado y hubo que esperar hasta el siglo XIX, en la época de Dedekind y Peano para que llegara a constituirse en un sistema deductivo tal como la geometría lo había logrado ya, en el siglo III antes de nuestra era, en los Elementos de Euclides. No obstante y precisamente en virtud de su naturaleza e importancia, la noción de número ha estado presente en todos los momentos y procesos de evolución de las matemáticas. En efecto, ha sido la generalidad del concepto de número lo que ha determinado la generalidad y el campo de las aplicaciones de los métodos algebraico-literales. En este sentido Bell afirma que "desde el punto de vista de las matemáticas como un todo, la metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas, que culminó en el siglo XX en unas matemáticas de la estructura, que se desarrollaron con rapidez, es sin duda alguna la aportación más significativa de todas las tentativas sucesivas para ampliar el concepto del número"(Bell, 2002, p. 197). Por su parte Boyer señala que "el interés en la idea abstracta de estructura y la aparición de nuevas álgebras, especialmente durante la segunda mitad del siglo XIX, condujo también a amplias generalizaciones en el campo de los números y su aritmética"(Boyer, 1986, p. 732). Es desde esta perspectiva que, de acuerdo con el objetivo principal de la tesis, se analiza los aportes de Cantor y Dedekind a la *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*, por cuanto es precisamente Cantor quién propone la abstracción deliberada con mayor audacia hasta el nivel de los números cardinales infinitos. El desarrollo de este tema corresponde al capítulo 3.

Según Bell, los sistemas numéricos del análisis, del álgebra, de la física matemática y de la teoría de números del siglo XX se gestaron después de un proceso de cuatro siglos de generalización que dio como resultado los números complejos e hipercomplejos, los enteros algebraicos y el continuo de los números reales. Así mismo, señala varios períodos de cambio radical, el primero de los cuales corresponde al momento en que Gauss, en 1801, introdujo el concepto de congruencia en términos de una relación de equivalencia para ordenar una clase infinita de enteros en una subclase finita, que traía implícito el concepto de homomorfismo, que sólo en el siglo XX fue formulado de manera clara e independiente, llegando a ser la base del álgebra abstracta, la topología y otras partes de las matemáticas. El segundo período lo ubica entre la década, de 1830 a 1840, en la cual los algebristas ingleses reconocieron con claridad el carácter puramente abstracto y formal del álgebra elemental. Luego, en la década siguiente, surgieron los cuaterniones de Hamilton y las álgebras mucho más generales de Grassmann, a partir de las cuales se desarrollaron las álgebras vectoriales de la física matemática. De este período quedó un resultado perdurable en términos de un concepto muy generalizado de número. Cabe recordar que la pretensión de Peacock, Gregory y De Morgan era trasformar el álgebra en una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y de los números complejos, al proponer como postulado de base que las mismas propiedades fundamentales fueran válidas para cualquier clase de número. El siguiente período corresponde a la década de 1870 a 1880 en la cual, se concibió la manera moderna de emprender el estudio del sistema de los números reales, con los trabajos que desarrollaron Cantor, Dedekind, Meray y Weierstrass, dando como resultado, al finalizar el siglo XIX, la aritmetización del análisis e iniciando el movimiento crítico moderno. El cuarto período comprendido entre 1890 y 1910, está caracterizado por la aparición de las paradojas del infinito, a las cuales, subraya Bell, “se debió en gran parte el súbito desarrollo de la lógica matemática que ha actuado con mucha fuerza sobre toda la matemática y en particular sobre el concepto de número”(Bell, 2002, p. 178).

La teoría de las congruencias fue presentada por Gauss en sus Disquisitiones arithmeticae en 1801. Como es bien conocido, el concepto de congruencia demostró ser la clasificación más fructífera de los enteros racionales en un número finito de clases, llamadas *clases de equivalencia*, y agrega Bell, que Gauss no pudo prever que su invento de ordenar un conjunto finito o infinito de elementos dentro de otro, clasificando los elementos del primero según una relación que posea las propiedades abstractas reflexiva, simétrica, y transitiva, compartidas por dicha relación de congruencia, habría de ser el principio orientador de la estructuración de las teorías algebraicas.

Con la evolución gradual de esta idea, orientada a la estructuración de las relaciones, las matemáticas alcanzaron un impulso que les hizo desbordar los vínculos con los números naturales a un dominio en el cual el número como tal no tiene pertinencia puesto que lo que se investiga es cómo se articulan las relaciones en la estructura (Bell, 2002, p. 204). Precisamente para subrayar que la *congruencia* respecto al *módulo m* es una *relación de equivalencia*, se emplea la notación específica $a \equiv b \pmod{m}$, y el escribir *x es divisible exactamente por m* en la forma $x \equiv 0 \pmod{m}$, seguramente le hizo pensar a Gauss en analogías muy útiles entre las ecuaciones algebraicas y la divisibilidad aritmética.

Un ejemplo que ilustra estas ideas es *el anillo de las clases residuales módulo m*. En efecto, la congruencia con respecto al módulo m, entero positivo, *separa* a todos los enteros racionales en *m clases*. Se incluyen en una misma *clase residual* todos los números de la forma $a + km$ con $k \in \mathbb{Z}$. Existen m clases, lo que equivale a decir que el conjunto *cociente* $\mathbb{Z}/m$ comprende *m elementos*. En otras palabras, la definición de congruencia *módulo m* clasifica a los enteros $\mathbb{Z}$ por su resto en la división por *m*. En particular, si *m=2*, entonces *m* clasifica a $\mathbb{Z}$ en *pares e impares*. Además, en virtud de la compatibilidad de la *suma* y la *multiplicación* de *números enteros* con respecto a esta *relación de congruencia*, es posible "*trasladar*" estas *operaciones* al conjunto de *clases de congruencia*, lo cual da lugar a los *anillos de enteros módulo m* y, en consecuencia, a la "*aritmética módulo m*." Así mismo, para que $\mathbb{Z}/m$ sea un dominio de integridad es *necesario y suficiente* que *m* sea un *número primo.*

Con posterioridad a la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados por los matemáticos italianos y luego de la introducción de las letras y del simbolismo en los siglos XVI y XVII, las *ampliaciones del sistema de números* fueron unos de los avances más notables que experimentaron las matemáticas. Pero, a pesar de haberse generalizado de modo más o menos informal dichas *ampliaciones* con el fin de obtener, a partir de los números naturales, otras extensiones como las de los enteros, los racionales, los reales y los complejos básicamente; durante una parte del siglo XIX todavía se tenía el concepto de número natural como algo muy simple y trasparente para la mente, lo cual haría creer que sería imposible analizarlo o referirlo a otros conceptos más simples. Como se explica, en las secciones (2.2 y 4.5), sólo después de la formalización del álgebra y la aritmética por obra de los miembros de la escuela inglesa, Peacock, De Morgan, Hamilton, entre otros, los números naturales se ampliaron a los números algebraicos iniciando con los trabajos de Gauss y de Kummer en las décadas de 1830 a 1850.

Con respecto a tales ampliaciones, Bell afirma que en cada fase del avance de los números naturales hacia otros tipos de números, se produjo un enriquecimiento y un ensanchamiento de todos los diferentes campos de las matemáticas contiguos a la aritmética y recíprocamente, las nuevas adquisiciones, hechas en otros campos, generaron modificaciones en la aritmética, tal como sucedió en la década de 1840 a 1850 con la ampliación del álgebra vectorial plana a un espacio de más de dos dimensiones, lo cual constituyó uno de los orígenes de los sistemas de números hipercomplejos del álgebra, y éstos, a su vez, proporcionaron a la aritmética otros tipos de enteros. Observa Bell que: “El desarrollo de la aritmética correspondiente influyó por su lado y particularmente en el siglo XX sobre el álgebra de que procedía [...] El movimiento hacia adelante era universal y cada adelanto importante en una sección inducía al progreso en otras”(Bell, 2002, p. 197, 198). A continuación se consideran algunas ideas básicas acerca de los números complejos, en primer lugar, como un caso que confirma e ilustra las aseveraciones anteriores y, en segundo lugar, por la relevancia de estos conceptos desde la perspectiva de la tesis.

Los matemáticos ingleses Cotes y De M*ö*ivre encontraron fórmulas que relacionan los números complejos con las funciones trigonométricas y logarítmicas. En el mismo sentido, Euler hizo contribuciones importantes a la teoría de los logaritmos de números complejos. A estos matemáticos, además de Vandermonde, que utilizaron la representación de los números complejos como puntos del plano, se debe la deducción de que las soluciones de la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$, en términos trigonométricos: $\frac{\cos(2k\pi)}{n} + i\frac{\sin(2k\pi)}{n}$, son los vértices de un polígono regular de n lados que se encuentran sobre la circunferencia del círculo de radio unitario. Durante el siglo XVIII la utilización de los números complejos de hizo cada vez con mayor seguridad y efectividad, por cuanto la poca claridad que se tenía sobre el concepto de éstos números no había podido ocultar su utilidad en la resolución de problemas concretos. Esta confianza en ellos por parte de los matemáticos, así como esta postura, se consolidaron con el reconocimiento de los mismos implicado en la primera demostración del teorema fundamental del álgebra realizada por Gauss en 1799. No obstante, las diferentes interpretaciones de los números complejos no se habían formulado aún en una concepción científica única, sino que se resolvían a la vez en distintos planos, junto con el desarrollo general del análisis matemático, pese a lo cual, todos los elementos necesarios de la teoría general, en lo fundamental, estaban formados. En consecuencia, la llegada del siglo XIX era la ocasión propicia para la creación de esta teoría.

La siguiente etapa correspondiente a la historia de las funciones de variable compleja se caracterizó por la introducción de definiciones precisadas de los conceptos fundamentales, referentes ante todo al surgimiento de las interpretaciones geométricas del concepto de número complejo. Al respecto, Bell señala que "la teoría de los números complejos necesitaba una revisión radical y una *generalización* del concepto de divisibilidad aritmética, que a su vez requería de un nuevo enunciado de ciertas partes (intersecciones de variedades) de la geometría algebraica. Esta última a su vez fué responsable en parte de otras *generalizaciones* (sistemas modulares) de la aritmética algebraica o del álgebra aritmética, del siglo XX". (Bell, 2002, p. 198). Se debe tener en cuenta que desde la época en que se desarrolló el estudio de la resolución algebraica de las ecuaciones polinómicas de segundo grado, se generó un amplio debate y un importante proceso de construcción de significado que llevó a la conceptualización y representación de los números complejos, lo mismo que sus operaciones y propiedades; pero la toma plena de conciencia por parte de los matemáticos en el sentido de que la base fundamental del concepto de número la constituye la caracterización de las operaciones, junto con sus propiedades, que se definen sobre el conjunto numérico, ocurrió precisamente a partir del siglo XIX. En otras palabras, lo que aquí se hace referencia es a la estructura y esto significa que en la misma se encontraría la base esencial del concepto de número.

En cada una de las ampliaciones y generalizaciones que se dieron en la evolución del concepto de número, la aritmética correspondiente ejerció influencia sobre el álgebra en la cual tuvo su orígen; pero en ningún caso el avance que se alcanzó, a partir de 1800, para pasar de lo particular y pormenorizado hacia lo abstracto y general, se debió a una sola rama de las matemáticas en especial, por cuanto se trataba de un movimiento progresivo de carácter universal y, en consecuencia, si se lograba un resultado importante en alguna parte, este provocaba el desarrollo en otras. Un hecho notable que hay que destacar en todo este proceso de *abstracción y generalización* es el haber logrado el reconocimiento de la *libre creación* de los sistemas matemáticos, especialmente a raíz de la creación con tal sentido de la geometría no euclidiana hiperbólica de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, respecto a lo cual Bell observa que "parece que la geometría del moderno punto de vista abstracto de las matemáticas se debe al avance casi simultaneo de la aritmética y del álgebra en una dirección paralela"; por cuanto, efectivamente, haciendo referencia al reconocimiento explícito que, en 1830, hiciera la escuela británica del álgebra simbólica elemental como sistema matemático puramente formal, sostiene que "condujo en breve a una revolución de la aritmética y del álgebra de importancia comparable a la que precipitó la geometría no euclidiana"(Bell, 2002, p. 200).

En este orden de ideas, y en concordancia con lo afirmado en la sección anterior, Hamilton hacia el año de 1843, al tener que trasgredir la propiedad conmutativa de la multiplicación, hecho que le permitiría alcanzar su objetivo de los cuaterniones, abrió las puertas a nuevas álgebras, cuyo desarrollo se iniciaría en el siglo XIX, como es el caso de las álgebras lineales asociativas de Peirce, resultado este correspondiente a un nuevo avance hacía la *estructura general* de las álgebras, donde se establecen los conceptos de elementos *nilpotentes* e *idempotentes*. Este estudio lo inició el autor en 1864, pero sólo se publicó en 1881, un año después de su muerte.

El desarrollo de las nuevas algebras mantuvo durante el siglo XIX un rasgo común con las geometrías no euclidianas y también con el nuevo análisis, el cual se refiere a la contribución a eliminar de las matemáticas conceptos intuitivos y hábitos mentales que aún permanecían arraigados incluso en mentalidades matemáticas, como sucedió con M*ö*bius, de quién se dijo que “pasó al lado de los cuaterniones sin verlos”, por el hecho de haber rechazado los números hipercomlejos, al considerar que no satisfacían la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Las nuevas maneras de abordar el concepto de número que se han analizado, en el contexto de las congruencias y de los cuaterniones, por una parte, y la obra revolucionaria de Galois sobre la teoría de las ecuaciones algebraicas, por otra, señalaron el rumbo de concepción general hacia la estructura matemática, la cual reveló y abrió horizontes insospechados en el total de las matemáticas. Cabe destacar aquí que Galois, apoyado en los aportes de Lagrange, Gauss, Cauchy y Abel, entre los más notables, marcó el punto central de cambio en la historia del álgebra a partir del cual el problema principal de investigación deja de ser la resolución de ecuaciones con los métodos tradicionales, para luego encaminarse al estudio de *estructuras abstractas,* y por esta razón es considerado el fundador tanto de la teoría de grupos como del álgebra abstracta en general.

No amerita discusión afirmar que la parte de las matemáticas donde la noción de *estructura* se constituyó en un término familiar desde hace mucho tiempo es el álgebra. Así mismo, el ejemplo esclarecedor, o mejor, el *prototipo de estructura algebraica simple* es la *estructura de grupo*. Lo que se ha denominado *álgebra moderna,* es más bien el nombre programático con el cual se identifica la nueva tendencia orientada al estudio de estructuras algebraicas tales como: grupo, anillo, módulo, cuerpo e ideal, entre otras, y ha llegado a constituir un enfoque fructífero para el desarrollo del álgebra, a pesar de haber encontrado gran resistencia en sus comienzos.

En especial, la teoría de grupos no solo ha dado testimonio de la trascendencia y la fecundidad de los resultados logrados en la investigación en el álgebra moderna, sino que, desde el punto de vista histórico, ha constituído el primero y más temprano ejemplo del nacimiento y evolución de una estructura algebraica abstracta, hecho que Wussing lo destaca afirmando que ha sido la *partera (“midwife”) del álgebra moderna* y que es válido considerarla como un ejemplo metodológico del *pensamiento estructural-abstracto moderno*. Al respecto, advierte también que a pesar de que el concepto de grupo surgió como grupo de permutaciones, asociado a los trabajos de Vandermonde, Lagrange, Gauss, Ruffini, Cauchy, Abel y Galois, principalmente, sobre la teoría de ecuaciones algebraicas, la via de las permutaciones unicamente debe considerarse como una de las raíces históricas de la teoría de grupos, por cuanto existen, dentro de la literatura matemática del siglo XIX, documentos que esclarecen ampliamente que la teoría de grupos tuvo tres raíces históricas, igualmente importantes, que son la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. De tal manera que la teoría de grupos fue el resultado de un proceso gradual de abstracción de métodos y conceptos que implicaban la interacción de estas tres raíces históricas.

Por la importancia histórica y epistemológica que lleva en sí este punto de vista, es conveniente recordar algunos hechos e ideas a favor del mismo. Sin embargo, teniendo en cuenta que ya se ha hecho el análisis correspondiente a la teoría de ecuaciones algebraicas y al problema clásico de la resolución de ecuaciones, y sobre los temas pertinentes de la teoría de números, se trata en la sección (4.7), acerca de *la teoría de ideales*, es necesario hacer referencia al papel de la geometría en el surgimiento de la teoría de grupos. Pero antes, vale la pena advertir también que, para aquella época, la noción de grupo, de acuerdo con la afirmación de Dieudonné, (sección 2.4) se encontraba implícita, es decir, “subyacente de modo natural [...] y fue apareciendo por si sola, al hilo del estudio de diversos problemas...”. En consecuencia, se debe hablar en términos de teoría de grupos implícita tanto en la teoría de números como en la geometría. Así mismo, según lo afirma Wussing, se requiere considerar los antecedentes históricos para buscar los *signos de pensamiento sobre teoría de grupos* en el estudio sistemático de las “*relaciones geométricas*” iniciadas en la primera mitad del siglo XIX y en la concurrente consolidación de la *teoría de los invariantes*. (Wussing, 1984, p. 27)

A.1.3. La Noción de Estructura de Grupo Implícita en la Geometría

A pesar de que el surgimiento de la geometría analítica cartesiana, en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, las primeras etapas fundamentales que se orientaron a hacer a un lado el viejo punto de vista acerca de la naturaleza de la geometría, solamente tuvieron lugar hacia finales del siglo XVIII. Es claro que el álgebra y el análisis, antes que la geometría, fueron las disciplinas que asumieron el liderazgo en superar las visiones clásicas. Se presentaba así un notable y sorprendente contraste. Mientras que los cambios fundamentales en geometría quedaron a la zaga, en el álgebra y el análisis estos se desarrollaron explosivamente, tanto en extensión como en profundidad, hasta la finalización del siglo XIX.

Al hacer referencia al extraordinario crecimiento de la geometría en el siglo XIX, Wussing observa que este provino directamente de la Revolución Industrial al elevar las exigencias para los ingenieros matemáticamente preparados. Agrega, que el llamado por G. Monge “*lenguaje de la ingeniería*” llegó a ser dominante en la Escuela Politécnica de París, fundada de acuerdo con las exigencias de la Gran Revolución Francesa. La geometría descriptiva, creada por Monge, ejerció una fuerte influencia en las matemáticas de los gimnasios y universidades y preparó el terreno para el desarrollo de la geometría. Monge, al crear la geometría descriptiva introdujo las consideraciones proyectivas en la geometría finalizando el siglo XVIII. Esta ciencia que tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones, contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos. Eves afirma que los trabajos de Desargues y de Poncelet, lo mismo que los de sus seguidores, condujeron a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y las propiedades descriptivas, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, es una propiedad métrica. La geometría proyectiva es el estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas. Todas las propiedades de incidencia, exceptuando únicamente propiedades métricas especiales, son proyectivas. (Eves, 1969, p. 273,274).

Poncelet, discípulo de Monge, fue quién impulsó el resurgimiento real de la geometría proyectiva especialmente, según Eves, con la publicación en Paris, en el año de 1822, de su obra *Traité des propriétés proyectives des figures,* con la cual "dio un ímpetu tremendo al estudio del tema e inició el llamado gran período de la historia de la geometría proyectiva", en cuyo campo entraron muchos matemáticos, entre los cuales se puede mencionar a Gergone, Brianchon, Chasles, Pl*ü*cker, Steiner, Von Staudt, Reye y Cremona, destacadas figuras de la historia de la geometría y, en particular, de la historia de la geometría proyectiva (Eves, 1969, p. 273). La obra de Poncelet y el desarrollo de la geometría proyectiva fueron realizaciones inmediatas del poderoso impulso impartido por Monge y la Escuela Politécnica. Monge planteaba el uso general de *proyecciones ortogonales,* en cambio para Poncelet la principal herramienta era el concepto más general de una *proyección central*. De la misma manera, introdujo la distinción fundamental entre propiedades *proyectivas* y *no proyectivas* de figuras; es decir, entre propiedades que son siempre preservadas por proyecciones centrales y propiedades que no se preservan por tales proyecciones.

Según Wussing, la revolución en geometría empezó al finalizar el siglo XVIII, llegando a cambiar la milenaria tradición euclidiana tanto en contenido como en método, y una vez abandonada la idea de una única geometría, todo el trabajo se orientó hacia la posibilidad de generalización o a la necesidad de revisión crítica. Merecen especial atención ciertos aspectos de esta evolución por cuanto fueron puntos de partida u origen de un modo de pensamiento implícito en geometría sobre teoría de grupos. Los cuatro aspectos más importantes, en este sentido, que señala Wussing, son:

1. La eliminación del aparentemente indisoluble lazo entre geometría y métrica, y el surgimiento del problema de la conexión entre geometría proyectiva y geometría métrica.

2. La extensión del concepto de coordenadas más allá del tradicional, de coordenadas (cartesianas) paralelas.

3. El desarrollo de las geometrías no euclidianas.

4. El giro hacia la abstracción debido a la introducción de un arbitrariamente amplio número (finito) de dimensiones. (Wussing, 1984, p. 26, 27)

Poncelet pudo anticipar la idea principal de posteriores desarrollos considerando *propiedades invariantes*, de figuras, bajo proyecciones centrales así como *propiedades invariantes* bajo otras proyecciones. Esta clase de aproximaciones y el tratamiento analítico de figuras geométricas, es decir, el cambio de proyecciones sintéticas hacia el estudio analítico de transformaciones de coordenadas, investigando sus invariantes, hizo posible aplicar la *teoría de los invariantes*, relacionada con otras partes de las matemáticas, hacia la *clasificación de objetos geométricos*.

Es oportuno recordar aquí, como lo señala Bell, que “con la *invariancia* , íntimamente relacionada con el *concepto de grupo*, la teoría de los grupos en el siglo XIX *transformó y unificó* partes muy separadas de las matemáticas, revelando insospechadas *analogías de estructura* en diferentes teorías”(Bell, 2002, p. 244). Por éstas y otras razones más, el concepto de *invariancia* ha sido considerado como un notable y elevado aporte del siglo XIX al desarrollo del pensamiento matemático.

La relevancia de estas aseveraciones amerita, a manera de comentario, hacer referencia a algunas nociones que permiten mostrar *las relaciones de la estructura de grupo con la teoría de los invariantes* y que al mismo tiempo posibilitan, al menos, vislumbrar la trascendencia de estas relaciones en el estado actual de evolución de las teorías matemáticas modernas. En particular, Dieudonné, en la clasificación de las teorías matemáticas que ha hecho en su obra: *Panorama de las matemáticas puras - la elección bourbakista*, trata los *grupos algebraicos lineales* y la *teoría de los invariantes* como parte de la *Geometría Algebraica*, el la sección correspondiente a los *Problemas de clasificación*. Las mencionadas relaciones se pueden observar, por ejemplo, al estudiar el tema de los *invariantes de grupos lineales*:

> Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, se simboliza S(V) el grupo de todas las transformaciones biyectivas $\phi : V \longrightarrow V$. El subgrupo de los operadores lineales inversibles en V (o grupo de automorfismos del espacio V), se denota GL(V). Para cualquier elección de la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ en V, el grupo GL(V) se convierte en un grupo matricial común $GL(n,K)$, donde $GL(n,K)$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas, de orden n, con coeficientes en el cuerpo K y con determinantes

distintos de cero.

El conjunto $GL(n,K)$ junto con la ley de composición u operación binaria: $(A,B) \longrightarrow AB$, donde A y B son matrices cuadradas de orden n, *se llama grupo lineal completo de potencia n sobre K* y es uno de los llamados grupos clásicos. En estos términos se escribe:

$$GL(n,K) = \{A \in Mn,n(K)/\text{A es inversible}\}^3$$

Cualquier subgrupo en $GL(n,K)$ se llama habitualmente *grupo lineal de* grado n.

Si G es un grupo, todo homomorfismo: $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ se llama representación lineal del grupo G en el espacio V. De la misma manera, $\Phi : G \longrightarrow GL(n,K)$ es representación lineal del grupo G en el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas, de orden n, con coeficientes en el cuerpo K y con determinantes distintos de cero.

Para $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, se habla de una representación racional, real o compleja, respectivamente, del grupo G.

La forma, (o polinomio homogéneo), f de grado m que pertenece al espacio P_m de formas (de grado m) sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y que queda inmóvil con la operación $\widetilde{\Phi}_g$ definida por $(\widetilde{\Phi}_g f)(x_1,x_2,...,x_n)$=f$(\Phi_{g^{-1}}(x_1),\Phi_{g^{-1}}(x_2),...,\Phi_{g^{-1}}(x_n))$, es decir, $\widetilde{\Phi}_g f = f$, $\forall g \in G$, se llama *invariante entera* de grado *m* del grupo lineal (G,Φ).

Si G es un grupo abstracto y $\Phi : G \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ es su representación lineal, entonces, al par (G,Φ) se lo denomina también grupo lineal.

Si la forma f es una función racional, entonces, se puede pasar al concepto de *invariante racional*. Se conoce también que cualquier conjunto $\{f_1, f_2,...,\}$ de invariantes del grupo lineal (G,Φ) engendra en $\mathbb{C}[x_1,x_2,...,x_n]$ el subanillo $\mathbb{C}[f_1, f_2,...]$ de invariantes.

Como un ejemplo "elemental" se tiene el caso de la forma cuadrática $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ y cualesquiera polinomios de ella, los cuales resultan invariantes enteros del grupo ortogonal $O(n)$[4].

Si w es una forma arbitraria de n variables independientes $x_1,x_2,...,x_n$, entonces el grupo

[3] $M_{n,n}(K)$ es el conjunto de las matrices cuadradas de orden n sobre el cuerpo K. Usualmente se toma $K = \mathbb{R}$ (el cuerpo de los números reales) o $K = \mathbb{C}$ (el cuerpo de los números complejos.)

[4] El grupo ortogonal $O(n)$ se define como:

finito G con representación lineal Φ, de grado n, opera como un *grupo de permutaciones* en el conjunto:

$$\Omega = \{\widetilde{\Phi_g}(w)/g \in G\}$$

La teoría de Galois en gran medida se vincula al estudio de invariantes de cuerpos (y a sus grupos correspondientes), engendrados por las raíces de ecuaciones algebraicas.

Uno de los teoremas importantes de la teoría de los invariantes establece que: *un grupo lineal finito de grado n, siempre tiene un sistema de n invariantes algebraicamente independientes.*

La teoría general de los invariantes, se desarrolló a mediados del siglo XIX gracias a los trabajos de Cayley, Sylvester, Jacobi, Hermite, Klebetz, Gordan, entre otros, y posteriormente experimentó un renacimiento en algunos de los trabajos fundamentales de Hilbert. También Nagata, Mumford, Haboush, han trabajado en esta teoría que en la actualidad, como ya se ha dicho, hace parte de la *Geometría Algebraica* y de la *Teoría de grupos algebraicos*. Así mismo, el interés permanente hacia *la teoría de los invariantes* se funda también en las amplias posibilidades de sus aplicaciones en distintos campos de la física y en especial de la mecánica.

En el desarrollo de la geometría proyectiva, Poncelet y más tarde M$\ddot{o}$bious, Steiner y otros, utilizaron consideraciones métricas y la razón doble[5] en la definición de coordenadas

---

$$O(n) = \{A \in M_{n,n}(R)/\ {}^tA.A = A.\,{}^tA = E\}$$

${}^tA$: es la matriz *transpuesta* de A.
E: es la matriz *unidad*.

[5]Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una recta ordinaria, se designa la relación de las razones $(\overline{AC}/\overline{CB})/(\overline{AD}/\overline{DB})$ por el símbolo (AB,CD), y se llama *razón cruzada*("cross ratio") (o *relación anarmónica*, o también *razón doble*) del intervalo de puntos A, B, C, D tomados en este orden. Es decir, *la razón doble* es la razón de dos cocientes y se demuestra que *la razón doble de cuatro puntos es invariante en la proyección*. En otras palabras, si A, B, C, D y A', B', C', D' son puntos correspondientes de dos rectas relacionadas por proyección, entonces se verifica $(\overline{AC}/\overline{CB})/(\overline{AD}/\overline{DB}) = (\overline{A'C'}/\overline{C'B'})/(\overline{A'D'}/\overline{D'B'})$.
La notación (AB, CD) fué introducida por M$\ddot{o}$bious en 1827

proyectivas, manteniendo de esta manera la dependencia métrica. Esta brecha fue cerrada con la aparición de las obras: *Geometría de la posición (Geometrie der lage)* y *Consideraciones sobre la geometría de la posición* de Von Staudt, sucesor de Steiner y profesor en Erlangen, quien se interesó por la fundamentación de la geometría. Von Staud es considerado como el fundador de la geometría de posición pura, es decir, de una geometría completamente libre de relaciones métricas. Se esforzó por tratar de eliminar ciertas dificultades encontradas en la utilización de la geometría proyectiva e intentó reconstruir el conjunto de la misma, independientemente de toda noción métrica, con ayuda sólo de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Precisamente en la segunda de sus obras realizó un tratamiento de la *relación anarmónica*[6] exento de consideraciones métricas.

Las investigaciones de Poncelet tenían como propósito constituir una doctrina geométrica general en la que intervendrían principalmente la *relación anarmónica* que se conserva en una trasformación proyectiva, los puntos imaginarios y el principio de continuidad. A su vez, con Chasles y Steiner, después de constituída la doctrina proyectiva, surgieron dos ideas de gran relevancia como son: la distinción entre propiedades métricas y propiedades descriptivas, por una parte y, por otra, el papel de las transformaciones. Von Staudt, al igual que Poncelet y sus sucesores, se propuso desarrollar la geometría sin recurrir a los métodos analíticos pero, a diferencia de los anteriores, entendió que debía introducir las nociones proyectivas sin que intervinieran consideraciones métricas e inició la reconstrucción geométrica con base en los axiomas referidos únicamente a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Poncelet, Chasles, Steiner y Von Staudt conocieron con nitidez la diferencia entre las propiedades proyectivas y las propiedades métricas, pero no llegaron a explicar las relaciones entre ellas. Más tarde, Laguerre, en 1853, encaminado a establecer

[6]En la geometría proyectiva, el concepto de relación anarmónica se ha convertido en un concepto básico, por cuanto su poder y aplicabilidad son de fundamental importancia

las propiedades métricas de la geometría euclídea sobre la base de conceptos proyectivos, comenzó a desarrollar algunas investigaciones, relacionando la medida de un ángulo con la razón anarmónica de sus lados y de las dos rectas del mismo origen que unen su vértice a los puntos cíclicos. Las ideas de Laguerre fueron desarrolladas independientemente por Cayley, de tal manera que sus investigaciones generalizaron las de Laguerre. Entonces, la medida proyectiva, por ejemplo, fue definida claramente, en dos dimensiones, mediante la razón anarmónica de los cuatro puntos de una recta, de los cuales dos son los extremos del segmento medio y los otros dos son los puntos de intersección de la recta con una cónica sometida a la transformación. En este caso, según Cayley, "la geometría métrica aparece como una parte de la geometría proyectiva".

La base de la geometría de Steiner estaba constituida por la relación proyectiva entre las formas fundamentales en una dimensión. Por su parte, Von Staudt se propuso desarrollar esta relación de una manera puramente descriptiva, esto es, independiente del concepto de distancia. Así mismo, antes de Von Staudt, fueron utilizados en geometría los llamados *elementos imaginarios*, de los cuales sólo se sabía que no eran reales, como el punto en el infinito; no obstante, Von Staudt intentó definirlos adecuadamente como elementos esenciales de la geometría proyectiva. Así, en su segunda obra los definió como elementos dobles de involuciones elípticas y demostró que satisfacían los axiomas fundamentales. En este orden de ideas, Von Staudt, con su teoría, llegó a eliminar el concepto de longitud de la geometría proyectiva y en el mismo sentido las operaciones usuales de la aritmética se traducían en construcciones geométricas que operaban sobre las coordenadas de acuerdo con las leyes de la aritmética. De este modo construyó una parte importante de la geometría proyectiva clásica y la presentó como un tema independiente del concepto de distancia. Sin embargo, su obra fue objeto también de análisis críticos debido, principalmente, a que no aparecía en ella el postulado euclidiano de las paralelas e igualmente a que la formulación del axioma de continuidad adolecía de imprecisiones.

Por último, Von Staudt resolvió expulsar los imaginarios de la geometría, para lo cual los reemplazó por infinidades de puntos reales asemejándose en este caso al pensamiento matemático de Dedekind de recurrir a conjuntos infinitos para resolver un problema finito en aritmética, como en el tema de los ideales.

Hacia 1871, Klein presentó una definición no métrica de coordenadas proyectivas, basándose en la razón doble, lo cual solventó la exigencia, debida a consideraciones metodológicas, de un desarrollo, de esta temática, estrictamente proyectiva. Como se verá más adelante, sería a partir de este punto de vista, o nueva forma de pensamiento, relacionado con la búsqueda y/o identificación de propiedades que permanecen invariantes bajo trasformaciones proyectivas, que Félix Klein llegaría a plantear su célebre *Programa de Erlangen* de 1872, en virtud del cual se pudo, entre otras cosas, clarificar la conexión interna entre geometría métrica y geometría proyectiva, lo mismo que hacer uso explícito de la teoría de grupos. De esta manera Klein logró la unificación de las diversas geometrías por medio de la teoría de grupos. Así mismo entre 1870 y 1874, Klein, hizo aportes complementarios importantes a los trabajos fundamentales y muy originales de Von Staud. Posteriormente los esfuerzos de los matemáticos se orientaron esencialmente hacia la revisión de los principios y de la estructura en la geometría.

En *el programa de Erlangen*, Klein mostró cómo el concepto de grupo podía ser aplicado de manera conveniente en la caracterización de las diferentes geometrías elaboradas durante el siglo XIX. Este programa contiene ideas maestras provenientes de diversas fuentes. Tal es el caso de la noción de aplicación de una superficie sobre otra, de correspondencia entre conjuntos geométricos, así como de la teoría general de los invariantes. Volviendo a emplear las ideas de Cayley acerca de la formulación de nociones métricas como las de ángulo y distancia entre dos puntos, en términos proyectivos, a partir de las relaciones entre las geometrías euclídea y proyectiva, se propuso generalizarlas de tal manera que incluyeran las geometrías no euclidianas. El concepto de grupo de transformaciones le permitió elaborar una síntesis extraordinaria en la cual propuso la definición de una geometría como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos del mismo se someten a las transformaciones de un cierto grupo, también de transformaciones. A partir de estas ideas planteó un programa que constituía una concepción orgánica de la geometría con fundamento en una jerarquización de los grupos de transformaciones.

Una etapa importante en la génesis del *Programa de Erlangen* lo constituye el advenimiento de las geometrías no euclidianas, las cuales no sólo dieron lugar al surgimiento de otras geometrías diferentes a la clásica de Euclides, sino también en cuanto a las ideas que permitirían llegar a la matemática moderna. Las geometrías no euclidianas fueron el punto de partida de un análisis más profundo tanto del método axiomático como de la relación de la geometría con el mundo exterior. Igualmente, al parecer fue Klein quien puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas, que por otra parte en el caso de Lobachevski hicieron posible la concepción del espacio como concepto *a posteriori* como resultado del movimiento de los cuerpos físicos, en oposición a la concepción Kantiana del espacio como noción a priori.

En cuanto al tema de la extensión del concepto de coordenadas, Wussing señala que el desarrollo de la geometría proyectiva en profundidad estuvo estrechamente vinculado a descartar la visión tradicional que limitó el concepto de coordenadas al de coordenadas (cartesianas) paralelas. Para el surgimiento del punto de vista sobre la teoría de grupos fue especialmente significativa la extensión del concepto de coordenadas de puntos más allá de la tradición euclidiana que consideraba el punto como el elemento fundamental de toda la geometría.

Plücker, considerado el mayor especialista del enfoque algebraico de la geometría, en una memoria titulada *Sobre un nuevo sistema de coordenadas* (1829), marcó una nueva etapa de la geometría con el concepto de sistema de coordenadas, el cual lo presentó en los términos siguientes:

> Todo procedimiento particular para fijar la posición de un punto con respecto a puntos o líneas considerados como de posición conocida, corresponde a un sistema de coordenadas.

Hasta el momento de la citada publicación, Plücker había utilizado ampliamente las coordenadas cartesianas, pero precisamente en dicha memoria introdujo las nuevas coordenadas homogéneas y posteriormente las aplicó sistemáticamente al estudio de curvas en general. Tomó como referencia un triángulo y consideró como coordenadas de un punto cualquiera P las distancias perpendiculares desde P a los lados del triángulo, pudiendo multiplicar cada distancia por una misma constante arbitraria. Al respecto, Wussing afirma que las coordenadas triangulares y las tetraedrales son esencialmente idénticas a las coordenadas baricéntricas de Möbius. De modo que con tal sistema de coordenadas la ecuación de una recta se escribiría: $ax + by + ct = 0$, donde x, y, t son las coordenadas trilineales de un punto cualquiera. La relación entre este tipo de coordenadas y las coordenadas cartesianas (X,Y) de un punto P está dada por las ecuaciones: $x = Xt, y = Yt$. La terna $(x,y,0)$, en particular, representa “un punto del infinito”, bajo la condición: $x \neq y \neq 0$ y que además todos los puntos del infinito es el plano estén situados en la recta dada por la ecuación $t = 0$, llamada también “recta del infinito”. Mediante la notación abreviada y las coordenadas homogéneas, Pl*ü*cker pudo llegar analíticamente al *principio geométrico de dualidad*[7]. Los parámetros (a,b,c) de la recta, en coordenadas homogéneas: $ax+by+ct = 0$ determinan una recta única en el plano, de la misma manera que las coordenadas homogéneas (x,y,t) corresponden a un punto único P del plano. La idea de Pl*ü*cker consistía en considerar x,y,t como constantes y tomar a,b,c como variables, con lo cual la ecuación original determinaba una clase de rectas o un haz de rectas que pasan por un punto fijo (x,y,t) en lugar de un haz de puntos sobre una recta fija (a,b,c). De esta manera, de acuerdo con la interpretación antigua, la ecuación define una *recta* como un *lugar de puntos*; y según la nueva interpretación, define un *punto* como un *lugar de rectas*. En consecuencia, la ecuación $pu+qv+rw = 0$, se podia considerar indiferentemente como el conjunto de puntos (u,v,w).

De esta manera, Pl*ü*cker encontró lo que se podría llamar la contraparte analítica del principio geométrico de dualidad, que había sido examinado detalladamente por Poncelet y Gergone. Entonces, al sustituir, en geometría pura, el *punto* en lugar de la *recta* y viceversa, se tendría el equivalente a intercambiar, en álgebra, las expresiones *constante* y *variable* con respecto a la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas. Consecuencia lógica importante de esta radicalmente novedosa idea de Pl*ü*cker es que tanto el punto como la recta son elementos igualmente fundamentales para la geometría plana. Para el caso del espacio de tres dimensiones los elementos fundamentales son el punto y el plano.

[7]Por ejemplo, en geometría plana, si dos teoremas siguen siendo válidos cuando en ellos se intercambian las palabras punto y recta, entonces se dice que los dos teoremas son *duales*, es decir, que en ese caso se cumple el principio *geométrico de dualidad*. En particular, el teorema de Brianchon y el teorema del hexágono de Pascal forman un par de teoremas *duales*, en virtud de la transformación que hace corresponder al punto la recta y a la recta el punto (ver: Eves, p. 80, 92)

Hacia 1831, en el segundo tomo de una de sus obras, sobre el desarrollo de la geometría analítica (*Analytisch–geometrische Entwicklungen*), hizo la precisión y generalización de los conceptos de ecuación, de coordenadas tangenciales y de clase de una curva. Observó, en particular, que una misma curva puede ser considerada como una colección de puntos o como una colección de rectas tangenciales a la curva porque, según él, las tangentes determinan la forma de una curva tanto como los puntos. La familia de las tangentes es una curva de líneas y posee una ecuación en términos de coordenadas de líneas. La clase de la curva la hacia corresponder al grado de la ecuación, mientras que el grado de la ecuación, expresado en términos de coordenadas de puntos, lo denomino el *orden de la curva*. Posteriormente, en sus obras *Sistema de geometría analítica*, de 1835 y *Teoría de Las curvas Algebraicas,* de 1839, desarrolló ampliamente el estudio y la clasificación de las curvas algebraicas utilizando como nuevo principio la *enumeración de las constantes,* basado en sus fórmulas duales que relacionan el orden, la clase y los números de los diferentes tipos de singularidades ordinarias de una curva de un género dado. Así mismo, realizó un completo análisis de todos los sistemas lineales posibles de coordenadas de punto en el espacio de tres dimensiones, expresado en términos de que cada sistema de coordenadas planas está dado mediante ecuaciones lineales. La notable obra de Pl*ü*cker, que con la extensión del concepto de coordenadas dio una nueva orientación y contribuyó a la renovación de la geometría analítica, fue proseguida por Hesse, en Alemania, mediante los determinantes e igualmente aplicando la teoría de las formas algebraicas y la teoría de los invariantes a la ordenación de los razonamientos de dicha geometría. De la misma manera, en Inglaterra Cayley y Salmon, continuaron en esta nueva dirección, para lo cual utilizaron ampliamente los conceptos y procesos del álgebra lineal, y así, además de realizar trabajos sumamente originales, aportaron a la difusión de los nuevos métodos que el matemático italiano Chelini, enriqueció y extendió. Igualmente, Hesse, Cayley, Salmon, Jordan, Klein, Cremona entre otros, al emprender la utilización de la teoría de las formas algebraicas y de los invariantes, posibilitaron el avance en el estudio de las curvas y de las superficies algebraicas. También como ya se ha dicho, Laguerre, Cayley y Klein establecieron las propiedades métricas de la geometría euclídea mediante conceptos proyectivos. En este orden de ideas, el desarrollo de la geometría después de Plücker comprendería una complejidad de trabajos relacionados con los comienzos de la geometría algebraica, con el surgimiento de la topología, con las geometrías en n dimensiones, así como con la geometría infinitesimal y diferencial entre otros.

Cabe recordar que la teoría de grupos se desarrolló, en primer lugar, a nivel de teoría de grupos finitos de permutaciones, a raíz de la publicación que hizo Hermite de los manuscritos de Galois. En 1870, Jordan publicó su *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*, en el cual resumió y perfeccionó los trabajos de sus antecesores sobre propiedades especiales de los grupos de permutaciones y estudió también grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos. Introdujo además la noción de representación de un grupo en otro y demostró parcialmente el denominado teorema de Jordan-Hölder. Entre 1868 y 1869 emprendió el primer estudio importante de los grupos infinitos en su obra *Memoria sobre los grupos de movimientos*, en la cual estudió las traslaciones y las rotaciones, dando origen así a los estudios de las *transformaciones geométricas* por medio del *concepto de grupo*. Pero no hay que olvidar la advertencia que hace Wussing cuando afirma que el avance logrado por Cayley hacia 1854, orientado a la definición de *grupo abstracto* resultó históricamente prematuro, ya que no se habían desarrollado plenamente las condiciones para una apreciación favorable de una aproximación abstracta y formal. Igualmente, mientras los grupos de permutaciones eran los únicos en investigación, no había interés en la generalización de dicho concepto, ni motivos para obrar en tal sentido. De tal modo que los artículos de Cayley de

1854 no tuvieron impacto inmediato en marcha hacia la abstracción.

Con respecto a las investigaciones por el ordenamiento, en geometría, de los principios a través del examen de las relaciones geométricas, Wussing señala que en el estudio de estas relaciones, la geometría descriptiva y la geometría proyectiva, hicieron énfasis en aquellas relaciones entre figuras geométricas que estaban asociadas con formaciones particulares. Afirma además, que Carnot en su *Géométrie de position* expresó este punto de vista, el cual se reflejaba en el principio fundamental del método de Carnot que establecía que *dos figuras geométricas, conectadas por una proyección, comparten un cuerpo de propiedades*. Sin embargo, interesaba que tales propiedades compartidas fueran trasladadas a las transformaciones mismas, lo que implicaba especiales relaciones entre figuras. Este principio que ya había sido aplicado tácitamente por Monge, se transformó en una tendencia que claramente tomó forma reconocible en el *principio de continuidad* de Poncelet, quien enfocó su uso sobre el problema de las transformaciones continuas incluyendo en todo caso proyecciones centrales y, a partir del mismo, asignó estatus equivalente a dos figuras conectadas por una transformación continua. Así las cosas, el estudio de las *relaciones geométricas entre figuras* se convirtió en el *estudio de las transformaciones asociadas*.

Entre 1830 y 1870, según Wussing, las transformaciones se convirtieron en objeto de prolíficas investigaciones especializadas e independientes, las cuales dieron origen a las teorías de transformaciones circulares, transformaciones esféricas, inversiones, afinidades, colineaciones, entre otras. Desde luego que algunas de estas transformaciones no eran enteramente nuevas, por cuanto ya se había hecho uso esporádico de ellas desde el siglo XVI.

A medida que se realizaban estos avances, el estudio de las relaciones geométricas entró gradualmente a una tercera fase, en la cual se investigó las conexiones lógicas entre transformaciones. Esto condujo al *problema de la clasificación de las transformaciones* y hacia la síntesis "*grupo-teorética*" de la geometría. Es importante tener en cuenta, en este caso, los esfuerzos de clasificación de M*ö*bius en geometría. Al respecto, Wussing observa que a pesar de que M*ö*bius se había mantenido alejado de la comunidad matemática, sus investigaciones en geometría abarcaban todos los desarrollos de su tiempo en este campo, razón por la cual en sus comienzos su trabajo fue ignorado, pero posteriormente alcanzó la más alta consideración cuando se reconoció que sus ideas, a pesar de haber sido desarrolladas silenciosa y aisladamente, anticiparon la posterior evolución de la geometría y aún del mismo *Programa de Erlangen*. Precisamente Wussing destaca dos elementos del pensamiento geométrico de M*ö*bius que dan testimonio de la lógica interna y la inevitabilidad del desarrollo matemático:

- En primer lugar, hizo una significativa contribución a la remoción del concepto tradicional de coordenadas.

- En segundo lugar, aunque sin tomar consciencia del concepto de grupo, condujo, como guiado por instinto, la *organización grupo-teorética de la geometría que más tarde sería resuelta de manera clara en el* Programa de Erlangen *de 1872*.

Estos dos razgos distintivos, afirma Wussing, estaban ya presentes en su principal trabajo inicial sobre el *cálculo baricéntrico*. Sostiene además, que la actividad creativa de M*ö*bius, en una segunda fase, estuvo dedicada principalmente a las matemáticas aplicadas en temas que comprendían sistemas de lentes, mecánica celeste, sistemas de cristales y *equilibrio de fuerzas*. Este último tema constituiría la base de su texto sobre Estática hacia 1837. El gran interés por los problemas prácticos y las preguntas específicas relacionadas con los mismos, lo impulsaron a continuar en la investigación acerca de relaciones geométricas más amplias. Con tal motivo se interesó por la generalización del tradicional concepto de *adición*.

Es oportuno recordar aquí que a comienzos del siglo XIX, Argand, Wessel y Gauss, independientemente, introdujeron la representación geométrica de los números complejos, la cual no sólo hizo posible efectuar las *operaciones fundamentales* realizando sencillas construcciones, sino que contribuyó a disipar la desconfianza y a clarificar las ideas sobre los que se consideraban números ficticios o irreales, es decir, *imaginarios*, y además, anunciaba el principio de una futura teoría científica rigurosa. En particular, la suma de números complejos se construyó, desde entonces, utilizando la llamada *regla del paralelogramo* para la suma de vectores.

Por su parte Möbius pudo observar, mediante esta *regla*, que la *composición de fuerzas* produce una *fuerza*, *la composición de movimientos* produce un *movimiento*. En estos términos, observa Wussing, que la *composición* de *operaciones sucesivas* de una clase determinada, involucra el uso de una *regla de composición*, y la difícil tarea matemática, implícita en los precitados ejemplos físicos[8], consistía en expresar la *regla de composición* dentro de un cálculo apropiado. Lo difícil de esta tarea, advierte Wussing, está ilustrado por lo esfuerzos extremos de Grassmann para entender la esencia de la adición de segmentos; esfuerzos que eventualmente condujeron al concepto de vector y al cálculo vectorial. Agrega, además, que el interés de Möbius en las matemáticas aplicadas lo condujo hacia *varias reglas de composición* y así, entre 1838 y 1850, publicó varios trabajos sobre el tema. Si bien estos trabajos promovieron en gran medida el *concepto de composición*, en el sentido de

[8]Según Babini la *composición de fuerzas y velocidades*, relacionadas con el concepto de magnitud vectorial, era ya utilizada por los tratadistas de la Mecánica desde finales del siglo XVII, pero en aquellos tiempos no tuvo mayores repercusiones entre los matemáticos.

que ellos ayudaron a crear un completo espectro de *leyes de composición* para una diversidad de operaciones, sin embargo ellos hicieron muy poco en forma directa para preparar el, más tarde, *concepto general de grupo*, y menos aún, llevar hacia adelante los *métodos de la teoría de grupos*. En ese tiempo, la *composición de operaciones* no pudo por si misma inducir el *concepto de grupo*. Lo que faltaba en este nivel de desarrollo de la geometría, según Wussing, era el reconocimiento del hecho de que una *composición* sobre un conjunto determina un *subconjunto cerrado* relativo a la *composición*, hecho que más tarde resultó decisivo en el estudio de las permutaciones.

El problema de las *reglas de composición* dio origen al tercer período creativo de M*ö*bius y, comenzando en 1853, publicó trabajos sobre transformaciones geométricas especiales. Dice Wussing, que luego siguieron numerosos artículos que versaban sobre involución de puntos y que, además, se ocupó de algunas transformaciones especiales. En estos trabajos, M*ö*bius se propuso, como parte de un proyecto o programa, asignar su propio lugar a cada una de las *geometrías* asociadas con transformaciones particulares de congruencia, semejanza, afinidad y colineación. Finalmente, agrega Wussing, que por carecer de recursos técnicos, estos intentos no pudieron llegar a feliz término; no obstante, ellos proporcionaron un amplio impulso a la síntesis conceptual del edificio de la geometría. En sus últimos años de vida, a partir de 1858, según Wussing, M*ö*bius se aventuró en un estudio de las llamadas "*relaciones elementales*", más generales que las colineaciones, por lo que tales transformaciones, desde el punto de vista moderno, estarían más o menos cercanas a la topología.

Finalmente, es conveniente hacer referencia, en términos generales, al tema de las *reglas de composición*. En efecto, hoy se conoce que *estructurar un conjunto* consiste en definir en él una *estructura*, para lo cual se requiere introducir una *ley de composición* que relacione todos sus elementos, pero, como lo ha señalado Dieudonné, fue muy difícil llegar a pensar en una operación en matemáticas, por tratarse de algo bastante abstracto, razón por la cual "los matemáticos tardaron un tiempo inverosímil en concebir esta idea y, a partir de esta concepción de la operación y luego, de la composición e inversión de operaciones, se llegó insensiblemente al concepto de grupo. Fueron todavía necesarios casi un centenar de años para que el concepto adquiriese su verdadera naturaleza, es decir, abandonara el origen fortuito de la operación, de la transformación, para convertirse en una operación que se realiza sobre los objetos de un conjunto. Y ello fue motivo para una expansión prodigiosa de toda la matemática, porque se cayó progresivamente en la cuenta de que por todas partes existían grupos, desde la aritmética más abstracta hasta la teoría cuántica, la relatividad y todo el análisis, por no hablar de la geometría, etc". (Dieudonné 1988, p. 187). Esto explica entonces por qué el "descubrimiento" de un nuevo grupo, en una teoría matemática, constituye un gran avance en la misma y, por consiguiente, los matemáticos buscan esta noción en todos los campos.

Las anteriores consideraciones se complementan con la referencia que se hace en la tesis, a la multiplicación de segmentos que definió Descartes, a las formas cuadráticas de Gauss, al tema de las permutaciones de Cauchy y, en particular, al caso de la Escuela Británica que, entre los años 1830 y 1850, inspirada en la "consideración estrictamente formal de las operaciones"logró ampliar no solamente el concepto de dichas operaciones, sino también hacerlo extensivo a los elementos entre los cuales podrían realizarse las mismas. Así también esta Escuela, mediante un proceso de abstracción relacionado con el significado de la notación, pudo establecer el concepto de "*ley de composición*'éntre los elementos de un conjunto arbitrario. De esta manera, se llegó a comprender más tarde que en matemáticas no tiene importancia ni sentido considerar los objetos en si, ni su naturaleza, sino que lo fundamental son las relaciones que se pueden establecer entre tales objetos como elementos de los conjuntos a los cuales pertenecen y que dichas relaciones *estructuran los conjuntos* mediante *leyes de composición*.

Como bien lo señala Stewart, la tendencia creciente *a la abstracción y a la generalidad*, que siempre marchan juntas, se ha constituído en uno de los aspectos más notables de las matemáticas modernas, por cuanto a esto se debe la ventaja de la llamada por Bourbaki "*economía de pensamiento*", ya que, por ejemplo, evita demostrar varias veces un mismo teorema que se puede presentar bajo apariencias diferentes, siendo suficiente "demostrarlo una sola vez dentro de un marco general". Afirma también Stewart, que cada concepto fundamental de la matemática moderna abarca una multitud de objetos diversos, los cuales poseen una propiedad en común cuyas consecuencias se desarrollan en una teoría abstracta. Así por ejemplo, tratándose de la teoría de grupos, el *concepto de grupo* se aplica a los desplazamientos rígidos en el espacio, a las simetrías de figuras geométricas, a la estructura aditiva del conjunto de los números enteros, y a la deformación de curvas en un espacio topológico. La propiedad en común, para todos estos casos, es simplemente la posibilidad de combinar dos elementos de un conjunto para obtener otro elemento del mismo conjunto.(Stewart, 1977, p. 12, 13).

Es claro entonces, como sostiene Babini, que la noción abstracta de *ley de composición*, que al ser aplicada a los nuevos objetos de la matemática moderna amplió considerablemente el campo del álgebra, se originó en el proceso de creación de *sucesivas extensiones del concepto de número*. Así mismo, la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico–literales fueron determinados por la *generalidad del concepto de número*. Esta metodología de la *generalización y de la abstracción deliberadas*, tuvo como culminación, en el siglo XIX, la *noción de estructura* que se constituyó en el más significativo aporte "de todas las tentativas sucesivas para ampliar el concepto de número"(Bell, 2002, p. 197). De igual manera, el interés en la *noción abstracta de estructura* y el surgimiento de nuevas álgebras que se dio durante la segunda mitad del siglo XIX, hizo posible llegar a "*amplias generalizaciones* en el campo de los números y su aritmética"(Boyer, 1986, p. 732).

Todos estos conceptos de *generalización, abstracción deliberada, ampliaciones y extensiones en el campo de los números* y otras como *libertad de creación en matemáticas*, que culminaron en la *noción de estructura*, ponen en evidencia la pertinencia y la importancia de la obra de Cantor y desde luego, la de Dedekind en la *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica*, objetivo principal de la tesis.

El propósito fundamental y la conclusión final de esta sección de la tesis conducen a corroborar los dos puntos de vista, muy respetables, relacionados con la temática desarrollada en la misma. Es decir, por una parte, tiene razón Wussing al afirmar enfáticamente que el origen y la evolución de la *noción abstracta de estructura de grupo* tuvieron tres raíces históricas, a saber, la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. (Wussing, 1984, p. 16). Por otra parte, está en lo cierto también Ferreirós cuando sostiene que la *noción de estructura* surgió gracias a la conciencia progresiva de profundos fenómenos de *isomorfismos*. (Ferreirós, 1990).

Referencias bibliográficas

Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. Cali, Colombia: Norma.

Acevedo, M., & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra. De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia - Colciencias.

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A., & otros (1980). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial.

Alvarez, C., & Barahona, A. (2002). *La continuidad en las ciencias*. México, D. F.: Universidad Nacional Autónoma de México & Fondo de Cultura Económica.

Apéry, R., & otros (1988). *Pensar la matemática*. Barcelona: Tusquets Editores.

Arbogast, G., P. Berri, M., Brydegaard, M., & Otros (1978). *Sugerencias Para Resolver Problemas(National Council of Teachers of Mathematics)*. México D.F.: Editorial Trillas.

Arboleda, L. C. (1990). Las ideas aritméticas de los pitagóricos. En Luis Carlos Arboleda (Ed.) *Historia general de las ciencias*, (p. 201). Bogotá, D.C., Colombia: Editora Guadalupe.

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *Especial - Festscrift Ubiratan D'Ambrosio* (1).

Arboleda, L. C., & Recalde, L. C. (1997). Las concepciones sobre matemáticas y experiencia en Maurice Fréchet. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *VI* (1 y 2), 79–94.

Babini, J. (1980). Historia de las ideas modernas en matemáticas. Buenos Aires: Departamento de Asuntos Científicos y Tecnológicos de la Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos.

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Birkohff, G., & Mac Lane, S. (1970). *Álgebra Moderna*. Barcelona: Editorial Vicens-Vives.

Bobadilla, M. L. (2001). *Las concepciones de Fourier sobre matemáticas y experiencia y la instauración de la teoría analítica del calor*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Bourbaki, N. (1962). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Bourbaki, N. (1970). *Algèbre*. Paris: Hermann.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Campos, A. (1981). Los problemas de Hilbert (primera parte). *Lecturas Matemáticas*, *II* (1), 23–28.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional.

Campos, A. (1997). Descartes, investigador matemático afortunado. En V. S. Albis, & otros (Eds.) *Memorias del Seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes*, (pp. 12–13). Bogotá, D.C., Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Cantor, G. (2005). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. Barcelona: Editorial Crítica.

Castro Chadid, J., Ivan. y Perez Alcázar (2007). *Un paseo finito por lo infinito*. Bogotá, D. C.: Pontificia Universidad Javeriana.

Courant, R., & Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Aguilar.

De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Editorial Tecnos.

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1947). *La geometría*. Buenos Aires: Espasa-Calpe. (Verisón Original 1637).

Dieudonné, J. (1962). David Hilbert (1862-1943). En F. L. Lionnais, & colaboradores (Eds.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, cap. 2, (pp. 312–319). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Dieudonné, J. (1987). *Panorama de las matemáticas puras. La elección bourbakista*. Barcelona: Editorial Reverté.

Dieudonné, J. (1988). Matemáticas vacías y matemáticas significativas. En R. Apéry, & otros (Eds.) *Pensar las Matemáticas*, (p. 187). Barcelona: Tusquets Editores.

Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid: Alianza Editorial.

Eves, H. (1969). Estudio de las geometrías. México: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Ferreirós, J. (1990). ¿Por qué el álgebra simbólica británica no fue un álgebra estructural? En *Structures in Mathematical Theories*, (pp. 241–244). Universidad del País Vasco. Reports of the San Sebastian Symposium.

Ferreirós, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de conjuntos 1854-1908*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Ferreirós, J. (1994). Lógica, conjuntos y logicismo: desarrollos alemanes de 1870 a 1908. *Mathesis*, *X* (3), 255–272.

Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Ferreirós, J., & Gray, J. J. (2006). *The architecture of modern mathematics. Essays in history and philosophy*. New York: Oxford University Press.

Fraleigh, J. B. (1988). *Álgebra abstracta*. México, D. F.: Addison-Wesley Iberoamericana.

Gardies, J. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris: Vrin.

Gentile, R. E. (1985). *Aritmética elemental*. Buenos Aires: Departamento de Asuntos Científicos y Tecnológicos de la Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos.

Gálvez, F. (2005). *De la matemática de la continuidad aristotélica a la filosofía del continuo matemático*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.

Gray, J. (1992). *Ideas de espacio*. Madrid: Mondadori.

Herstein, N. I. (1979). *Álgebra moderna*. México, D. F.: Editorial Trillas.

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. New York: Dover Publications.

Kline, M. (1976). *El Fracaso de la Matemática Moderna - Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI editores.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, II*. Madrid: Alianza Editorial.

Kostrikin, A. I. (1980). *Introducción al álgebra*. Moscú: Editorial Mir.

Körner, S. (1977). *Introducción a la filosofía de la matemática*. México D. F.: Siglo XXI, 4ta ed.

Kurosch, A. G. (1981). *Curso de álgebra superior*. Moscú: Editorial Mir.

Moreno, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. *Mathesis*, *VII* (2), 189–204.

Moreno, L. (1997). Weierstrass: Cien años despúes. *Miscelánea Matemática*, (25), 11–27.

Moreno, L. (2002). La construcción del espacio geométrico, un ensayo histórico-crítico. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) *Memorias del Seminario Nacional: Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, (pp. 99–109). Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media, Bogotá, D.C., Colombia: Enlace Editores.

Piaget, J. (1971). *El estructuralismo*. Buenos Aires: Proteo.

Piaget, J. (1979). *Tratado de lógica y conocimiento científico*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Piaget, J., Choquet, G., Dieudonné, J., Thom, R., & otros (1980). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial.

Polya, G. (1972). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México D. F.: Editorial Trillas.

Pérez Alcázar, J. H. (2007). *Una fundamentación de la historia de las matemáticas*. Bogotá D. C.: Arfo Editores.

Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Recalde, L. C. (1994). *El papel del infinito en el surgimiento de la topología de conjuntos*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Recalde, L. C. (2004a). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *XII* (1), 51–72.

Recalde, L. C. (2004b). *La teoría de funciones de Baire. La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Sánchez Botero, C. H. (1994). *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Sánchez Fernández, C., & Valdés Castro, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo*. España: Nivola libros y ediciones.

Stewart, J. (1977). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza Editorial.

Takahashi, A. (1975). Las nociones matemáticas, vi. En *Boletin de Matemáticas*. Sociedad Colombiana de Matemáticas y el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional, Bogotá D. E.: Universidad Nacional.

Vasco, C. (1983). *El álgebra renacentista*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Vasco, C. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Academia colombiana de ciencias exactas, físicas y naturales*, *XVIII* (69), 211–224.

Waerden, B. L. v. d. (1985). *A history of algebra. From al-Khwārizmī to emmy Noether*. Berlin: Springer-Verlag.

Wussing, H. (1984). *The genesis of the abstract group concept*. Londres: The MIT Press.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.