CONCEPTOS BASICOS RELACIONADOS CON EL CONTROL ESTADISTICO DE PROCESOS (CEP)

CARLOS EDUARDO GÒMEZ ZÚÑIGA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE COLOMBIA
Bogotá. Colombia
cegomezu@gmail.com

Resumen

Actualmente las técnicas de control estadístico de procesos (CEP) son herramientas muy utilizadas en la supervisión de los procesos productivos a nivel mundial. El CEP tiene como objetivo controlar las características de calidad más importantes de un producto durante su proceso de fabricación.

Estas técnicas de CEP ayudan a descubrir una causa especial de variación que no siempre hace parte del proceso, pero surge debido a circunstancias específicas.

El presente artículo, muestra los conceptos básicos para interpretar el control estadístico de procesos

Palabras claves: Control Estadístico de Procesos, Cartas de Control, Control de Calidad.

Abstract

Currently, The Techniques statistical process control (SPC), are frequently used tools in monitoring production processes worldwide. The SPC aims to control the most important quality characteristics of a product during its manufacturing process.

This techniques the SPC help to discover a special cause of variation that does not always part of the process, but arises due to specific circumstances.

This paper, shows the basic concepts for interpreting the statistical process control.

Keywords: Statistical Process Control, Control Charts, Quality Control.

INTRODUCCION:

En los últimos años ha aumentado considerablemente, por parte de las compañías, el interés en mantener la calidad de sus productos fabricados. En los años 70s y comienzos de los 80s se aprecia un resurgimiento en la aplicación de métodos estadísticos en la industria. Un fabricante que desea mantener el nivel de calidad en su producto terminado debe implementar procedimientos estadísticos que permitan detectar cualquier desviación seria del estándar de calidad exigido e inferir si estos están o no bajo control, (Montgomery, 2001). Por otro lado, el consumidor está interesado en verificar que el producto que adquiere reúne ciertos estándares de calidad, especialmente si compra lotes muy grandes de cierto producto.

La forma más efectiva de controlar la calidad de los productos fabricados es utilizando lo que se conoce como cartas estadísticas de control de calidad y muestreo periódico. Para ello es necesario establecer procedimientos de inspección de muestras del producto proveniente del lote y concluir si reúne o no los estándares de calidad exigidos.

Cabe anotar que en la práctica, el monitoreo de procesos consiste en medir y realizar controles simultáneos sobre varias características de calidad correlacionadas. Si se ignora la correlación y se utilizan "gráficos de control Shewhart" para cada variable por separado, con el fin de vigilar la estabilidad del proceso, se puede perder información importante, (Regina Y. Liu,1995). Debido a ello el Control Estadístico de Procesos Multivariado (CEPM) constituye una valiosa alternativa al control univariado. Entre los gráficos más importantes, desarrollados para el CEPM pueden mencionarse: T^2 de Hotelling, a veces denominado gráfico Shewhart multivariado (1947) .MEWMA, gráfico multivariado de promedios móviles ponderados exponencialmente. [Lowry y colaboradores (1992)]. MCUSUM, gráfico multivariado de sumas acumuladas. [Crosier (1986)].

Se presenta los conceptos básicos y las utilidades del control estadístico de calidad univariado, como algunas cartas de control para la media y el rango, y se finaliza con la interpretación de la longitud promedio de racha.

2. GENERALIDADES:

Las cartas de control se originaron en 1924 con Walter A. Shewhart quien realizó los primeros bosquejos. En 1931 publicó el libro **"Economic control of quality of manufactured product"**, en el cual se sentaron las bases del control estadístico de calidad. Harold Dodge y H. Roming desarrollaron las aplicaciones de la teoría estadística en inspección por muestreo. En 1944 publicaron el trabajo "Tablas de inspección por muestreo- muestreo simple y doble".

El trabajo de estas tres personas es la base de lo que se conoce en la actualidad como el control estadístico de calidad.

En el control estadístico de calidad se destacan dos áreas generales:
1.-Planeamiento de la calidad.
2.-Inspección de la calidad.

De acuerdo al tiempo de inspección se puede hacer diferencia entre lo que se conoce como control de procesos y muestreo de aceptación.
El siguiente gráfico, muestra esta diferencia:

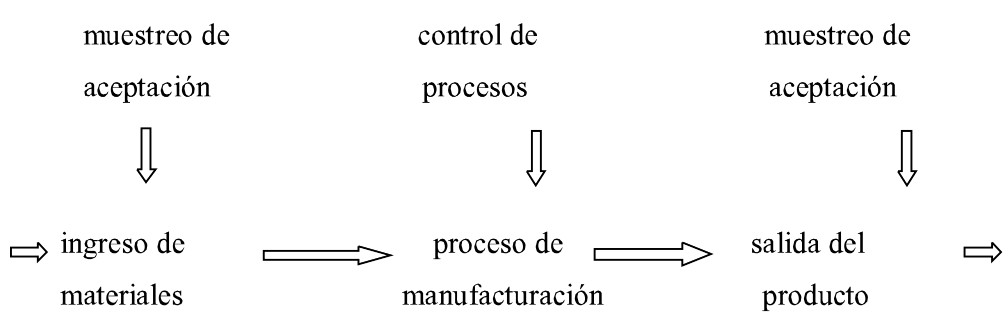

Gráfico 1. Diferencia entre control de procesos y muestreo de aceptación.

Definición 1. Se entiende por control estadístico de procesos (CEP) todas las formas de inspección administrativa durante el proceso de manufacturación. (Montgomery, 2001).

Una de las herramientas estadísticas más empleadas en el control estadístico de procesos son las cartas de control, las cuales utilizan procedimientos de decisión basados en un muestreo repetitivo para estudiar un proceso.

En el desarrollo de una carta de control, un factor clave es la variabilidad en la calidad del producto terminado. Para cualquier proceso, es inherente cierta cantidad de variabilidad en la calidad, sin importar cuántos esfuerzos se encaminen para lograr su control. Este tipo de variabilidad es una función de factores aleatorios que, de manera común, se encuentran más allá del control. Esta variación aleatoria generalmente es aceptable y no compromete en modo alguno el estándar de calidad exigido. La variabilidad también se puede deber a causas no aleatorias o fijas; estas pueden tomar la forma de un mal funcionamiento en una máquina, variabilidad en la calidad de las materias primas, en general, actitud del trabajador, y otras.

Así, considerando estos elementos se presenta la definición de una carta de control.

Definición 2. Una carta de control estadístico es el procedimiento inferencial con el cual se decide si una desviación observada de la norma deseada se debe sólo al azar o a alguna causa atribuible. (Vargas, J.A,2006)

Si la decisión es que la variación es aleatoria, entonces se dice que el proceso de interés se encuentra bajo control (BC). De otro modo, se juzga como fuera de control (FC) y en este caso lo que se hace, en forma general, es detener el proceso y llevar a cabo todos los esfuerzos necesarios para detectar la causa del problema.

Dado que la inferencia se basa en la probabilidad, es posible que un proceso se juzgue como fuera de control cuando, de hecho, se encuentra bajo control o viceversa.
Las consecuencias de estos errores pueden ser fatales; por ejemplo si se declara a un proceso como fuera de control, cuando en realidad está bajo control, se tratará de determinar una causa inexistente. Por otro lado, si el proceso en realidad está fuera de control y se permite que este continúe, el estándar de calidad deseado no se alcanzará.

Se debe notar que estos errores son idénticos a los errores tipo I y tipo II conocidos en pruebas de hipótesis.

Usualmente, la determinación de una carta de control depende de la toma periódica de muestras aleatorias de tamaño n del proceso de interés, con lo que se obtiene, para cada una de éstas, un valor de alguna estadística de importancia como la media, el rango o la desviación estándar muestral. Si sólo interviene una variable en el proceso, se está tratando con cartas de control univariadas; por el contrario, si dos ó más variables intervienen en dicho proceso, se construyen cartas de control multivariadas.

Las cartas de control son una representación gráfica de los valores de la estadística observada, frente al número de la muestra o el período durante el cual se obtuvo ésta. Una carta de control está conformada por un límite de control superior (LCS) y un límite de control inferior (LCI), que constituyen los criterios de decisión para el proceso, es decir, una gráfica de estas, advierte que el proceso está bajo control cuando los valores de la estadística se encuentren dentro de estos límites. Si un valor de la estadística se encuentra fuera de los límites de control, se considera que el proceso está fuera de control. También se encuentra una línea central (LC) que define la norma prescrita para el proceso. Una carta de control se muestra en el siguiente gráfico:

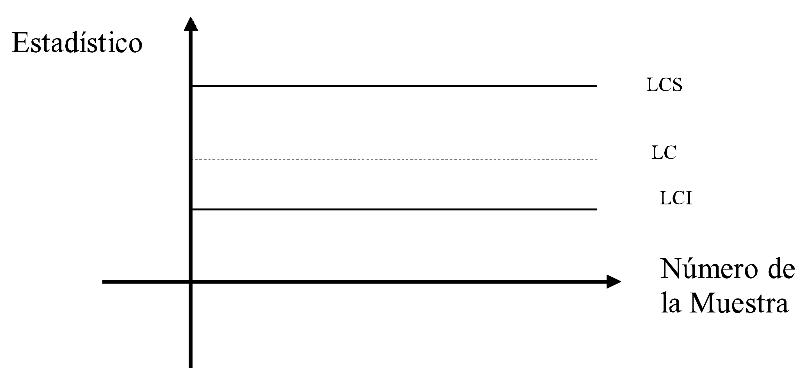

Grafico 2. Prototipo de una carta de control univariada

El tamaño de muestra está determinado por la tasa de producción, y variará de período a período. Tanto el tamaño de la muestra como la frecuencia del muestreo deben ser determinados de manera conjunta con los directivos de la empresa.

Una muestra grande producirá límites que quedarán más cercanos a la línea media de la carta, pues las desviaciones estándar de estadísticas como $\overline{X}$ varían inversamente con $\sqrt{n}$; es decir, entre más grande es n, más pequeña es la desviación estándar y tanto más cercanos los límites a la línea central de la carta. Además, con una carta de control univariada se puede decidir que acción realizar una vez que se juzga al proceso como fuera de control.

Sin embargo, existen algunos principios generales, Shewhart argumentaba que podía alcanzarse un balance apropiado entre el costo del muestreo y la exactitud del estimador, si las muestras tienen un tamaño de cuatro o cinco observaciones cada vez. (Montgomery, 2001).

Si se asume que la distribución de algún estadístico, digamos X, es normal, se acostumbra a usar límites de control tres-sigma (3σ) , esto es, a partir del valor prescrito para el proceso (línea central), se suma y se resta 3 desviaciones estándar de X para obtener los límites superior e inferior respectivos de la carta. Para construir las cartas de control cuando no se conocen los parámetros, se utilizan dos fases en la construcción, llamadas Fase I y Fase II. La Fase I se conoce también como fase retrospectiva y la Fase II se conoce como fase prospectiva, (Vargas, J.A,2006).

En la Fase I, se toma un conjunto histórico de datos y se obtienen estimadores de los parámetros. Se construye una primera carta con estos estimadores, si se encuentra puntos fuera de control, se investigan. Si se encuentran causas asignables para estos puntos, se eliminan y se repite el proceso de construcción. Esto implica que la fase I requiere construir una carta que esté bajo control (BC) y si se considera que está bajo control, se pasa a la fase II que se conoce como el monitoreo en línea. Todas las cartas pasan por las fases I y II al menos que se conozcan los parámetros.

Se recalca que en la práctica se consideran de manera conjunta mas medidas de calidad multivariadas que univariadas, ya que generalmente la calidad de un producto está determinada por más de una característica de calidad, Por ejemplo, la calidad de un cierto tipo de pastillas farmacéuticas está determinada por el peso, grado de dureza, espesor, anchura y longitud. Estas características están correlacionadas, ya que existe asociación entre las variables, por ejemplo el peso depende del grado de dureza, etc.
, (Jackson,1985)
Si se desea detectar cambios, por ejemplo, en cada media del proceso a diferentes intervalos de tiempo, las cartas de control univariadas no son las adecuadas.

Entre las cartas de control multivariadas se destaca la carta de control T^2 de Hotelling que se utiliza para detectar señales fuera de control en vectores de medias, o las cartas a partir de componentes principales y otras.

El acercamiento multivariado al control de calidad fue publicado por primera vez por Hotelling,(Hotelling, 1947 y 1951) quien propuso el uso de cartas de control multivariadas basadas en la estadística T^2 suponiendo que la distribución asociada a las variables aleatorias es normal multivariada.

Se presentan a continuación, algunas construcciones de cartas de control univariadas y el concepto de longitud promedio de racha

2.1 Carta $\overline{X}$ (media y varianza conocidas)

Se construye una carta de control con base en la media muestral cuando la medición de interés se supone normal con media μ y desviación estándar σ conocidas. El conocimiento que se tiene sobre μ y σ se puede deber a la naturaleza particular del proceso de interés, el cual da la suficiente información con respecto a la media y a la desviación estándar. Para este caso, una carta $\overline{X}$ proporciona el procedimiento inferencial por medio del cual se puede decidir si la media del proceso es la que se afirma.

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n del proceso de interés. Dado que por hipótesis $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, y la media muestral $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Si n es suficientemente grande, la probabilidad de que $\left|\bar{X} - \mu\right|$ sea menor que $3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es:

$$P\left[\left|\bar{X} - \mu\right| < 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0.9974$$

De esta forma, los límites de control tres-sigma son:

$$\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(1)}$$

Es decir, cuando se toma una muestra de tamaño n, se calcula y se grafica un valor de la media muestral, si esta se encuentra dentro de los límites de control determinados por $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se asume que el proceso se encuentra bajo control; de otra forma, está fuera de control.

2.2. Carta de control R

Cuando se trata una característica de calidad que puede expresarse como una medición, es costumbre vigilar tanto el valor medio de esta como su variabilidad.

La variabilidad del proceso puede controlarse ya sea con una carta de rangos R, que muestra variaciones en los rangos de las muestras, o con una carta de desviación estándar de la población. Los límites de control de $\bar{X}$, cuando se conocen la media y la desviación estándar del proceso, no tienen ninguna dificultad; pero cuando se desconocen estos parámetros, existen procedimientos para estimarlos a partir de ciertas muestras.

La estimación de σ se puede hacer a partir del rango de las observaciones dentro de cada muestra, como el tamaño de la muestra es relativamente pequeño, se pierde muy poca eficiencia al estimar σ a partir de los rangos de las muestras. Con esta estimación, se pueden construir inicialmente los límites de control para una carta $\overline{X}$ y luego para la carta R.

Es necesario obtener la relación entre el rango R de una muestra tomada de una población normal con parámetros conocidos y la desviación estándar de la población. Puesto que R es una variable aleatoria, la cantidad $W = \frac{R}{\sigma}$ (rango relativo) también es una variable aleatoria. Los parámetros de la distribución de W se determinan para cualquier tamaño de muestra n. La media de la distribución de W es d_2 (existen tablas que proporcionan este número para varios valores de n).

Sea R_i el rango de la *i-ésima* muestra, y sea:

$$\overline{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i$$

el rango promedio, entonces, un estimador de σ es: $\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$

Por lo tanto, para la carta $\overline{X}$ pueden emplearse como límites de control superior e inferior los siguientes:

$$LCS = \overline{\overline{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}$$

$$LCI = \overline{\overline{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}$$

donde $\overline{\overline{X}}$ es el estimador de las medias de las muestras.

Se define la constante A_2 como: $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$.

Ahora, una vez calculados los valores muestrales $\overline{\overline{x}}$ y $\overline{r}$, los límites de la carta de control $\overline{X}$ pueden definirse de la siguiente manera:

$$LCS = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{r}$$
$$LC = \overline{\overline{x}}$$
$$LCI = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{r}$$

Donde la constante A_2 aparece tabulada para varios tamaños de muestra,(**Duncan ,1986).**

Por último, se pueden determinar con facilidad los límites de la carta R, la línea central está dada por $\overline{r}$. Para determinar estos límites de control, es necesario tener una estimación de σ_R (desviación estándar de R). De nuevo, la distribución del rango relativo, W es de utilidad. La desviación estándar de W, σ_W, está en función de *n*, en consecuencia y puesto que $R = W \cdot \sigma$, la desviación estándar de R puede obtenerse como: $\sigma_R = \sigma_W.\sigma$.

Dado que el valor de σ no es conocido, puede estimarse σ_R como: $\hat{\sigma}_R = \sigma_W \dfrac{\overline{R}}{d_2}$, con lo que pueden emplearse como límites de control superior e inferior de la carta R los siguientes:

$$LCS = \overline{R} + \frac{3\sigma_W}{d_2}\overline{R} = \left(1 + \frac{3\sigma_W}{d_2}\right)\overline{R}$$
$$LCI = \overline{R} - \frac{3\sigma_W}{d_2}\overline{R} = \left(1 - \frac{3\sigma_W}{d_2}\right)\overline{R}.$$

Si se hace $D_3 = 1 - \dfrac{3\sigma_W}{d_2}$ y $D_4 = 1 + \dfrac{3\sigma_W}{d_2}$, se tiene los siguientes límites de control de una carta R:

$$LCS = D_4\overline{r}$$
$$LC = \overline{r}$$
$$LCI = D_3\overline{r}.$$

Donde $\bar{r}$ es el rango promedio muestral, y los valores de las constantes D_3 y D_4 aparecen tabuladas para varios tamaños de muestra, (**Duncan ,1986).**

Para construir las cartas $\overline{X}$ y R se recomienda empezar por esta última, debido a que los límites de control de la carta $\overline{X}$ dependen de la variabilidad del proceso, estos límites no tendrán mucho sentido a menos que la variabilidad del proceso esté bajo control y esto se observa con la carta R.
Es decir, cuando la carta R indique que la variabilidad del proceso está bajo control se recomienda trazar la carta $\overline{X}$.

2.3. Carta $\overline{X}$ (media y varianza desconocidas)

En este caso, los límites de control se basan en los valores estimados para μ y σ y se procede con las fases I y II en la construcción de las cartas. Dado que no se conoce el valor promedio del proceso, tampoco se conoce la línea central de la carta de control. Si la línea central es un valor estimado basado en un gran número de muestras, los límites de control que se obtienen de esta manera deben considerarse sólo como *límites tentativos*, ya que quizá se necesite una modificación antes de que se puedan utilizar para medir la calidad de un producto en futuras operaciones de producción, esto significa que los límites de control tentativos son apropiados para determinar si las operaciones pasadas de un proceso de producción estuvieron bajo control. Para extenderlos a la producción futura, el procedimiento usual es eliminar todos aquellos puntos que se encuentren fuera de los límites tentativos de control y recalcular el valor de estos con base en el resto de la información muestral. Se continúa este proceso hasta que todos los puntos se encuentren dentro de los límites de control, tanto para la carta $\overline{X}$ como para la carta S. A este procedimiento se conoce como la fase I. La razón para este procedimiento es que los límites de control para la futura producción deben ser funciones de las observaciones que se lograron mientras el proceso de producción estaba bajo control.

De acuerdo con Shewhart, los límites tentativos de control deben estar basados, en por lo menos, 20 muestras, cada una con cuatro o cinco observaciones. Shewhart denominó a estas muestras *subgrupos racionales.* Estos deben seleccionarse de manera tal que cada subgrupo sea prácticamente homogéneo y proporcione la máxima oportunidad de variación de un subgrupo a otro, (Montgomery, 2001)

Para un proceso de producción esto implica que las observaciones para un subgrupo deben tomarse en un momento que sea diferente al de otro subgrupo. Se emplea un tamaño relativamente pequeño de la muestra de cuatro o cinco observaciones, no sólo para mantener el balance entre el costo del muestreo y la exactitud del estimado, sino también, para dar una mínima oportunidad de variación dentro de cada subgrupo.

Sea m el número de muestras y supóngase que $n_i = n$ para toda $i = 1,2,3,\ldots m$. Además, sean $\overline{X}_i$ y S_i la media y la desviación estándar muestrales de la *i-ésima* muestra. Para todas las m muestras, se definen las estadísticas:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_i}{m} \text{ y } \overline{S} = \frac{\sum_{i=1}^{m} S_i}{m}$$

Se observa que $E(\overline{\overline{X}}) = \mu$; de esta forma, el promedio de todas las m muestras es un estimador insesgado de μ. De manera similar,

$$E(\overline{S}) = \frac{1}{m}\sum E(S_i) = \frac{1}{m}(mC_4\sigma) = C_4\sigma .$$

Lo cual sugiere que un estimador de σ es $\dfrac{\overline{S}}{C_4}$. Los límites tentativos 3σ para la media muestral cuando no se conocen los valores de μ y σ son:

$$\overline{\overline{X}} \pm 3\left[\overline{S} \big/ C_4\sqrt{n} \right].$$

Y los correspondientes a la desviación estándar de muestra son:

$$\overline{S} \pm 3\left[C_5 \frac{\overline{S}}{C_4} \right].$$

En donde los valores de C_4 y C_5 están dados en tablas.

3. Longitud Promedio de Racha. (ARL)

Una racha se define como una sucesión de objetos de la misma clase. En el diseño de cartas de control y en especial en las cartas multivariadas, se relaciona la longitud promedio de racha con el estadístico T^2. Se presenta la definición de longitud de racha y se realizan algunas observaciones sobre la longitud promedio de racha:

Definición 3. La longitud de racha, se define como el número de puntos graficados en una carta hasta que aparezca una señal de fuera de control. Esta cambia de muestra en muestra en razón a la variabilidad aleatoria. El valor esperado o media de la variable longitud de racha, calculada con base en un número grande de muestras, es llamada: Longitud Promedio de Racha (ARL) y puede ser calculada teóricamente para varias cartas y graficada en una curva, denominada curva ARL. Básicamente la ARL es el promedio de puntos muestrales que hay que graficar antes de tener un punto que indique una señal de fuera de control, (Vargas, J.A,2006).

Para cualquier carta Shewhart, la ARL cuando el proceso está bajo control es:

$$ARL = 1/p$$

donde p es la probabilidad de que un punto esté fuera de los límites de control. Esta fórmula es aplicable si los puntos que se dibujan son independientes. Además se puede obtener por simulación utilizando el programa Shewhart Chart Tutorial, que se descarga desde el sitio web: www.multiqc.com.

Como un primer ejemplo, con la carta $\overline{X}$ y sus límites típicos 3σ: $p(-3 < Z < 3) = 0.9973$ **y** $p = 1 - 0.9973 = 0.0027$ **(2)**

El valor 0.0027 es la probabilidad de que un punto se sitúe fuera de los límites cuando el proceso está bajo control. Luego, la ARL de la gráfica de $\overline{X}$ es:

$$ARL = 1/p = 1/0.0027 = 370\,.$$

Esto es, 370 es el promedio de puntos muestrales que hay que graficar antes de tener un punto que indique una señal de fuera de control.

Existen otras cartas de control, como las cartas para la dispersión del proceso, carta S, o las cartas para proporciones, cartas p, las cuales, al igual que las estudiadas en este artículo, son fáciles de construir e interpretar.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con una carta de control univariada se puede decidir cuáles deben ser los valores de los límites de control y cuántas veces es necesario muestrear, es decir la frecuencia del muestreo.

Las cartas de control estadístico de calidad son fáciles para construir, visualizar e interpretar, y lo más importante, tienen demostrada efectividad en la práctica.

Las cartas de control univariadas pueden ser consultadas para ver la dirección de las variables identificadas como fuera de control.

Se recomienda estudiar las cartas de control de calidad multivariadas, aunque tienen mayor trabajo en su construcción son de gran utilidad en la práctica.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Duncan, A.J., “Quality Control and Industrial Statistics”, 5ed. Richard D. Irwin, Homewood, IL..1986.

Hotelling, H. In: C. Eisenhart, H. Hastay, and W. A. Wallis, eds., “Techniques of Statistical Analysis”, McGraw-Hill, New York, 111-184.1947.

Hotelling, H., “Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability”, University of California Press, Berkeley, CA, 23-41.1951.

Jackson, J.E., “Multivariate Quality Control,” Communications in statistics-Theory and methods, No 14, pág.: 2657-2688.1985.

Montgomery, D.C., “Introduction to Statistical Quality Control”, 4ta Ediciòn.John Wiley and Sons. New York .2001.

Regina Y.Liu., “Control Charts for Multivariate Processes,” Journal of the American Statistical Association, December 1995, vol. 90, No 432. Theory and Methods.1995.

Vargas, J.A., “Control Estadístico de Calidad”. Universidad Nacional de Colombia.2006.

www.multiqc.com.