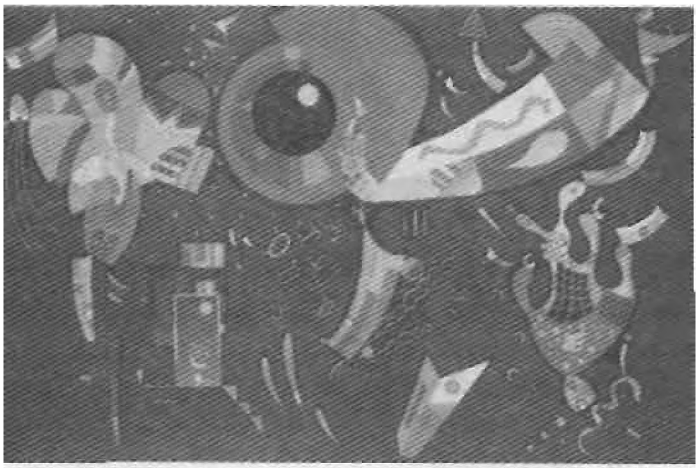

Kandinsky, *Entorno al círculo,* Óleo y esmalte sobre lienzo, 1940.

ORIGEN, DESTIERRO Y RENACIMIENTO DE

LOS INFINITESIMALES

Kemel George González

Revista Educación y Pedagogía

Resumen

ORIGEN, DESTIERRO Y RENACIMIENTO DE LOS INFINITESIMALES

Es fe fexfo *pretende mostrar otra versión de la historia del cálculo diferencial e integral, desde el origen y esplendor de los infinitesimales, hasta su destierro y posterior reivindicación, a la luz del análisis no estándar.*

Résumé

ORIGIN, EXIL ET RENAISSANCE DES INFINITESIMAL[A]

Le bul de cet travail est celui de montrer une autre versión de l'histoire du caicul différentiel et integral, depuis ¡ 'origine et splendeur des infinitésimaux, jusqu'a leur exil et postérieure revendication, á la lumière d'une analyse non standard.

Abstract

ORIGIN, EXILE AND RENAISSENCE OF INFINITESIMALS

This paper wants to show another versión of the history of differential and integral Calculus, from the origin and splendor of the infinitesimal ones, to its later exile and demand, to the light of non standard analysis.

Palabras Clave

Cálculo diferencial, calado integral
Differential calculus, integral calculus

ORIGEN, DESTIERRO Y RENACIMIENTO DE LOS INFINITESIMALES*

Kemel George González **

INTRODUCCIÓN

Hace unos trescientos años el cálculo infinitesimal, o más exactamente, el cálculo con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, reinó en la matemática durante casi dos siglos. Después de tal período de esplendor, entró en desgracia, y fue desterrado a fines del siglo XIX, imponiéndose una nueva doctrina oficial, que es la que se basa en el concepto *límite,* tal y como se enseña en el aula de clase.

Pero los infinitesimales fueron expulsados vivos y rondaron a los matemáticos como fantasmas, durante su destierro. Hace pocas décadas, cumpliendo todos los estándares del rigor, el cálculo con infinitesimales ha renacido y cobra vigor en el aula de clase, compitiendo con el cálculo convencional y mostrando que también tiene futuro. Nosotros mostraremos un fragmento de su grandiosa historia.

Como en toda historia, no han faltado las incomprensiones, las deslealtades y las traiciones. Nos interesa mantener la vista fija en un aspecto fundamental: la actualidad del cálculo infinitesimal, con el sabor que inicial-mente le dieron sus fundadores.

¿QUÉ ES EL CÁLCULO DE LEIBNIZ Y NEWTON?

La respuesta apropiada sólo la obtendremos si viajamos directamente a las fuentes y en los propios títulos de las obras de los primeros autores. Wallis, contemporáneo a Isaac Newton, en 1665, titula su libro: *Arithmetica infini-torum.* Diez años más tarde, hacia 1665, Newton escribe el breve compendio: *De Análysi per Aecuationes Numero Terminorun Infinitas* y luego, en 1671, el *Tractatus De Metho-dis Serierum Et Fluxionum* (2001). Leibniz, en 1686, titula su ensayo: *De geometría recóndita et análysi indivisibilium atque infinitorum...* (1987). La famosa publicación de L'Hopital, que data de 1696, se llama: *Analyse des infini-ment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (1998). Euler denominó su libro magistral: *In-troductio in Analysin Infinitorum,* publicado en 1748, que aparece en dos tomos, en su monumental *Opera Omnia* (1990). Hubo que esperar hasta 1755 para que Euler publicara *Instituciones Calculi Differentialis.* Y hubo que esperar mucho más, hasta 1770, cuando dio a conocer sus tres tomos denominados *Instituciones Calculi Integralis.*

Este artículo hace parte del Proyecto de Investigación "Enseñanza del cálculo con infinitesimales", presentado en la Universidad de Magdalena, en la convocatoria de junio del 2003.
Universidad del Magdalena, Santa Marta.
Dirección electrónica: kemel. george@unimag.edu.co

¿Qué observamos de todos estos títulos? Una palabra curiosa, enigmática, común a todos ellos: la palabra *infinito.* O más exactamente, su plural, *infinitorum.* El cálculo, como lo entendieron sus fundadores, no es otra cosa que el cálculo de infinitos, o más exactamente el cálculo con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Así, queda claramente establecido que hay una gran distinción entre álgebra y cálculo, ya que aquella manipula un número finito de símbolos, mientras que éste manipula infinitudes. Para que sirva de ilustración, podríamos establecer la igualdad: cálculo = álgebra + infinito. De todo esto hay que retener una idea: la íntima relación que existe entre cálculo e infinitud, sea esta infinitud a escala infinita o infinitesimal.

CÁLCULO INFINITESIMAL SIN INFINITESIMALES

Ni siquiera la combinación de las dos palabras *cálculo* e *infinitesimal* indica a qué cuestión se refieren algunos cuando las pronuncian. Ya hemos indicado que los fundadores del cálculo, para titular sus obras, utilizaban indistintamente las palabras *infinito* e *infinitesimal.* En la actualidad, como puede verse en las bibliotecas y en las librerías, la mayoría de los textos escolares utilizan la palabra infinitesimal en su sentido literal, llamando a **sus libros** "Cálculo moderno", "Cálculo infinitesimal", "Cálculo diferencial e integral" o de cualquier otro modo, teniendo cuidado en aclarar que a lo que se refieren es al cálculo de derivadas e integrales, ya que, según estos textos, los infinitesimales no existen.

Bertrand Russell, crítico implacable de los infinitesimales, ofrece la siguiente versión de lo que es el cálculo:

> *Cálculo infinitesimal es el nombre tradicional que recibe el conjunto del Cálculo diferencial e integral, y como tal lo conservo; pero como veremos en breve, no existe alusión ni implicación a lo infinitesimal en parte alguna de esta rama de la matemática* (1996, capítulo 39).

O sea, conserva el cálculo infinitesimal... sin infinitesimales. Y con Russell, se pueden encontrar muchos textos de matemáticas aplicadas donde los infinitesimales se utilizan abundantemente para resolver los problemas planteados; sus autores aclaran que ayudan a la intuición, pero que cuando hablan de infinitesimales no están hablando en serio.

La aparente ambigüedad en la utilización del doble término "cálculo infinitesimal" no obedece tanto a una confusión o un malentendido. Ella encierra el secreto de los cambios que se produjeron en el proceso de desarrollo del cálculo, en el que los infinitesimales y los infinitamente grandes -la materia original- fueron posteriormente desterrados como alternativa, y se impusieron otras construcciones matemáticas que imperan en los currículos oficiales y que, pese a los problemas teóricos y cognitivos que conlleva, han reinando durante los últimos cien años con éxito.

EL CÁLCULO LEIBNIZIANO

Importantes investigaciones modernas arrojan luz sobre el cálculo, como en un principio lo manejaron sus fundadores, desde Leibniz a Euler. Uno de los más destacados estudios es el de H. J. M. Bos (1974-1975). De acuerdo a este investigador, el concepto fundamental del cálculo leibniziano es el de *diferencial.* El análisis cartesiano se caracteriza como el estudio de las curvas mediante métodos algebraicos. Esto es denominado por Leibniz y l'Hópital *cálculo ordinario.* En cambio, el *cálculo infinitesimal* es aquél cuya principal herramienta de análisis es la diferencial.

El concepto *derivada,* como modernamente la denominamos, presupone el *defunción* y, por tanto, no se utilizó como tal durante varias décadas, hasta que se produjo la separación entre la geometría y el análisis, lo que hizo posible la emergencia de la *función de una variable.* La función, como actualmente se la conoce, emerge décadas después de la fundación del cálculo y de la diferencial. El cálculo leibniziano acepta las cantidades infinitas e infinitesimales como genuinas entidades matemáticas. La *variable* opera en un rango como sucesión ordenada de valores. La diferencial es la *diferencia infinitesimal* entre dos valores sucesivos de la variable.

> *Me correspondió a mí, entonces principiante en estos estudios -escribió Leibniz—, que desde un único aspecto de una demostración sobre la magnitud de la superficie esférica se me apareciera de repente la gran luz [...] Hasta que finalmente encontré el verdadero suplemento del Algebra para las trascendentes, es decir, mi cálculo de los infinitamente pequeños, o diferencial o sumatorio o de cuadraturas, y si no me engaño, es lo que llamo acertadamente Análisis de los indivisibles y de los infinitos, que, una vez encontrado, todo lo que antes me causaba admiración en este campo me parece un juego y una broma* (1987).

Ésta es la idea central que queremos fijar de una vez y para siempre: el cálculo diferencial e integral, considerado como álgebra de diferencias y de sumas a escala infinita e infinitesimal, hace que su ejercicio se reduzca a un juego o a una broma.

El esplendor y la gloria

En el período que va desde el último tercio del siglo XVII, hasta mediados del siglo XIX, el cálculo basado en el análisis de los infinitamente pequeños e infinitamente grandes, logró cohabitar con las principales teorías matemáticas de la época, a las que sirvió de paradigma. Es el reinado de Leibniz, Newton, los Bernouilli, Euler, Lagrange, d'Alambert, Fourier, Gauss, Cauchy y Riemann, entre tantos.

Los principales fenómenos físicos o químicos, de diversos tipos: mecánicos, caloríficos, acústicos, ópticos, eléctricos, magnéticos y gravita-cionales, fueron analizados y explicados o nuevamente abordados y modelados matemáticamente a la luz del cálculo infinitesimal. Esto permitió que las relaciones esenciales de la naturaleza, estudiadas durante cientos de años, con la nueva herramienta matemática, se tradujeran en *ecuaciones diferenciales.*

El cálculo con infinitesimales asocia lo finito con lo infinito, vincula lo discreto con lo continuo, emparenta lo algebraico con lo analítico y acerca la teoría al mundo de la experiencia. En el área estrictamente teórica, los fundadores del cálculo resolvieron la totalidad de los problemas de áreas, volúmenes, longitudes de curvas, centroides, momentos de inercia, así como de máximos y mínimos, ratas de cambio, velocidades, tangentes, arcos de curvas, curvaturas de superficies, y desarrollos de funciones en series infinitas y productos infinitos, tal y como se estudian en la actualidad en el aula de clase.

La base conceptual de este cálculo siempre fue el sistema numérico constituido por cantidades finitas, infinitesimales e infinitas, como puede verificarse por la observación simple en los ensayos, textos, libros y literatura de la época. Desde fines del siglo XIX en adelante, el cálculo como *sistema* y sus principales resultados y aplicaciones, permanecieron intactos, pero, como veremos a continuación, su base conceptual fue drásticamente modificada.

El obispo Berkeley contraataca

La más importante y vigorosa exposición de las inconsistencias del naciente cálculo surgió por el lado filosófico, con el ensayo titulado *The Analyst, or A Discourse Addresed to an Infidel Mathematician,* escrito por George

Berkeley [1656 - 1753], calificado por Cajori como "el punto de partida de toda la discusión filosófica de la nueva matemática, en Inglaterra, durante el siglo dieciocho".

Hacia 1734 Berkeley redacta y publica *The Analyst,* que es un ensayo considerado como el catalizador que inicia el movimiento hacia la búsqueda de los fundamentos lógicos, sólidos y rigurosos del cálculo. Berkeley siente la obligación de hacerlo cuando un amigo suyo le comunica que otro amigo común, el doctor Samuel Garth, ha muerto sin recibir los últimos auxilios espirituales y esto debido a la intervención de un matemático, quien convenció al moribundo de que la religión estaba plagada de misterios y sofismas, por lo que no era de confiar. Se asegura que el matemático en cuestión fue Edmund Halley.

Berkeley se pregunta si los fundamentos de la matemática son más firmes que los de la religión: "Aquel que pueda digerir una segunda o una tercera fluxión, o una segunda o tercera diferencia, no necesita, de veras, sentir pudor de cualquier asunto sobre la divinidad". Y añade:

> *Uno muy bien puede preguntarse si no sucederá que así como a otros hombres en otras investigaciones, con frecuencia los engañan las palabras o los términos, de igual manera ellos (los matemáticos) resultan maravillosamente engañados y persuadidos por sus propios y peculiares signos, símbolos o variables. Nada es más fácil que idear expresiones o notaciones para las fluxiones y para los infinitesimales de órdenes primero, segundo, tercero, cuarto y subsiguientes procediendo de la misma manera regular sin fin o límite: x, x, x, X, etc., o bien , Ax, ddx, dddx, etc.*

> *Y, ¿ qué son estas fluxiones; las velocidades de incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitesimales, ni tampoco nada. ¿No podríamos denominarlas los espíritus de cantidades difuntas?*

EXPULSIÓN DE LOS INFINITESIMALES

Uno de los factores que llevaron a los matemáticos a dejar de lado los infinitesimales atañe a algunas de sus inconsistencias. Pero hay otras razones que llevaron a los matemáticos de fines del siglo XIX a cambiar de paradigma, en lo que ha sido denominado por algunos autores, *la época del rigor. A* mediados de ese siglo, grandes pensadores matemáticos se inclinaron paulatinamente por el método de los *límites,* dándole una base lógica al problema de la continuidad, sin apelar -aparentemente- a las infinitudes.

Después de un par de décadas de profundas repercusiones de la obra de Fourier, se erigió el concepto *función* como nuevo paradigma. Desde Euler, una función era considerada una *variable* determinada por una *expresión analítica* o fórmula de sumas, productos, raíces y demás combinaciones algebraicas o trascendentes - exponenciales, logarítmicas, trigonométricas- de otra variable.

Esta situación cambiará radicalmente a partir de los estudios sobre el calor, que adelanta Fourier, quien demuestra que por más arbitraria que parezca la asignación funcional, siempre se puede expresar como serie trigonométrica cuyos valores convergen a los valores asignados por dicha función. De allí que Fourier exprese una idea verdaderamente revolucionaria:

> *En general la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario [...] Nosotros no suponemos que estas ordenadas están sujetas a una ley común; ellos se suceden unos a otros de cualquier manera que sea [...]* (citado en Keisler, 1976).

Otro exponente del rigor de la época es Kart Weierstrass, profesor desde 1856 y durante treinta años, de la Universidad de Berlín. Su razonamiento extremadamente cuidadoso y preciso ha pasado a la historia como *rigor* *weiestrassiano.* Weierstrass define, con el mayor cuidado del mundo, el límite de una sucesión y de una función, la continuidad de una función, la convergencia de las sucesiones y series de funciones, imponiendo los famosos *épsilon* y *deltas* como la política oficial que dominará en las matemáticas en los siguientes cien años.

Con la teoría de límites se logra recontextualizar el cálculo diferencial e integral originario en Leibniz y Newton, mostrando una solución radicalmente distinta a la diferencial y a la integral leibniziana: la doctrina oficial definirá la derivada como límite de un cociente y a la integral como límite de unas sumas parciales.

REMINISCENCIAS INFINITISTAS

En el largo interregno transcurrido entre los fundadores del cálculo y nuestros contemporáneos, ¿que se hicieron los "espíritus de cantidades difuntas"? Los conceptos atacados por Berkeley se adhirieron de contrabando a las dos áreas fundamentales del cálculo, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Y pese a los esfuerzos que se hicieron para desembarazarse de estos entes molestos, la matemática siguió haciendo uso de ellos.

Respecto al cálculo diferencial, ni siquiera el apellido *diferencial* de esta área ha podido dejarse de lado. Mucho menos el concepto *diferencial* y las famosas notaciones leibnizianas *dx, dy,* cuyo cociente leibniziano

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

se mantiene, con la salvedad que hacen algunos autores, de que la parte izquierda es simbólica, ya que la "verdadera" entidad matemática es la *derivada,* que es la de la derecha.

En relación al cálculo integral, la situación es mucho más dramática: la notación universal

$$\int_a^b f(x)dx$$

es fiel copia de la notación original de Leibniz. Como ya hemos visto, para Leibniz esta expresión no es meramente simbólica, pues literalmente significa la *suma infinita* de las áreas infinitesimales *f(x)dx,* donde *f(x)* es la altura del rectángulo cuya base es *dx.* Como todos los esfuerzos por expulsar esta notación han sido inútiles, en el aula de clase se ha legalizado este contrabando leibniziano, hasta el extremo de lo cómico, pues mientras el profesor dibuja las áreas infinitesimales leibnizianas, aclara que lo que está dentro de la integral es sólo un *signo* cuyo significado es la integral de Riemann o de Lebesgue. Esta doctrina oficial sufrió un rudo golpe a inicios de la década del sesenta, cuando uno de los más prominentes matemáticos del siglo XX, Abraham Robinson, reinventò una nueva teoría, que produjo el renacimiento de los infinitesimales.

SE RECUPERA LA HONRA: EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

Desde la publicación, en 1966, del principal libro de Robinson, *Non-Standard Análisis* (1974), el análisis matemático no es el mismo. Según el eminente historiador y su principal biógrafo, J. W. Dauben (1995), Robinson descubrió y desarrolló el análisis no estándar como una teoría rigurosa de los infinitesimales que une la lógica matemática con el gran cuerpo de la historia y la matemática moderna.

Robinson le otorga crédito a las ideas germinales del renombrado lógico Thoralf Skolem, quien en 1934 demostró que el sistema de los números naturales no podía ser caracterizado por ningún conjunto que tuviese sus mismas propiedades aritméticas, que fuesen formuladas en el cálculo de predicados de primer orden.

En su "Prefacio", Robinson dice lo siguiente: "En el otoño de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la Lógica Matemática contemporánea son capaces de proveer un marco adecuado para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral por medio de los números infinitamente grandes e infinitamente pequeños"

No sobra aquí hacer un resumen de este marco adecuado al que se refiere Robinson una vez se posiciona el análisis no estándar como una nueva teoría y un nuevo método en la matemática.

1. Se construye un campo linealmente ordenado *R que es una extensión del campo R de los números reales, denominado *el campo hiperreal.* Esto permite contar con un nuevo sistema numérico en el que coexisten tres tipos de cantidades distintas: los números finitos, los infinitos y los infinitesimales. Las cantidades del viejo sistema numérico R serán denominadas *reales ordinarios* y restarán contenidas en *R.

2. Además, con los métodos de la lógica matemática, se logra demostrar que todas las fórmulas válidas en el campo real son igualmente válidas en el campo hiperreal. Así, habrá igualmente enteros infinitos, racionales infinitos como cocientes de enteros infinitos, y funciones con variables y valores en el nuevo campo *R.

3. La recta geométrica adquiere una nueva e insospechada representación numérica, ya que todo hiperreal finito **r* puede ser expresado en la forma **r— r+ a*, donde *r* es un real ordinario denominado *parte estándar* de **r* y *a* es infinitesimal, lo que se escribe *a* » 0. Esto permite visualizar en la recta geométrica a todo real ordinario rodeado de todos los que están infinitamente próximos a él, lo que se denomina el *átomo* del real.

4. El cálculo diferencial e integral se desarrolla de un modo enteramente distinto del cálculo oficial: toda función $f(x)$ tiene diferencial $df = f(x+dx) - f(x)$, donde dx es infinitesimal, de modo tal que podemos formar el cociente diferencial

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Sólo en caso de que este cociente sea finito y esté en el átomo de un real ordinario, se dirá que la función tiene derivada y se designará a esta *derivada* como $f'(x)$.

De similar forma, la integral será una suma de valores. Por ejemplo, para obtener la integral de una función en el intervalo [0, 1], se toma un número entero infinito N y un infinitesimal dx tal que $dx = \frac{1}{N}$. Si la suma siguiente está en el átomo de un real ordinario, entonces dicho real ordinario es la integral:

$$\int_0^1 f(x)dx = St\sum_{n=0}^{N} f(ndx)dx$$

Las ideas de Robinson están influyendo poderosamente en la época. El análisis no estándar se utiliza en la lógica matemática, el análisis funcional, la estadística y la probabilidad, la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales, la física matemática y en muchas otras áreas de la ciencia.

TENDENCIAS DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

El cálculo infinitesimal, o sea, el cálculo con infinitamente grandes e infinitamente pequeños, después de Robinson, se despliega en varias tendencias, de las cuales es prematuro –e innecesario– hacer un balance, aunque conviene presentar las direcciones de investigación que, de una u otra forma, repercuten en el aula de clase. Destacamos, en primer lugar, la que se ha delineado desde Nelson (1977), que consiste en insertar tres nuevos axiomas en la teoría axiomática de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel, cuyas siglas son ZFC. Surge así la Teoría interna de conjuntos (IST). Esta construcción tiene varios seguidores, como Robert, en Francia, quien ha editado textos escolares que sirven de base a cursos de cálculo.

Hay métodos de construcción de la recta no estándar, como los de Hurd-Loeb y Lindstrom, quienes obtienen el campo de los *hiperreales* -con tres tipos de cantidades, reales ordinarios, reales infinitos e infinitesimales- utilizando sucesiones numerables de reales ordinarios, identificadas entre sí con el uso de *ultra-filtros.'*

Desde el punto de vista cognitivo, no es nada claro que estos métodos sean más atractivos en el aula de clase que los tradicionales; por el contrario, por su alto nivel de abstracción lógica, son inaccesibles para los físicos, los ingenieros y la gran mayoría de los estudiantes de licenciaturas, aunque varios autores hacen un esfuerzo de popularización en el pregrado y en ciertas instituciones de enseñanza básica, como se nota en Henle y Kleinberg (1979).

Un debate que se dio en la Rusia de 1930, seguramente arrojará más luz sobre el problema de la enseñanza del cálculo moderno y el uso de infinitesimales. Recientemente, se conocieron las Cartas que escribió el gran matemático ruso Luzín (2000) a Vygodskii -no el psicólogo, sino el matemático- a propósito de su libro sobre los *Fundamentos del cálculo infinitesimal.* Luzín le apoya su idea de enseñar el cálculo con infinitesimales, los que considera científicamente sustentables, contra la inclusión del concepto *límite,* al que reconoce le produjo siempre una aversión, desde el punto de vista cognitivo. Hoy en día, algunos consideran que Luzín y Vygodskii se adelantaron unas décadas a la fundación del análisis no estándar.

Estas son precisamente las tendencias que nos interesa relievar, las que se orientan hacia la *educación matemática, o* sea que su énfasis es el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que se usa el análisis no estándar como *herramienta.* La idea es que, sin dejar de lado las construcciones lógicas o conjuntistas antes mencionadas, el renacimiento de los infinitesimales en la educación matemática combine varias metodologías con un objetivo cognitivo y didáctico. Este esfuerzo puede percibirse en cierta medida en Keisler (1976) y en Henle y Kleinberg (1979). Esta labor se encuentra reforzada por los grupos de investigación en México, con Imaz (1984) y en Colombia con Takeuchi (1983), entre otros. La propia denominación de la actividad, el *cálculo infinitesimal,* o como nosotros preferimos llamar, el *cálculo con infinitesimales,* que retoma las ideas originales de Leibniz y Newton, reafirman la inclinación de esta metodología.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOS, H. J. M. (1974-1975). "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus". In: *Archive for History of Exact Sciences.* Vol. 14. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York.

DAUBEN, J.W. (1995). *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, A personal and Mathematical Odyssey.* Princeton: Princeton University Press, 1995.

EULER, L. (1990 [1748]). *Introduction to Analysis ofthe Infinite.* Book I, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York.

1. Colecciones de subconjuntos de números naturales que sirven de índices a las sucesiones y permiten filtrarlas para su identificación como hiperreales.

HENLE, J. M. y KLEINBERG, E. M. (1979). *Infinitesimal Calculus.* Cambridge, Massachusetts, and London, England: The MIT Press.

IMAZ, C. (1984). "Infinitesimal models for Calculus". In: *Boletín Sociedad Matemática Mexicana.* Vol. 29, No. 2.

KEISLER H. J. (1976). *Elementary Calculus.* Prindle: Weber & Schmidt, Inc.

LEIBNIZ, G. W. (1987 [1686]). *De Geometría recóndita et Analysi indivisibilium ataue infinitorum. Análisis Infinitesimal.* Madrid: Tecnos.

L'HOPITAL, Marques de (1998 [1696]). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.* Méjico: Universidad Nacional Autónoma de Méjico, colección MA-THEMA.

LUZIN, N. N. (2000). Cartas, "The evolution of...". In: *The Mathematical association of America.* Monthly 107, (january).

NELSON, E. (1977). "Infernal set theory: a new approach to nonstandard analysis". In: *Bolletin of the American Mathematical Soc.,* Vol. 83, (noviembre).

NEWTON, I. (2001 [1671]). *Tratado de métodos de series y fluxiones.* Méjico: Universidad Nacional Autónoma de Méjico, colección MA-THEMA.

ROBINSON, A. (1974 [1966]). *Non-Standard Analysis.* Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

RUSSELL, B. (1996). *The Principies of Mathematics.* New York, London: W. W. Norton & Company.

TAKEUCHI, Y. (1983). *Teoría de funciones no estándar.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemática y Estadística.

BIBLIOGRAFÍA

GEORGE, K. *Cálculo con Infinitesimales.* Santa Marta: Fondo de Publicaciones Universidad del Magdalena, 2001.

RUSSELL, B. *Los principios de la matemática.* Madrid: Espasa-Calpe, 1977.

REFERENCIA

GEORGE, Kemel. "Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. pp. 29-36.

Original recibido: noviembre 2002

Aceptado: marzo 2003