Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 5, No. 2, julio-diciembre 1987

Matemática pura aplicada: una propuesta pedagógica

(Topología y Programación Lineal)

GABRIEL YAÑEZ*

No sé exactamente desde cuándo en nuestro medio se habla de matemáticas puras y matemáticas aplicadas. Las diferencias son completamente claras en contenido, formas de enfocarlas, estudiarlas y utilizarlas, amén de las personas que abordan su estudio: las llamadas matemáticas aplicadas (entiéndase Análisis Numérico, Investigación de Operaciones, etc.) son casi temas exclusivos de las facultades de ingeniería, y en algunos casos de Economía, carreras que requieren de estos conocimientos para aplicaciones concretas y prácticas en problemas específicos. Utilizan la matemática como una herramienta de servicio, abordándola para obtener algoritmos de solución. Por otro lado, las llamadas Matemáticas puras (entiéndase Algebra Moderna, Análisis Matemático, Topología, etc.) son temas exclusivos de las carreras de Matemáticas**. Se heredaron estos temas alrededor de los años 50, y se continúan trabajando casi sin modificaciones, sometidos a los gustos de las firmas editoras. Se estudian estos temas divorciados de cualquier aplicación, fijando la atención en su estructura interna, preocupados por diferenciar un «machetazo» de una buena demostración; en pocas palabras: es la matemática por la matemática.

En la actualidad existen algunos hechos que hacen pensar que las distancias han empezado a recortarse: en ingeniería ya es caso común exigir un curso de Algebra Lineal; en los postgrados estudian variable compleja, Algebra Moderna, etc.; pero claro, siempre exigiendo que estos temas sean lo más aplicados posibles: Algebra Lineal y Aplicaciones, Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Algebra Moderna Aplicada, etc. Por otro lado, los matemá-

* Profesor Asociado, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

** Entiéndase Matemáticos y Licenciados en Matemáticas.

ticos han empezado a estudiar temas como Probabilidades, Estadística, Análisis Numérico, Programación, existiendo incluso un postgrado en Matemáticas donde se ofrecen cursos de Investigación de Operaciones.

Pero a pesar de estos intentos, los ingenieros y economistas siguen haciendo «matemática algorítmica», negándose al estudio de la matemática fundamental; y los matemáticos siguen haciendo «matemática pura», negándose al estudio de sus aplicaciones*.

Si en el caso de los ingenieros se pueden alegar las dificultades que enfrentan al pretender realizar investigación fundamental, en el caso de los matemáticos recién egresados se puede alegar su desubicación y su poca claridad matemática en la mayoría de los casos, que les impide desempeñarse en algo distinto a la labor docente, donde se limitan pasivamente a repetir el mismo ciclo.

Como en otras ocasiones, la solución se encuentra en el término medio: MATEMATICA PURA APLICADA. Las carreras de matemáticas deben plantearse claramente sus objetivos, no solamente en términos de conductas terminales de los estudiante, sino en problemas concretos por resolver y en conceptos y teoremas necesarios para resolverlos. Dentro de estos lineamientos, los temas de matemática aplicada ofrecen resultados muy entusiasmadores que obligan a realizar bastante matemática pura, recuperando el concepto de utilidad que la matemática tiene desde siempre.

En este artículo se muestra el poder de los métodos topológicos para enfrentar temas de programación lineal. Los conceptos de topología que utilizan están al nivel de un curso de análisis matemático.

1. El problema tipo de programación lineal tiene la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & Z = CX, \\ \text{sujeta a} & AX \triangle b, \\ & X \geqslant 0, \end{array}$$

donde $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$

* Me refiero a los programas de las carreras de matemáticas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Optimizar puede ser maximizar o minimizar; $\triangle$ puede ser $\leqslant$ $\geqslant$ ó $=$

Veamos algunas definiciones básicas.

Hiperplano: Sea N un vector fijo de $\mathbb{R}^n$. El conjunto

$H = X \in \mathbb{R}^n \mid N.X = c$ es* un hiperplano en $\mathbb{R}^n$.

Todo hiperplano determina dos semiespacios

a) Semiespacios abiertos $X \mid N{\cdot}X > c\}, \{X \mid N{\cdot}X < c$

b) Semiespacios cerrados $X \mid N{\cdot}X \geqslant c$ $X \mid N{\cdot}X \leqslant c\}$

Por otro lado cada valor de la función objetivo Z determina un hiperplano

$$Z_o = CX$$

El conjunto $R = \{X \mid AX \triangle b$ es la *región factible*.

Trabajando en $\mathbb{R}^2$ la región R tiene una de las formas siguientes:

* N.X se refiere al producto escalar canónico entre vectores de $\mathbb{R}^n$, mientras que AX es producto de matrices.

a) Acotada:

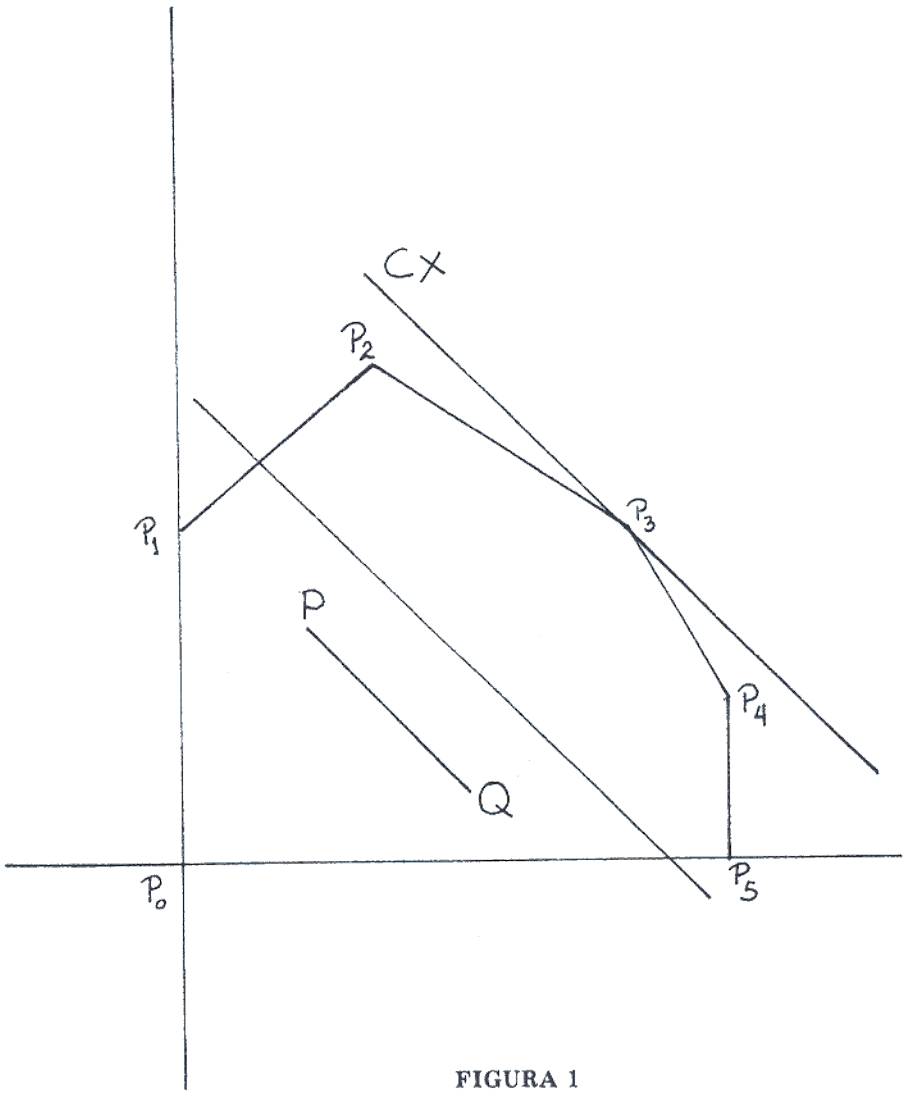

FIGURA 1

b) No acotada:

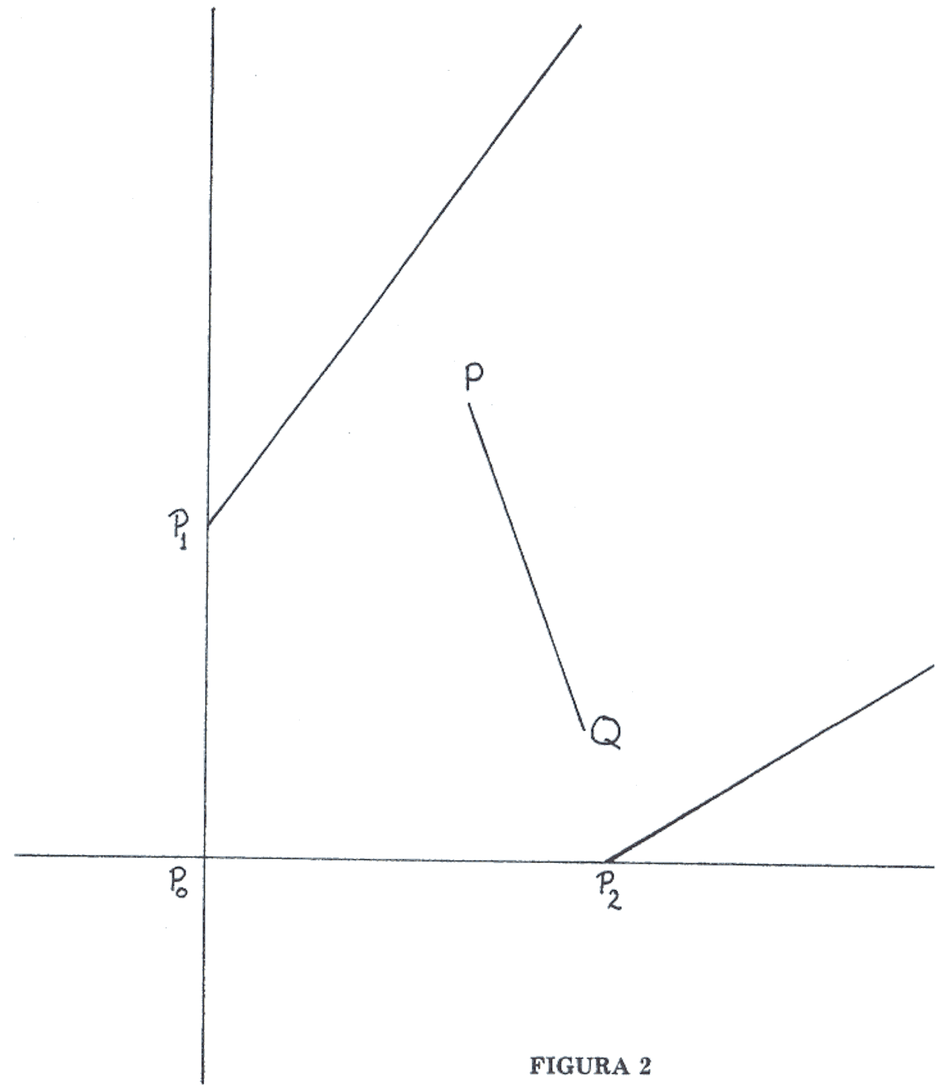

FIGURA 2

Gráficamente se observa la característica geométrica fundamental de la región R: dados 2 puntos P y Q en R, el segmento de recta que los une también está en R. Es decir, $\lambda P + (1 - \lambda)Q \in R$, con $0 \leq \lambda \leq 1$. Por esta propiedad se dice que R es convexo.

Se observa también que en R existen los vértices o puntos extremos, que se diferencian de los demás porque no forman parte del segmento de recta que une otros dos puntos de R, es decir: P es punto extremo si dado que $P = \lambda Q_1 + (1 - \lambda)Q_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, se sigue que $P = Q_1 = Q_2$.

2. El *enfoque algebraico* tradicional al problema del punto 1 está dirigido hacia dos aspectos:

a) Identificar los puntos extremos. Esto se logra hallando las soluciones básicas factibles de un sistema de ecuaciones asociado a la región factible R (Ver, por ejemplo, [1]).

b) Expresar todo elemento de R en términos de los puntos extremos y de las direcciones extremas (d es una dirección de R si dado cualquier X_0 en R, $X_0 + \lambda d \in R$ con $\lambda \geq 0$; d es extrema si $d \neq \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ para cualesquiera direcciones d_1 y d_2). Para el caso acotado, sin direcciones extremas, se obtiene el *teorema fuerte de Minkowski-Farkas-Weyl*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X \quad \text{con } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i =$$

los X_i son puntos extremos y X cualquier elemento de R. Se puede consultar [2] para una bonita demostración algebraica.

Para el caso general, se obtiene el *teorema de representación* (con algún ingrediente topológico, ver [3]):

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j d_j , \; 0 \leq \lambda_i \leq 1 , \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 , \; \mu_j \geq 0$$

X_i son puntos extremos y d_j direcciones extremas

Gracias a estos resultados se puede concluir que si existe un *óptimo*, debe darse en un punto extremo.

Es de observar que el tratamiento algebraico expuesto aquí es bien particular para el tipo de conjuntos convexos R de regiones factibles de un problema de P.L. Su poder indudablemente radica en la identificación de los puntos extremos, lo que conduce rápidamente al famoso método SIMPLEX (Ver [1]).

3. El *tratamiento topológico* (ver [4], [5], [6]) permite concluir rápidamente que el óptimo se da en un punto extremo, y generaliza el teorema de representación para el caso acotado. Todos los conceptos y resultados topológicos que se dan se suponen conocidos. Sin embargo se pueden consultar [7] y [8].

Para demostrar algunos hechos relacionados con la región R, se define la función

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto N \cdot X , \quad N \text{ vector fijo de } \mathbb{R}^n.$$

Se tienen los siguientes resultados

i) F es continua y lineal
ii) Si $T \subset \mathbb{R}$ es cerrado, $F^{-1}(T)$ es cerrado.
iii) Los hiperplanos y los semiespacios cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$
iv) Un conjunto convexo es conexo por arcos y por lo tanto conexo.
v) Si T es convexo en $\mathbb{R}$, $F^{-1}(T)$ es convexo en $\mathbb{R}^n$.
vi) Los hiperplanos y los semiespacios cerrados son convexos.
vii) La intersección finita de conjuntos convexos y cerrados es convexa y cerrada.

Proposición 1: La región R es convexa y cerrada.

La cuestión es: si existe un punto óptimo X_*, donde Z toma su mejor valor, ¿dónde se encuentra ese valor?

Como $R = R^\circ \cup Fr(R)$ (R° = interior de R, $Fr(R)$ = frontera de R), y la unión es disyunta, se tiene

Proposición 2. El óptimo se da en un punto frontera.

Demostración: Basta ver que el óptimo no se da en un punto interior. Supongamos que X_o es un punto óptimo en el interior de R, es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(X_o, \varepsilon) \subset R$. Pensando en un problema de maximización, sea

$$X_1 = X_o + (\tfrac{\varepsilon}{2}) \frac{C}{|C|}, \; X_1 \in B(X_o, \varepsilon) ;$$

entonces

$$CX_1 = CX_o + (\tfrac{\varepsilon}{2}) |C| > CX_o, \; \text{¡contradicción!} \blacksquare$$

Ahora, si X_o es un punto óptimo, la función objetivo Z define un hiperplano $CX = CX_o$ tal que si $X \in R$, $CX \geqslant (\leqslant) CX_o$ Se dice que éste es un hiperplano soporte de R en X_o.

Definición: Dado un punto frontera P de un conjunto K, de un hiperplano H de ecuación $CX = a$, que contiene a P, se dice que es un hiperplano soporte de K en P si para todo X en K se tiene que $CX \geqslant (\leqslant) a$.

En las figuras 1 y 2 se observa que todo hiperplano soporte contiene algún punto extremo. La comprobación de este hecho permite concluir que el óptimo se da en un punto extremo.

Proposición 3. En un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado, acotado inferiormente, todo hiperplano soporte tiene un punto extremo.

Demostración: Sea H un hiperplano soporte de K en un punto frontera P_o definido por $N{\cdot}X = N{\cdot}P_o$. Sea $M = H \cap K$: M es convexo, cerrado y acotado inferiormente. Como un punto extremo de M es un punto extremo de K (demuéstrese por contradicción), el problema se reduce a los puntos extremos de M.

Sea $\quad Pr_1: M \to R$
$\qquad\qquad P \mapsto P_1$ (primera componente del punto P)

Pr_1 tiene ínfimo, y como M es cerrado, corresponde a un punto de M. Sea $M_1 \subset M$ el conjunto de todos los puntos cuya primera componente es la mínima. Se aplica $Pr_2: M_1 \to \mathbb{R}$; como M_1 también es convexo, cerrado y acotado inferiormente, se repite el argumento para hallar $M_2 \subset M_1$ con la segunda componente mínima. Se repite para todas las componentes hasta obtener un único punto P cuyas componentes son todas mínimas. P es un punto extremo $\blacksquare$

Teorema 1. El óptimo de un problema de programación lineal se da en un punto extremo.

Antes de proceder a demostrar el teorema de representación, veamos que los conjunto conexos cerrados y acotados tienen puntos extremos.

Proposición 4. (Separación de un convexo cerrado y un punto). Dado un convexo cerrado K en $\mathbb{R}^n$, y un punto P en $\mathbb{R}^n$, se tiene que: o bien $P \in K$, o existe un hiperplano H que contiene a P y K está contenido en uno de los semiespacios abiertos determinados por H.

Demostración. Supóngase $P \notin K$ y sea $f: K \to \mathbb{R}$ definida por $f(X) = d(X, P) = \| X - P \|$; f es continua y tiene un mínimo en K, digamos en el punto Q, es decir, $f(Q) \leqslant f(X)$.

Tomando $N = Q - P$, el hiperplano $N{\cdot}X = N{\cdot}P$ satisface los requisitos $\blacksquare$

Proposición 5. Sea K un convexo en $\mathbb{R}^n$. Por todo punto frontera de K pasa un hiperplano soporte de K en P.

Demostración. Si P es punto frontera de K es punto punto frontera de $\bar{K}$, y como éste también es convexo, se puede suponer -sin pérdida de generalidad- que K es cerrado.

Para cada k 2 ($k \in \mathbb{N}$) la bola $B(p;1/k)$ contiene un punto P_k que no está en K. Por la proposición 4, existe en K un punto Q_k cuya distancia a P_k es mínima. Sea $N_k = Q_k - P_k$ y U_k un vector unitario en la dirección de N_k. Como $\bar{B}(0;1)$ es compacta, existe un vector N, punto de acumulación de los N_k. Por la proposición 4,

$$X.N > P_k{\cdot}N_k \;, \text{ para todo } X \text{ en } K$$
$$X.N'_k > P_k{\cdot}N'_k \;;$$

como

$$N'_k \to N,$$
$$P_k \to P \;, \text{ entonces } X{\cdot}N \geqslant P{\cdot}N$$

con lo que se obtiene el resultado $\blacksquare$

De las proposiciones 3 y 4 se sigue que el conjunto de puntos extremos de un conjunto convexo acotado inferiormente no es vacío.

Definición: Dado $E \subset \mathbb{R}^n$, se llama el cierre convexo de E al conjunto

E^c formado por las combinaciones convexas $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + . + \lambda_m P_m$ de elementos de E, con $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ y $\sum_{i=1} \lambda_i = 1$ •

Se llega finalmente al

Teorema de Krein-Milman. Todo conjunto K conexo cerrado y acotado es el cierre convexo de sus puntos extremos.

Demostración: Sea K' el cierre convexo de los puntos extremos de K. $K' \neq \emptyset$ y $K' \subset K$. Ahora, sea $P \in K$ y sopóngase $P \notin K'$. Por la proposición 4, existe un hiperplano H que pasa por P, definido por la ecuación

$$X.N = c$$

y tal que $X.N > c$ para todo $X \in K'$. (1)

Sea $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$X \mapsto X.N$

Se tiene:

i) $F(P) = c$;
ii) $F(P) \notin F(K')$;
iii) $F(K)$ es convexo, cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, luego $F(K)$ es un intervalo cerrado $[a,b]$ que contiene a c, $(a \leqslant c \leqslant b)$.

Sea H_a el hiperplano definido por

$$X.N = a \tag{2}$$

H_a es un hiperplano soporte de K; luego, por la proposición 3, tiene un punto extremo de K, y por lo tanto debe estar en K'. Pero por (1), $X.N > c \geqslant a$, lo que es una contradicción con (2); por consiguiente, $P \in K'$ ■

Corolario. *(Teorema fuerte de Minkowski-Farkas-Weyl).* La región R ble es el cierre convexo de sus puntos extremos •