CAPÍTULO I

CONFERENCIAS

Procesos de matematización para la movilización de competencias matemáticas

PROFESOR-INVESTIGADOR EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. ASESOR ICFES-MEN. EX DIRECTOR ACADÉMICO POSGRADO EN PSICOPEDAGOGÍA, UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA.

ORLANDO MESA BETANCUR

El proceso de matematización. Más importante que el saber matemático -hoy disponible en programas de ordenadores y otros medios audiovisuales- es la actividad matemática, principalmente la llamada matematización; actividad que suele ser pensada como una modelación de relaciones y operaciones sobre objetos de diferente índole (materiales, signos y símbolos, proposiciones y teorías). En la matematización se realizan acciones de significación y de construcción de lenguajes para resolver situaciones-problema en contextos particulares y específicos (socioculturales, económicos, e individuales), sin embargo, lo que se exige en la matematización es una aplicación de competencias cognitivas para alcanzar competencias matemáticas.

Las competencias cognoscitivas generales, cuando se interpretan en el campo de las matemáticas, requieren explicaciones propias para los significados que les asignemos al pensamiento matemático, ya se trate de la capacidad mental que pueda recibir este nombre o de la capacidad matemática reconocida en la cultura. En cualquier caso es fundamental distinguir las capacidades mentales de las capacidades en uso o competencias detectables a través de su aplicación en campos específicos del aprendizaje. La mente es capaz de comprender mucho más de lo que manifiesta. Siempre existirá un desfase entre comprensión y comunicación; lo que, entre otras cosas, permite orientar los procesos de acompañamiento para cualificar los aprendizajes.

Para nuestros propósitos educativos aceptaremos unas grandes categorías que nos permiten organizar el trabajo de acompañamiento formativo en el área de las matemáticas, pero pensando las matemáticas como una estructura organizada alrededor de una tipología particular para el pensamiento matemático.

1. Comprensivas o interpretativas

La *Comprensión de Conceptos* es la capacidad para reconocer y asignar significados relacionados con los constructos matemáticos.

No se ha podido medir en forma directa ni la comprensión ni las formas de razonamiento de alguna persona. La medición indirecta consiste en elaborar tareas y problemas, frente a los que previamente se ha acordado cuáles son los procedimientos y estados de complejidad para la ejecución y solución. Si la persona responde según lo esperado se infiere que posee las competencias consideradas. En cuanto a la comprensión matemática, escriben Godino y Batanero:[1]

[1] Godino, J. D. (1996). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. En, L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME Conference (Vol 2, pp. 417-424). Valencia

“Para analizar los fenómenos ligados a la comprensión de las abstracciones matemáticas es preciso elaborar respuestas a dos cuestiones básicas: *qué* comprender, y *cómo* lograr la comprensión. Por tanto, un modelo de la comprensión tendrá dos ejes principales: uno descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro procesual que indicará las fases o niveles necesarios en el logro de la ‘buena’ comprensión. Definir la ‘buena’ comprensión y la ‘buena’ enseñanza requiere definir previamente las ‘buenas’ matemáticas.

El problema de la comprensión está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes”

Como afirma Johnson[2] (1987), nuestra comprensión «*es el modo [como] estamos [1] significativamente situados en nuestro mundo por medio de nuestras interacciones corporales, nuestras instituciones culturales, nuestra tradición lingüística y nuestro contexto cultural*” (p. 102).

Según Ibarbo[3] “La comprensión matemática tiene dos estamentos: a) El proceso subjetivo de comprender, que es psicológico; y b) La estructura matemática propiamente dicha, que es objetiva y de rango teórico, externa al sujeto. La primera a de captar la segunda para generar conocimiento. Al preparar el currículo debe hacerse pensando en esto último.

2. Competencias heurísticas

Llamaremos heurísticas a todas las competencias relacionadas con los procesos de búsqueda o investigación, fundamentalmente cuando se enfrenta la resolución de problemas.

Los procesos heurísticos más usados en el pensamiento matemático y científico son la *abducción la inducción, la generalización, y el razonamiento analógico* que matemáticamente está dado en la similitud o correspondencia entre dos teorías; por ejemplo, de índole algebraico y geométrico.

El descubrimiento o invención de hipótesis, en las ciencias y en las matemáticas está relacionado con el razonamiento abductivo como proceso fundamental asociado a la creatividad. Fue Charles. S. Peirce quien precisó este concepto, tan necesario para la formación científica. Lúcia Santaella[4] rescata su verdadero pensamiento así:

Nacía ahí su explicación madura del método de la ciencia, que fue eficazmente sintetizada por Fann[5] (1970: 31-32) de la manera siguiente:

«Cuando surgen hechos sorprendentes se busca una explicación. ‘La explicación debe ser una proposición tal que lleve a la predicción de los hechos observados, sea como consecuencias necesarias, sea al menos, como muy probables en esas circunstancias. Entonces, ha de adoptarse una hipótesis que sea en sí misma plausible y que torne los hechos plausibles. Este paso de adoptar una hipótesis como sugerida por los hechos es lo que llamo *abducción*’ (*CP* 7.202, c.1901) afirmó Peirce, equiparándola con el primer estadio de una investigación’. En cuanto una hipótesis ha sido adoptada la primera cosa que hay que hacer es delinear sus consecuencias experimentales necesarias y probables. Ese paso es una *deducción*’ (*CP* 7.203, c.1901). El paso siguiente es la verificación de la hipótesis a través de experimentos y comparaciones de las predicciones deducidas de la hipótesis con los resultados reales del experimento. Cuando predicciones tras predicciones son verificadas por el experimento, comenzamos a darnos cuenta de que la hipótesis puede contarse como un resultado científico. ‘Este tipo de inferencia, comprobar predicciones basadas en una hipótesis mediante experimentos, es la única que está legitimada para ser llamada propiamente *inducción*’ (*CP* 7.206, c.1901)».

La generalización es resultado de aplicar la inducción a las hipótesis que fue sugerida por la abducción (interpretando a Pierce). La analogía es el proceso para encontrar semejanzas entre objetos, relaciones u operaciones (interpretando a Aristóteles y a Pierce).

3. Competencias contrastativas

Son las propias características de los procesos mediante los cuales se comprueban, experimentan o ejercitan los conceptos, los sistemas, las estructuras y las teorías. Son la base para el diseño de problemas y ejercicios prototipo.

4. Competencias representativas

Pueden ser definidas como las capacidades para usar metáforas en la comunicación de los conceptos matemáticos. Se incluyen aquí los procesos llama-

[2] Citado por Godino y Batanero.

[3] Ibarbo Jairo. Notas Personales.

[4] Santaella –Braga, Lúcia: la evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción. Programa de Comunicación y Semiótica, Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil, Inernet, 2003-01-01.

[5] Fann, Kuang Tih (1970). *Peirce’s Theory of Abduction*. La Haya: Martinus Nijhoff.

dos de visualización, que pueden ser tipificados como icónicos o de representación matemática (fórmulas, diagramas, mapas, formas geométricas, secuencias lógicas, etc.). Es fundamental que el sujeto conozca el significado de la metáfora puesto que el no conocerlo puede dar origen a desórdenes lógicos.

5. **Argumentativas** (validación, deducción, aducción, explicación)

Son las capacidades para validar las proposiciones matemáticas haciendo uso del lenguaje común o de la lógica matemática. Mediante el lenguaje común las personas aducen para validar sus creencias o concepciones, pero mediante el lenguaje matemático demuestran los conceptos matemáticos (deducen). Las formas de razonamiento más relacionadas con estas competencias son la aducción, la deducción y la explicación. La explicación es la construcción de una teoría para validar las aseveraciones.

6. Creativas o propositivas

Son las capacidades que poseen todas las personas para encontrar respuestas, por ellas mismas, o para crear problemas, ya sea utilizando informaciones disponibles o creando nueva información. Se distinguen de las heurísticas por el carácter innovador que introduce, tanto la selección personal de las informaciones para encontrar las respuestas propias, como por la creación de informaciones que no habían sido consideradas en el tema tratado.

Treffer[6] distingue dos formas de matematización, la matematización *horizontal* y la matematización *vertical*.

La *matematización horizontal*, nos lleva del mundo real al mundo de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En esta actividad son característicos los siguientes procesos: IDENTIFICAR las matemáticas en contextos generales, ESQUEMATIZAR, FORMULAR y VISUALIZAR un problema de varias maneras, DESCUBRIR relaciones y regularidades, RECONOCER aspectos isomorfos en diferentes problemas, TRANSFERIR un problema real a uno matemático.

La *matematización vertical*, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, y en tal actividad son característicos los siguientes procesos: REPRESENTAR una relación mediante una fórmula, UTILIZAR, REFINAR, AJUSTAR, COMBINAR e INTEGRAR modelos, PROBAR regularidades, FORMULAR un concepto matemático nuevo, GENERALIZAR.

En el trabajo matemático inicial tiene mucha importancia la matematización progresiva de las actividades perceptivas; es decir, el establecimiento de las relaciones simbólicas que representan dichas actividades, pero la matematización debe rastrear procesos cognoscitivos, lingüísticos y epistemológicos muy variados. En este sentido, el mapa conceptual que se presenta en la figura da cuenta de una interpretación integral para los procesos citados :

· *Clasificar y Ordenar* son las dos actividades básicas para el pensamiento lógico.

· *Sistematizar* es la organización de los objetos de acuerdo a las operaciones y relaciones que se efectúen con ellos, y entre ellos.

· *Estructurar* consiste en reconocer o asignar propiedades para las operaciones o relaciones que se consideren en la colección de objetos.

· *La explicación* se refiere a la utilización de una o varias teorías para dar existencia y sentido, tanto a los objetos de una colección como a las operaciones, relaciones, sistemas y estructuras. En los saberes de las ciencias formales, la explicación define el nivel científico de sus objetos, métodos y demostraciones.

· Por otra parte, las relaciones entre *el lenguaje común* y los diferentes *lenguajes formales* de los que hace uso el saber matemático, exigen consideraciones especiales dentro de la didáctica. En primer lugar, las actividades perceptivas se reconocen y comunican a través del lenguaje particular de las personas, adquirido en un entorno sociocultural específico, pero los lenguajes formales son el resultado de un largo y fino proceso universal, cuyo aprendizaje se logra mejor con una enseñanza intencional, lenta y de refinamiento progresivo. En segundo lugar, existen muchas variedades de formas sintácticas y de estilos para los lenguajes formales de la matemática. Es fundamental escoger las notaciones y denotaciones que ayuden a las representaciones mentales. De aquí que, muchas veces sea necesario sacrificar la concisión y la economía del lenguaje matemático, para no perder el sentido de lo que se esté trabajando.

En matemáticas, *el reconocimiento de reglas*, o propiedades entre las relaciones y operaciones, es una actividad cognoscitiva fundamental. Así, por ejemplo, no es posible clasificar sino se reconoce la condición para la pertenencia de un objeto a una clase, y en el caso de la geometría, las reglas que originan las conjeturas y el reconocimiento de las propiedades invariantes, constituyen los elementos claves para la comprensión.

[6] Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

La ejercitación, ya sea con objetos materiales, con gráficos o con símbolos matemáticos, es la actividad que permite aprender y hacer matemáticas. Una ejercitación no meramente mecánica, sino reflexionada. Con ella se adquiere *velocidad* de pensamiento, puesto que los esquemas adquiridos se automatizan; también se *refinan* los esquemas, dado que las variaciones de los problemas exigen nuevas acomodaciones cognoscitivas ; y finalmente *ayudan a la memoria* para que no ejerza su función natural hacia el olvido.

La contrastación tiene una doble importancia: ayuda a la toma de conciencia sobre la validez de las afirmaciones y a la revisión de los procedimientos y algoritmos utilizados.

El planteamiento de conjeturas es el camino de los descubrimientos en matemáticas. En la geometría de la escuela aparecen conjeturas para motivar teoremas y para descubrir fórmulas.

La demostración es el punto culminante de todo saber matemático. Sin llegar a ella, ninguna afirmación pertenece a la matemática; sin embargo, en el mundo infantil, la mayoría de las demostraciones pueden esperar, hasta que la mente sea capaz de pensar en términos de hipótesis y tesis.

Finalmente, los conceptos matemáticos deberán *usarse para explicar otros conceptos o para resolver problemas* que tengan algún interés para el estudiante o para la cultura.

Las competencias matemáticas fundamentales

Aceptamos, entonces, que *la comprensión de conceptos matemáticos* es la competencia fundamental que buscamos con la enseñanza en el área de las matemáticas. Sin embargo, las investigaciones de las últimas décadas, sobre las posibilidades para aprender significativamente, han demostrado que, para la mayoría de las personas, los procedimientos expositivos no permiten el aprendizaje significativo, que sí se logra más fácilmente con procedimientos en donde el estudiante participe activamente en la construcción de sus pensamientos. En este sentido es que hoy se habla de constructivismo en la escuela, a pesar de las múltiples, variadas y a veces contradictorias interpretaciones y prácticas con este concepto. En síntesis, la comprensión de conceptos matemáticos se interpreta actualmente como *construcción de pensamiento matemático*. La gran ventaja de este punto de vista radica en la libertad que da a estudiantes y docentes para presentar concepciones diferentes a las que aparecen en los saberes formalizados o institucionalizados.

Las competencias académicas matemáticas que se adquieren a través del estudio constructivo de las matemáticas son innumerables, pero algunas pueden ser categorizadas, previa una intención formativa; una de las múltiples opciones es la siguiente:

Capacidad para establecer relaciones entre conjuntos de objetos

1. Relaciones semánticas
   (de significantes y significados)

   Se trata de conocer las diferentes concepciones que han tenido o tienen los constructos matemáticos. Por ejemplo, el constructo número, como objeto para contar y medir, se usa desde la antigüedad, pero el número como elemento de un sistema que cumple tres axiomas[7], es un resultado del pensamiento moderno. Similarmente ocurre con el concepto de geometría, pensado como perteneciente a relaciones de formas dentro del espacio físico o como una axiomática.

   En otras palabras las relaciones semánticas cambian históricamente y de acuerdo con las teorías en donde se presentan los conceptos matemáticos.

2. Relaciones semióticas: uso de signos.
   a. Signos para los objetos como los usados en diferentes culturas para los números y las representaciones geométricas.
   b. Signos para las relaciones entre objetos como las relaciones de minorancia y mayorancia, las de semejanza, las de perpendicularidad y paralelismo, las de pertenencia e inclusión, las de implicación y condicionalidad, etc.
   c. Signos para las operaciones de todo tipo.

Capacidad para abstraer y generalizar relaciones y operaciones

Mediante el conocimiento de las matemáticas comprendemos cómo el hombre, usó la comparación para

[7] *Un sistema numérico general* está definido si existe un conjunto A de objetos cualquiera y dos operaciones entre ellos y que se cumplan las propiedades : conmutativa, asociativa y distributiva de una operación con respecto a la otra. Con esta definición son números los elementos del conjunto de partes con las operaciones unión e intersección; también son números las proposiciones con las operaciones conjunción y disyunción; además de múltiple ejemplos que pueden construirse con estos axiomas. Evidentemente, esta definición incluye a los sistemas numéricos, como casos particulares.

darse cuenta de las semejanzas entre objetos y, para lograr con ellas, *abstraer* y *generalizar;* además, la misma comparación le permitió reconocer las diferencias, y con estas discriminar y ordenar.

La matemática no estudia ni relaciones ni operaciones aisladas. Estudia clases de objetos que se han construido con criterios definidos, determina operaciones y relaciones de equivalencia entre los elementos de la clase y plantea las diferencias y asimetrías de una clase con otra.

Capacidad para construir aseveraciones

Las proposiciones o aseveraciones aparecen, a veces como definiciones: "todos los números pares son de la forma 2n", "la circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de otro llamado centro"; otras veces se presentan como puntos de partida o axiomas: " la distancia siempre es mayor o igual que cero" pero, la mayoría de veces son el resultado de un proceso deductivo: "la suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°).

Como puede analizarse en los ejemplos anteriores, las proposiciones se infieren por procesos de abstracción y generalización, objetivados en leyes y reglas de demostración que son las que configuran el proceso deductivo. La abstracción y generalización también tienen que ver con las capacidades de *análisis* (descomponer, discriminar, diferenciar, separar…) y *síntesis* (componer, identificar lo común, recoger, juntar…). En todos los casos, las proposiciones son conclusiones o inferencias de procesos cognoscitivos, cuyo origen puede estar en el sentido común o en reglas formales.

Capacidad para construir teorías

Cuando se relacionan proposiciones para que de una manera sintética y general se refieran un objeto de conocimiento, se dice que se está construyendo o se construyó una teoría. Conocemos teorías sobre los números naturales, los números enteros, los números reales, la geometría del espacio físico, la geometría de los movimientos rígidos, la geometría de los fractales, los juegos, etc. En general, los conceptos matemáticos aparecen siempre dentro de teorías que los presentan y los explican.

La sistematización debe ser uno de los objetivos de la educación matemática. Con las operaciones y relaciones que definen los sistemas, es posible encontrar o definir propiedades comunes en varios sistemas. Estas propiedades son llamadas *estructurales*. Por ejemplo, muchas operaciones binarias son asociativas, poseen un elemento neutro y cada uno de sus objetos operados posee un inverso. Juntando las tres propiedades en una operación bien definida se tiene la estructura básica del álgebra: *El grupo matemático*. La gran ventaja que tiene el conocimiento de las teorías estructurales es que arma a las personas de un instrumento cognoscitivo nuevo para aprender y crear cultura matemática. Muchos sistemas de la matemática, de otras áreas y de la cultura, en general, pueden ser tratados con la estructura de grupo, ganando tiempo, extensión y profundidad conceptual. Similarmente ocurre con la construcción significativa de otras estructuras matemáticas. La dificultad o el desconocimiento de didácticas apropiadas para alcanzar estos logros, no puede ser el argumento para abandonarlos como propósitos en la formación integral e inteligente de nuestros jóvenes.

Capacidad para construir modelos

Los sistemas y las estructuras pueden organizarse para construir modelos que describan o expliquen procesos o fenómenos. En educación matemática, modelar es matematizar, es decir, recurrir a las relaciones y operaciones matemáticas para representar situaciones de los entornos físicos, sociales, culturales y científicos. Es lo que ocurre cuando utilizamos datos, para organizarlos y encontrar gráficas y fórmulas que permitan descubrir de qué manera se vinculan, cómo varían y cómo se proyectan los vínculos. Aparecen, aquí, los diferentes significados del concepto de variable (como símbolo general y como representación de cambios, entre otros).

Esta interpretación no pretende reducir la matemática a lo meramente experimental pero, está claro que ella es modeladora de la experiencia.

MICROLAR: Una situación problema, a manera de ejemplo

La historia que voy a contarles ocurrió un atardecer entre las 5 y 15 p.m y las 6 y 30 p.m del año pasado. En una cancha de fútbol habitaba un pueblo de microbios (Microlar), !tan pequeños! !tan pequeños!, que se demorarían un mes para recorrer un metro.

Nacieron después de un partido de fútbol entre los profesores de biología y los de matemáticas que, como siempre, fue un partido lleno de goles, jugadores lastimados y el público gritando y riéndose en la las graderías del estadio de la universidad. El portero de Biología dejó abandonado entre la grama un frasco que contenía dos sustancias orgánicas que, al recibir la luz del atardecer, reaccionaron creando dos tipos de microbios: los verdes y los rojos.

En el primer segundo de la historia nacieron 10 microbios verdes machos y 5 microbios rojos hembras y se interrumpió la creación; sin embargo, como era de esperarse, los microbios de distinto color se enamoraron, lo que originó que se fundaran las primeras familias de microbios, pero sólo dos parejas pudieron tener hijos: la de *los inquietos*, que tubo su primer hijo cuando cumplieron el primer minuto de su existencia, y la de *los tranquilos* que esperaron hasta el segundo minuto de su existencia para tenerlos. Después del primer hijo, tenían otro hijo cada 10 segundos, durante dos minutos, cuando ya no podían tener más. La duración de la vida de cualquier microbio era de, exactamente, 5 minutos, si no le ocurría ningún accidente o enfermedad grave.

Como todo pueblo que se respete debe pasar por una serie de dificultades para llegar a una sociedad feliz, en Microlar los hechos ocurrieron casi así:

Durante el primer minuto de su historia vivieron en un pedazo de corcho redondo que medía tres centímetros de diámetro y que flotaba sobre un líquido gris. Ellos no sabían, ni que flotaban ni cuántos eran; tampoco necesitaban conseguir alimento porque la humedad del corcho y el oxígeno del frasco les permitían alimentarse sin ningún esfuerzo. Pasaban el tiempo conversando, inventando juegos y recorriendo su mundo; así descubrieron que si se colocaban en fila, amarrados de la colita, podían cubrir un inmenso territorio. Olvidaba contarles que cada microbio medía una milésima de milésima de milímetro. La primera vez que hicieron la fila fue cuando llevaban 4 minutos de existencia pero, sólo cuando inventaron los métodos para contar - 10 minutos después de su origen - supieron cuántos eran y cuánto medía la fila, a los 4 minutos de su existencia. En el primer segundo del minuto 5° apareció un viento muy fuerte que produjo la muerte de la mitad de la población. Esto les causó mucha pena porque cada microbio tuvo que enterrar a otro, en el lugar que ocupaba en la fila. Los microbios más viejos se reunieron a pensar para encontrar formas que les ayudaran a enfrentar otro ataque de los vientos. Algunos pensaban ... y pensaban ... para llegar a la conclusión de que existían seres malos, superiores, que habían enviado los vientos para destruirlos y otros seres buenos que se los habían quitado para salvarlos. Toda la discusión propició que se dividiera la población en tres grupos, dos grandes y uno pequeño. Un grupo grande se dedicó a rendirle adoración a los seres superiores malos, para que no volvieran a destruirlos, y otro grupo grande a los seres superiores buenos para que les ayudaran; el grupo pequeño se dedicó a estudiar los vientos para poder inventar algo que les permitiera defenderse de ellos.

Cuando pasaron varios segundos, el grupo pequeño inventó una manera de construir casas dentro del corcho y, después de varios fracasos, descubrieron lo que abría de ser su invento más importante: !la puerta!. Al principio, los grupos de adoradores se enojaron, llegando a descorchar a varios de los inventores, es decir, los lanzaron desde la orilla del corcho hacia el vacío eterno, pero con el tiempo reconocieron que estaban equivocados y que las casa y las puertas los protegían del enemigo loco: el viento. Inclusive, les propusieron a los microbios científicos que diseñaran y construyeran grandes espacios en donde pudieran vivir muchos microbios juntos.

Los científicos se reunieron a pensar y pensar, hasta que descubrieron los números y las medidas que necesitaban. Como eran tan pequeñitos, un microbio solo se demoraba todo un segundo para hacer su Habitación y su puerta; si trabajaban en equipos de a diez hacían 20 habitaciones en un segundo. La habitación era una cajita que medía, de ancho 5 veces el tamaño del cuerpo, de largo 10 veces y de alto 3 veces.

Propuesta para un Taller: *Elaborar preguntas para ejercitar y evaluar las competencias matemáticas presentadas considerando conceptos para los pensamientos: numérico, espaciotemporal, variacional, estructural y aleatorio.*

Referencias Bibliográficas

GODINO, J. D. (1996). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. En, L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th PME Conference (Vol 2, pp. 417-424). Valencia

SANTAELLA –Braga, Lúcia: *La evolución de los tres tipos de argumento: abducción, inducción y deducción*. Programa de Comunicación y Semiótica, Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil, Inernet, 2003-01-01.

FANN, Kuang Tih (1970). *Peirce's Theory of Abduction*. La Haya: Martinus Nijhoff.

TREFFERS, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.