¿Multiplicación y división "o" cambio de unidad?

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

LUIS ORIOL MORA VALBUENA[1]
JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ[2]

1. Introducción

Este artículo es un resultado de la investigación *"El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula"* cofinanciado, en la fase actual, por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, COLCIENCIAS e IDEP. En el aparte 1, además de ubicar el propósito de este artículo, explicitamos solo algunos aspectos metodológicos y teóricos de la investigación que, pensamos, sirven para definir el contexto de sentido para los datos que usaremos en el aparte 2.

1.1 Propósito de este artículo

No pretendemos aquí dar cuenta de la investigación *"El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula"*, nuestro deseo sí es documentar, a través de hallazgos de investigación, algunos requerimientos para una comprensión de la multiplicación que supere la de suma repetida, pero que sea compatible con ella.

1.2 Aspectos metodológicos en la investigación

En la investigación nos propusimos contestar a ¿Qué tanto logran los estudiantes para profesor, provenientes de una cultura matemática escolar tradicional, reconstruir en términos de conexidad, de posibilidad de explicitación y de sentido, sus esquemas multiplicativos? Por lo tanto adoptamos el siguiente objetivo general.

1.2.1 Objetivo general

Diseñar un experimento de enseñanza que permita allegar información de la ruta de enseñanza y de las rutas de aprendizaje de diez de los estudiantes para profesor, que ingresen al PCLEBM, en el dominio específico de la multiplicación, procurándoles una base experiencial de aprendizaje desde la cual puedan interrogar su formación escolar anterior, haciendo conciencia de la existencia de una manera de aprender logrando impactar su conocimiento de la materia a enseñar.

Por los requerimientos teóricos propios de los experimentos de enseñanza, para establecer una trayectoria de enseñanza previendo posibles rutas de aprendizaje, propusimos como primero de cuatro, el siguiente objetivo específico.

1.2.2 Primer objetivo específico

Describir el pensamiento multiplicativo actual de cada uno de diez estudiantes respecto de sus modelos intuitivos[3] ; el sostenimiento que hacen de la relación entre las relaciones de equivalencia en la fracción como relación parte-todo; su estructuración de las operaciones división y multiplicación, y la relación entre sus formas argumentativas y sus desempeños con los algoritmos usuales de multiplicación y división.

El cumplimiento de este objetivo arroja información necesaria para determinar el contenido de las actividades a proponer a los estudiantes para procurarles una base experiencial de aprendizaje desde la que pudieran interrogar su formación escolar anterior, y a la vez aporta elementos para determinar estrategias metodológicas de aula que puedan desencadenar la actividad de auto interrogación en los estudiantes.

1.2.2.1 Actividades metodológicas ligadas al cumplimiento del primer objetivo

- Diseño de cuestionarios
- Aplicación de cuestionarios
- Recolección de la información pertinente
- Análisis de la información
- Diseño de entrevistas
- Aplicación de entrevistas
- Recolección de la información
- Análisis

Las acciones realizadas a este propósito condujeron a la construcción de dos cuestionarios y una entrevista semiestructurada. El primer cuestionario dirigido a determinar los modelos intuitivos que de multiplicación y suma muestran los estudiantes de pri-

[1] Miembro del grupo MESCUD.

[2] Miembro del grupo MESCUD y del grupo NRD de Bologna.

[3] Ver una conceptuación en el aparte "Aspectos teóricos de la investigación", este documento.

mer semestre y el segundo a determinar algunas comprensiones que estos estudiantes tienen de:

- la fracción como relación parte todo,
- la conexidad de esta interpretación de la fracción con tipos de representación gráfica y escritural de las formas $\frac{a}{b}$ y $a,a_1a_{2...}\ a_n$... éstas últimas finitas o infinitas,
- criterios de ordenamiento,
- criterios de intercalación y densidad,
- criterios de acumulación

La entrevista dirigida a profundizar, corroborar o rechazar algunas hipótesis generadas por el estudio y análisis de las respuestas a los cuestionarios.

1.3 Aspectos teóricos de la investigación

En esta sección damos cuenta de algunos de los conceptos usados en el aparte 2. Específicamente, trataremos de manera relativamente breve qué es un modelo intuitivo, cuál es su papel en el aprendizaje y porqué es posible y correcto indagarlo a través de cierto tipo de cuestionarios.

1.3.1 Sobre los modelos intuitivos de Fischbein

Enfocamos algunos aspectos clave del marco teórico en el que Efraim Fischbein coloca la problemática de la intuición, para ello acudimos siempre a Fischbein (1987). Luego, particularizamos acerca de los modelos intuitivos.

1. El ser humano en tanto constructor de mundo desde el lenguaje, es un animal que, sin embargo debe enfrentarse a un mundo del que es conciente que le es previo y del que él mismo hace parte. Este doble papel que el ser humano ha podido jugar, ha ocasionado "una brecha en esta estructura naturalmente unitaria: cognición y comportamiento" (p. 7)
2. El ser humano es conciente que puede conocer y de la falibilidad de lo que conoce, pero al mismo tiempo es conciente que debe tomar decisiones para actuar en ese mundo previo. "…como un efecto de formas indirectas (conceptuales) de conocimiento, la incertidumbre llega a ser una presencia habitual en nuestro proceso de toma de decisiones" ¿Mediante qué mecanismos los seres humanos logramos sobreponernos a una incertidumbre que podría inducir parálisis?.
3. Una parte de la respuesta estriba en el rigor y la coherencia de los sistemas formales de conocimiento que ha generado una nueva forma de certeza "…que puede tener o no alguna relevancia práctica. La que la lógica ofrece no es una certeza absoluta, valorable prácticamente sino *una forma convencional de aceptación*" (p. 7).
4. Frente a la ausencia de certeza prácticamente significativa por el camino del conocimiento lógico, acudimos a creer que en realidad la hemos alcanzado. Construimos con informaciones iniciales y parciales, conglomerados que parecen entidades cerradas, auto suficientes y auto consistentes "Es la *necesidad* de una certeza comportamental, implícitamente significativa, no convencional y práctica lo que crea la casi instintiva creencia en la existencia de tales certezas últimas y, consecuentemente, la *búsqueda* de ellas… Es esa necesidad absoluta la que histórica y sicológicamente, ha formado este tipo particular de procesamiento de información. Datos disparatados o incompletos se aglutinan ellos mismos a través de éste en estructuras intrínsecamente creíbles, aparentemente coherentes, consistentes y compactas ". (P. 7).
5. La función principal de la intuición es entonces la de dotar con la misma evidencia intrínseca y certeza comportamentalmente significativa a nuestros razonamientos y conocimiento conceptual que la percepción le confiere a nuestro conocimiento del mundo, más inmediato, que denominamos real. *"…uno tiende a creer en la absolutés del concepto, uno tiende a conferir sobre esta noción, basada en convenciones, la absolutés de un hecho dado, objetivamente existente*. En nuestra terminología, esto significa conferir *intuitividad* al concepto" (p. 21).
6. La intuición es entonces la encargada de permitirnos actuaciones intelectuales productivas y es la que ponemos en juego cuando resolvemos problemas o, más generalmente, cuando iniciamos y realizamos un flujo de razonamiento. Debemos recalcar que la intuición no es un sentimiento, aunque es un sentimiento lo que nos la hace producir: sentimos la necesidad "casi instintiva" (p.7) de certeza comportamentalmente significativa y de evidencia intrínseca. La intuición es un sistema complejo de intuiciones.
7. Una intuición es un esquema (el sentido piagetiano) y por lo tanto es una forma de cognición (cognición intuitiva) que sobrepasa las in-

formaciones a mano, la realidad dada "… *es más que sistema de reacciones automatizadas, más que una habilidad o sistema de habilidades; ella es una teoría, un sistema de creencias, de expectativas aparentemente autónomas* [4]" (p. 88).

8. Sin embargo, las cogniciones intuitivas tienen unas características específicas que las diferencian de otras formas de cognición. "La experiencia tiene un papel fundamental en la formación de intuiciones porque en ciertas circunstancias, ella forma expectativas estables [pero]…la experiencia puede generar intuiciones no solo mediante generación de patrones de reacciones sino también generando sistemas organizados, de creencias aparentemente autónomas (p. 88).

9. Como "…la fuente básica de las cogniciones intuitivas es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente estables" (p. 85) algunas de sus características específicas provienen de una contradicción estructural e ineludible entre los constreñimientos generados por las limitaciones terrestres de la experiencia humana y la practicidad de los significados intuitivos: concretud, finitud, obstáculo de duplicidad (prolongación de la evidencia práctica respecto de la unicidad de localización de los objetos de nuestra experiencia en un tiempo dado).

10. Existe una gran variedad de cogniciones contra intuitivas. Por ejemplo, entre las más conocidas están el infinito actual; la no existencia de una recta paralela a una recta dada o la existencia de infinitas rectas paralelas con un punto de intersección a una recta dada; la relatividad del espacio y la del tiempo; (-)x(-) = +. Frente a ese tipo de cogniciones, las personas recurrimos a interpretarlas como cogniciones intuitivamente más aceptables. Los modelos proporcionan una forma frecuente de hacerlo, aunque esto conduzca también frecuentemente a errores. "Cuando una persona tiene que tratar con una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a producir –algunas veces deliberadamente otras inconscientemente- sustitutos de esa noción que son intuitivamente más aceptables. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos" (p. 121).

11. "Un modelo intuitivo es, por su propia naturaleza, de clase sensorial. Puede ser percibido, representado o manipulado, como cualquier otra realidad concreta" (p. 121), aunque no necesariamente es un reflejo directo de esa realidad -un gráfico cartesiano es un modelo intuitivo de su función, el modelo planetario lo es del átomo-.

12. Hay varias clases de modelos intuitivos, para nuestros propósitos expondremos algunas ideas sobre los analógicos y los paradigmáticos así como los tácitos y los explícitos.

- **Analógico:** producto del reconocimiento de una semejanza estructural entre dos sistemas que pertenecen a sistemas conceptuales diferentes. El papel principal del modelo, estriba en la ayuda que brinda para la interpretación del sistema original o la solución de un problema formulado en el sistema original. "Es un medio heurístico de generación de hipótesis. Provee una estructura intuitivamente accesible, en la que se facilitan operaciones mentales que podrían ser difíciles en el sistema original.". (p. 142).
- **Paradigmático**: es un elemento o una subclase de una clase a la que también pertenece el originalmente dado. El papel principal del modelo estriba en la posibilidad de la construcción y formulación de los juicios intuitivos pues "…contribuye como una heurística a la inmediatez de las cogniciones intuitivas" (p. 143) "…si uno tiene que usar un concepto en relación a otros en un proceso productivo de razonamiento, este concepto nunca trabaja como un constructo puramente lógico. El significado subjetivamente a él atribuido, sus potenciales asociaciones, implicaciones y distintos usos están tácitamente inspirados y manipulados por algún *ejemplar* aceptado como representativo de la clase total. Son tales ejemplos particulares los que confieren su genuina capacidad productiva sobre los conceptos…" (p. 143).
- **Tácito**: en tanto sistema de expectativas aparentemente autónomas de las condiciones específicas de realización de la clase de experiencias que lo ha producido, un modelo intuitivo tácito se produce automáticamente, y por otra parte, la acción de sustitución de la noción intuitivamente inaceptable ocurre tácitamente imponiendo sus reglas comportamentalmente significativas sobre el sustituido. Los esfuerzos mentales del individuo cognoscente se dirigen sobre el sustituto y no ocurre una reinterpreación del logro de tales esfuerzos en términos del original, puesto que, su estructura objetiva ha desaparecido de la mirada

[4] De las condiciones que permitieron su generación.

del individuo. Sin embargo, en tanto el flujo de un razonamiento es posible por la presencia en él de aceptaciones automatizadas, "*Una hipótesis…es que los modelos intuitivos tácitos –paradigmáticos o analógicos- juegan un papel fundamental en todo proceso de razonamiento productivo.*" (p. 122).

- **Explícito**: la diferencia fundamental de este tipo de modelo intuitivo con el anterior, está dada por la conciencia con la que el individuo cognoscente hace la imposición de las reglas comportamentalmente significativas de este modelo sobre el sustituido.

1.3.2 Acerca del aprendizaje

En el marco de esta investigación, entendemos aprendizaje como modificación incremental de un esquema. Según Piaget (1980, p.24) "Toda acción que es repetible o generalizada a lo largo de aplicaciones a nuevos objetos engendra …un ´*esquema*´". Por lo tanto un esquema de acción expresa, Piaget (1971, p. 251) "el conjunto estructurado de caracteres generalizables de la acción, es decir aquellos que permiten repetir la misma acción o aplicarla a nuevos contenidos"

El concepto de esquema propuesto por Piaget ha sido retomado por Dubinsky (1991, p.102) como *"…una colección más o menos coherente de objetos y procesos"* que von Glasersfeld (1980,) caracteriza desde un punto de vista funcional: un arreglo de tres partes, una situación experiencial; una actividad o procedimiento específicos de la persona y un resultado, en ésta última aparece resaltado el tenor anticipatorio y propositivo del esquema, carácter que (Piaget, 1971, p. 195) ha señalado, "la anticipación no es otra cosa que …la aplicación del esquema (o esquemas) a una situación nueva antes que ésta suceda como acto".

Los esquemas se producen y transforman en la confrontación de clases de situaciones problema no solubles en primera instancia para quienes las abordan mediante un proceso de abstracción reflexiva que Dubinsky (1991, p.99) describe usando el tipo de "objeto" que logra dominar "…*difiere de la abstracción empírica en que trata la acción como opuesta a los objetos, y difiere de la abstracción seudo empírica en que no trata tanto con las acciones mismas sino más bien con las relaciones entre las acciones".* En ese último nivel se genera los esquemas que dan cuenta que se ha producido un aprendizaje en matemáticas; es decir, la abstracción reflexiva es el modo de producción de aprendizaje en matemáticas y por lo tanto, interviene también en la definición de la naturaleza del pensamiento matemático.

Vergnaud (1990) comparte estas descripciones y presenta en Teoría de los campos conceptuales, al "esquema" como *"la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas"* afirmando que en ellos es *"donde hay que buscar los conocimientos-en-acto del sujeto, es decir los elementos cognoscitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria"*. Organiza los conocimientos en acto o "invariantes operatorias", contenidos en los esquemas, en dos clases según su papel en la solución y enfrentamiento de situaciones: "conceptos–en–acto" y "teoremas–en–acto" y en tres tipos desde el punto de vista lógico: proposiciones, funciones proposicionales y argumentos.

1.3.2.1 El papel de los modelos intuitivos en el aprendizaje

En tanto cogniciones intuitivas, confieren autoevidencia y cerradura a los razonamientos; es decir, el que razona tiene el sentimiento de que ha razonado bien, aunque así no sea. Por otra parte, en tanto modelo, actúa sobre las situaciones llevándolas a ser como el modelo. Si el modelo es tácito, la persona que de él dispone no es consciente de algunos aspectos estructurales que el modelo impone a la situación a pesar de que esta persona pueda verbalizar en qué aspectos de la situación se basa para comprenderla de la manera en que lo hizo.

Finalmente, los modelos intuitivos tácitos pueden ser primitivos, esto es construidos en la confrontación de situaciones iniciales y sostenidos por el uso durante largos periodos de tiempo

Si los modelos intuitivos tácitos y primitivos están ligados a la comprensión de situaciones y objetos que tienen preferiblemente ocurrencia escolar, se sigue que tal modelo está distribuido socialmente y que grupos de personas y libros de texto lo usan de manera exitosa y habitual. Pero, dado su origen de formación, los modelos intuitivos, tácitos y primitivos aplicables en ciertas situaciones matemáticas iniciales, tendrán que ser insuficientes porque existirá una nueva clase de situaciones que subsuma la clase de situaciones iniciales pero que sin embargo la supere estructuralmente.

1.3.3 ¿Cómo es posible indagar los modelos intuitivos?

Harel, Behr, Post y Lesh (1994) investigaron a partir de un cuestionario en el que plantearon problemas controlando en el enunciado tipo de número, contexto, texto, estructura semántica, sintaxis, categorizándolos, según las reglas del modelo intuitivo que el resolutor debería cambiar, extender o violar, para efectos de realizar un desempeño considerado correcto. Aquí queremos resaltar que los resultados, indican que estos tipos de problema multiplicativo con multiplicadores menores que 1, llegaron a ocasionar bajo desempeño de futuros profesores que ya habían tomado cursos normales de cálculo y álgebra, así como de profesores en ejercicio.

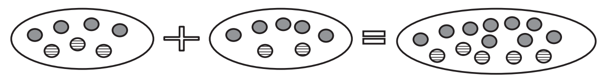
1.3.3.1 ¿Es legítimo indagar los modelos intuitivos mediante cuestionarios?

Dada la naturaleza de los modelos intuitivos, estos aparecen cuando hay que enfrentar situaciones a las que se debe dar una respuesta. En situaciones de aula en las que hay un contrato didáctico establecido o en situaciones en las que existe un contrato de investigación establecido, las personas indagadas asumen de manera sincera el compromiso de contestar respetando el contexto. Por lo tanto, si el compromiso se ha establecido, el cuestionario es suficiente para propiciar que emerjan los modelos intuitivos pero no lo garantiza. Además de esta facilitación, falta procurar que la respuesta dada ocurra casi sin reflexión y una manera de hacerlo es presionar por el tiempo mínimo de respuesta.

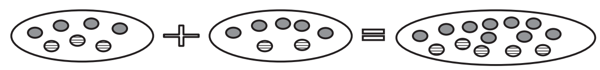
Ahora bien, dadas las condiciones impuestas para contestar al cuestionario, no se puede colegir de las respuestas el estado de conocimiento de los que responden, solo se puede colegir que bajo escasez de tiempo hicieron lo que mejor pudieron hacer. Para determinar el estado de conocimiento podría recurrirse a una entrevista que discurra sobre las respuestas en el cuestionario.

2. La necesidad de reconocer y conservar el todo

Situación 1. Mora, Rojas y Barón (1999, p.138) muestran que algunos estudiantes escriben lo que se les plantea visualmente como relación parte-todo como si fuese una relación parte-parte. Hecho análogo, describen también Lesh, Landau y Hamilton (1983, p. 284). En estas condiciones, es natural que tales estudiantes efectúen la suma $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$ así: $\frac{3+2}{5+4}=\frac{5}{9}$, que corresponde a la siguiente representación visual:



Situación 2. El asunto presentado en la situación 1, sin embargo no parece obedecer únicamente a la interpretación de la relación parte-todo como parte-parte puesto que, aún escribiendo parte/todo, la representación visual que sigue



podría corresponder a $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7+7}=\frac{5}{14}$.

En tal caso, sucedería que $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\neq\frac{5}{7}$

Situación 3. Es famoso el problema planteado en Tahan Malba (1999, pp. 17-20). Resumiendo, dice que un padre deja como herencia, de un lote de 35 camellos, al hijo mayor la mitad, al mediano la tercera parte y al menor la novena parte. Beremiz acudió en ayuda de los hermanos que no podían ponerse de acuerdo; si le permitían agregar al lote de camellos, el camello de su amigo acompañante, él podría solucionarles el problema. Los hermanos consintieron y Beremiz logró el reparto y la satisfacción de todos los involucrados:

Hijo	Parte de lote heredada	Solución de Beremiz	De los dos camellos sobrantes Beremiz devuelve uno a su acompañante, el otro lo recibe como pago por resolver el lío. ¡Todos quedaron conformes!
Mayor	Media (17 y un poco)	Mitad de 36 que es 18	
Mediano	Tercera (11 y un poco)	Tercera de 36 que es 12	
Menor	Novena (3 y un poco)	Novena de 36 que es 4	

Todas las soluciones hasta aquí planteadas tienen en común que, en algún momento durante el proceso, las personas que actúan, de manera conciente o no, cambian el todo de referencia. Así, en las dos primeras situaciones, se mezclan varios todos sin tomar las precauciones del caso. En la tercera situación, además de cambiar el todo a repartir, ni siquiera el primer todo queda totalmente repartido entre los hermanos.

Situación 4. Cuando pedimos a nuestros estudiantes convertir medidas, usualmente les pedimos algo como convertir 1,75 m^3 a cm^3. Aparecen respuestas como: 175cm^3; 5,359375cm^3; 17.500cm^3; 1’750.000 cm^3. Podemos estar de acuerdo en que la ausencia de un algoritmo para realizar la conversión es un hecho que explica la variedad de respuestas obtenidas. Sin embargo, esta ausencia no explica la renuencia de algunos estudiantes para aceptar la respuesta correcta; a ellos les parece imposible que precisamente esa sea ¿cómo puede ser tan grande?

Situación 5. Otro tipo de problema clásico, asociado a conversión de medidas, lo ejemplificamos con el siguiente enunciado: A una tienda llegó un pedido de una gruesa de pacas de cigarrillos. Sabiendo que una gruesa tiene 12 pacas, una paca tiene 12 cajas, una caja tiene 10 paquetes y un paquete tiene 20 cigarrillos ¿Cuántos cigarrillos pidió la tienda?

La respuesta más común es 28.800 cigarrillos. Pero, no aparecen respuestas como: hay tantos cigarrillos como en 1440 paquetes o en 144 cajas…

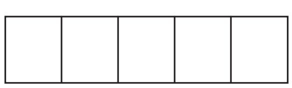
Situación 6. En el cuestionario, realizado durante la investigación, para hallar modelos intuitivos primitivos de los estudiantes, uno de los problemas es: De los habitantes coreanos solo los hombres van al ejército, pero no van las mujeres, ni los niños, ni las niñas. Si las mujeres son doce millones trescientos cincuenta mil, y los niños y niñas son en total quince millones doscientos mil, ¿cuántos habitantes coreanos hay?

20 estudiantes cambiaron el todo al responder sumando los datos numéricos dispuestos.

15 estudiantes no lo cambiaron, pero de ellos 8 dieron la respuesta correcta, 5 respondieron “no se puede” y 2 no contestaron.

Situación 7. En el cuestionario, realizado durante la investigación, para establecer comportamientos de los estudiantes respecto de fracciones en ordenamiento, intercalación, densidad y puntos de acumulación, se pide:

Dividir la siguiente figura en siete partes de igual área



De 35 estudiantes 7 cambiaron el todo de tamaño, 12 borraron la partición inicial, 8 hicieron lo pedido, 8 cambiaron la medida de área por la de conteo.

¿Qué puede significar para un estudiante + si no puede realizar lo pedido?

Modelo intuitivo que en los problemas de suma pusieron en juego los estudiantes

Aparece dispuesto un único modelo de suma Parte 1 + Parte 2 = Total

1. Manteniendo siempre las partes disyuntas.
2. Una regla menos aplicada es la existencia de exactamente dos partes y un total
3. El total no es objeto de reflexión pues a su interior no ocurren transformaciones

Por la aplicación indiscriminada de 1, el problema 11 fue contestado mal por el 100%

Por la aplicación indiscriminada de 2, el problema 9 fue contestado mal por el 80%

Por la aplicación indiscriminada de 3, el problema 1 fue contestado mal por el 71%

Por la ausencia de conservación del todo, el problema 14 fue contestado mal por el 98%

Dada la importancia para la investigación, es necesario enfatizar sobre dos vínculos entre aspectos del pensamiento multiplicativo y el aditivo aquí hallados:

Los problemas 11, 14 tienen en común la existencia de unidades pertenecientes a más de una de las colecciones que finalmente entran en juego para la suma. Al visualizar estos problemas, desde el esquema parte todo, tales unidades juegan el papel de dos unidades. Contrastando con el tipo de soluciones en el problema 2, aparece que excepto una, todas las otras respuestas correctas fueron obtenidas restando dos veces la misma cantidad. La respuesta excepcional ocurrió mediante una sola resta de dos veces una misma cantidad perteneciente a una intersección. Con lo dicho, sucede que en todos los casos solo el 2% de los estudiantes identifica, anticipando, la medida de la intersección conscientemente.

Acerca de los modelos intuitivos MADA

En la literatura se reporta la existencia de un modelo intuitivo para la multiplicación y la división: la multiplicación agranda y la división achica, por sus siglas: MADA. Veamos su aparecimiento en la solución de un problema simple propuesto en el cuestionario:

Situación 8. 457 recolectores de oro decidieron distribuirse en partes iguales los 10 kilogramos de oro que recolectaron durante un mes de trabajo. ¿Cuántos kilogramos de oro le corresponden a cada uno?

De los 35 estudiantes 21 respondieron (10÷350), 1 acudió a regla de tres, 2 cambiaron a multiplicación, 11 invirtieron los operandos (350÷10)

Un aspecto importante a recalcar es que en estos modelos se puede establecer la presencia de una especie de teoría implícita de formulación general "la multiplicación agranda, la división achica" que guía a los estudiantes su decisión y los conduce a la adquisición implícita de reglas de funcionamiento como: el dividendo es más chico que el divisor pero es más grande que el resultado y el divisor es entero. O reglas como: el multiplicador siempre es entero o el resultado es más grande que cada uno de los factores.

Estos modelos intuitivos son exitosos para una gran cantidad de situaciones: todas aquellas que estén contextualizadas en una estructura aritmética como Z^+, que puede verse como anillo ordenado con identidad, un anillo euclidiano.

Al examinar los textos de primaria que circulan en Colombia desde 1980, se observa que siempre le proponen a los niños de segundo y tercero de primaria situaciones verbales, numéricas o gráficas compatibles con una concepción de multiplicación como grupos iguales que se repiten, que entonces son abordables pero que también se pide, implícitamente, abordar como situaciones de sumando repetido. He ahí una explicación de la construcción de MADA en nuestros estudiantes. Sin embargo ¿explica este hecho la presencia de MADA aún en estudiantes que han tratado con estructuras de cuerpo, en las que no se cumple más que exista una multiplicación diferenciada de una división dada la presencia de inversos multiplicativos y de unidad?

En los textos de cuarto, quinto grados el problema de la multiplicación ya casi nunca aparece estudiado explícitamente, aunque tratan suma, producto y multiplicación de fracciones junto a problemas de proporcionalidad. En ningún texto estudiado existe una reflexión explícita o un grupo de actividades o problemas conducente a provocar la reflexión sobre este nuevo significado de la multiplicación y de la división. Tal vez se da por hecho que no existe una nueva significación y que lo único que cambia son los objetos sobre los que ellas operan. En realidad, de los más de 30 textos estudiados solo la Aritmética de Baldor propone una definición de multiplicación que trasciende la de suma repetida:

Def 1: "La multiplicación es una operación de composición que tiene por objeto dados números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un número llamado producto que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad." (p.90)

Ej 4 x 3 = ?

$$\frac{3}{1} = \frac{?}{4}$$

pero cuando se refiere a la multiplicación entre naturales pone la siguiente definición:

Def 2: Cuando el multiplicador es un número natural, la multiplicación es una suma reiterada que consta de tantos sumandos iguales como unidades tiene el multiplicador (p.91)

Ej 4 x 3 = ?

4 + 4 + 4 = ?

y, ¿qué vínculo existe entre estas definiciones? No lo explicita a pesar que es relativamente fácil encontrarlo. Establecer el vínculo no está entre las prioridades didácticas del autor.

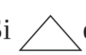
Aun en los textos de álgebra escolar casi todas las operaciones ocurren en Z[x] y la multiplicación aparece en tanto forma, con pocos referentes concretos en otros contextos.

3. La necesidad de recuperar la unidad

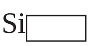
Situación 9. Un tipo de actividad que serviría para abordar la discusión acerca de MADA con los estudiantes puede ser la de recuperar la unidad vinculando contextos gráficos y simbólicos. Por ejemplo:

a) Si  es un tercio de la unidad

¿cuál es la unidad?

b) Si  es dos tercios de la unidad

¿cuál es la unidad?

c) Si  es tres medios de la unidad

¿cuál es la unidad?

Pues bien, cuando hemos puesto este tipo de actividades a estudiantes para profesor y aun a profesores en ejercicio, reiterativamente encontramos porcentajes de éxito cercanos a los siguientes: de 1/3 a 1, 98%; de 2/3 a 1, 66%; de 3/2 a 1, 33%

¿Qué puede significar para una persona $\frac{a}{c} x \frac{b}{d}$ si no puede realizar lo pedido? o ¿Qué puede significarle $\frac{a}{c} x \frac{b}{d} = 1$? o ¿ $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d}$?

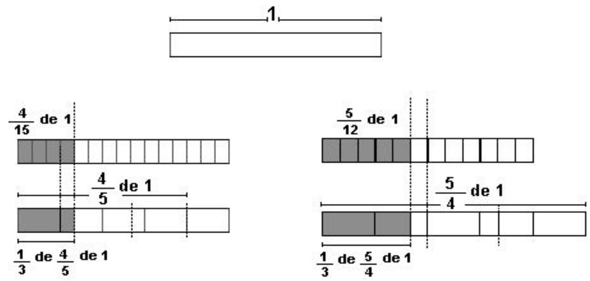
Un hecho que llama la atención es que en el curso, grado 7°, de uno de los profesores que no podía recuperar la unidad desde 3/2, el 25% de sus estudiantes sí pudo hacerlo.

4. ¿Anular, cuestionar o transformar MADA?

De la teoría de modelos intuitivos se desprende que MADA es un modelo intuitivo paradigmático, y como se colige de lo investigado en los libros de texto de aritmética en Colombia, para nosotros también es primitivo; por lo tanto, genera el efecto primacía. Es decir, es una de las cogniciones cuya perseverancia y resistencia al cambio son tan fuertes que siguen estables aún bajo la aceptación de evidencia dirigida en su contra, como si el individuo que de ellas dispone se rehusara a interrogarlas. En términos de Kruglansky y Ajzen (1983, p.23) el efecto primacía "…refleja el fenómeno de congelamiento epistémico por el que la persona cesa, en algún punto, de generar hipótesis y de aceptar una proposición dada actualmente plausible como cierta. El congelamiento epistémico es una característica inevitable del proceso de enjuiciamiento en razón del carácter potencialmente interminable de la generación de cognición. La secuencia epistémica debe parar en algún punto, al menos que el individuo esté desposeído de todo conocimiento cristalizado necesario para tomar una decisión y actuar". De todo lo dicho en este párrafo se deduce la imposibilidad de anular MADA y la dificultad que no la imposibilidad de cuestionarlo.

Lo hemos dicho antes, el modelo MADA es compatible con la multiplicación y la división en anillos euclidianos y por lo tanto para reflexionar sobre la no pertinencia de este modelo se requiere sobrepasar estas estructuras. Una posibilidad aparecería pronto con las fracciones pero bajo la condición de tener una comprensión adecuada desde la estructura aritmética del producto y de la división de fracciones que las diferencie como operaciones pero que las integre en tanto la equivalencia entre $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d}$ y $\frac{a}{c}$ x $\frac{b}{d}$.

Desde el punto de vista de las situaciones, podemos por ejemplo preguntar por la relación entre las preguntas ¿cuánto de la unidad es un tercio de cuatro quintos de unidad? ¿cuánto de la unidad es un tercio de cinco cuartos de unidad? ¿cuánto de cuatro quintos de la unidad cabe en un tercio de la unidad? A continuación está la solución gráfica de las dos primera preguntas. En ellas se ve la necesidad de reconocer y conservar el todo, así como recuperar la unidad tanto de fracciones mayores que ella como de fracciones que le son menores.



Vemos a partir de lo descrito a través de las 9 situaciones a qué tipos de cogniciones profesores y estudiantes debemos afrontar. Pero, precisamente, desde estos tratamientos de la multiplicación y la división se ve que estas operaciones ni achican ni agrandan, el todo se conserva y lo "único que ocurre es que la situación puede describirse desde distintas unidades, es decir que efectivamente ocurren cambios de unidad y por lo tanto, según la unidad que se escoja para la descripción ocurre que la numerosidad final depende en proporción inversa al tamaño de la unidad escogida, y entonces se recupera la idea que el producto agranda y que la división achica. Esta es la compatibilidad y la superación de esta concepción con MADA.

Referencias Bibliográficas

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht :Reidel

LESH, R; LANDAU, M and HAMILTON, E. (1983). *Conceptual models and applied mathematical problem-solving research.* Grants SED 79-20591 and SED 80-17771. In: Acquisition of mathematics concepts and processes :Academic Press. pp. 263-344.

MORA, O; ROJAS, P y BARÓN, C. (1999). *Los Niños y Las Fracciones.* En: La enseñanza de la matemática escolar y la formación del profesor. Grupo de Matemáticas Escolares de la Universidad Francisco José de Caldas. Serie Cuadernos de Matemática Educativa. Vol 1. pp. 125-146. Bogotá: Ed. Gaia.

PIAGET, J. (1980). *The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance*. In: Language and learning: The debate between Piaget and Chomsky (Massimo Piattelli, Ed) Cambridge :Harvard University

PIAGET, J. (1971). Études de épistemologié genétique. Vol XIV. Paris:P.U.F.

TAHAN, M. (1999). *El hombre que calculaba.* Bogotá: Panamericana. (Ana Murillo, trad.)

KRUGLANSKY, A & AJZEN, I. (1983). *Bias and error in human judgment.* In: European Journal of Social Psychology. Feb. 1-43

von GLASERSFELD. (1980). *The concept of equilibration in a constructivist theory of knowledge.* In: Autopoiesis, communication and society (Benseler, Hejl and Kock, Eds) New York:Campus

HAREL, BEHR, POST and LESH (1994). *The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations.* In: The development of multiplicative reasoning in the learning of matematics (Harel and Confrey, Eds) New York :State University of New York. pp. 363-384.

DUBINSKY, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* In: Advanced mathematical thinking (Tall, Ed) Dordrecht :Klower. pp. 95-123.