COBB, P. *Perspectivas experimental, cognitivista e antropológica em educação matemática*. Tradução do Prof. Dr Antônio Miguel. Campinas SP: Zetetiké, Vol 4 (6). p. 153-180. Julho/dezembro de 1996.

COCHRAM-SMITH, M. & LYTLE, S.. Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, 24. Washington: American Eduational Research Association, 1999.

CONTRERAS, J. *El sentido educativo de La investigación*. In: Desarrollo Profesional del Docente: Política, investigación y práctica. Angulo, J., Barquim, J., y Pérez A. (Eds). Madrid: Akal, 1999.

ELLIOT, J. *La relación entre <comprender> y <desarrollar> el pensamiento de los docentes*. In: Desarrollo Profesional del Docente: Política, investigación y práctica. Angulo J., Barquim, J., y Pérez A. (Eds). Madrid: Akal, 1999.

FIORENTINI, D.., NACARATO, A. e PINTO, R. *Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada*. Quadrante: Revista teórica e de investigação. Associação de professores de matemática de Portugal, *8(1,2) 33-40,* 1999.

FIORENTINI, D. *Pesquisando "com" professores: reflexões sobre o processo de produção e ressignificação dos saberes da profissão docente*. In: Investigação em Educação Matemática, Perspectivas e Problemas. Matos J. e Fernandes E. (Ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2000.

HARGREAVES, Andy. *Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal, 1998.

HOPKINS, D.. *Investigación en el aula: guía del profesor*. Colección IIE. Barcelona: PPU, 1989.

JIMÉNEZ, A. *La formación continuada de profesores de matemática: una experiencia*. Bogotá: *Revista EMA,* 6 (3), 250-263, 2001.

JIMÉNEZ, A.. Quando professores de Matemática da escola e da universidade se encontram: re-significação e reciprocidade de saberes. Campinas (São Paulo): Tese de doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2002.

KEMMIS, S. La investigación-acción y la política de la reflexión. En: Angulo, J., Barquim, J., y Pérez A. (Eds). *Desarrollo Profesional del Docente: Política, investigación y práctica*. Madrid: Ediciones Akal, 1999.

SCHÖN, Donald. *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Ediciones Paidós, 1992.

SILVA, Tomas Tadeu da. Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo. Belo Horizonte: Autêntica, 2000. 2ª edição, 1ª reimpressão.

ZEICHNER, Kenet. *A formação reflexiva dos professores: idéias e práticas*. Lisboa: Educa, 1993.

ZEICHNER, K. Y LISTON P. Enseñar a reflexionar a los futuros docentes. En: Angulo, J., Barquim, J., y Pérez A. (Eds). *Desarrollo Profesional del Docente: Política, investigación y práctica*. Madrid: Ediciones Akal, 1999.

El concepto de infinito y la formación de profesores: Algunas consideraciones epistemológicas y didácticas

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MARTHA BONILLA ESTÉVEZ
JAIME ROMERO CRUZ
PEDRO JAVIER ROJAS GARZÓN.

1. Introducción

Este escrito surge de la indagación dirigida por D'Amore, realizada por miembros de los grupos NRD (Bologna-Italia); ASP (Cantón Ticcino-Suiza) y MESCUD (Bogotá-Colombia) en el marco de la investigación interinstitucional "Il Senso dell'Infinito"[1]

Puesto que el cuerpo de datos cualitativos utilizados en este documento fue obtenido en la investigación mencionada, es necesario ubicar sucintamente tanto los propósitos de la misma como algunos aspectos de la metodología empleada.

Sobre el propósito. En la investigación antedicha nos preguntamos si puede declararse que existe algo análogo al "sentido del número", pero referido al infinito, es decir, algo como un "sentido del infinito".

Para tal fin se seleccionó dos ámbitos de indagación. El primero, D1, se refiere a un carácter intuitivo y lingüístico; el segundo, D2, a uno más elaborado y técnico. Así, el primero involucra a estudiantes con formación matemática no especializada o a personas no dedicadas estrictamente a la matemática. El segundo incluye personas con una cierta competencia matemática, cercana a la de los estudiantes que estudian matemáticas superiores o a personas cultas en matemáticas (como, por ejemplo, profesores de matemática de escuela secundaria).

En particular para D2, sobre el que haremos énfasis en este escrito, motivados en que:

> "Es bien sabido que el axioma euclidiano del todo y las partes (el todo es mayor que las partes) vale solo para conjuntos finitos. Esto obviamente no vale en el caso de conjuntos infinitos, es tan cierto esto que, la propia característica usada para definir conjuntos infinitos lo incorpora (Un conjunto es infinito cuando es posible ponerlo en correspondencia biunívoca con una parte propia suya). Una vez aceptado este paso, reservado a sujetos de discreta competencia matemática, se sabe de la literatura que el *aplastamiento* (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002) es un enemigo difícil

[1] D'Amore et al. (2004) "Il senso dell'infinito" La matematica e la sua didattica. Pitagora :Bologna. Próximo a aparecer.

de superar. Por *aplastamiento* entendemos la falsa concepción según la cual todos los conjuntos infinitos son equipotentes entre sí. Sabemos bien que esta convicción viene reforzada por las demostraciones de que N, Z, Q son efectivamente equipotentes entre ellos, no obstante la aparente imposibilidad invocada intuitivamente cuando para N, Z y Q se proponen alguno de los modelos figurados usuales. En este punto, los estudiantes terminan con la creencia de que demostraciones análogas valen para *todos* los conjuntos infinitos. Para entender el pasaje entre la numerabilidad infinita **n** (de N, Z, Q, por ejemplo) y la infinita continua c (de R y de los complejos, por ejemplo), ocurre una maduración, una competencia, una capacidad crítica de alto nivel",

se estableció algunas cuestiones

¿Qué nivel de competencia requiere para afirmar como se hace usualmente que $n<c$? ¿Cuántos profesores de matemáticas lo saben o lo saben entender? ¿Cómo lo ven los estudiantes de cursos universitarios? " (D'Amore, et al 2004)[2]

Sobre aspectos metodológicos. La metodología utilizada privilegió la aproximación cualitativa, indagando en diferentes grupos de sujetos a través del uso de casos y entrevistas clínicas, aspectos relativos a las preguntas y objetivos de la investigación. En total se involucraron 1007 sujetos pertenecientes a D1: 130 colombianos, 298 italianos y 579 suizos, y 36 sujetos de D2: 20 colombianos y 16 italianos.

Los casos utilizados corresponden a "historias" que relatan conversaciones entre sujetos; se solicita a los estudiantes o profesores participantes la elección entre las opciones presentadas y una argumentación para ello. Para el caso de las entrevistas clínicas se construyó para cada uno de los entrevistados un derrotero particular que tenía en cuenta lo respondido por él en cada uno de los casos.

2. Propósito de este escrito

Como formadores de profesores hemos estado interesados en indagar sobre aquellos obstáculos que se presentan en los estudiantes para profesor y en los profesores en ejercicio, a propósito del aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos. Estos obstáculos constituyen una dificultad a superar en los programas de formación para profesores de matemáticas y por lo tanto se constituyen en una valiosa fuente para los procesos de construcción y de desarrollo curricular.

Como mostraremos, parte de estos obstáculos provienen de un tipo de formación impartida. En este escrito nos interesa exponer algunas comprensiones que de infinito tienen algunos profesores y estudiantes para profesor, a la vez que presentar una posible explicación de ese estado de comprensión manifestado.

Aspectos metodológicos. Para el cumplimiento del propósito descrito en (2), acudimos además de lo hallado en la investigación, a la tipología de obstáculos propuesta por Brousseau (1983) para agrupar y diferenciar los obstáculos según su origen: epistemológico y didáctico.

La noción de obstáculo epistemológico la consideramos adecuada a nuestra intencionalidad ya que ellos (los obstáculos) surgen, emergen y se superan en el proceso de aprendizaje por la confrontación que entre adquisiciones nuevas y comprensiones viejas establece el alumno en los procesos de interacción didáctica. Así, un obstáculo es un estado del conocimiento que está relacionado con construcciones anteriores y que para muchas contextos resulta exitoso pero que fuera del mismo puede generar respuestas incorrectas (no adecuadas) o poco precisas; es un conocimiento que puede resultar altamente persistente y resistente de ser transformado y que por tanto debe ser tematizado o convertirse en objeto de reflexión por el estudiante (o el aprendiz) para que tenga posibilidades de ser reorganizado o reelaborado.

Actualmente muchos de los currículos de matemáticas, en particular los de formación de profesores, están organizados de tal manera que en una secuencia lineal se presentan trozos del saber institucionalizado, y se deja al estudiante la responsabilidad de la integración de los conocimientos viejos con los nuevos así como su desestructuración. Este hecho produce, como lo intentamos mostrar en este artículo, simbiosis entre lo nuevo y lo viejo, es decir, obstáculos, que de manera particular para el concepto que nos ocupa -el infinito-, se encuentran en personas con formación matemática de alto nivel que están ancladas en conocimientos adquirimos en la época escolar anterior y que, por no ser tematizadas y reflexionadas, persisten aunque a veces parezcan contradictorias.

Este referente nos sirve para dar un matiz a las respuestas que los participantes en la investigación sobre el sentido del infinito dieron. Tomamos acá como objeto de análisis las respuestas de estudiantes para profesor (de séptimo semestre en adelante) de la Licenciatura en matemáticas, de profesores recién egresados y de profesores en ejercicio, estudiantes de la Especialización en Educación

[2] Puesto que el artículo está en prensa, pero será publicado este año, no es posible aún saber la página de lo extractado. Esto explica que en la información dispuesta no esté la página correspondiente.

Matemática, quienes formaron parte de lo que denominamos al ámbito D2. Como ya se mencionó asumimos que un obstáculo se construye en situaciones escolares anteriores, para mostrar este aspecto retomamos algunos de las respuestas dadas por estudiantes pertenecientes a D1, pues debido a que ellos no han tenido formación explícita sobre el infinito muestran en sus respuestas algunos de los conocimientos que consideramos explicaciones primarias que al no ser tematizadas (para diferenciarlas, ampliarlas o refutarlas) en situaciones de aprendizaje posteriores, se convierten en obstáculos que se manifiestan en los profesores con formación matemática avanzada. Denominamos a estos obstáculos de origen didáctico ya que son adquirimos en el contexto escolar precisamente por la elección de la propuesta educativa establecida.

Para categorizar los obstáculos de origen epistemológico acudimos a las nociones matemáticas implicadas en el concepto de infinito y que han sido reportadas, en diferentes textos, como dificultades históricas en la formación de las mismos, ya que se relaciona con la naturaleza misma del conocimiento matemático.

Nuestra investigación se enmarca en un enfoque de tipo cualitativo cuya intención es aportar conocimiento de tipo descriptivo, explicativo o predictivo sobre algunos de los fenómenos que ocurren en relación con las matemáticas escolares, su enseñanza y aprendizaje.

En tal sentido, para describir los obstáculos que manifiestan los estudiantes para profesor y los profesores en ejercicio acudimos a sus explicaciones sobre el infinito dadas en la entrevista clínica o en respuesta a alguno de los casos propuestos, pero para explicarla acudimos a las rupturas o acomodaciones que establecen entre un conocimiento nuevo y uno viejo, lo cual haremos describiendo las explicaciones que los estudiantes con menor formación matemática dan al infinito e intentando mostrar la conexión entre esos dos conocimientos, es decir entre las nuevas formas de "decir" sobre el infinito y las viejas formas de "entender" el infinito.

De ese estado de rupturas o acomodaciones podemos concluir que el tipo de trabajo que se les ha presentado influye en la aparición y permanencia de los obstáculos, y que por tanto es necesario construir situaciones de aprendizaje en las cuales se recupere para el estudiante el sentido del aprendizaje buscando que se haga conciente de esas diferentes formas de comprender un objeto matemático y de las limitaciones y ventajas de cada una de ellas.

3. Hallazgos iniciales

En algunas de las entrevistas realizadas, nos encontramos con aseveraciones como las siguientes[3]. La primera de ellas efectuada con un profesor en ejercicio (P_1), que terminó su pregrado en matemáticas hace aproximadamente 5 años, quien en la entrevista nos responde

> E: Hablando de conjuntos numéricos y los cardinales a ellos asociados, usted ¿puede asociarle a los racionales un cardinal?
>
> *P_1: Si no puedo a los naturales, mucho menos a los racionales*
>
> E: ¿y con los reales, igual?
>
> *P_1: No, yo puedo establecer equipotencias entre algunos de esos conjuntos, pero ahí más no.*
>
> E: dígame dos conjuntos entre los que pueda establecerla
>
> *P_1: En enteros positivos y racionales*
>
> E: ¿Para usted eso no es suficiente para designar cardinalidad?
>
> *P_1: Pero en la relación de equivalencia... son iguales*
>
> E: ¿En qué son iguales?
>
> *P_1: En relación de equivalencia*
>
> E: En relación de equivalencia, ¿respecto a qué son iguales?
>
> *P_1: En cantidad de elementos*
>
> E: Sabiendo que eso es así, que son iguales en cuanto a cantidad de elementos, estaría ahí definiendo una equivalencia entre conjuntos, insisto ¿no es suficiente para decir del cardinal de esos dos conjuntos?
>
> *P_1: Recordemos primero que en estas situaciones, uno lo primero que establece es equivalencia y luego orden y estamos hablando de eso, la equivalencia se puede detectar, es lo primero, es lo más sencillo para detectar, y luego pues uno trata de buscar equivalencias para establecer el orden, prioridad, para establecer mayor, menor, bueno todos esos elementos. Entonces en estos conjuntos uno puede establecer primero equivalencia porque es mucho más sencillo, uno puede hacer una correspondencia, pero de ello establecer quién es el último y cuántos hay, eso se me hace cosas diferentes.*

Las respuestas de un profesor de matemáticas (P_2), con más de 10 años de experiencia:

> *P_2: Hasta aquí prácticamente estaba la demostración y está correcto, pero no sé, eso no me convence porque no puede ser $0,\overline{9} = 1$, no es … puede ser una millo…. millo…..millonésima, pero le va a faltar algo, entonces ¿por qué motivo aquí dio que era igual a 1?..algo debe estar funcionando mal aquí…*
>
> *…. Entender el concepto de infinito, es decir siempre va a haber uno más, uno más.*

Las respuestas de un profesor recientemente graduado (menos de un año)

[3] Para lo que sigue usaremos como convención E para entrevistador, E_i para estudiante para profesor y P_j para profesor en ejercicio.

P_3: yo he tenido la oportunidad de, de leer …sobre lo que hizo … Cantor, sobre …cardinal de los números naturales, los reales,… él llamaba el cardinal de los naturales como $\aleph_0$……pues, no se si sea un número, o sea no tengo claro si podría llegar ser un número natural … si $\aleph_0$ fuera un número, podría yo decir que sería un número muy grande, …que se escribe de alguna forma sobre el infinito

…algún número natural muy grande … cualquiera que pueda decir en este momento será muy pequeño, en comparación a todos los que hay, que son muchísimos

…no está en el, conjunto de los números naturales…digamos sería un número que catalogaríamos como números, infinitos, podríamos decir así

Las respuestas de un estudiante para profesor (quinto semestre)

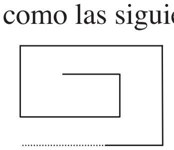
E_1: a los naturales podemos agregar uno más, uno más, mientras que en los reales ya se verá el infinito desde otra forma que no solo como agregar uno más, sino también como dividir y dividir todo lo que uno quiera.

En la literatura que versa sobre la comprensión del infinito y lo infinito se encuentran tematizadas distintas tipologías de dificultades que diversos tipos de estudiantes manifiestan cuando tratan con conceptos matemáticos (Fischbein (1979), D'Amore (1996), Arrigo y D´Amore (1999) y Tall (2001)).

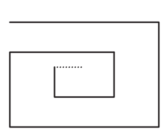
Obstáculos epistemológicos. En cuanto a los obstáculos epistemológicos referidos al concepto de infinito hemos encontrado, tanto en la literatura, como en la indagación, varios tipos:

1. *El modelo de infinito como proceso sin fin*. Esta idea claramente expresada por P_2 refleja la acepción de lo infinito en su sentido potencial, ligada a la numerosidad de los naturales (como el conjunto infinito por excelencia), hallada a partir de la inducción (uno más, el siguiente). También la encontramos reflejada en afirmaciones ligadas al proceso de dividir expresada por E_1.

En estas afirmaciones encontramos ideas sobre el infinito enmarcadas en la posibilidad de continuar reiterando un proceso (finito) tantas veces como se quiera, bien sea desde el punto de vista de la realización física o la realización mental. Para muchos de los entrevistados resulta claro que el proceso se puede continuar realizando "infinitamente", aunque desde el punto de vista de lo "concreto" este sería imposible. Tal es el caso de las respuestas dadas por estudiantes para profesor, a preguntas como las siguientes:



¿Se puede continuar al infinito?



¿Se puede continuar al infinito?

E_2: Sí, porque si tomamos la figura, podemos seguir el trazo de tal forma que podamos realizar "una especie de espiral cuadrangular" de manera que lo pueda extender tanto como se quiera, nunca llegaría al infinito pero se comporta de esa forma. . ."

E_3: Considero que es posible aunque físicamente llegará un momento en el cual parecerá que se detuvo en un punto, si acercamos una lupa nos daremos cuenta que podríamos continuar con el procedimiento tanto como quisiéramos".

Se puede continuar al infinito?

0	1	2	3	4	5	…
1	½	1/3	¼	1/5	…	
0	½	2/3	¾	4/5	…	

E_4 Sí, porque los considero números naturales y siempre en esta sucesión tienden al infinito…

E_4 Sí, porque los considero como un número racional y siempre tienden a infinito

2. *La aceptación del axioma euclidiano que caracteriza el todo como mayor que la parte*. Es sin duda una de las características de los conjuntos finitos que los estudiantes trasladan a la noción de infinito, que además es compatible con la teoría de conjuntos estudiada en la matemática escolar. Este axioma, se constituye así en uno de los obstáculos necesarios de superar a fin de comprender una de las características fuertes de los conjuntos infinitos y es precisamente que podemos encontrar resultados como los siguientes: i) Hay tantos pares como naturales. ii) Hay tantos puntos en un segmento de 10 cm como en la recta completa. iii) Hay tantos números múltiplos de 45 como naturales.

Las respuestas a nuestras preguntas son reveladoras de este obstáculo.

¿Donde hay más puntos, en un segmento de longitud 10cm o en uno de longitud 20 cm?

P_4. Si uno relaciona un punto de ese primer segmento se diez, con los infinitos de acá [del segmento de longitud 20] *pero, relacionándolos uno a uno, .. entonces podría decir que faltaría esa otra parte del segmento y puntos por relacionar con los del anterior, porque los del anterior ya se habrían acabado…habría esa contradicción de que este segmento tiene infinitos puntos igual que este…*

¿Donde hay más números en los enteros o en los naturales?

P_2: …porque el segmento es parte del cuadrado y la parte nunca es igual al todo [después de la visualización de una biyección entre dos segmentos de diferente longitud, se pregunta] .. *¿Por qué ahí no se cumple que la parte es siempre menor que el todo?*

3."*Lo mismo*" y "*cuántos*" Aquí nos apoyamos en las siguientes definiciones. Dos conjuntos son equivalentes por cardinalidad si se puede establecer una correspondencia uno a uno y sobre entre ellos y, el cardinal de un conjunto es la característica que tiene en común con todos los conjuntos con los que es equivalente (en el sentido definido anteriormente) y que lo distingue de aquellos con los que no lo es. Este hecho que efectivamente se continúa cumpliendo en los conjuntos infinitos, pone en cuestión la idea de que es necesario "contar", como se refleja en el caso de P_1 antes citado

Para el caso finito, se diferencia entre "tener lo mismo" (en tanto se establece una biyección entre conjuntos) y poder afirmar "cuántos hay" en cada uno, pues se tiene la experiencia con los números del conteo. Por ejemplo, respecto al número de vocales de nuestro alfabeto actual, decimos hay "5", y no, hay tantos como dedos en una mano. Pero para el caso infinito esta diferencia se constituye en obstáculo, pues ante la ausencia de nombres cotidianos para designar cuántos hay, el reconocer igualdad por biyección no es visto como posibilidad de asignar cardinal, y menos aún pensar en diferentes cardinales infinitos. Veamos la siguiente afirmación:

> *P_1: [entre n y 1/n] yo puedo hacer una correspondencia ahí, pero ¿quién y cuál es el cardinal?, pues no es posible determinar*

4. El efecto aplastamiento de los cardinales transfinitos. Tal como lo caracteriza D'Amore, se da cuando se asume que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos, de lo que se concluye que no es posible encontrar orden, puesto que no hay sino uno: el infinito. Este hecho estuvo también presente en las afirmaciones realizadas por los entrevistados,

> *P_2: [n no puede ser distinto a c] el infinito es uno solo…porque lo infinito es lo infinito…si usted tiene uno tiene otro y otro….*

Este obstáculo está ligado a la imposibilidad de aceptar, como nuevo conocimiento, la existencia otros números transfinitos, y a reconocer la existencia de una regla, diferente a la de uno más, para construir el siguiente de un número, es decir, una regla que simultáneamente haga posible construir y ordenar.

5. *Los números y sus propiedades*. Entre los entrevistados encontramos, pocos en verdad, que no sucumben el efecto aplastamiento pero que aún dudan de la existencia de los números infinitos como cardinales. Asociado a este obstáculo encontramos la discusión sobre la existencia de un objeto matemático, que para nuestro caso asumiremos con P_3 como la posibilidad de definir una estructura matemática, con sus elementos y propiedades, que para el caso del número $\aleph_0$ implicaría construir un conjunto no unitario, en el cual definir operaciones y propiedades de orden.

> *P_3: si $À_0$ fuera un número …..para que sea un número debe ser que lo pueda operar, que lo pueda construir, de alguna forma que pertenezca a algún conjunto, que haya más como él*

Obstáculos didácticos. Nos parece interesante en este aspecto y a la vez muy ilustrativo destacar una afirmación de un entrevistado:

> P_1: Entonces uno mentalmente esa idea, de que infinito no es operable, primero que todo, bajo ninguna circunstancia, cuando uno ve cálculo, el infinito, más que operarlo uno trata de evitarlo. ¿Si?, busca formas de no dejar indeterminaciones o límites estructurales, busca la forma de saltarlo, ¡claro! porque es que, de ninguna manera…no sé; se condiciona al individuo digamos al estudiante le dicen, infinito entonces haga esto, si usted ve una integral de infinito hasta dos, busque un límite y ta , ta, ta, separe en dos y calcule, entonces también esa misma información a uno lo va llevando, que si hay infinito, córrase y búsquese otro camino y sáltese, porque también va quedando el mito de que no es operable, entonces aquí estoy llevando esa misma idea.

Como lo dijimos anteriormente nos interesa resaltar las relaciones entre las explicaciones dadas por los estudiantes para profesor, que aún no han realizado discusiones relativas al infinito y mucho menos acerca de la diferenciación entre infinito potencial e infinito actual y las dadas por los individuos con formación matemática avanzada que habían realizado aproximaciones teóricas y demostraciones del infinito.

Un primer obstáculo lo encontramos en la "idea" de los números naturales como un conjunto infinito (con infinitos elementos), construible a partir de la posibilidad de añadir siempre uno más. Conocimiento que resulta útil para construir una idea sobre cardinal, en conjuntos finitos, como el número de elementos de un conjunto que se halla a partir del conteo uno a uno. Sin embargo, dicho conocimiento se constituye en obstáculo para la construcción de cardinales infinitos (ver, por ejemplo, lo expresado por E_4 y E_6, conectado a las afirmaciones de P_1), en tanto el esquema que se construye, de encontrar el cardinal por conteo de uno en uno y que los cardinales se dan en ese conjunto, resulta imposible en este caso.

En el ámbito curricular el tratamiento de los conjuntos numéricos como $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, refuerza la idea que un subconjunto propio de un conjunto tiene menor cardinalidad que dicho conjunto. No se reconoce la posibilidad de ser diferentes en una medida pero iguales en otra (en cardinalidad). Aspectos como los dichos por P2, cuando asume que en los enteros hay más números que en los naturales, apoyado en la representación de la línea recta -es decir en lo perceptivo-, se presentan muy frecuentemente.

El hecho que en conjuntos finitos la existencia de *una* inyección no sobreyectiva garantice que el dominio de la inyección es menos numeroso que su codominio (como en el caso de la construcción de números naturales) genera un modelo intuitivo que suele extenderse al caso infinito, donde la existencia de una tal función *no garantiza* que todas las inyecciones sean no sobreyectivas. Precisamente, la existencia simultánea de una función inyectiva no sobre y otra inyectiva y sobre es una característica de los conjuntos infinitos (aunque vale decir, que encontrar dicha biyección suele ser difícil), mientras que en el caso finito la existencia de una niega la otra.

Finalmente, es importante tener en cuenta que, aún "superado" el efecto aplastamiento, la demostración de que el cardinal de los naturales es menor que el continuo no es fácil, pues además de requerir aceptar la demostración por reducción al absurdo, requiere reconocer, por ejemplo, que:

- Salvo casos especiales, los decimales se pueden escribir de manera única como.
- Si dos expresiones decimales difieren en el n-ésimo decimal, exceptuando los casos especiales, corresponden a números diferentes.
- Los detalles de dicha demostración requieren conceptos como sucesiones equivalentes, donde está implícito el trabajo con el infinito de los naturales.

4. Conclusiones

Hemos tratado de mostrar que aún en personas con relativa formación matemática que han enfrentado escolarmente el infinito, se presentan algunos obstáculos epistemológicos que implican la incomprensión del infinito, primordialmente del infinito actual, lo que para nosotros implica que permanecen en una noción demasiado intuitiva de éste y con una gran incomprensión no solo sobre la temática misma sino seguramente sobre desarrollos matemáticos a los que es necesario esta noción: el cálculo, el análisis, etc.

Dado que el infinito, es particularmente una temática de la matemática escolar, es decir, que el contexto de discusión, presentación y tal vez comprensión, es primordialmente escolar, proponemos que los obstáculos sean incorporados como temáticas en la formación de profesores, si deseamos que su acción profesional propicie aprendizajes con sentido en sus alumnos. Con esta apreciación queremos insistir en que en la formación de los profesores requiere del abordaje tanto del contenido matemático (epistemológico), que de suyo es complejo, como de posibles explicaciones, significaciones, comprensiones que sus alumnos puedan tener en un momento determinado y que corresponderían a obstáculos epistemológicos o a rupturas inconclusas o a estadios nuevos de conocimiento. Estas reflexiones pueden ser utilizadas por el profesor para construir situaciones que pongan en cuestión dichos conocimientos y les posibilite a los estudiantes la ruptura con lo viejo y la apropiación de lo nuevo, como un hecho conciente del individuo.

Otros análisis y conclusiones, relacionadas con esta investigación, serán objeto de un próximo artículo.

Referencias Bibliográficas

ARRIGO, G. & D'AMORE, B. (1999). *Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual*. En: Educación Matemática (México). 11 (1), pp. 5-24.

__________ (2002). "*Lo vedo ma non ci credo…*", Seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. In: La Matematica e la sua didattica (Bologna, Italia). 1, 4-57.

BROUSSEAU G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. In: Revue Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 4, n°2, pp. 165-198. La pensée sauvage. Grenoble.

D'AMORE, B. (1996). *El infinito: Historia de conflictos, de sorpresas, de dudas*. En: Epsilon (España), 36. pp. 341-360.

D'AMORE, B. et al. (2004). *Il senso dell'infinito. In: La matematica i la sua didattica*. Bologna: Pitagora

FISHBEIN, E.; TIROSH, D. & HESS, P. (1979). *The intuition of infinity. In: Educational Studies in Mathematics*, 10. pp. 3-40.

TALL, D. & TIROSH, D. (2001). *Infinity -the never- ending struggle*. In: Educational Studies in Mathematics, 48 (2 y 3), pp. 129-136.