

ESTUDIO DIAGNÓSTICO DE LA INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DERIVADA

Cynthia C. Castro, Lorenza Illanes

Tecnológico de Monterrey (México)

ccling@itesm.mx, lillanes@itesm.mx

Palabras clave: Cálculo Diferencial, Análisis Cualitativo, Funciones, Derivadas

Key words: Differential Calculus, Qualitative Analysis, Functions and Derivatives

RESUMEN: En la Matemática Educativa se tienen diversos enfoques del estudio de las funciones y sus derivadas: geométrico, de situaciones didácticas, del pensamiento y lenguaje variacional, epistemológico y socioepistemológico. En este último, se basa la presente investigación. Se trabajó con cinco grupos de estudiantes de Cálculo para Ingeniería. A los estudiantes se les aplicó un pre-test y pos-test de la gráfica de la función y sus derivadas; los cuales se analizaron estadísticamente. En base a los resultados se proponen actividades de la derivada para mejorar el aprendizaje del cambio y las variaciones con problemas de Ingeniería.

ABSTRACT: In mathematics education there are different researches and approaches of the function and its derivative studies: geometric, didactic situations, thinking and variational analysis, epistemological and socioepistemological theory. This research is based on this last one approach. The work was done with five groups from engineering carrier of the Calculus lecture. The students had done a pre-test and post-test of the graph function and its derivatives. A statistical analysis was done of these tests. Based on the results, a set of activities on engineering problems was proposed to study the change and variations from functions, in order to improve the function derivatives learning.

■ INTRODUCCIÓN

La Matemática Educativa es una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta desde la segunda mitad del siglo XX y se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos relacionados al saber matemático (Cantoral y Farfán, 2003; Robert y Speer, 2001). El estudio de las derivadas se ha hecho desde diferentes enfoques: el enfoque geométrico de las derivadas sucesivas (Contreras, 1999), el enfoque de Situaciones Didácticas (González, 1999), el enfoque del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2004), el enfoque epistemológico (Cordero 2001), el enfoque socioepistemológico (Cantoral, 2004; Cantoral, 2013). En base a éste último enfoque se realizó la presente investigación.

El objetivo de la investigación fue estudiar los fenómenos de aprendizaje de la variación y el cambio. El cambio se refiere a una modificación de estado, y la variación como la medida de ese cambio (Cantoral, 2013). Para lograr este objetivo se propuso hacer una investigación diagnóstica de la interpretación gráfica de la primera, segunda y tercera derivada de una función que tienen los estudiantes que estuvieron en un curso de Matemáticas I para Ingeniería con una propuesta didáctica integral (Salinas, Alanís y Pulido, 2011).

El interés por el desarrollo de este trabajo surge para tener un primer acercamiento e identificar evidencias de las interpretaciones gráficas que realizan los estudiantes de las razones de cambio de una función, al llevar dentro del curso una propuesta integral donde el Cálculo Newtoniano y el Cálculo Leibniziano están didácticamente integrados (Alanís y Salinas, 2010; Salinas, Alanís y Pulido, 2011). En el desarrollo de este estudio se consideran dos aspectos: a) el análisis semiótico (Duval, 1999) que se requiere en el manejo de gráficas y b) el concepto de la derivada en ingeniería, pues en ellas se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011). En el desarrollo de este estudio se considera el concepto de la derivada en ingeniería, pues en ellas se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración.

Para describir esta investigación que tiene como objetivo identificar evidencias de las interpretaciones gráficas que realizan los estudiantes de las razones de cambio de una función, el presente escrito se estructura de la siguiente manera: una primera sección de introducción, que es la presente sección donde se describió el objetivo de investigación y el marco teórico; una segunda sección con la metodología de investigación donde se describe la muestra y los pasos que se siguieron para el estudio; una tercera sección en donde se reportan y analizan los resultados obtenidos; posteriormente, una sección de conclusiones en donde se resaltan los resultados importantes y las ideas que generaron esta investigación, dentro de ellas también se expone una pequeña descripción de las actividades propuestas para mejorar el estudio de las funciones y su derivadas; finalmente, se presenta la bibliografía correspondiente.

■ METODOLOGIA

Esta investigación es de corte cuantitativo, la muestra esta conformada por 5 grupos de una universidad del noreste del México, con estudiantes de ingeniería en el curso de Matemáticas I para Ingeniería (Cálculo Diferencial) de primer semestre. El total de la muestra la configuraron 180 estudiantes.

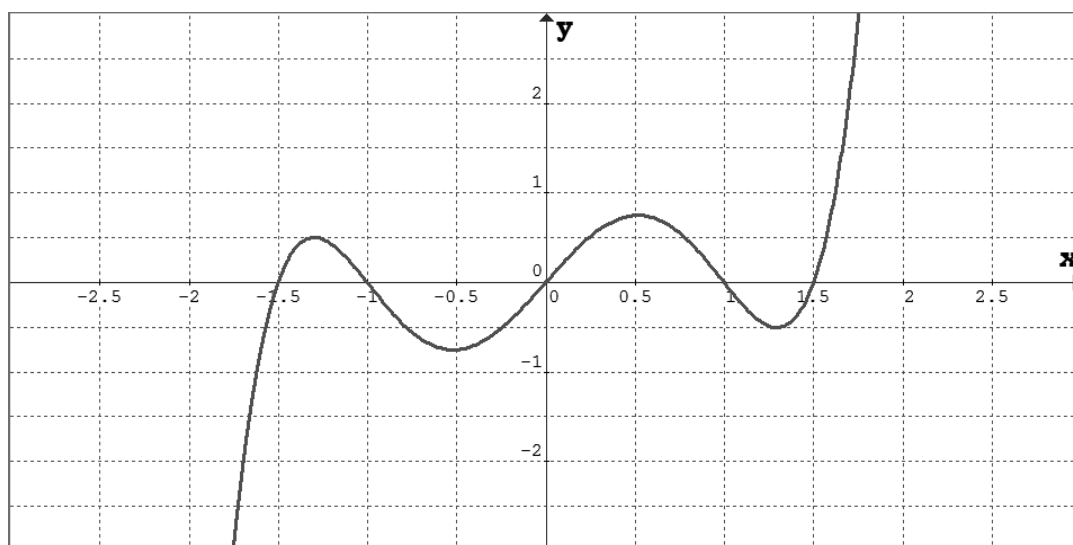
Para obtener este diagnóstico, a los estudiantes de todos los grupos se les aplicó un pre-test para evidenciar sus concepciones de la derivada mediante un análisis gráfico. Posteriormente, se abordó en las clases del curso de cada grupo el concepto de la derivada dentro del contexto de magnitudes que cambian, aplicada a problemas de Ingeniería y se les aplicó un pos-test para analizar si habría evidencias de alguna mejora en la concepción gráfica de primera, segunda y tercera derivada en los estudiantes.

Para este pre-test y el pos-test se utilizaron un conjunto de 4 gráficas ya trabajados en investigaciones anteriores (Cantoral 2013), en donde los estudiantes deben marcar sobre la gráfica la porción en donde se cumpla los siguientes casos: $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ y $f'''(x) > 0$ respectivamente. En la gráfica de la Figura 1 se puede observar la función que se da para este diagnóstico.

La gráfica de la Figura 1 aparece cuatro veces en el diagnóstico, con diferentes preguntas:

- 1) Marca sobre la gráfica de la función $f(x)$, que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
- 2) Marca sobre la gráfica de la función $f(x)$, que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
- 3) Marca sobre la gráfica de la función $f(x)$, que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
- 4) Marca sobre la gráfica de la función $f(x)$, que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.

Figura 1. Función original del diagnóstico $f(x)$



Los aspectos fundamentales observados en este diagnóstico fueron los siguientes:

- Se reconocen las partes donde la función y sus respectivas derivadas son positivas.
- Se reconoce dónde están los máximos o mínimos de $f(x)$.
- Se proporciona la gráfica de las derivadas dada la $f(x)$.
- Se proporciona la ecuación de la función o de alguna de las derivadas.
- Se establecen las concavidades de la función o sus derivadas.
- Se proporciona algún argumento sobre donde la función era creciente o decreciente.
- Se señala como solución el área bajo la curva de la función dada.
- La solución solo es colocada en el primer y cuarto cuadrante.
- Resultado correcto o incorrecto del ejercicio para cada pregunta.

De todos estos aspectos sus frecuencias fueron registradas para cada grupo, también se capturo observaciones generales que iban arrojando los resultados, si había alguna respuesta que no hubiese sido considerada en los aspectos fundamentales predeterminados. Tanto para el pre-test como para el post-test se realizó un análisis de frecuencia de los resultados. Posteriormente, se elaboró un análisis estadístico en donde se muestran las evidencias obtenidas de esta investigación.

■ ANALISIS DE RESULTADOS

Los resultados de las frecuencias obtenidas del pre-test como para el post-test se dividieron en 6 categorías de análisis: a) Marco el contorno de $f(x)$; b) Confunde los positivos $f(x) > 0$; c) Señala el área bajo la curva; d) Obtuvo la gráfica de la derivada; e) resultado Correcto; y resultado incorrecto. Estas categorías se analizaron para cada una de las preguntas, las cuales se denominaron P1, P2, P3 y P4 respectivamente. A continuación (Tabla 1) se presenta las frecuencias y frecuencias porcentuales del pretest en donde se puede observar que solo 107 de los 180 estudiantes pudieron señalar correctamente $f(x) > 0$, 66 estudiantes trazaron correctamente $f'(x) > 0$, 59 obtuvieron correctamente el trazo de $f''(x) > 0$ y 42 obtuvieron bien el resultado de $f'''(x) > 0$. Como vemos hay una tendencia a la baja al subir de orden la derivada.

Tabla 1. Frecuencias y Frecuencias porcentuales del Pre test

Pregunta	Marco el contorno de $f(x)$		Confunde los positivos $f(x) > 0$		Señala el área bajo la curva		Obtuvo la gráfica de la derivada		Resultado Correcto		Resultado Incorrecto	
P1 $f(x)$	98	54.4	15	8.3	46	25.5			107	59.4	73	40.56
P2 $f'(x)$	86	47.7	10	5.5	28	15.5	78	43.3	66	36.6	114	63.33
P3 $f''(x)$	83	46.1	25	13.8	24	13.3	51	28.3	59	32.7	121	67.22
P4 $f'''(x)$	37	20.5	10	7.7	14	7.7	40	22.2	42	23.3	138	76.67

Posteriormente, se abordó en las clases del curso de cada grupo el concepto de la derivada dentro del contexto de magnitudes que cambian, aplicada a problemas de Ingeniería, en donde se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011).

Tabla 2. Frecuencias y Frecuencias porcentuales del Pos-Test

Pregunta	Marco el contorno de $f(x)$		Confunde los positivos $f(x) > 0$		Señala el área bajo la curva		Obtuvo la gráfica de la derivada		Resultado Correcto		Resultado Incorrecto	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
P1 $f(x)$	127	70.5	17	9.4	90	50.0			141	78.3	39	1.6
P2 $f'(x)$	94	52.2	25	13.8	59	32.7	106	58.8	93	51.6	87	.3
P3 $f''(x)$	80	44.4	27	15.0	60	33.3	82	45.5	82	45.5	98	54.4
P4 $f'''(x)$	61	33.8	26	14.4	38	21.1	51	28.3	57	31.6	123	68.3

Al terminar el curso se aplicó el mismo diagnóstico y se elaboraron los correspondientes análisis (Tabla 2), en el cual se puede observar en el Post-Test que 78.3% de los estudiantes pudieron señalar correctamente $f(x) > 0$, 51.6% estudiantes trazaron correctamente $f'(x) > 0$, el 45.5% obtuvieron correctamente el trazo de $f''(x) > 0$ y 31.6% obtuvieron bien el resultado de $f'''(x) > 0$. Como vemos hay una tendencia a mejorar con respecto al pre-test, sin embargo, sigue decreciendo la tendencia al aumentar el orden de la derivada.

Se analizó también (Figura 2 y Figura 3) un comparativo grafico de las frecuencias y las frecuencias porcentuales del pre-test y pos-test en donde se puede observar como en las preguntas 1, 2, y 4 hubo un incremento en el número de respuestas correctas, para la pregunta 3, no fue tan evidente como en las otras.

Figura 2. Frecuencias del diagnóstico Pre test y Post test.

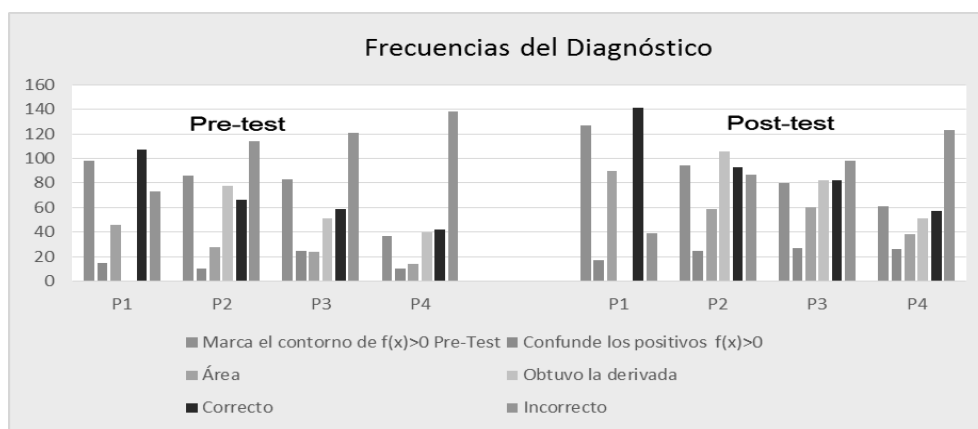
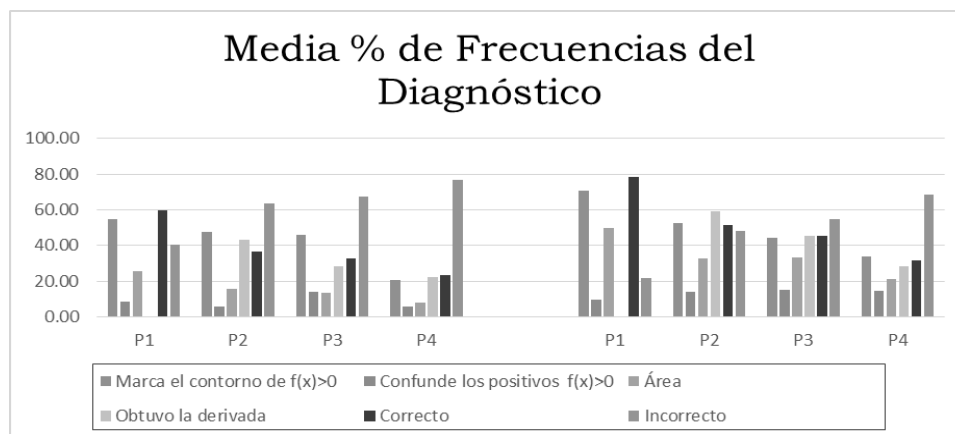


Figura 3. Porcentaje de Medias de Frecuencias del diagnóstico Pre test y Post test.



Las observaciones generales (Tabla 3) que iban arrojando los resultados, dieron lugar a hallazgos interesantes los cuales fueron agrupados por pregunta y de ellos se obtuvieron características que debemos de considerar para la configuración de actividades que nos den la mejora esperada.

Tabla 3. Hallazgos encontrados en el estudio.

Pregunta	Observaciones	
P1 $f(x)$	a) Se utilizan intervalos para precisar la solución	c) Se marcan pendientes
P2 $f'(x)$		g) Se marca la región positiva de la derivada
P3 $f''(x)$	b) No se consideran los extremos como parte de la función.	d) Se marca los puntos de intersección con el eje de las x's.
P4 $f'''(x)$		e) Se utilizan intervalos para precisar la solución.
		f) Solo se trata de ubicar por concavidades la solución.
		g) Señalan sólo cuando es cóncava hacia arriba en $f(x)$.
		g) Se subraya toda la gráfica como solución.
		h) Se realiza la gráfica de la $f'''(x)$ sin señalar la parte positiva.
		i) Señalan sólo cuando es cóncava hacia abajo en $f(x)$.

A continuación, se expresan las conclusiones del estudio y algunas ideas de actividades que nos permitirían mejorar el aprendizaje de la primera, segunda y tercera derivada en su expresión gráfica.

■ CONCLUSIONES

Los resultados evidencian que el curso que aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011), corrige un poco la

interpretación gráfica de las funciones y sus primeras

El análisis cualitativo de las gráficas de la primera, segunda y tercera derivada es una herramienta que favorece la comprensión gráfica de un modelo determinado. A la luz de los resultados, se encontraron las siguientes evidencias:

- a) Los alumnos mejoraron en el diagnóstico, después de abordar el tema.
- b) Se considera conveniente reflexionar en realizar actividades de predicción diferentes de los cambios, debido a que en las actividades propuestas se realiza el análisis por separado (magnitud a predecir/razón de cambio) suponiendo que el alumno puede reflexionar en la información que manejan ambas gráficas.
- c) Hay indicios de que los estudiantes en este tipo de ejercicios, confunden entre la parte positiva de la variable independiente y de la parte positiva de la función a analizar.
- d) El término porción dentro de la redacción confunde a los estudiante ya que en lo cotidiano es como una parte con volumen.
- e) Señalan en área bajo la curva y la función.

En esta dirección, se recomienda como puntos a fortalecer dentro del proceso de aprendizaje del curso de Cálculo I mediante la visualización y percepción espacial (Cantoral, 2013) con actividades contextuales que traten las relaciones entre las derivadas de diferentes órdenes establecidas en Cantoral y Testa (2006) complementadas con otras actividades que establecen las relaciones de la segunda derivada con la primera derivada y de la primera derivada con la función; el valor numérico de la segunda derivada y sus relaciones con la función y su primera derivada; trabajar derivadas mayor que dos. Con estas actividades se espera que el aprendizaje en los futuros cursos fortalecerán los conceptos de cambio, variabilidad y la representación gráfica de las derivadas sucesivas de las derivadas.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alanís, J.A. y Salinas, N.P. (2010). Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *El Cálculo y su Enseñanza*, 2(1), 1-14.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudio sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cantoral, R. y Testa, Y. (2006). Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 845-850. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Contreras, L. (1999). *La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas*. Tesis de Maestría

no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

González, R. (1999). Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo. Tesis Doctoral no publicada. CINVESTAV, IPN. México.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus / Elementary analysis. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 283-299). Holland: Kluwer Academic.

Salinas, P., Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable.

Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac*, 56-57(1), 62-69.

Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L.

(2011). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos*. México: CENGAGE Learning.