

## CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL; UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

**Andrea Vergara Gómez, Marcela Parraguez González**

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

andrea.vergara.gomez@gmail.com, marcela.parraguez@pucv.cl

**Palabras clave:** distribución binomial, variable aleatoria, teoría APOE, proceso Bernoulli, distribución de probabilidad

**Key words:** binomial distribution, random variable, APOS theory, Bernoulli process, probability distribution

**RESUMEN:** Este estudio aborda la problemática del aprendizaje de las distribuciones de probabilidad, en enseñanza secundaria. Se analizó específicamente la distribución binomial, en un estudio de caso instrumental simple, con estudiantes de 16 años. El marco teórico utilizado es la teoría APOE, que permite la descripción de los estados de construcción mental necesarios para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos. Un análisis epistemológico reveló que la noción de modelo de distribución de probabilidad es anterior a la definición formal de función de probabilidad y variable aleatoria, de ahí que se propone una construcción cognitiva del objeto distribución binomial, sin la presencia explícita del concepto función. Los resultados de este estudio apuntan a que la variable aleatoria generada por la repetición de un experimento Bernoulli puede ser reemplazada por el proceso de definir un criterio cuantitativo de partición del espacio muestral.

**ABSTRACT:** This study addresses the problem of learning the probability distributions in secondary education. It was analyzed the binomial distribution specifically, in a simple instrumental case study with students aged 16. The theoretical framework used is the APOE theory, which allows the description of states of mental construction necessary for students to learn mathematical concepts. An epistemological analysis revealed that the notion of probability distribution model is prior to the formal definition of function of probability and random variable, in consequence is proposed building a cognitive object binomial distribution without the express presence of the function concept. The results of this study suggest that the random variable, generated by the repetition of a Bernoulli experiment, can be replaced by the process of defining a quantitative criterion partition of the sample space.

## ■ INTRODUCCIÓN

La presente investigación corresponde a un estudio concerniente al aprendizaje de la distribución binomial. La enseñanza de esta distribución ha despertado gran interés en el último tiempo en el programa oficial de estudio que dispone el Ministerio de Educación de Chile, incluyéndose desde los ajustes curriculares del año 2009.

Un aspecto relevante a la hora de comprender la problemática es la relación entre la matemática y la estadística, que como disciplinas científicas, en el último tiempo, se perfilan cada vez más distintas, según lo exponen Cobb y Moore (1997), quienes además sostienen que la enseñanza de la estadística no es un subcampo de la matemática. Ahora bien, existen propuestas relativas a la posibilidad de experimentar métodos de enseñanza que, desde la matemática, se adapten a la naturaleza específica de la estadística (Batanero, 2001). Es precisamente desde esta perspectiva que la presente investigación espera armonizar aspectos procedimentales de la matemática discreta con las formas del razonamiento probabilístico.

Por otra parte, Alvarado y Batanero (2007), en su investigación acerca de la aproximación normal a la distribución binomial, sostienen que, a pesar de los procesos de simulación y manipulación de datos, la aplicación de estas distribuciones en la resolución de problemas sigue siendo compleja, evidenciándose esto en la aparición persistente de multiplicidad de errores.

En este estudio se instala la necesidad de analizar primeramente cómo los estudiantes reconstruyen cognitivamente la distribución binomial, antes que cómo la usan para resolver problemas, pues como señala Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas (1996), los estudiantes enfrentan situaciones problemáticas, reflexionando sobre la solución, en la medida que construyen y reconstruyen estructuras de construcción mental. De ahí, que la investigación se sustenta en la Teoría APOE, desarrollada y actualizada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996).

Ahora bien, en el caso de investigaciones centradas particularmente en el aprendizaje la distribución binomial (Killian & Kepner, 1976; Miltiadis, 2009), estas se limitan al estudio de algunas características y aplicaciones para la asignación de probabilidades y no a las dificultades en torno a su aprendizaje. No obstante lo anterior, cabe destacar que la noción de modelo de distribución de probabilidad se asienta sobre varios conceptos, cuyas dificultades de aprendizaje han sido investigadas por separado desde la perspectiva cognitiva de la teoría APOE, como el conteo y la probabilidad (Salgado & Trigueros, 2009 y Vásquez & Parraguez, 2012). Por otra parte, en cuanto al concepto de espacio muestral, Chernoff (2009) sostiene que el estudio de todas las posibles particiones que pueden hacerse sobre el espacio muestral permite una amplitud de focos para la investigación. Esta afirmación justifica el presente supuesto de investigación, el cual establece que la variable aleatoria puede ser sustituida por un criterio cuantitativo que particione el espacio muestral, permitiendo la designación de categorías.

El interés de este estudio está en determinar cómo estudiante de secundaria puede construir el modelo de distribución asociado a la repetición de un experimento aleatorio dicotómico, sin recurrir a la definición formal de variable aleatoria. Así, el objetivo es identificar estructuras y mecanismos de construcción mental relacionados con el rol de la variable aleatoria, que puedan organizar la propuesta de un modelo de construcción cognitiva de la distribución binomial como *objeto* bajo el enfoque de la teoría APOE.

La pregunta de investigación apunta a determinar la relevancia de los elementos matemáticos formales que se prescriben para la distribución binomial en la construcción cognitiva de esta última como *objeto*; ¿es necesaria la definición formal de variable aleatoria y cuál es su estado de construcción mental? A partir de esta interrogante, el presente estudio pretende constatar, mediante un estudio de caso, si los sujetos de investigación que logran identificar el carácter dicotómico de un experimento aleatorio pueden activar *procesos* para asignar probabilidades a los posibles resultados, recurriendo a la idea de variable aleatoria, sin conocer la definición formal de esta.

### ■ MARCO TEÓRICO

La teoría APOE de Dubinsky (1991) es una teoría cognitiva que considera como base la epistemología genética de Piaget. Específicamente se fundamenta en la idea de la *abstracción reflexiva* para establecer que los individuos realizan construcciones mentales que pueden pasar por distintos estados. Estas construcciones mentales son: *acciones, procesos, totalidades, objetos y esquemas*, las cuales no necesariamente ocurren de manera secuencial. El paso de uno de estos estados de construcción a otro, se realiza precisamente mediante procesos de abstracción reflexiva, considerados como los mecanismos mentales que permiten al estudiante, entre otras cosas, inferir propiedades, establecer relaciones y organizar la información.

Esta teoría sostiene que sin importar el ámbito al que pertenezca el concepto matemático, éste puede ser descrito en términos de cómo se construye para ser aprendido. Esta descripción es presentada mediante una *descomposición genética* que representa una hipótesis o modelo cognitivo para la adecuada construcción del concepto en estudio. La *descomposición genética* es un instrumento de investigación en la teoría APOE, que modela tanto los elementos constructivos del conocimiento matemático que se desea investigar como los aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de dicho conocimiento (Arnon, Cottill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

### ■ METODOLOGÍA

La teoría APOE, como ya se había señalado antes, tiene incorporado un ciclo de investigación, que constituye a su vez un ciclo metodológico de investigación, el cual ha sido validado e implementado por el grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community [RUMEC]. Esta propuesta metodológica posee un enfoque cualitativo y para llevarla a la práctica incorpora elementos definidos en el método de estudio de caso, porque para APOE es fundamental realizar un estudio a profundidad de la problemática en un sistema o grupo bien delimitado.

Este ciclo consta de 3 etapas: Primera Etapa: Análisis teórico del concepto o descomposición genética. Segunda Etapa: Diseño e implementación de la enseñanza. Tercera Etapa: Análisis y verificación de datos.

Sin embargo, la presente investigación no considera la componente de Diseño e implementación de la enseñanza y adapta la componente de Análisis y verificación de datos, separándolas en dos sub-etapas, como ya se ha realizado antes en otras investigaciones, por ejemplo Parraguez (2009)

plantea y utiliza un ciclo con tres etapas, donde la etapa 2 es reemplazada por el Diseño y Aplicación de instrumentos.

En la primera etapa de este ciclo se diseña una *descomposición genética* (DG), para construir el concepto distribución binomial. Para lograr esto se hacen dialogar las bases epistemológicas y matemáticas con otros antecedentes asociados a investigaciones previas en Didáctica de la Matemática.

Esta DG hipotética adquiere la forma de un diagrama explicativo y su función es describir las construcciones mentales y mecanismos de abstracción reflexiva que propician la cognición del concepto matemático en estudio.

En la segunda etapa se utiliza la DG hipotética diseñada, para construir instrumentos y recoger datos. Para ello, la DG hipotética se secciona en partes significativas. Estas partes de la DG actúan como criterios para la elaboración del instrumento, mientras más se ajuste o de cuenta de estas secciones mejor reafirma su grado de validez interna.

En este estudio no se pone a prueba toda la DG, sino que una de sus componentes específicas, la relacionada al espacio muestral y las posibles particiones sobre éste. Junto con lo anterior se realizó un análisis a priori de las posibles respuestas de los sujetos informantes, con el fin de utilizar éstas como parámetros para realizar la tercera etapa del ciclo y así categorizar los resultados. Para probar experimentalmente la DG, como afirma Arnon et al., (2014), se aplicaron los instrumentos de acuerdo a la planificación del estudio de caso.

En la tercera etapa de este ciclo se analiza la información recogida; principalmente dando ejemplos de estudiantes que parecen haber alcanzado ciertas estructuras de construcción y otros que no.

## ■ ESTUDIO DE CASO, INFORMANTES E INSTRUMENTOS

Los 21 estudiantes, que conforman el estudio de caso, cursaban tercero de secundaria en un establecimiento particular subvencionado de Valparaíso, Chile. El grupo fue seleccionado porque, al momento de realizar la investigación, ya habían estudiado, a nivel escolar y según lo prescribe el currículum oficial chileno, los conceptos de espacio muestral, experimento aleatorio y probabilidad, pero desconocían las definiciones formales de variable aleatoria y distribución de probabilidad.

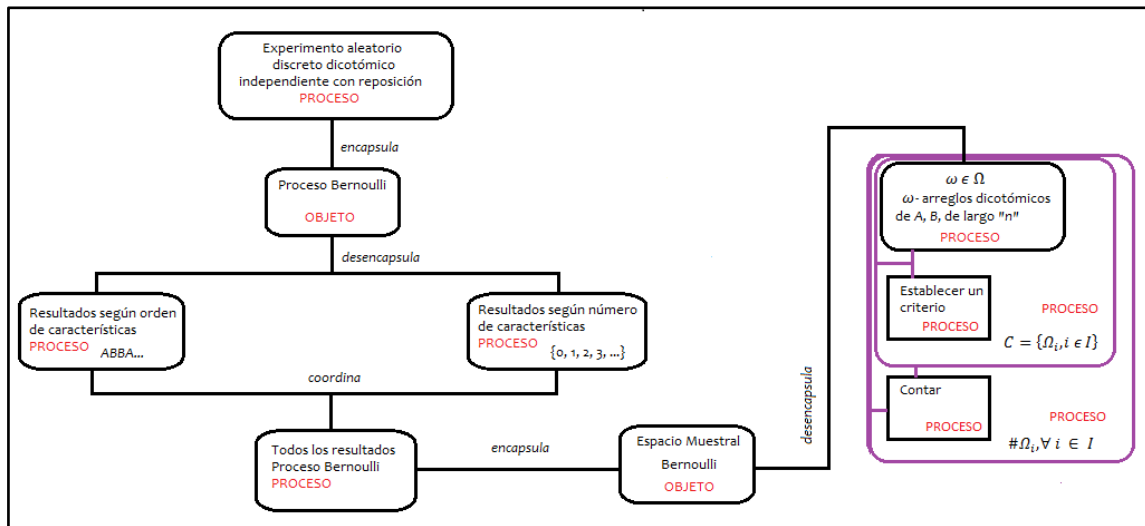
### La DG hipotética

Esta se sustenta partir de 4 componentes, que atienden las distintas estructuras de construcción y mecanismos mentales requeridos en la construcción cognitiva de la binomial. Estas componentes se han denominado respectivamente: resultados de un experimento aleatorio dicotómico, variable aleatoria y triángulo de Pascal, cálculo de probabilidades y distribución Binomial. En este escrito, se abordará la primera componente y algunos aspectos de la segunda componente.

Los elementos del análisis teórico permitieron desplegar una DG que propone un camino de construcción que prescinde de elementos matemáticos muy abstractos, pues se basa en procesos cognitivos pre-operacionales, como la seriación, la ordenación y la clasificación. Estos procesos ocurren sobre el conjunto finito de sucesos que determina el espacio muestral. De este modo, la DG no contempla conceptos como función, variable aleatoria, recorrido de la variable aleatoria o números combinatorios, pero sí considera conceptos relativos al *objeto* espacio muestral y proceso Bernoulli.

Para abordar la primera componente y algunos elementos de la segunda componente se elaboró un cuestionario, donde cada una de las preguntas tiene una relación directa con un par de construcciones y un mecanismo, determinados en la DG propuesta (ver Figura 1).

**Figura 1.** Componente 1 y parte de la componente 2 de la DG para la distribución binomial



Básicamente el cuestionario se basa en la presentación de una situación simple de extracción de una cantidad específica de bolitas, con reposición, de una urna que posee 3 bolitas rojas y 2 bolitas azules. En este cuestionario de respuesta abierta, se les solicita que determinen resultados posibles del experimento para 3 y 4 extracciones. Además se les pide que clasifiquen los sucesos del espacio muestral para el caso de las 4 extracciones, conforme a algún criterio. En este cuestionario no se hace alusión al cálculo de probabilidades.

En términos generales, los métodos empleados para recoger los datos se basan en la interpretación de los registros escritos de las producciones de los estudiantes, ya fueran las respuestas del cuestionario como las transcripción de la entrevista. La interpretación se realizó en base al análisis a priori de los instrumentos, el cual consistió en explicitar la relación entre las preguntas hechas y las estructuras de construcción mental involucradas. De este modo, para cada pregunta se establecieron posibles respuestas, según el estado de construcción mental comprometido.

## ■ RESULTADOS

A continuación se expondrá el análisis de resultados para la pregunta 5, en la que debían realizar 4 extracciones de bolitas y pintar el color obtenido en un casillero, de izquierda a derecha, en un listón de papel. Esta tarea está estrechamente vinculada a los procesos de establecer criterios y manipular los elementos del espacio muestral.

### Análisis de resultados para la pregunta 5

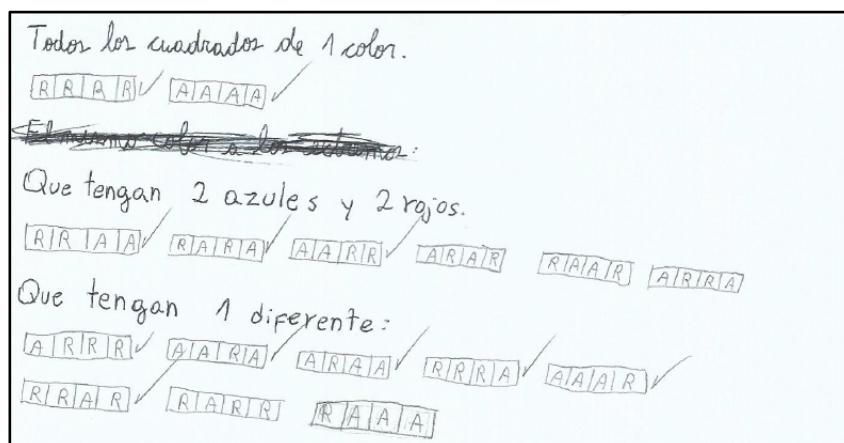
Pregunta 5: Con los listones resultantes, establece un criterio para clasificar los listones, de modo que cada listón pertenezca a una sola categoría y ningún listón quede sin categoría. Señala claramente:

- El criterio de clasificación y una explicación de tu elección (con palabras)
- Las categorías o grupos y los listones pertenecientes a cada categoría o grupo (con dibujos o símbolos)
- ¿Cuántas categorías?... ¿cuántos listones en cada categoría? (con palabras y dibujos)

Este ítem debió analizarse de manera segmentada. Para las preguntas 5.a) y 5.b), 12 de los estudiantes no elaboran respuestas. Otros 6 estudiantes dan señales de una estructura mental acción para las preguntas 5.a), 5.b) y 5.c), pues aunque intentan describir un criterio, las explicaciones no son claras y no existe coherencia interna entre los apartados. Junto con lo anterior, la noción de criterio de clasificación se confunde con algunos intentos calculatorios errados.

De los 21 estudiantes, solamente 3 logran explicar un criterio de clasificación del espacio muestral y bajo el establecimiento de dicho criterio contestan adecuadamente todas las preguntas del ítem, mostrando un estado de estructura mental proceso tanto para establecer el criterio como para describir las categorías asociadas. En los tres casos el criterio usado es mixto, esto es, se basa en el número de características y en la combinación de estas a la vez. Ahora bien, de los 12 estudiantes que no contestan los primeros ítems, existen 4 registros que consignan respuestas para el apartado 5.c). En estos 4 casos se recuentan brevemente las categorías consideradas y, aunque el criterio no está declarado, es posible inferirlo a partir de la descripción genérica del tipo de elemento perteneciente a cada categoría, como se puede apreciar en la Figura 2.

**Figura 2.** Ejemplo de estructura mental proceso para establecer un criterio de clasificación del espacio muestral y describir las categorías asociadas.



En la Tabla 1 es posible apreciar los tipos de respuesta de acuerdo a la estructura de construcción mental subyacente para la tarea asignada en la pregunta 5.

**Tabla 1.** Clasificación de Estructuras Mentales para la pregunta 5 del cuestionario 1

Estado de la Estructura Mental	N° de Alumnos
Sin respuesta para 5.a) y 5.b)	12
<i>Acción</i> , para establecer un criterio	6
<i>Proceso 1</i> , para establecer un criterio	3
<i>Proceso 2</i> , para describir las categorías establecidas	7

Dado el análisis anterior, resultaba innegable la débil presencia de la estructura mental *proceso* para la clasificación del espacio muestral conforme a algún criterio cuantitativo claro y bien definido. Si bien fue posible detectar algunos elementos que permitían evidenciar el uso del triángulo de Pascal como elemento para ordenar el conteo de los elementos del espacio muestral resultante de un proceso Bernoulli si se aumentaba el número de ensayos, no hubo suficiente evidencia para relacionar este recurso con la categorización de los sucesos.

## ■ CONCLUSIÓN

Si el proceso Bernoulli se encuentra en estado mental *objeto* es posible la construcción de este espacio muestral en estado *objeto*. De este modo, el estudiante puede realizar *acciones* sobre el espacio muestral y *desencapsular procesos* a partir de éste, que se asientan en el conteo y la ordenación.

Por otra parte, los estudiantes que poseen el estado mental *objeto* pueden, no solo determinar todos los sucesos del espacio muestral y a la vez clasificarlos, de acuerdo a algún criterio, sino que también relacionar los sucesos con arreglos o listas con dos características. El *proceso* determinar todos los resultados del proceso Bernoulli implica comprender que el orden de los elementos influye en la distinción de los sucesos compuestos. Lo anterior coincide con las conclusiones obtenidas por Fischbein, Nello y Marino (1991) quienes señalan que no hay una comprensión natural de que los posibles resultados de un espacio muestral deben distinguirse, de acuerdo al orden de sus componentes elementales.

En lo concerniente al *objeto* espacio muestral, la relación entre la búsqueda heurística de resultados posibles y las medidas de probabilidad es estrecha, pero esta misma cercanía impide una representación clara de los sucesos, especialmente si estos son compuestos. Entonces, se tiene que la búsqueda y descripción de todos los resultados posibles es difícil siendo estos compuestos, pero igualmente se recurre a la idea de qué tan probable es cada suceso para enunciarlos. Como señala Fischbein et al., (1991) dependiendo del tipo de problemas, los estudiantes pueden mostrar un cierto sentido natural del papel de la magnitud o probabilidad de una parte del espacio muestral. En este estudio, de hecho, algunos estudiantes no pueden describir todos los resultados posibles, pero sí logran caracterizar lo que puede ocurrir, según sea más o menos probable.

En relación al *proceso* variable aleatoria, la construcción de la función  $X: \Omega \rightarrow R_x$  ocurre de manera tácita, a través de la *coordinación* de *procesos* sobre el espacio muestral, de modo que la variable aleatoria puede ser reemplazada por un criterio de partición de este último. Este criterio debe ser específico y, si bien posee carácter cuantitativo, no puede desentenderse de la concepción de los sucesos como arreglos, de largo  $n$ , con  $n$  igual al número de repeticiones del experimento. Lo anterior implica que el *proceso* de clasificación de los elementos del espacio muestral depende de otros dos *procesos* que ocurren simultáneamente; estos son el conteo y la ordenación. Estos aspectos podrían resultar decisivos para que un estudiante de secundaria se aproxime a construir el modelo de distribución binomial en términos de la asignación de probabilidades para cada una de las categorías definidas.

### ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado, H., & Retamal, L. (2015). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma*, 31(2), 89-108.
- Arnon, I., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society
- Batanero C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado en <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>.
- Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801 – 823.
- Chernoff, E. (2009). Sample space partitions: An investigative lens. *The Journal of Mathematical Behavior* 28, 19 – 29.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523 – 549.
- Killian, C., & Kepner, H. (1976). Pascal Triangle and the Binomial Probability Distribution. *Mathematics Teacher*, 69(7), 561 – 563.
- Miltiadis, C. (2009). The Binomial Distribution in Shooting. *Teaching Statistics*, 31(3), 87-89.
- MINEDUC (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago de Chile: MINEDUC.
- Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial* (Tesis doctoral no publicada). Instituto Politécnico Nacional, México.



Salgado, H., & Trigueros, M. (2007). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21(1), 91 – 117.

Vásquez, C., & Parraguez, M. (2012). Construcción del concepto probabilidad: una perspectiva desde la teoría APOE. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 573-582.

ISBN: 978-607-95306-5-5. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.