CONCEPTUALIZACIÓN: CURVAS B-SPLINE

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León, Juan Rafael Garibay Bermúdez
Universidad Nacional autónoma de México (México)
egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx.

Palabras clave: Curvas B-spline, teoría de aproximación, modelado numérico, transposición didáctica

Key words: B-spline curves, approximation theory, numerical modeling, didactic transposition

RESUMEN: Partiendo de los principios de la transposición didáctica, la que se entiende como un proceso mediante el que se modifica un contenido del saber matemático para su enseñanza, transformando el saber sabio en saber enseñado y así, poner al alcance del estudiante el objeto numérico, curvas B-spline; apropiándose de los conceptos requeridos en la definición de dichas curvas. Es decir, se piensa que conociendo, y manejando los fundamentos necesarios para la descripción del objeto aquí considerado, se podrá conseguir el propósito deseado, de ponerlo al alcance de los estudiantes para su apropiación. Por tanto se trata de una investigación en proceso cuyo propósito es mostrar y poner al alcance de los estudiantes, los fundamentos requeridos en el algoritmo B-spline; por lo tanto en este documento se describirán los conceptos fundamentales que serán transformados del conocimiento erudito al conocimiento enseñado.

ABSTRACT: Based on the principles of the didactic transposition, which is understood as a process by which a content of mathematical knowledge for teaching is changed, transforming the wise knowledge taught and thus make available to the student the numeric object, curves B-spline; appropriating the concepts required in defining these curves. That is, it is thought that knowing and managing the necessary foundations for the object description considered here, students can achieve the desired purpose, to make it available to them for their appropriation. Therefore it is an ongoing investigation whose purpose is to show and to make available to students the basics required in the B-spline algorithm; therefore in this paper the fundamental concepts that will be transformed from scholarly knowledge to knowledge taught will be described.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las formas son demasiado complicadas para definir usando una sola curva. Una curva spline es una secuencia de segmentos de curva que se conectan entre sí para formar una sola curva continua.

Por ejemplo, una colección de trozos de curvas, en las que los extremos inicial y final están conectados, puede ser llamada una curva spline.

La palabra “spline" se utiliza a veces como un adjetivo que significa trazador al igual que algunas curvas Bézier cúbicas ".

En la teoría de aproximación, spline se define como un polinomio de grado n a trozos (Ramos, Aguilar, 2014) cuyos segmentos tienen continuidad C^{n-1} (continuidad de orden n-1).

La palabra "spline" viene de la industria de la construcción naval, en el que originalmente se refería a una delgada tira de madera que usarían los dibujantes, como una curva francesa flexible, usando pesas de metal (llamadas patos) las cuales se colocan en la superficie de dibujo y la spline se ha enhebrado entre los patos como en la Figura 1.

Figura 1. Ejemplo del uso de la herramienta spline

Sabemos por la mecánica estructural que el momento de flexión M es una función infinitamente continua a lo largo de la curva mostrada en la figura 1, excepto en un punto, donde M es por lo general solamente de continuidad C^0.

Puesto que la curvatura de la spline es proporcional a M ($k = M / EI$), la spline tiene la curvatura continua en todas partes.

La continuidad de la curvatura es un requisito importante para la industria de la construcción de barcos, así como para muchas otras aplicaciones.

Por ejemplo las vías de ferrocarril tienen siempre curvatura continua, de otra manera un ferrocarril en movimiento experimentaría sacudidas severas.

Los cuerpos de los automóviles tienen suavizamiento G^2, (significa suavizamiento de orden 2) de otra manera la reflexión de rectas podría aparecer como de suavizamiento de orden cero, G^0.

MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

Cuando la continuidad C^1 es recta hacia adelante es fácil de alcanzar mediante curvas de Bézier (por ejemplo, en el software popular de diseño, tal como el Adobe Illustrator utiliza curvas de Bézier y automáticamente impone la continuidad de la tangente cuando traza una curva), la continuidad de orden 2, C^2 y superiores son engorrosas.

Aquí es donde las curvas B-spline son utilizadas. Las curvas B-spline (De Boor, 2008) pueden ser consideradas, como un método para definir una secuencia de curvas de Bézier de grado n que se unen de forma automática con continuidad C^{n-1}, independientemente de dónde sean colocados los puntos de control.

Mientras que una curva abierta, consistente de m curvas de Bézier de grado n, implica nm + 1 distintos puntos de control (los puntos de control compartidos cuentan una sola vez), que la misma curva, construida mediante curvas de Bézier, se puede expresar usando sólo m + n puntos de control B-spline (suponiendo que todas las curvas adyacentes tiene continuidad de orden n-1, C^{n-1}).

La más importante operación que hay que entender para tener un conocimiento práctico de los B-splines, consiste en cómo extraer, los elementos que constituyen las curvas Bezier.

El enfoque tradicional de la enseñanza de B-Splines se centra en las bases del tratamiento de las relaciones de funciones de recurrencia.

La experiencia ha demostrado que la forma polar y los intervalos definidos por nodos (Sederberg, 1983) proporcionan a los estudiantes un conocimiento práctico con mayor rapidez que las relaciones de recurrencia; siendo esta formulación, una de las formas en las que pueden ser descritos los B-splines; como se explica en todos aquellas referencias en las que se trata el objeto matemático B-spline.

HIPÓTESIS

Es posible que a través de la búsqueda de elementos conceptuales del objeto matemático B-spline, los estudiantes lo puedan manejar adecuadamente para su dominio y aplicación en las distintas áreas de la ingeniería, mediante la aplicación de la metodología de la transposición didáctica con el objeto de recobrar y sumar significados, y considerar nuevas estrategias de estudio,

METODOLOGÍA

En la búsqueda de elementos que den cuenta de la forma en la que el estudiante se acerca o aproxima a la aprehensión del conocimiento se pueden plantear preguntas tales como; ¿qué mecanismos operan en el fenómeno?, ¿qué otros elementos matemáticos intervienen?, y sobre todo ¿bajo qué concepciones están operando estos fenómenos? (Castañeda, 2004)

La investigación en educación matemática adopta estas preguntas tratando de explicitar las concepciones que tienen los estudiantes en relación al conocimiento matemático escolar, cuestionando la transparencia de dicho conocimiento.

Al trasponer esta idea a la didáctica, equivale a decir, que una primera condición para que un estudiante sepa un conocimiento, es que el estudiante tenga la certeza de que dicho conocimiento tenga una utilidad práctica.

Bajo la cubierta de estas ideas fundamentales, en el presente estudio breve, se propone identificar todos los elementos conceptuales que intervienen en el desarrollo matemático del objeto b-spline, con la finalidad de establecer la forma en la que estos operan y sobre todo de su significado y con ello dar cuenta de su definición, significado, y operación para su comprensión. Una vez tratados todos aquellos elementos conceptuales en forma individual se podrán integrar para poder visualizar el desarrollo matemático que involucre el objeto matemático aquí considerado. En concreto en el aspecto social del conocimiento de esta comunicación breve es considerar la documentación escrita, existente del objeto matemático tratado como fuente de información, para después revisar el concepto del objeto B-spline desde la matemática misma; y por último analizar el concepto del B-spline desde el punto de vista de los libros de texto actuales

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO

Forma Polar

La forma polar puede ser pensada como simplemente un método alternativo de señalización de los puntos de control de una curva Bézier o curva B-Spline. En esta forma las etiquetas hacen referencia a valores polares. En esta sección se resumen las propiedades y aplicaciones de forma polar, sin ahondar en las derivaciones. El estudiante interesado puede estudiar los artículos de Ramshaw (Ramshaw, 2012). Todos los algoritmos importantes para las curvas Bézier y B-spline se pueden derivar de la siguiente cuatro reglas para los valores polares.

1). Para una curva Bézier de grado n, $P_{[a,b]}(t)$, los puntos de control son re etiquetados mediante $P_i = P(u_1, u_2, \dots, u_n)$, donde $u_j = a, si\ j \leq n - i$ de otra manera $u_j = b$. Para una curva Bézier de grado dos $P_{[a,b]}(t)$,

$$P_0 = P(a,a);\ P_1 = P(a,b);\ P_2 = P(b,b)$$

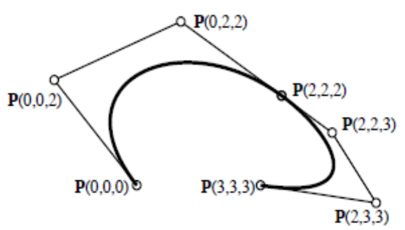
Para una curva Bézier de grado 3 $P_{[a,b]}(t)$,

$$P_0 = P(a,a,a);\ P_1 = P(a,a,b);\ P_2 = P(a,b,b);\ P_3 = P(b,b,b)$$

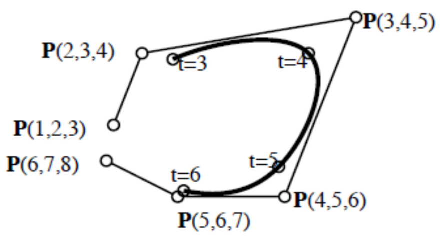
Y así, sucesivamente, para grado cuarto, quinto, etc.

La figura 2 muestra dos curvas Bézier etiquetadas usando valores polares,

Figura 2. Etiquetas Polares



a) Curva Bézier con etiquetas polares



b) Curva B-spline con etiquetas polares

En la figura 2, en el caso a) se define en el intervalo paramétrico [0, 2] y en el caso b) se define en el intervalo paramétrico [2, 3].

Se debe tomar en cuenta que $P(t, t, t, \dots, t)$ es el punto de una curva Bézier correspondiente al valor del parámetro t.

2. Para una curva B-spline de grado n con un vector nodo

$$[t_1, t_2, t_3, t_4, \dots],$$

Los argumentos de los valores polares consisten en grupos de n nodos adyacentes del vector nodo, con el i-esimo valor polar, siendo $P(t_i, \dots, T_{i+n-1})$, como se muestra en la figura 2b.

3. Un valor polar es simétrico respecto de sus argumentos. Esto significa que el orden de los argumentos puede ser cambiado sin cambiar el valor polar. Es decir,

$$P(1,0,0,2) = P(0,1,0,2) = P(0,0,1,2) = P(2,1,0,0), etc.$$

4. Dados $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a)$ y $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, b)$ se puede calcular $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, c)$, donde c es cualquier valor:

$$P(u_1,\ \ u_2, \dots, u_{n-1}, c) = \frac{(b-c)P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a) + (c-a)P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, b)}{(b-a)}$$

$P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, c)$, se dice que es una combinación lineal de $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a)$ y de $P(u_1,$ $u_2, \dots, u_{n-1}, b)$; esto es:

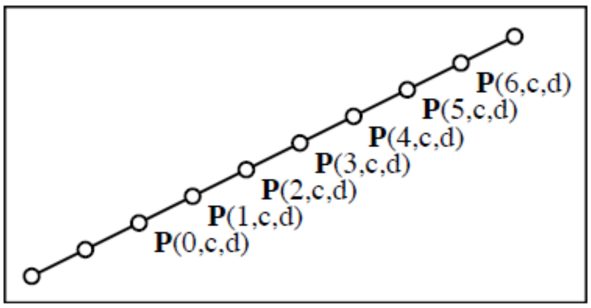
$$P(0,t,1) = (1-t)\times P(0,0,1) + t\times P(0,1,1),$$

$$P(0,t) = \frac{(4-t)\times P(0,2) + (t-2)\times P(0,4)}{2}$$

$$P(1,2,3,t) = \frac{(t_2-t)\times P(2,1,3,t_1) + (t-t_1)\times P(3,2,1,t_2)}{(t_2-\ t_1)}$$

Esto significa que geométricamente, si varía un parámetro de un valor polar mientras mantiene todas las demás constantes, el valor polar barrerá una línea a una velocidad constante, como en la Figura 3.

Figura 3. Mapa de propiedades afines de valores polares



Subdivisión de Curvas Bézier

Para ilustrar cómo funcionan los valores polares, se muestra como se derivan del algoritmo de De Casteljau, utilizando solo las tres reglas para los valores polares.

Así, dada una curva cúbica de Bézier $P_{[0,1]}(t)$, queremos dividirlo en $P_{[0,t]}$ y $P_{[t,1]}$. Los puntos de control de la curva original están etiquetados

$$P(0,0,0), \quad P(0,0,1), \quad P(0,1,1), \quad P(1,1,1).$$

Las cantidades en las que se subdivide el problema para definir valores polares

$$P(0,0,0), \quad P(0,0,t), \quad P(0,t,t), \quad P(t,t,t).$$
$$P(t,t,t), \quad P(t,t,1), \quad P(t,1,1), \quad P(1,1,1).$$

Estos nuevos puntos de control se pueden derivar mediante la aplicación de la simetría y las reglas del mapa para los valores polares. Refiriéndose a la Figura 4, se puede calcular:

Paso 1.

$$P(0,0,t) = (1-t)\times P(0,0,0) + (t-0)\times P(0,0,1);$$
$$P(0,1,t) = (1-t)\times P(0,0,1) + (t-0)\times P(0,1,1);$$
$$P(t,1,1) = (1-t)\times P(0,1,1) + (t-0)\times P(1,1,1);$$

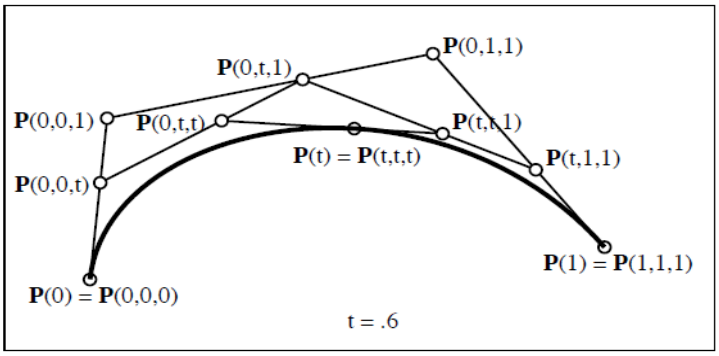
Paso 2.

$$P(0,t,t) = (1-t)\times P(0,0,t) + (t-0)\times P(0,t,1);$$
$$P(1,t,t) = (1-t)\times P(0,t,1) + (t-0)\times P(t,1,1);$$

Paso 3.

$$P(t,t,t) = (1-t)\times P(0,t,t) + (t-0)\times P(t,t,1);$$

Figura 4. Subdivisión de una curva Bézier cúbica



Vectores Nodo

Un vector nodo es una lista de los valores de los parámetros, o nodos, que especifican los intervalos de parámetros para curvas individuales Bézier que conforman un B-spline. Por ejemplo si una curva B-spline cúbica, se compone de cuatro curvas Bézier con intervalos de parámetros [1, 2], [2, 4], [4, 5] y [5, 8], el vector de nodos sería:

$$[t_0, t_1, 1, 2, 4, 5, 8, t_7, t_8].$$

Observe que hay dos (uno menos que el grado) nodos adicionales antepuestos y anexos al vector de nodos. Estos nodos controlan las condiciones finales de la curva B-spline.

Por razones históricas, los vectores nodos son tradicionalmente descritos de tal manera que se requirieren n nodos-condición final, y en el mundo real siempre se definirá un nodo adicional al comienzo y al final de un vector de nodo. Por ejemplo, el vector de nodo en la Figura 2b sería:

$$[t_0, t_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, t_9],$$

donde los valores de t_0 y t_9 no tienen absolutamente ningún efecto sobre la curva. Por lo tanto, dejamos de lado estos valores nodos ficticios en nuestra discusión, pero se debe estar conscientes de que aparecen en la literatura B-spline y en el software correspondiente. Obviamente, un vector de nodo debe ser la secuencia de los números reales no decreciente. Si cualquier valor nodo se repite, este se reconoce como un nodo múltiple. Una curva B-spline cuyo vector de nodo está espaciado uniformemente se conoce como un B-spline uniforme. Si el vector de nodo no está espaciado de manera uniforme, la curva se denomina B-spline no uniforme.

Extracción de Curvas Bézier de curvas B-spline

Ahora estamos listos para discutir la cuestión práctica central para B-splines, a saber, ¿cómo encontrar los puntos de control para las curvas Bézier que conforman un B-spline? Este procedimiento a menudo llamado el Algoritmo Böhm.

Considere la B-spline en la Figura 2b consiste en curvas Bézier sobre los dominios [3, 4], [4, 5] y [5, 6]. Los puntos de control de esas tres curvas Bézier tienen valores polares

$$P(3,3,3), P(3,3,4), P(3,4,4), P(4,4,4),$$

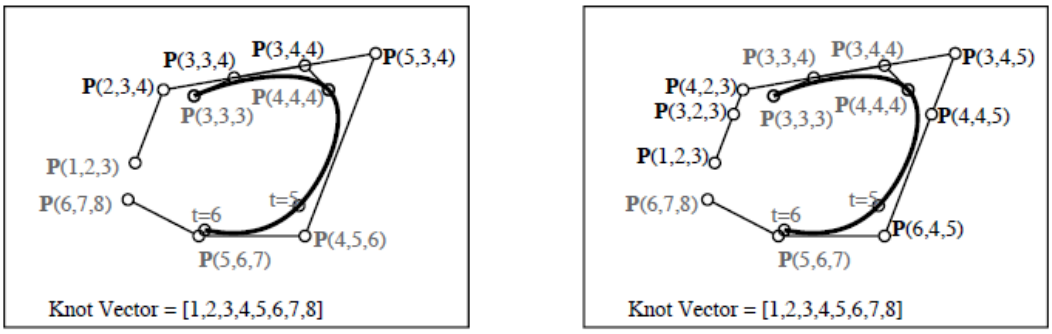
$$P(4,4,4), P(4,4,5), P(4,5,5), P(5,5,5),$$

$$P(5,5,5), P(5,5,6), P(5,6,6), P(6,6,6),$$

Respectivamente. Nuestro rompecabezas es aplicar las propiedades de simetría y afinidad para encontrar esos valores polares, dados los valores polares-B spline.

Para la curva Bézier sobre [3, 4], primero determinamos que $P(3,3,4)$ es 1/ 3 del camino desde $P(2,3,4)$ a $P(5,3,4)$= $P(3,4,5)$. Del mismo modo, $P(3,4,4)$ es 2/ 3 del camino desde $P(3,4,2) = P(2,3,4)$ a $P(3,4,5)$. Vea la Figura 5a.

Figura 5. Representación del algoritmo de Böhm



a) Primera etapa b) Segundo etapa

Antes de que podamos localizar $P(3,3,3)$ y $P(4,4,4)$, debemos encontrar los puntos auxiliares $P(3,2,3)$ (2/3 de la distancia desde $P(1,2,3)$ a $P(4,2,3)$) y $P(4,4,5)$ (2/3 de la distancia de $P(3,4,5)$ a $P(6,4,5)$), como se muestra en la figura 5b. Finalmente, $P(3,3,3)$ se ve que está a la mitad del camino entre $P(3,2,3)$ y $P(3,3,4)$, y $P(4,4,4)$ se ve que está a la mitad del camino entre $P(3,4,4)$ y $P(4,4,5)$.

Tenga en cuenta que los cuatro puntos de control de Bézier se derivaron de exactamente cuatro puntos de control B-spline; $P(5,6,7)$ y $P(6,7,8)$ no estaban involucrados. Esto significa que $P(5,6,7)$ y $P(6,7,8)$ se puede mover sin que afecte a la curva Bézier sobre [3, 4]. En general, la curva Bézier sobre $[t_i, t_{i+1}]$ es sólo influenciada por puntos de control B-spline que tienen t_i o t_{i+1} como uno de los parámetros de valor polares. Por esta razón, se dice que los B-splines tienen la propiedad de control local, ya que cualquier punto de control dado puede influir en la mayoría de los n segmentos de la curva.

REFLEXIONES FINALES

Es importante destacar en este apartado que, la presente comunicación es tan solo una componente de un proyecto de investigación en el área del pensamiento numérico en general y enfocada en particular en el estudio de los B-splines; Se considera pertinente mencionar que este como otros temas del modelado y aproximación numéricos discutidos usando el objeto B-spline y que resultan de uno de los tratados publicados por los expertos a nivel internacional; se han ido presentando en los últimos años y se tiene como propósito presentarlos en eventos de corte internacional. Las temáticas que componen a la indagatoria que se está realizando por un grupo de académicos universitarios son los polinomios de Bernstein, las curvas Bézier, curvas racionales Bézier, B-splines, aproximación, curvas splines, splines multivariados, superficies y sólidos, y el elemento finito.

En concreto es importante mencionar que en esta comunicación breve solo se tratará con una de las temáticas que conforman la investigación en su totalidad; y así, aclarar que no se trata de un caso aislado. Se espera que se despierte el interés tanto, de la comunidad dedicada a la matemática educativa, como de los estudiantes en las distintas áreas de la ingeniería, de las ciencias y de la tecnología; con objeto de incorporar a los investigadores, profesores y estudiantes para la realización y puesta en marcha del proyecto que incluye el tema u objeto matemático que aquí se trata y que por tanto es parte de un contenido más amplio.

Se espera de manera muy particular la motivación de estudiantes que al incorporarse se produzcan los documentos y artículos necesarios para poner al alcance de la comunidad universitaria de habla hispana, los conceptos necesarios para la comprensión y manejo del objeto matemático B-spline. Los citados documentos a producir mediante la indagatoria del proyecto incluyen tesis de licenciatura, maestría y doctorado; por lo que resulta muy importante la participación de investigadores de distintas áreas temáticas dentro de la matemática educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

De Boor, C. (2008). *A Practical Guide to splines*. New York: Springer.

Ramos, R., Aguilar A. (2014). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Sederberg, T. (1983). *Implicit and parametric curves and surfaces for computer aided geometric design*. Recuperado 07 de julio de 2013 de http://search.proquest.com/docview/

Ramshaw, L. (2012). Béziers and B-splines as multiaffine maps. In R. A. Earnshaw (Ed.), *Theoretical Foundations of Computer Graphics And CAD* (pp. 757-776), USA: Springer-Verlag.