CONOCIMIENTOS DE ESTOCÁSTICOS DE UN ESTUDIANTE DE NUEVO INGRESO AL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN (México)
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: Probabilidad, Determinista, Medio Superior

Key words: Probability, Deterministic, High School

RESUMEN: Para explorar la forma en que la solución de los problemas de probabilidad podría promover la dotación de sentido a otros conceptos matemáticos necesarios en el proceso, entrevistamos a un estudiante de primer semestre de bachillerato tecnológico para profundizar en su comprensión de algunas ideas fundamentales de estocástica. Planteamos al entrevistado dos problemas de probabilidad que implican conceptos geométricos y algebraicos. El estudiante dio evidencia de conocer las ideas de: espacio muestral, al referirse al volumen, a la superficie total y a sus particiones; medida de probabilidad, como la proporción de un área particular respecto a la total; adición de probabilidades, asociada a la suma de las áreas; y equiprobabilidad, relacionada con áreas de una misma superficie. El procedimiento que se aplicó a uno de los problemas se sometió a modificaciones para satisfacer el requerimiento del otro.

ABSTRACT: In order to explore how the solving of probability problems might promote making sense of other mathematical concepts needed in the process, we interviewed a freshman from the technical high school to deepen in his understanding of some fundamental ideas of stochastics. Two probability problems involving geometric and algebraic concepts were posed to the interviewed. The student applied the ideas of: sample space, by referring it to the total volume and area; probability measure, as the proportion of a particular area to the total one; addition of probabilities, associated to the sum of areas; and equiprobability, related to equal areas from the same surface. The procedure applied to solve one of the problems went through modifications to fulfill the requirement of the other one.

INTRODUCCIÓN

El presente reporte de un estudio de caso forma parte de un proyecto para investigar cómo, del estudio de situaciones probabilísticas propuestas a estudiantes de bachillerato tecnológico, se pudiera promover que ellos dotaran de sentido a otros conceptos matemáticos necesarios para dar cuenta de esas situaciones. Fischbein (1975) ha señalado al concepto de probabilidad como "síntesis de azar y necesidad, de lo aleatorio y lo determinista, [por lo que] a veces involucra confrontaciones en el desarrollo del intelecto" (p. 19). Este autor también ha recomendado que la formación en probabilidad se inicie en edades tempranas para prevenir los sesgos del pensamiento. En la enseñanza de la matemática en el bachillerato tecnológico son de esperarse dificultades de los estudiantes para aprehender conceptos de estocásticos, pues se privilegia un enfoque determinista en los cinco primeros semestres propuestos en el plan de estudios respectivo, para los que los contenidos corresponden a Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría y Cálculo Diferencial e Integral; en estas unidades se ejercita el estudiante en determinar un único resultado de la solución de un problema. El sexto semestre se dedica a Probabilidad y Estadística, que consideran lo posible.

Dada esta problemática, planteamos estas preguntas de investigación: *¿Cómo solucionan un problema de probabilidad que requiera del uso de otros conceptos matemáticos? ¿Qué predomina, un razonamiento determinístico o uno probabilista?*

Gatusso (2006) realizó una investigación con estudiantes de nivel básico, a quienes planteó tareas que incluían conceptos estadísticos y que a la vez permitieran ejercitar otros conocimientos matemáticos: por ejemplo, al analizar un conjunto de datos es necesario realizar operaciones aritméticas; se utilizan números ordinales, cardinales y racionales; al trazar gráficas, como los diagramas circulares, es necesario calcular proporciones respecto a 360° para obtener los sectores correspondientes a cada grupo de datos; al final de su investigación señala que La interacción entre matemáticas y estadística es factible.

Es común que la educación matemática derive en una visión fragmentada de los temas, sin la vinculación de sus contenidos y que se finalice con los de Probabilidad y Estadística, por lo que el docente no dispone de tiempo conforme a su planeación y omite su enseñanza (por ejemplo, DGDC, 2011). Biehler (1994) resalta esta fragmentación; incluso para la enseñanza de estocásticos hay quienes privilegian la de la Estadística a costa de la Probabilidad; en contra parte, hay quienes argumentan que la enseñanza de la Probabilidad debería anteponerse a la de la Estadística. Para Biehler se deberían plantear problemas para los que los estudiantes tengan que seleccionar muestras, tomar datos, analizarlos y realizar predicciones con base en ellos; es decir, conjugar los dos temas en una sola tarea.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En una perspectiva epistemológica, consideramos la propuesta de Heitele (1975) para la educación en estocásticos, el triángulo de la constitución del concepto matemático (Steinbring, 1991) y la propuesta de Piaget (1982) para la evolución en el niño de la idea de azar. Desde un punto de vista cognitivo nos remitimos a los resultados de las investigaciones del uso de modelos didácticos intuitivos realizados por Fischbein (1977).

Ideas fundamentales de estocásticos. Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles educativos que sigan un curriculum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

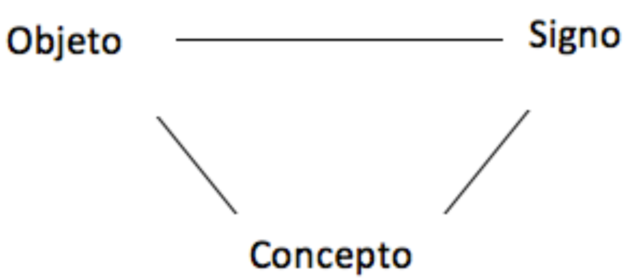
> …aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración.
>
> (Heitele, 1975, p. 188)

Su propuesta considera que: el objetivo de la enseñanza de un tópico es la transmisión de ideas fundamentales, necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad; las ideas fundamentales y los conceptos se tratan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un currículum en espiral; la transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal; los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas de estocásticos; las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas; la historia de la probabilidad.

Entonces, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. El autor aclara que estas ideas constituyen un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarlo en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Triángulo epistemológico. De acuerdo con Steinbring (1991), el conocimiento probabilístico tiene un carácter de sistemas complejos en cada nivel de desarrollo. Este conocimiento se crea como una forma relacional o un mecanismo de unión entre los aspectos de cálculo formales y los contextos interpretativos. Esta forma relacional del significado matemático se caracteriza como el triángulo epistemológico del conocimiento matemático (véase la Figura 1):

Figura 1. Triángulo epistemológico del conocimiento matemático



El triángulo epistemológico representa un diagrama relacional en el cual el significado del conocimiento no puede ser deducido desde uno de los vértices, siempre requiere un balance entre todos ellos.

Lo posible y lo necesario. Para centrar el problema de la producción de las novedades por el sujeto, Piaget (1982) y sus colaboradores lo enfocaron desde la evolución de los posibles en el niño. Para el niño pequeño, todo lo que ocurre a su alrededor se justifica porque así lo ha observado durante toda su experiencia. Él aún no piensa en posibilidades y no considera que los fenómenos se desarrollen bajo una lógica funcional. Conforme el infante crece comienza a conocer las reglas lógicas que regulan el comportamiento de los fenómenos; éste es el inicio de lo que en un estado maduro será la capacidad de realizar deducciones lógicas. De la misma forma, a mayor edad es capaz de aplicar operaciones combinatorias, tanto a objetos concretos como a los elementos que intervienen en el desarrollo de los fenómenos; de esta manera comienza a identificar las posibilidades. La comprensión de lo necesario ocurre cuando el niño comienza a analizar su experiencia y se desarrolla siempre como en una línea recta, siguiendo la misma dirección. Lo posible se desprende también de ese análisis pero se desarrolla en una línea en dirección distinta a la anterior, línea a la que podríamos imaginar con un carácter más elástico y flexible que el de la anterior. Las operaciones del pensamiento son "…una resultante de la formación de los posibles", de modo que "… una vez diferenciados y coordinados lo posible, lo real y lo necesario, subordinamos simultáneamente los posibles y las estructuras operatorias … al equilibrio entre las diferenciaciones e integraciones" (*ibídem*, p. 184). Lo posible es específico de una "dinámica interna" (*ibídem*, p. 185) de reequilibraciones.

Modelos generativos. Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, ya sean científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

> …un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original constituye la sintaxis del modelo.
>
> (Fischbein, 1977, p. 155)

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, cuando se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

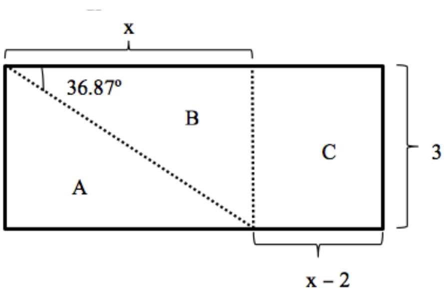
MÉTODO E INSTRUMENTO

En el presente estudio instrumental de caso (Stake, 1995) se entrevistó a un estudiante de 16 años de edad de nuevo ingreso al bachillerato tecnológico, que fue seleccionado por medio de la experienciación (Maturana, 1995) de la enseñanza inicial de *Matemáticas I* en el aula de bachillerato tecnológico. La razón de elegirlo consistió en que fue el estudiante con mejor desempeño en la clase y por haber obtenido un 80% de respuestas correctas a un cuestionario diagnóstico diseñado por docentes de esa institución, integrado por 15 preguntas de opción múltiple, aplicado al inicio del semestre y relativo al contenido matemático indispensable para el ingreso al bachillerato, que está prescrito en el plan de estudios de secundaria (DGDC, 2011). El estudio consistió en una entrevista semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1999), se profundizó en su conocimiento matemático adquirido y en su comprensión de algunas ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975). Se le plantearon dos problemas de probabilidad (véase la Figura 2).

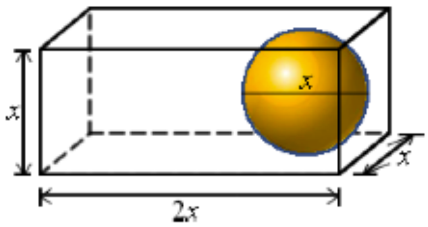
Figura 2. Problemas planteados durante la entrevista

1. En una parcela un tractor se encuentra preparando la tierra para la siembra de maíz. La trayectoria que sigue dentro del terreno es la siguiente:

Si la parcela está segmentada en las áreas A, B y C, ¿cuál es la probabilidad de que en un momento dado, independiente del tiempo en que comenzó su recorrido, el tractor esté en alguna de ellas?



2. En una pecera con forma de ortoedro un pez se mueve al azar dentro de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado esté nadando dentro de la esfera mostrada, cuyo diámetro mide X?



La Tabla 1 resume el contenido de estocásticos de los problemas, corresponde a la idea de lo posible en la propuesta de Piaget.

Tabla 1. Ideas fundamentales de estocásticos contenidas en cada problema.

Ideas Fundamentales implicadas	Medida de probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Equiprobabilidad
Problema 1				
Problema 2				

La Tabla 2 muestra los otros conceptos matemáticos a poner en juego para calcular las probabilidades requeridas, son los correspondientes a la identificación de las necesidades por parte de Piaget.

Tabla 2. Otros conceptos matemáticos contenidos en cada problema.

Otros conceptos matemáticos implicados	Operaciones algebraicas	Área geométrica	Relaciones trigonométricas	Volumen geométrico
Problema 1	Despeje de la incógnita	Triángulos y rectángulos	Tangente de ángulo no notable	
Problema 2	Multiplicación algebraica			Esfera y ortoedro

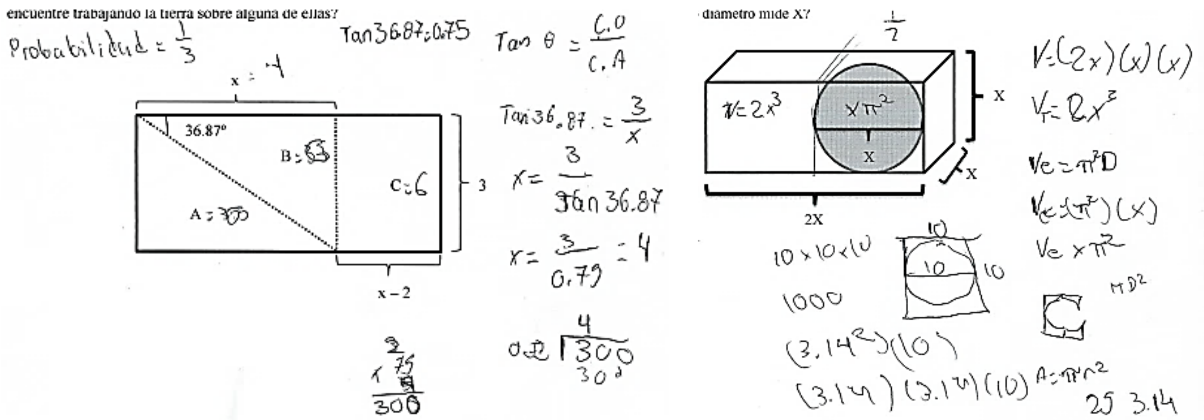
Los problemas se le presentaron al estudiante impresos en hojas, enunciados en lengua natural escrita, figuras geométricas y signos matemáticos. El estudiante registró sus procedimientos en forma manuscrita con pluma, sin poder borrar. La entrevista duró 47 minutos, se videograbó y transcribió para su análisis. Se utilizó calculadora sólo para determinar la tangente de un ángulo. El interrogatorio se desarrolló en el proceso de solución a los dos problemas.

RESULTADOS

En el Problema 1 el estudiante mostró un acercamiento a las ideas de *medida de probabilidad* y de *espacio muestra*. Expresó que podría calcular la probabilidad conociendo la medida de las áreas y relacionarlas con el total de ellas, con lo que también expresó correctamente la idea de adición de probabilidades. En cuanto a los otros conceptos matemáticos implicados, reconoció correctamente la relación de tangente y realizó las operaciones algebraicas implicadas correctamente (véase la Figura 3); se le proporcionó una calculadora para que determinara el valor de la tangente correspondiente.

Figura 3. Respuestas del estudiante a los problemas.

Problema 1 **Problema 2**



En el Problema 2 el estudiante aplicó el mismo razonamiento al relacionar el volumen indicado respecto al volumen total, aunque en el proceso no recordó la fórmula del volumen de la esfera. Para tratar de superar esta limitación simplificó el problema: se dio cuenta que el radio de la esfera era igual tanto a la mitad del largo de la base del ortoedro como a su ancho y consideró sólo la mitad del volumen de la pecera, que corresponde a la probabilidad ½, con lo que trató de solucionar el problema calculando la relación entre las áreas de un círculo inscrito en un cuadrado; se basó en un diagrama que trazó con el círculo inscrito en el cuadrado (véase la Figura 3, derecha). Al final no logró obtener el valor de la probabilidad solicitado, lo que advirtió al considerar su resultado mucho menor que ½.

La vinculación entre lo posible y lo necesario. La Tabla 3 resume la relación entre lo posible (ideas fundamentales de estocásticos) y lo necesario (otros conceptos matemáticos)

Tabla 3. Las relaciones entre los posibles y las necesidades establecidas por el estudiante al solucionar los problemas.

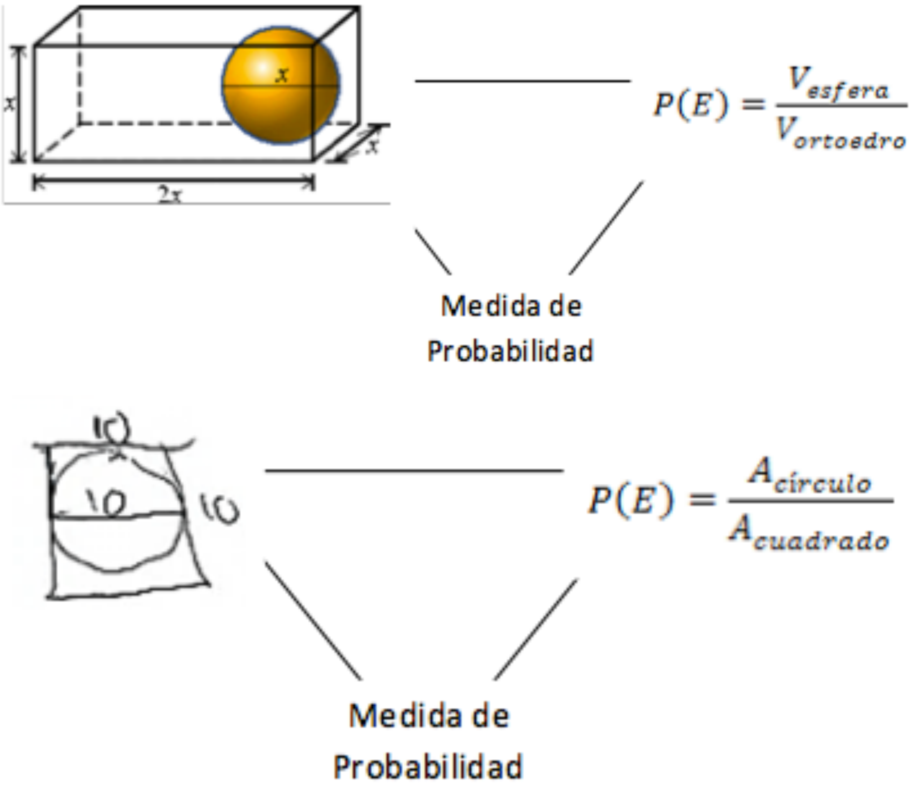
Lo posible: Ideas fundamentales de estocásticos	*Lo necesario*: Otros conceptos matemáticos
Medida de Probabilidad	Relación entre un área/volumen particular y la/el total
Espacio Muestra	Área/volumen total
Adición de Probabilidades	Suma de áreas/volúmenes
Equiprobabilidad	Áreas/volúmenes de igual superficie/espacio

El estudiante estableció correctamente todas las relaciones entre las ideas fundamentales presentes y sus correspondientes geométricos. Esta relación se establece al representar el espacio muestra y los eventos de interés mediante diagramas de Venn.

Las respuestas del entrevistado sugieren un acercamiento intuitivo. El valor de estos resultados es que el estudiante procedió sin que el tema se le hubiera enseñado recientemente; en todo caso, aplicó sus conocimientos adquiridos en su educación básica.

Los recursos semióticos presentados y los empleados. El procedimiento del estudiante se orientó por la idea de *medida de probabilidad* en el segundo problema (véase la Figura 4): la situación de referencia requiere identificar la relación entre un volumen esférico respecto al volumen de una pecera ortoédrica que lo contiene; este objeto fue reinterpretado por el estudiante como la relación entre el área de un círculo respecto al área del cuadrado en el que se inscribe. La reinterpretación del estudiante no alteró la idea de relacionar la parte con el todo (lo necesario, en este caso) por lo que en cuanto al vértice de signo, sólo cambió la relación entre volúmenes por la relación entre las áreas; en su intento por encontrar la solución de una manera alternativa estableció una relación geométrica que no correspondía a la que plantea el problema.

Figura 4. El triángulo epistemológico en la parte superior muestra las relaciones entre un concepto dado, su objeto y su signo presentes en el problema; en la parte inferior, el triángulo epistemológico muestra una interpretación del estudiante para ese concepto en el problema.



CONCLUSIONES

En este estudio instrumental de caso hemos realizado un acercamiento a conceptos geométricos a partir de algunas ideas fundamentales de estocásticos, con tan sólo dos problemas y el caso particular de un estudiante con buen desempeño al ingreso al bachillerato. En sus respuestas el estudiante mostró un dominio de los conocimientos básicos necesarios de las matemáticas que son indispensables para ingresar al bachillerato, lo que reafirma que sea el de mejor desempeño dentro de su grupo. También mostró que aún si poseía los conocimientos para responder al carácter aleatorio de la situación planteada, no recuperó los otros conocimientos requeridos para ello en el Problema 2. No obstante, obtuvimos evidencia de cómo la exigencia de un problema, como el problema 2, promovió modificaciones posibles de un procedimiento para desembocar en lo necesario, aún si no se determinó el resultado correcto.

Surgen las preguntas de cuáles son las ideas fundamentales de estocásticos y otros conocimientos matemáticos de secundaria que poseen otros estudiantes de nuevo ingreso con diferentes niveles de desempeño y cómo se puede promover la aplicación y comprensión de otros conceptos matemáticos al requerir su aplicación para solucionar problemas de probabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes – Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? *Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-4)*. (http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/biehler/publications).

Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC). (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, **8**, 153-165.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: is it possible to create fruitful links? *Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-7).*

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* **6** (2), 187-205.

Maturana, H. (1995). *Desde la biología a la psicología*. Santiago de Chile: Lumen.

Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire: 1 L'e evolution des possibles chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.

Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of mathematical behavior*, **17** (4), 429-439.