

LOS OBJETOS FRACTALES: UN RECURSO PARA EL ACERCAMIENTO INTUITIVO DEL ESTUDIO DEL LÍMITE

Noé Sanmartín Román

Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Estado de México (México)

bsanmandelbrotin@gmail.com

Palabras clave: fractales, límite, infinito

Key words: fractals, limit, infinity

RESUMEN: Se propone introducir a los objetos fractales en el contexto de la educación media superior a partir de construcciones iterativas que permitan visualizar procesos infinitos y comportamientos numéricos, para que con la concepción de los fractales como límites de procesos infinitos se genere un acercamiento intuitivo sobre el concepto del límite. Se utilizarán figuras fractales para establecer expresiones que en su forma general puedan escribirse como funciones cuya variable independiente se relacione con su magnitud, por ejemplo, la longitud de la figura que representa el conjunto de Cantor y el área del triángulo de Sierpinsky, entre otros.

ABSTRACT: We propose introduce the fractal objects in the context of high school from iterative constructions, able to displaying infinite processes and their numerical behavior, so as the concept of fractals as limits of infinite processes generates an intuitive approach to the limit concept. Fractal figures can be used to set expressions that in their general form can be written as functions whose independent variable is related to their size, for example, the length of the figure representing the Cantor set and the Sierpinsky triangle's area among others.

■ LOS OBJETOS FRACTALES

El interés que han generado los objetos fractales y la dinámica de su geometría hoy día se ha popularizado no solo entre las comunidades interesadas en el estudio de las matemáticas, sino entre los docentes de matemáticas de los niveles básico y medio superior, tales docentes reconocen en estos objetos fractales un recurso que permite abordar la matemática escolar de estos niveles de una forma distinta. Muchos docentes de matemáticas e investigadores preocupados por la educación matemática han diseñado estrategias para incluir estos objetos en las aulas de los diferentes niveles educativos, Peitgen, Jürgens, y Saupe (1991) proponen en su obra *Fractals for the Classroom* una serie de actividades que permiten introducir las nociones de fractales y sistemas dinámicos en los contextos escolares elementales y preuniversitarios, estas estrategias didácticas permiten que los alumnos adquieran el conocimiento de la geometría fractal y puedan utilizarla como herramienta para facilitar la comprensión de algunos conceptos de la matemática escolar, tales como el de límite, es decir, como estructuras que son el resultado de procesos infinitos generados por construcciones geométricas infinitas y que pueden representarse como el límite de determinados procesos infinitos.

Para introducir estas estructuras en el contexto escolar de la educación media superior, es necesario enfatizar la construcción iterativa que, desde esta dinámica, permite visualizar el proceso infinito y el comportamiento de los valores que esta toma en cada iteración, en este sentido, se considera que la introducción de algunas figuras geométricas fractales elementales como la recta que representa el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinsky, así como sus dinámicas de construcción, la cuales pueden ser entendidas como procesos infinitos, permite que los alumnos tengan un acercamiento intuitivo sobre la noción del límite.

Figuras fractales en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior.

El conjunto de Cantor

Con figuras geométricas fractales elementales y el análisis de la dinámica de construcción, es posible establecer expresiones numéricas que corresponden a cada una de las iteraciones asociadas a su longitud, área o volumen, dichas expresiones en su forma general pueden escribirse como funciones cuya variable independiente está precisamente relacionada con una magnitud, por ejemplo, la longitud de la figura que representa el conjunto de Cantor, el cual, se construye a partir de un segmento de recta a la que se le quita el tercio central y que de forma

iterada se repite en cada etapa, es una función de la forma $L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en donde n representa las

iteraciones que se han hecho, la tabla 1 muestra las primeras cuatro iteraciones de la recta que representa el conjunto de Cantor.

Tabla 1. Expresiones numéricas asociadas a la longitud el conjunto de Cantor.

	$L_0 = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$
	$L_1 = \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$
	$L_2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
	$L_3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Esta estructura geométrica puede utilizarse para analizar lo que sucede con L_n cuando n toma valores cada vez más grandes, así como introducir expresiones que permitan comprender aspectos como el siguiente: Si $n \rightarrow \infty$, (si n se aproxima a un valor muy grande) entonces $L_n \rightarrow 0$, (L_n se aproxima a un valor, que es positivo, pero muy pequeño) lo que puede conducir al establecimiento de expresiones como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0 \text{ que equivale a } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Con esta figura geométrica también es posible analizar lo que sucede con la cantidad de rectas que se obtienen en cada una de las etapas, la tabla 2 muestra las rectas que se obtienen luego de hacer las divisiones correspondientes.

Tabla 2. Expresiones numéricas asociadas a la cantidad de rectas del conjunto de Cantor.

	$C_0 = 1 = 2^0$
	$C_1 = 2 = 2^1$
	$C_2 = 4 = 2^2$
	$C_3 = 8 = 2^3$

Al analizar lo que sucede con C_n cuando n toma valores cada vez más grandes, se concluye lo siguiente: Si $n \rightarrow \infty$, entonces $C_n \rightarrow \infty$, lo que nos conduce a la expresión: $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$

Aunque es posible hoy día, con la ayuda de las computadoras, construir geoméricamente el conjunto de Cantor, su dinámica puede comprenderse mejor con una construcción analítica que permita calcular rápidamente los intervalos componentes del conjunto para valores de n muy grandes.

Recientemente con el uso del conjunto de Cantor en los sistemas dinámicos y el estudio de bifurcaciones, se han planteado cuestiones sobre lo que hace interesante su estudio. El conjunto de Cantor es disconexo, lo cual significa que entre dos puntos del conjunto, existen puntos que no pertenecen al conjunto de Cantor. El que este conjunto contenga huecos infinitos hace que correctamente se le llame polvo de Cantor.

Una propiedad notable del conjunto de Cantor es que dado cualquier número real x en el intervalo $[0, 1]$, existen dos elementos del conjunto, p y r , tales que $x = p - r$. En otras palabras las sumas $p + r$ de dos elementos del conjuntos de Cantor llenan el intervalo $[0, 2]$.

En matemáticas este conjunto es útil para el planteamiento de ejemplos en topología y análisis, sin embargo, en la matemática de la educación media superior, la construcción analítica de este conjunto puede acercar de forma intuitiva a los alumnos a un tipo de matemática que está ausente en sus programas de estudio.

El triángulo de Sierpinsky

Otro ejemplo de figura fractal elemental es el Triángulo de Sierpinsky, el cual se construye al quitar iterativamente el cuarto central de un triángulo equilátero que se ha dividido en 4 partes iguales, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Expresiones numéricas asociadas al área del triángulo de Sierpinsky.

	$A_0 = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0$
	$A_1 = \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^1$
	$A_2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
	$A_3 = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Al igual que con la recta del conjunto de Cantor, con esta figura es posible generar expresiones como las siguientes: si $n \rightarrow \infty$ entonces $A_n \rightarrow 0$, dicho de otro modo: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ que equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Análogamente, la cantidad de triángulos que se obtienen en cada etapa se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Expresiones numéricas asociadas a la cantidad de triángulos.

	$T_0 = 1 = 3^0$
	$T_1 = 3 = 3^1$
	$T_2 = 9 = 3^2$
	$T_3 = 27 = 3^3$

Con las figuras anteriores se puede concluir que si $n \rightarrow \infty$ entonces $T_n \rightarrow \infty$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ que equivale a $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$

Quizá el conjunto más representativo de la geometría fractal sea el triángulo de Sierpinski, este triángulo con propiedades específicas, al igual que el conjunto de Cantor, es utilizado en el contexto de los sistemas dinámicos. Barnsley (1993) expuso algunos procedimientos para construir figuras fractales como sistemas iterados de funciones, muchos de los cuales pueden entenderse como una función del conjunto de Cantor. La definición formal del triángulo de Sierpinski, con base a su construcción clásica, se reduce a la intersección de una familia de conjuntos que resulta de un atractor de un sistema iterado de funciones. Al igual que el conjunto de Cantor, este triángulo y su construcción analítica permite que los alumnos construyan intuitivamente conceptos importantes en su formación matemática, tales como el límite.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnsley, M. (1993) *Fractals Everywhere*. Second Edition. Academic Press, Inc.

Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D. (1991) *Fractals for the Classroom Part One: Introduction to fractal and chaos*. New York: Springer – Verlag.