

FORMACIÓN DE INGENIEROS DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Alberto Camacho, Ismael Arcos, Hipólito Hernández

Tecnológico de Monterrey, Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Universidad Autónoma del Estado de México, Universidad Autónoma de Chiapas, Universidad Autónoma de Chiapas (México)

ruthrdz@itesm.mx, ivonnesanchez10@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com, ismael_arcos@msn.com, polito_hernandez@hotmail.com

Palabras clave: formación de ingenieros, matemática educativa, modelación matemática.

Key words: engineers' training, educational mathematics, mathematical modeling

RESUMEN: El objetivo del grupo es reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en escuelas de ingeniería desde cinco grandes temas: 1) El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida, 2) El reconocimiento de la pluralidad de enfoques geopolíticos que se tienen sobre ¿qué es una escuela de ingeniería? 3) La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería, 4) El rol que juega el ingeniero en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula, 5) Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

ABSTRACT: The goal of this group is to reflect on the teaching of mathematics in engineering schools from five major themes: 1) The types of mathematics which should be taught and learned, 2) Recognizing the plurality of the geopolitical views on "What is an engineering school?" 3) The relationship between mathematics and engineering sciences, 4) The role played by the engineer in transforming mathematical knowledge into practical knowledge, and how that knowledge can be used in the classroom 5) Modeling pathways pertaining to those levels.

■ INTRODUCCIÓN

El presente escrito pretende mostrar parte de las discusiones que tuvieron lugar durante la RELME 29 en Panamá donde se reúne por primera vez un grupo de profesores investigadores en el marco de un evento latinoamericano. Existen dos importantes antecedentes de esta reunión, un primer grupo en RELME en el 2010 (Guatemala) y posteriormente una reunión de un grupo de profesores-investigadores de la Matemática Educativa que se reúnen en la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa realizada en Oaxaca, Oaxaca, 2014 (Rodríguez, Sánchez y Camacho, 2014 y Rodríguez, Sánchez, Camacho, Arcos, Hernández, de la Cruz, Covián y Cajas, 2015).

Se presentan 4 apartados en los cuales los integrantes del grupo exponen sus ideas alrededor de una o varias de las preguntas que rigen esta discusión y descritas previamente en el resumen de este escrito.

■ EL MATEMÁTICO EDUCATIVO EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

Una de las temáticas a tomar en cuenta en el grupo y que ha sido abordada desde RELMEs anteriores (por ejemplo Costa Rica, 1994), así como en otros foros y publicaciones, es la que resulta de preguntarse si hay más de una matemática a ser estudiada por comunidades de profesionales (en nuestro caso ingenieros).

Hasta la década de los ochenta del siglo pasado, la formación matemática de los ingenieros estaba de acuerdo con la concepción idealista platónica de la Educación Matemática, según la cual «[se] considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten» (Godino, Batanero y Font, 2003).

Sin embargo, la experiencia en las aulas mostró que tal cosa no ocurría, y a partir de entonces, parece haber un proceso de reconocimiento de la legitimidad y necesidad de unas Matemáticas para Ingenieros (Rugarcía, 1997) y por lo tanto de una matemática escolar cuyos contenidos, metodología didáctica y sistema de evaluación de los aprendizajes, sean especialmente diseñados e instrumentados para la formación escolar de los futuros ingenieros.

En este contexto, se considera que un matemático educativo podría participar en escuelas de ingeniería desarrollando actividades relacionadas con alguno(s) de los siguientes aspectos:

1. Determinación de los propósitos generales del conjunto de cursos de Matemáticas, como parte de la formación escolar de los futuros profesionales de la ingeniería. Por lo tanto, en la determinación más o menos precisa de los contenidos específicos de esos cursos.
2. Propuesta y exploración de las posibles maneras en las que esas temáticas deben atenderse en las aulas y en otros espacios de aprendizaje.
3. Diseño y elaboración de textos y otros materiales para la enseñanza de las Matemáticas en escuelas de Ingeniería.
4. Diseño y exploración de actividades de aprendizaje con o sin la ayuda de elementos y herramientas tecnológicas.

5. Diseño y exploración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.

De esta manera, todas aquellas actividades de indagación bibliográfica, hemerográfica o aquellas desarrolladas en aula o en cualquier otro escenario en donde puedan ocurrir aprendizajes de Matemáticas por parte de los estudiantes de una escuela de ingeniería, bien pueden denominarse actividades de investigación en Matemática Educativa.

Bajo esta perspectiva, deseamos retomar el trabajo desarrollado por Sánchez y Camacho al respecto de entender mejor el tipo de Matemáticas que se utiliza en la formación de Ingenieros, principalmente las diversas formas de modelación y/o modelización que surgen en el aula escolar y que permite eventualmente desarrollar conocimientos en los alumnos.

■ MODELIZACIÓN ESCOLAR COMO FUENTE DE CONOCIMIENTO

La recreación en el aula de diversas actividades de modelización, es una técnica utilizada con resultados comprobables en los cuales se integran las nociones relativas a los diferentes espacios de trabajo, a saber: macro-espacio, donde se establecen relaciones experimentales entre actividades prácticas; meso-espacio, se refiere a la apropiación que puedan hacer los profesores derivada de la actividad, y micro-espacio que se refiere a la manera en que los estudiantes las desarrollan. Esta modelización es diseñada por el profesor, quien involucra los temas y/o conceptos propios de la asignatura en cuestión, para lo cual utiliza instrumentos y conocimientos prácticos (de contexto).

Un primer ejemplo lo tenemos con el diseño de una tabla trigonométrica a partir del dibujo de un círculo de radio conocido, con mediciones cada 20 grados a través de la formación de triángulos rectángulos cuyos catetos nos permiten establecer las razones trigonométricas en forma proporcional (Sánchez, Camacho y Moreno, 2010). El objetivo de la práctica es que los estudiantes vivan por sí mismos la experiencia de dibujar las razones trigonométricas a partir de una relación entre catetos.

Otro ejemplo de ello es la actividad de medir terrenos irregulares, en este caso, se hizo una adecuación del micro-espacio de trabajo para inducir a los alumnos a las actividades topográficas que sirvieron de tránsito para institucionalizar el conocimiento en el salón de clase. Comprendió el uso de instrumentos de observación, métodos para visar ángulos a través de dichos instrumentos (grafómetro), medición de distancias inaccesibles en la forma en que lo hicieron los topógrafos durante el siglo pasado, etc. Actividades que, incluso, fueron comentadas en el contexto del aula a los estudiantes, para así dar paso a la transposición instrumental y de saberes en el micro-espacio, sin mediar en justificar su inmersión en este último (Camacho, Sánchez, Engler y Valenzuela, 2013). La transposición del espacio real ideal del terreno al micro-espacio, resultado de la geometrización, se experimentó al confrontar el grafómetro con el uso del transportador y al cordel con la regla graduada.

Por su lado, la métrica de uso para el espacio real, se guarda a través de la escala utilizada durante la geometrización del micro-espacio. De aquí que esta última sea una actividad que se ubica en ambas experiencias.

Un tercer ejemplo de actividad de modelación (con la utilización del grafómetro), es aquella en la cual se pide a los estudiantes obtener ángulos para luego interpretar estos como la pendiente. Los

resultados indican la influencia que tiene en los estudiantes el método para encontrar la pendiente mediante los catetos de un triángulo rectángulo, y como ello no les permite reconocer la utilidad del ángulo medido.

Con la recreación en el aula de este tipo de actividades se pretende:

1. La búsqueda en la historia del espacio real de la ingeniería donde se ubica la práctica y se gestó el conocimiento.
2. El establecimiento de un micro-espacio de la práctica que responda a las expectativas propuestas. Este micro-espacio representa un modelo a escala del espacio real.

Después de la modelización, es necesario realizar actividades alternativas que refuercen los conocimientos adquiridos. La propuesta se basa en el diseño, aplicación y el control de las interacciones de los estudiantes durante su desarrollo.

A continuación se describen un ejemplo similar al anterior sobre las formas de modelación que toman lugar en el aula escolar, aunque en esta ocasión está dirigido a estudiantes de Ingeniería y alrededor de un contexto muy específico de drenado de un tanque. La modelación que tiene lugar es en un curso de Ecuaciones Diferenciales en una universidad pública del sureste de México.

Argumentaciones de los estudiantes en la modelación y experimentación de la ley de Torricelli

En esta experiencia abordaremos a la modelación matemática como una construcción del conocimiento de un individuo cuando se enfrenta a una tarea matemática en la que pone en juego su saber en la contextualización de fenómenos físicos. La finalidad es caracterizar los fenómenos físicos por medio de las prácticas sociales a fin de diseñar situaciones que involucren la modelación matemática en sus enfoques tanto numérico, gráfico y analítico con el propósito de construir un conocimiento matemático funcional que deberá integrarse a la vida para transformarla.

A partir del análisis de un desarrollo histórico del conocimiento matemático, de su inmersión en el sistema didáctico y de una caracterización de las producciones de los estudiantes, se identifican las prácticas de referencia arraigadas a la naturaleza de ese mismo conocimiento y se proponen secuencias didácticas de modelación matemática entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas (Suárez y Cordero, 2008).

En el presente trabajo reportamos una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se calcula la variación de la columna de un líquido con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio, análogo a "La velocidad de un líquido en un recipiente, por un orificio, es la que tendría un cuerpo cualquiera, cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio".

El objetivo de la práctica en clase es verificar experimentalmente que se cumplen las condiciones para la aplicación de la ley de Torricelli y estudiar la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de líquido en un depósito. Entre las contribuciones científicas de Torricelli, se halla que las velocidades del agua que sale de un tanque perforado son proporcionales a la raíz cuadrada de

las profundidades por debajo de la superficie libre de los orificios correspondientes (Levi, 1989; Zill, 2007).

En el trabajo se procedió con el siguiente procedimiento metodológico: se utilizó un recipiente con un orificio pequeño en la parte inferior para que fluyera el agua con una altura inicial de agua. En el experimento se realizó mediciones de tiempo por intervalos y la variación de la altura del agua en la cual se generó una tabla de valores para obtener su gráfica y hacer la comparación entre los cálculos analíticos y el experimental de la variación de la velocidad con respecto a la altura y obtener la comprobación del teorema de Torricelli.

Resultados preliminares del estudio

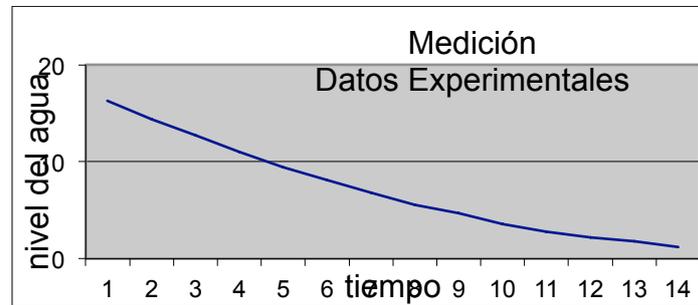
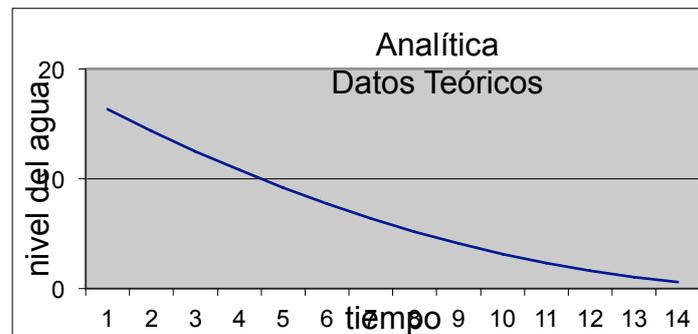
En la modelación matemática consideramos el área del bote y la sección transversal del orificio hecho en la parte inferior del recipiente: $A_h = \pi r_h^2$ área del orificio pequeño, $A_w = \pi r_w^2$ área superior del bote. Por tanto el modelo matemático es
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh}$$

Considerando la condición inicial, para el tiempo $t = 0$ segundos y la altura de agua en bote es de 16.3 centímetros. La constante de integración es $c = 8.074651694$

Considerando la condición inicial, para el tiempo $t = 0$ segundos y la altura de agua en bote es de 16.3 centímetros, donde la constante de integración es $c = 8.074651694$. Por tanto, en la tabla 1, se tienen los datos de las mediciones obtenidas de la práctica (ver gráfica 1) y los datos calculados en forma analítica (ver gráfica 2).

Tabla 1. Valores experimentales y teóricos

t (seg)	Altura del agua (cm)	
	Datos experimentales	Analítica
0	16.3	16.3
5	14.4	14.3354877
10	12.7	12.4970804
15	11	10.7847778
20	9.45	9.19858018
25	8.1	7.73848738
30	6.8	6.40449945
35	5.55	5.19661638
40	4.7	4.11483817
45	3.6	3.15916483
50	2.8	2.32959634
55	2.2	1.62613272
60	1.8	1.04877397
65	1.2	0.59752008

Gráfica 1. Representación de las mediciones.**Gráfica 2.** Representación de datos teóricos

En las argumentaciones de los estudiantes dicen que “al culminar el proceso experimental de la ley de Torricelli, y de realizar los cálculos analíticos con la ecuación diferencial que esta nos proporciona, concluyen que esta ley es totalmente cierta, pues los resultados obtenidos en la práctica se asemejan a los cálculos analíticos, al mismo tiempo estamos consientes de que no es posible llegar a tener los resultados de la práctica idénticos al proceso analítico, ya que siempre hay un rango de error en el que influyen diversos factores, pero los resultados nos parecen satisfactorios, porque tomando en cuenta estos factores el experimento aún se acercó mucho al valor real. Este tipo de actividades refuerzan nuestro aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en la modelación matemática y su experimentación”. El comentario que hacen los estudiantes sobre los errores de medición es debido a que el experimento fue realizado en forma rudimentaria, es decir, con materiales hechizos y no en un laboratorio.

Reflexiones y conclusiones preliminares del trabajo de Hernández (2015)

El presente trabajo reporta una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se compara los datos experimentales y los datos

calculados teóricamente de la variación de la columna de agua con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio.

Al culminar el proceso experimental de la ley de Torricelli, y de realizar los cálculos analíticos con la ecuación diferencial que esta nos proporciona, el equipo puede concluir que esta ley es totalmente cierta, pues los resultados obtenidos en la práctica se asemejan a los cálculos analíticos, al mismo tiempo estamos conscientes de que no es posible llegar a tener los resultados de la práctica idénticos al proceso analítico, ya que siempre hay un rango de error en el que influyen diversos factores, pero los resultados nos parecen satisfactorios, porque tomando en cuenta estos factores el experimento aún se acerca mucho al valor real.

La experiencia que se aporta es que como profesores debemos de buscar alternativas de enseñanza aprendizaje con la finalidad de que los estudiantes realicen modelación matemática y comprueben experimentalmente el comportamiento del fenómeno físico. Finalmente deseamos resaltar en este escrito una referencia importante en un curso de ED aunque en esta ocasión en un contexto diferente en una universidad privada del noreste de México.

Sobre formas de diversas de modelación en un curso de ED

En la misma tónica del trabajo presentado por Hernández, desde el año 2010 se ha trabajado de manera importante en el diseño de un curso de ED basado en la modelación y simulación de fenómenos reales (Rodríguez, 2015), de naturaleza física y social. Hemos reconocido al igual que el trabajo de Ismael Arcos previamente presentado, el hacer una distinción importante entre la Matemática que necesita aprender un futuro ingeniero respecto a su funcionalidad, el uso de las nociones matemáticas como herramientas para entender su realidad. Por otro lado, se ha trabajado principalmente en ambientes de aprendizaje activo (Zavala, Domínguez y Rodríguez, 2013) donde otras competencias transversales serán de gran valor para la formación del futuro ingeniero como las habilidades de comunicación, de trabajo en equipo, de aplicar conocimiento y otras. Por otro lado, se ha identificado de manera importante a la modelación como un eje transversal para la enseñanza de un curso de Ecuaciones Diferenciales, así como la simulación computacional asociada. Por lo anterior, las competencias de uso de tecnología diversa en los estudiantes es de gran valor para nosotros. Se comparte a continuación una lista donde se proponen diversos usos de distintas tecnologías en función de qué tanto ésta permite al estudiante acercarse a la realidad que pretende comprender y modelar.

Los usos son:

- Experimentación a través de sensores, como el ejemplo mostrado por Hernández
- Laboratorios Remotos
- Uso de video análisis para modelar la realidad de manera diferente (no directamente pero a través del uso de software como Tracker)
- Uso de simuladores predeterminados pero orientados a un fin en particular, como PhET para el caso de las ED
- Uso de simuladores de otra naturaleza como lo es Vensim, software especializado en modelar con un lenguaje especial

De las cuestiones que podemos capitalizar del trabajo ya planteado anteriormente, es que la enseñanza de las Matemáticas si deben estar ligadas a una funcionalidad del conocimiento en áreas disciplinares.

■ CONCLUSIONES FINALES

El modelar actividades de enseñanza a través de problemas específicos de la matemática escolar, favorece en los estudiantes la comprensión de conceptos a través de instrumentos que se simulan a partir de situaciones de la vida cotidiana dentro de la propia ingeniería. En este sentido se establecen relaciones experimentales entre actividades prácticas y la forma en que los estudiantes las abordan.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, A., Sánchez, B.I., Blanco, R y Cuevas, J. H. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática*, 23 (3).

Camacho, A., Sánchez, B.I., Engler, A. y Valenzuela, V. (2013). Organización didáctica de un embrión del gradiente. En: L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.), *Memorias de la XVI Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 127-136, México: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

Levi, E. (1989). *El agua según la ciencia*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Ediciones Castell Mexica, S. A.

Rodríguez, R. (2015). A Differential Equations Course for Engineers through Modelling and Technology. In G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences*, 545-555. New York: Springer.

Rodríguez, R., Sánchez, I. y Camacho, A. (2015). Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa: aportes y retos. En: F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa, 440-448. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Rodríguez, R., Sánchez, I., Camacho, A., Arcos, I., Hernández, H., de la Cruz, A., Covián, O. Y Cajas, F. (2016, en proceso). Formación de Ingenieros y técnicos desde la Matemática Educativa. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.). *Memorias de la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* Oaxaca: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Rugarcía, A. (1997). La formación de ingenieros. México: Universidad Iberoamericana.

Sánchez, B.I., Camacho, A. y Moreno, G. (2010). Construcción de razones trigonométricas en un microespacio de trabajo. En Rodríguez, E. Aparicio, M. Jarero, B. Ruiz, F. Rodríguez, J.

Lezama y M. Solís (Eds.), *Memorias de la XIII Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 23-28. México: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* 3(1), 51-58. Recuperado de <http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/>

Zavala, G., Domínguez, R. y Rodríguez, R. (2013). *ACE: Innovative Educational Model to Teach Physics and Mathematics for Engineering Students*. American Society of Engineering Education (ASEE) Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings. Atlanta, Estados Unidos. Recuperado de: <http://www.asee.org/public/conferences/20/papers/7988/view>

Zill, D. (2007). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: