EL MODELO DE LA SITUACIÓN, LA GENERALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO CIENTÍFICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov, Ana Laura Pérez Castro, José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx, jajul@fcfm.buap.mx

Palabras clave: modelo de la situación, generalización, modelación matemática

Key words: situation model, generalization, mathematical modeling

RESUMEN: En este trabajo exploramos la relación entre el grado de abstracción del modelo de la situación, el nivel de razonamiento científico y el desempeño en la resolución de un problema matemático de patrón de cambio mostrado por estudiantes del primer semestre de la licenciatura en matemáticas aplicadas de una universidad pública. Para este fin, se diseñó un cuestionario con el problema conocido como “El problema de las mesas”. La cantidad de dibujos realizados para resolver el problema cuando el número de mesas aumenta, las soluciones al problema de los estudiantes encuestados y sus justificaciones, se relacionaron con el puntaje que obtuvieron en la prueba conocida como “prueba de Lawson”.

ABSTRACT: We explore the relationship among the abstraction degree of the situation model, the level of scientific reasoning, and the performance in solving a mathematical problem by students of applied mathematics from a public university in Puebla, México. For this purpose, a questionnaire with the problem known as "The problem of the tables" is designed. We relate the score obtained in the test named “Lawson Test” with the amount of drawings used to solve the problem as the number of tables increase, the justifications, and the problem solutions given by the students surveyed.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la generalización como una actividad algebraica es ampliamente reconocida dentro de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. Kieran (1996) se refiere a la primera de tres categorías de las actividades algebraicas, como actividades generacionales. Por ejemplo, l*as ecuaciones que incluyen una incógnita que representan situaciones problemáticas cuantitativas, expresiones de generalidad de patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de las reglas que gobiernan relaciones numéricas* (p. 272). Diversos investigadores han señalado las dificultades que los estudiantes encuentran al producir expresiones formales escritas de generalizaciones (Macgregor y Stacey, 1993). Sin embargo, son escasas las investigaciones que relacionan los niveles de pensamiento formal y el rendimiento en tareas matemáticas (Villagrán, Guzmán, Pavón & Cuevas, 2002).

Es por esto que en esta investigación nos propusimos estudiar el proceso de generalización de un patrón de cambio en estudiantes de nivel superior, relacionar este proceso con el nivel de su desarrollo cognitivo, y con el grado de abstracción del modelo situacional que construyen cuando se enfrentan a un problema matemático.

El nivel de razonamiento científico se midió con la prueba diseñada por Lawson (1995), y el desempeño de los estudiantes se determinó con el número de respuestas correctas que éstos dieron a cuatro preguntas que se les plantearon en el cuestionario.

MARCO TEÓRICO

Prueba de Razonamiento Científico o Prueba de Lawson

El razonamiento científico es una capacidad fundamental para estudiar exitosamente carreras de ciencias. En este trabajo planteamos que el perfil cognitivo de los estudiantes se puede conocer a través de la “Prueba de aula para el razonamiento científico” diseñada por Lawson (1995). La Prueba consta de 24 preguntas con respuesta de opción múltiple que requieren de diferentes tipos de razonamiento científico, mismas que se agrupan en 12 pares, conformados por la pregunta y su justificación. Cada par se toma como correcto solo si la pregunta y su justificación son correctas. Esta prueba ha sido validada para su uso en el aula por Coletta y Phillips (2005) y ha sido muy útil porque permite una rápida y eficiente comparación con otras poblaciones. De acuerdo con el número de aciertos obtenidos por un estudiante, a éste se le ubica en uno de los tres niveles o estadios de razonamiento, considerando que la prueba de Lawson ha sido diseñada para evaluar la capacidad de razonamiento científico de acuerdo a las propuestas de Piaget.

Empírico–Inductivo (Concreto): Estudiantes que no son capaces de probar hipótesis involucrando agentes causales observables. Pueden llevar a cabo experimentos mentales. Las operaciones que usan son concretas, se relacionan directamente con objetos y no con hipótesis verbalizadas.

Transición o intermedio (Transición): Para alcanzar este estadio deben haber desarrollado previamente el pensamiento concreto. Estudiantes inconsistentemente capaces de probar hipótesis involucrando agentes observables causales. En este estadio el individuo es capaz de razonar con proposiciones sin la necesidad de objetos, formular hipótesis y probarlas.

Hipotético–Deductivo (Formal): Estudiantes consistentemente capaces de probar hipótesis involucrando agentes causales observables o probar hipótesis involucrando entidades que no están observando, pueden formular hipótesis y probarlas.

Se considera a la Prueba de Lawson como predictor del rendimiento estudiantil, útil para establecer una clasificación gruesa de estudiantes en riesgo (Concreto) y de probable éxito (Formal). Los estudiantes en riesgo son aquellos que tienen una alta probabilidad de tener un bajo rendimiento en el primer año de la carrera o incluso abandonarla, e inversamente sucede con los estudiantes exitosos. Los estudiantes en la zona intermedia serían también de algún riesgo. Esta clasificación nos permite identificar los estudiantes para los cuales sería necesario proponer acciones que les permitiera superar sus dificultades para adaptarse al trabajo académico.

La Modelación y el Modelo de la Situación de un problema matemático

En el proceso de resolución de un problema matemático que requiere de la modelación, Blum y Borromeo (2009) reconocen una etapa de construcción intermedia denominada Modelo de la Situación. En sus propias palabras ellos afirman: “se inicia con una situación del mundo real, la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada por quien resuelve el problema, lo que lleva a la creación de un modelo de la situación. Luego, el modelo es traducido al lenguaje matemático produciendo un modelo matemático de la situación”. Se puede decir que el Modelo de la Situación (MS) es la representación mental de la situación que el sujeto construye cuando lee el texto del problema. Para Van Dijk y Kintsch (1983) la comprensión textual pasa por tres niveles: el “código de superficie”, que corresponde con el aspecto perceptual y verbal del lenguaje e incluye la identificación de palabras y el reconocimiento de las relaciones sintácticas y semánticas entre ellas. El segundo nivel es el “texto-base” que se refiere al aspecto semántico del lenguaje y queda representado mediante proposiciones. El tercer nivel es el MS, el cual se construye a partir de la información del texto-base y su interacción con el conocimiento previo del comprendedor. Por ello, el MS puede concebirse como una ocurrencia específica de un tipo de situación y es esencial para la comprensión, es una interpretación individual del texto que está condicionada por las experiencias previas del individuo.

METODOLOGIA

Ésta es una investigación de tipo mixto. En primer lugar, se presenta un análisis cuantitativo (a través de frecuencias y porcentajes) de las variables: cantidad de dibujos realizados, nivel de razonamiento científico y desempeño en la resolución de un problema de generalización de un patrón de cambio. En segundo lugar, se presenta un análisis cualitativo que explora la forma en que los estudiantes encuestados transitan del MS al modelo matemático cuando resolvieron el problema, con el fin de obtener conclusiones sobre este proceso en cada uno de los grupos que se generaron por el nivel de razonamiento de los estudiantes (concreto, en transición y formal). En ambos análisis suponemos que el grado de abstracción del MS es alto cuando el estudiante no necesita hacer dibujos para resolver el problema, y que el grado de abstracción disminuye cuando el estudiante requiere hacer varios dibujos.

Participantes

De todos los estudiantes de recién ingreso a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, se eligió a un grupo de 34 alumnos que cursaban el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el periodo de otoño de 2013. A este grupo se le aplicaron dos instrumentos de investigación: la Prueba de Lawson y un cuestionario que contenía un problema de matemáticas. La coordinación de tutorías de la institución les aplicó a todos los estudiantes de nuevo ingreso la Prueba de Lawson, en la primera semana de clases, y los resultados de la muestra elegida fueron proporcionados para ser usados en esta investigación. El segundo instrumento se aplicó en el horario de clases y se informó que sus respuestas se utilizarían en este estudio.

Primer instrumento de investigación

Como mencionamos antes, la prueba de Lawson consta de 12 preguntas con respuestas de opción múltiple que deben ser justificadas. De acuerdo con los puntajes obtenidos en dicha prueba los estudiantes se clasificaron en tres sub-grupos: los alumnos que obtuvieron un puntaje de 0 a 4 (razonamiento concreto), los que obtuvieron un puntaje de 5 a 8 (en etapa de transición) y por último, los alumnos con puntaje de 9 a 12 (razonamiento formal).

Segundo instrumento de investigación

Este instrumento fue un cuestionario que contenía un problema de matemáticas denominado “El problema de las mesas” (Bednarz, 2001; Bednarz, Kieran y Lee, 1996) de búsqueda y generalización de un patrón:

Para una fiesta se tienen disponibles mesas rectangulares. Alrededor de una mesa pueden sentarse 6 personas. Al juntar dos mesas pueden sentarse 10 personas.

Si lo crees necesario, realiza un dibujo que te ayude a responder las preguntas siguientes:

1. *Al juntar 4 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
2. *Al juntar 10 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
3. *Al juntar 100 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
4. *Al juntar N mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*

Justifica cada una de tus respuestas.

Notemos que después de presentar el problema la primera instrucción fue que realizaran un dibujo que les ayudara a contestar las preguntas, pero solamente si lo consideraban necesario. Después se les plantearon cuatro preguntas acerca del mismo problema y se les pidió que justificaran sus respuestas.

RESULTADOS

En esta muestra se obtuvo que el 47% de los estudiantes eran pensadores concretos, 47% estaban en etapa de transición y sólo dos, (6%), eran pensadores formales.

Tabla 1. Cantidad de estudiantes que no hicieron un dibujo o que hicieron al menos un dibujo

Cantidad de dibujos	Frecuencia	Porcentaje de estudiantes
No hacen dibujos	7	20.5%
Hacen al menos un dibujo	27	79.5%

En la Tabla 1 se aprecia que casi un 80% tuvo necesidad de hacer un dibujo para resolver el problema. En la tabla siguiente clasificaremos a los alumnos que no hicieron ningún dibujo de acuerdo con su nivel de razonamiento científico.

Tabla 2. Alumnos que no hicieron dibujos por nivel de razonamiento.

Nivel de razonamiento científico	Alumnos que no hicieron dibujos	Porcentaje
Concreto	1	6.25%
En transición	4	25.00%
Formales	2	100%

Entre los alumnos que tienen un nivel de razonamiento concreto solo uno no hizo un dibujo (6.25%), mientras que en el grupo de estudiantes en etapa de transición la cuarta parte de ellos no necesitó hacer un dibujo. Los dos estudiantes con pensamiento formal no necesitaron de un dibujo para resolver el problema.

Ahora observemos la cantidad de dibujos que hicieron los estudiantes con pensamiento concreto y los de pensamiento en transición.

Tabla 3. Cantidad de dibujos que realizaron los estudiantes con pensamiento concreto y los de pensamiento en transición..

	Concretos		En transición	
Cantidad de Dibujos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
cero	1	6.25%	4	25%
uno	0	0%	4	25%
dos	7	43.75%	1	6%
tres	4	25.00%	2	13%
cuatro	1	6.25%	5	31%
cinco	1	6.25%	0	0%
siete	1	6.25%	0	0%
ocho	1	6.25%	0	0%

En la Tabla 3 se puede observar que cerca de la mitad de los alumnos con nivel de razonamiento concreto hizo dos dibujos, la cuarta parte de estos alumnos hizo tres y hubo quien necesitó hacer hasta ocho dibujos.

Por su parte, la mitad de los alumnos en etapa de transición hizo solo un dibujo o ninguno y un porcentaje bajo hizo dos o tres dibujos. También observamos que, aunque una tercera parte necesitó hacer cuatro dibujos, en este grupo ya no encontramos quienes hayan hecho cinco dibujos o más.

Recordemos que los dos estudiantes con pensamiento formal no realizaron ningún dibujo.

De acuerdo con estos resultados, en este grupo ocurrió que, entre más alto era el nivel de razonamiento científico de los estudiantes menos dibujos necesitaron hacer.

Relación entre el nivel de razonamiento científico y la generalización

En esta sección se mostrará, a través de tablas de frecuencias y porcentajes, que entre mayor fue el nivel de razonamiento científico mejor desempeño tuvieron los estudiantes encuestados. También se presenta un análisis de corte cualitativo de la forma como lograron la generalización y la construcción del modelo situacional.

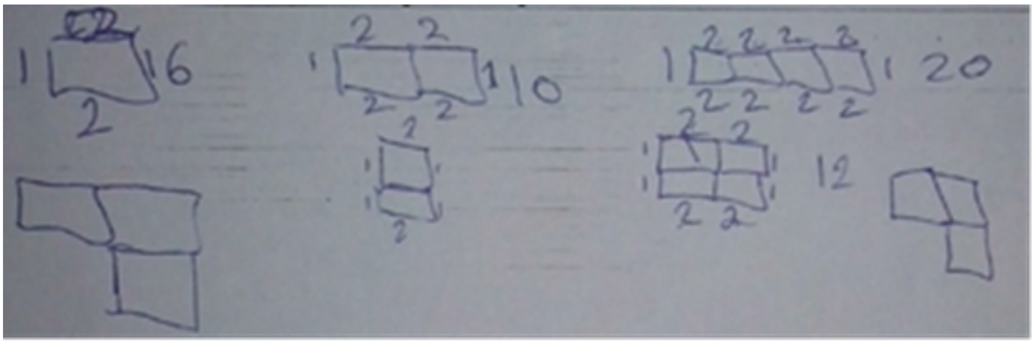
En la parte cuantitativa, el desempeño se midió por el número de respuestas correctas, de 0 a 4, acerca del problema de las mesas. Recordemos que las primeras 3 preguntas del cuestionario se refieren a la cantidad de personas que pueden sentarse en 4, 10 y 100 mesas, es decir, las preguntas se refieren a datos concretos. Por lo tanto, los estudiantes, en las dos primeras preguntas, podrían dibujar las mesas y contar los lugares. Para responder la tercera pregunta es necesario haber encontrado el patrón y, para la cuarta pregunta, en la que se pide lo mismo pero para N mesas, los estudiantes deben generalizar y expresar simbólicamente la relación entre el número de personas con el de las mesas, el cual es $P = 4N + 2$, si P representa al número de personas. Por todo lo anterior, fue común que los estudiantes que tuvieron entre 0 y 3 respuestas correctas fallaran precisamente en la cuarta pregunta, a excepción de dos estudiantes, los cuales tuvieron 3 respuestas correctas pero fallaron en la primera y no en la última.

Tabla 4. Cantidad de respuestas correctas de los estudiantes con pensamiento concreto.

Respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje
cero	1	6%
una	0	0%
dos	2	12.5%
tres	3	19%
cuatro	10	62.5%

En este grupo, 10 estudiantes lograron encontrar el patrón y escribir la expresión general $4N + 2$ para el número de personas que pueden sentarse en N mesas. El resto tuvo dificultades desde la construcción del modelo situacional. Por ejemplo, E28 obtuvo la expresión general correcta, pero contestó erróneamente la primera pregunta porque en sus dibujos consideró otras formas de unir las mesas y, aunque se quedó con la correcta (ver Figura 1), respondió: "*20 personas, si se sigue el patrón de 1 y 2 mesas llegaremos a que se juntan pegando las mesas en el lado menor y sólo desperdiciando un lugar*".

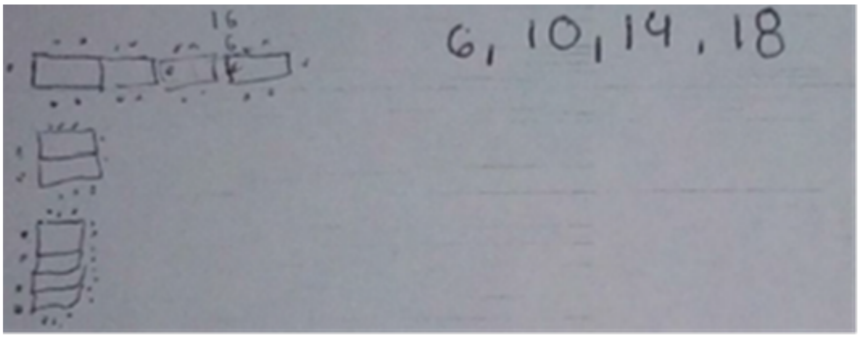
Figura 1. Dibujos de E28 para la pregunta 1.



Otros, como E28, encontraron obstáculos para deducir de los datos, que la única forma de unir las mesas era por el lado más corto, se equivocaron al contar o contestaron "20 lugares" porque sumaron dos veces 10, que es el número de personas que pueden sentarse en 2 mesas (ilusión de la linealidad).

En este grupo hubo dos estudiantes (E34 y E25) que obtuvieron incorrectamente la expresión 6 + 4N. Uno de ellos, E25, explica "*Al juntar 4 mesas se pueden sentar 18 personas, ya que conforme se aumentan las mesas se pueden ir sentando 4 más que al principio*", ver Figura 2.

Figura 2. Dibujos y respuesta de E25 a la pregunta 1.



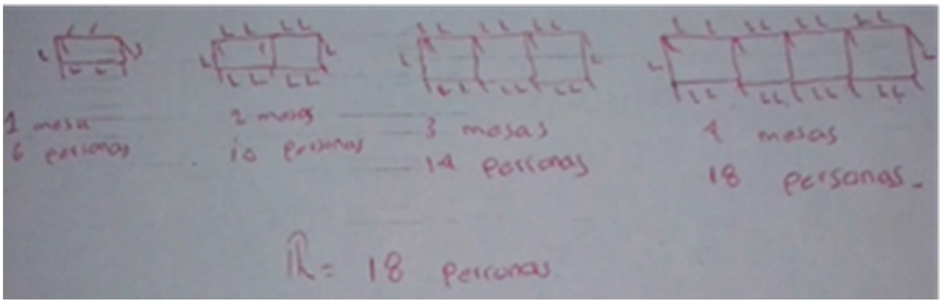
Estos estudiantes imaginaron la primera mesa con 6 lugares y luego al juntar las mesas se dieron cuenta de que aumentaban 4 lugares. Sin embargo, no se percataron de que ni la primera ni la última mesa tenían seis lugares, lo que los llevó a un modelo incorrecto. En la pregunta 3, E25 ya no hizo dibujos y respondió: "*Empezamos una sucesión con 6, ya que es la primera mesa entonces 6 + 4(N), N es el número de mesas, 6 + 4(0) = 6, 6 + 4(100) = 406*".

Tabla 5. Cantidad de respuestas correctas de los estudiantes en etapa de transición.

Respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje
cero	0	0%
una	0	0%
dos	2	12.5%
tres	2	12.5%
cuatro	12	75%

En este grupo, 11 de los 16 estudiantes obtuvieron la expresión general 4N + 2 para el número de personas que se pueden sentar en N mesas. Otro más, E9, obtuvo la expresión equivalente “Número de personas = 6N - (N - 1)2”.

Figura 3. Respuesta de E9 a la pregunta 1.



En su justificación E9 explica “*Dado que si 1 mesa caben 6 personas al juntar 2 mesas serían 12 personas menos 2 por lo que se pierden al juntar las mesas en general si tenemos 4 mesas juntas tendremos 24 lugares menos 6 lugares perdidos*”.

En la respuesta de la pregunta 2, E9 no hace dibujos y escribe: “*Siguiendo el mismo razonamiento se tiene que la regla es 6n – (n – 1)2, 60 lugares – 18 lugares perdidos serían 42 personas*”. En su justificación escribe “*Dado que la regla o fórmula obedece a 6n – (n – 1)2 se tiene que Número de personas = 6n – (n – 1)2. Aunque debería probarse por inducción matemática*”.

Desempeño de los estudiantes con pensamiento formal

Los dos estudiantes con nivel de razonamiento formal contestaron correctamente las cuatro preguntas y no hicieron dibujos. Desde la pregunta 1 encuentran el patrón pero cada uno construye un modelo diferente. Uno de ellos, E2, observa que en cada mesa se pueden sentar 4 personas más dos en las orillas, por lo que usa la expresión P = 4N + 2 para responder todas las preguntas.

El otro estudiante con pensamiento formal, E1, explicó en la pregunta 4:

“$6N - (2(N-2)+2) =$ *Al número de lugares. Porque a 6 por el número de mesas le tenemos que restar los asientos que se pierden y se pierden N-2 es el número de mesas que no son orilla se multiplica por dos porque de cada mesa se pierden 2 y se le suma dos por los que se pierden en la orilla.”*

ANÁLISIS

La mayoría de los estudiantes concretos obtuvieron el patrón dibujando y observando los casos particulares. Los estudiantes en transición utilizaron menos dibujos y obtuvieron el patrón desde la primera respuesta. Los dos formales no necesitaron hacer dibujos para determinar el patrón y obtener la expresión general desde el inicio.

La mayoría de los estudiantes imaginaron las mesas juntas y se dieron cuenta que cabían 4 personas en cada una, más 2 en los extremos. Algunos imaginaron las mesas separadas con 6 sillas y al unirlas observaron que se perdían dos lugares en la mesas de en medio y uno en las mesas que son orilla. Entre los concretos hubo dos que imaginaron la primera mesa con 6 y al ir pegando otras mesas se dieron cuenta que se agregaban 4 lugares. Este modelo situacional erróneo los llevó a la sucesión 6, 10, 14, 18, 22,… y al modelo matemático incorrecto "número de personas = 6N+4". Fue en este grupo de estudiantes donde se detectaron dificultades en la construcción de un modelo situacional coherente, lo cual les impidió resolver el problema correctamente.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que el 94% de los estudiantes con pensamiento concreto necesitaron hacer al menos un dibujo para resolver el problema, este porcentaje disminuyó en el grupo de pensadores en transición y fue nulo en los pensadores formales. Con respecto a la construcción del modelo situacional se obtuvo que la mayoría logró construir un modelo de la situación coherente con los datos del problema y pasó al modelo matemático correcto, quienes no lo hicieron así no lograron generalizar el patrón ni expresar un modelo matemático correcto. Los datos mostraron que fueron más los estudiantes de pensamiento concreto quienes estuvieron en esta situación.

Esta investigación nos muestra que el uso de los dibujos como apoyo en la resolución de problemas de matemáticas es una estrategia útil y necesaria para el estudiante con un nivel de desarrollo cognitivo concreto y que, por tanto, debe ser fomentada por el profesor. Por esta razón, es importante conocer el nivel de desarrollo cognitivo de nuestros alumnos y diseñar secuencias de aprendizaje que tomen en cuenta esta información.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra 1,*(pp. 69-78). Australia: University of Melbourne.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1* (1), 45-58.

Coletta, V. P., y Phillips, J. A. (2005). Interpreting FCI scores: Normalized gain, preinstruction scores, and scientific reasoning ability. *American Journal of Physics, 73(12),* 1172-1182.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), Proceedings of the *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures* (pp. 271- 290). Seville, Spain: S. A. E. M. Thales.

Lawson, A. E. (1995). *Science teaching and the development of thinking*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

Macgregor, M. and Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *1* (pp.181-188). Japan: University of Tsukuba.

Van Dijk, T. A.y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Villagrán, M. A., Guzmán, J. I. N., Pavón, J. M. L., & Cuevas, C. A. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14*(2), 382-386.