LA ESCALA, SUS ELEMENTOS Y LA FORMA EN QUE SE PERCIBEN

Asela Carlón Monroy, Sergio Cruz Contreras
Universidad Nacional Autónoma de México (México)
asela.carlon@gmail.com, correoaselasergio@gmail.com

Palabras clave: escala, gráficas, funciones, aprendizaje con comprensión

Key words: scaling, graphs, functions, learning with understanding

RESUMEN: En este artículo se explora en qué medida estudiantes de bachillerato identifican los elementos que involucra trabajar con escalas en los ejes cartesianos y cómo los relacionan. Todo esto, después de que tales alumnos muestran dominio en el trabajo con bosquejos de gráficas. Los resultados obtenidos sugieren tres tipos de confusiones que catalogamos como: “escala-unidad de medida”, “longitud de intervalo-escala” y “longitud de intervalo-unidad de medida”.

ABSTRACT: In this paper we explore in what extent high school students identify and relate the elements involved in scaling tasks. Such tasks take place after the students have mastered graph sketching. From the results we identify three types of confusions: “scale-unit measure”, “interval length-scale” and “interval length-unit measure”.

INTRODUCCIÓN

Es deseo compartido de los profesores de matemáticas, promover aprendizajes con comprensión. Una de las bondades que esto implica, es que “hace el aprendizaje subsecuente más fácil” (NCTM, 2000, p. 20). Si se considera que la representación gráfica de una función es fundamental en las matemáticas escolares y en el ámbito práctico extraescolar de la matemática, es necesario que los estudiantes aprendan con comprensión los elementos que entran en juego al asignar la escala en los ejes cartesianos: longitud de los intervalos, longitud de las unidades de medida (u.m.) y, el número asignado en el extremos de cada intervalo (la escala propiamente dicha). De acuerdo a Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), el estudio de la escala es importante en virtud de que, por ejemplo, “una gráfica no puede ser interpretada completamente sin tomar en cuenta sus escalas” (p.19). La investigación que se reporta, se inscribe en esta temática.

EL ESTUDIO

Población. El trabajo se realiza con 47 alumnos que cursan el 4º semestre de bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México y cuyas edades oscilan entre los 16 y 17 años.

Condiciones que le anteceden. En lo fundamental, se pueden señalar las siguientes: i) los 47 estudiantes participan en un proceso de enseñanza-aprendizaje cuyo propósito es promover, por un lado, el dominio en la conversión de las representaciones gráficas y algebraicas en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2, 3$ por la vía global cualitativa y por otro, un aprendizaje con comprensión de las referidas funciones; ii) 44 alumnos (≈ 94%), proporcionan evidencias de haber alcanzado el dominio en la conversión señalada: abordan con éxito una prueba de rendimiento que se elabora para tal fin. Cabe hacer hincapié que, durante la instrucción, la mayor parte del trabajo que llevan a cabo los estudiantes con las representaciones gráficas del tipo de funciones arriba señalado, es de corte *global cualitativo*. Es decir, trabajan con bosquejos de gráficas cartesianas en sistemas de coordenadas sin escalas en los ejes.

El paso siguiente en el aprendizaje de los estudiantes es enfrentar tareas que demandan trabajo con gráficas de funciones (no con bosquejos). Esto requiere sistemas de coordenadas cartesianas con escalas en los ejes. Ante esta situación surge el estudio que aquí se reporta y cuyo propósito se enuncia a continuación.

Propósito. Explorar cómo perciben estos 47 estudiantes los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos y cómo los relacionan.

MARCOS DE REFERENCIA

De las distintas posiciones teóricas que se asumen para llevar a cabo este estudio (por ejemplo, aprendizaje con comprensión, escala, trabajo en grupos pequeños), en este apartado, sólo se enuncian dos: las referidas a la comprensión matemática y a la escala.

Marco de referencia para la comprensión matemática. En este punto, se acepta la posición de Hiebert y Carpenter (1992), quienes consideran, entre otras cosas, que: i) el conocimiento se representa interna y externamente; ii) las representaciones internas se conectan formando una estructura (redes); iii) las conexiones entre representaciones externas, pueden estimular las conexiones entre las respectivas conexiones internas; iv) la forma en la cual un estudiante trata con una representación externa revela “algo” de cómo tiene representada esa información internamente y, v) la comprensión crece cuando las redes se hacen más largas y organizadas.

Marco de referencia para la escala. Se asume la posición de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), quienes hacen afirmaciones como las siguientes: i) la escala es “la asignación de valores a los intervalos entre las líneas del sistema cartesiano” (p. 4); ii) “una gráfica no puede ser interpretada completamente sin tomar en cuenta sus escalas” (p. 19); iii) una comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características visuales de la gráfica no cambian bajo el cambio de escalas y qué características cambian cuando se alteran las escalas; iv) cuando se cambian las escalas para graficar la misma función, la “imagen” resultante puede ser completamente diferente; v) la escala llega a ser más fundamental al usar tecnologías para graficar; vi) la forma de la gráfica se mantiene cambiando, dependiendo de la escala.

METODOLOGÍA

Realización del estudio. Para el estudio, i) se diseña y elabora una prueba de rendimiento a fin de valorar cómo perciben los estudiantes los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos; ii) los alumnos, distribuidos en 15 equipos (13 equipos de 3 alumnos y dos, de cuatro), enfrentan la prueba mencionada; iii) a cada equipo se le asigna al azar un número del uno al 15 con el cual son referidos al presentar los resultados; iv) los resultados se analizan, a la luz de los referentes teóricos.

Instrumento para valorar los elementos involucrados en la escala. El instrumento es una prueba de rendimiento de base común que contiene tres preguntas. La intención de estos cuestionamientos es explorar si los estudiantes identifican cómo es la longitud de la unidad de medida (mayor, menor o igual) en el Eje de las Abscisas (E.A.) comparada con la del Eje de las Ordenadas (E.O.) Este aspecto se considera importante en virtud de que la “deformación” que sufre una gráfica depende de la longitud de la unidad de medida (u.m.) en cada uno de los ejes cartesianos. A continuación, se transcribe la prueba de rendimiento.

En cada uno de los sistemas de coordenadas cartesianas que se presentan a continuación (Figura 1, 2 y 3), *la longitud del segmento con el que se realiza la partición en el E.A. es la misma que la del E.O*. Observen detenidamente *las escalas* de *cada uno* de los ejes de los tres sistemas de coordenadas cartesianas y contesten las tres preguntas que se enuncian después de dichos sistemas.

Figura 1.

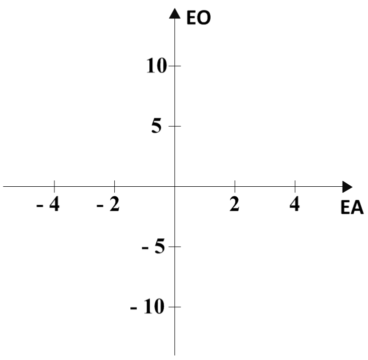


Figura 2.

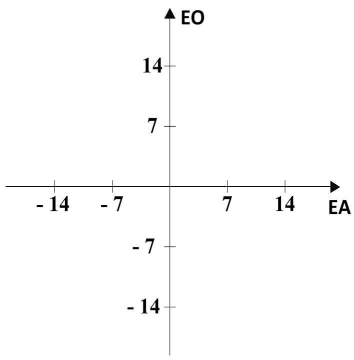
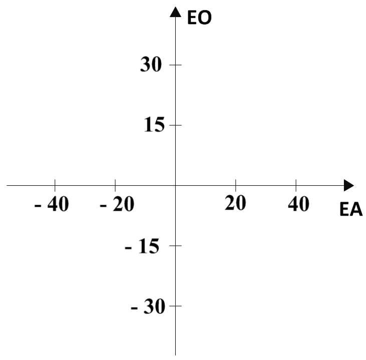


Figura 3.



PREGUNTA 1. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 1?

PREGUNTA 2. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 2?

PREGUNTA 3. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 3?

RESULTADOS Y COMENTARIOS

Antes de proceder a enunciar los resultados cabe señalar que éstos se presentan, en primer lugar, por pregunta y posteriormente, se muestran concentrados. Cuando se exponen por pregunta, en términos generales, las respuestas se clasifican en grupos.

Pregunta 1

RESPUESTAS CORRECTAS. Ocho equipos: el 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12 y el 15.

RESPUESTA: "u.m. en el E.A. *mayor* que la u.m. en el E.O".

RESPUESTAS INCORRECTAS. Seis equipos: el 3, 7, 8, 11, 13 y el 14. Estas respuestas se presentan clasificadas en los tres grupos que se describen a continuación.

Grupo 1. Cuatro equipos: el 3, 7, 8 y el 14.

Respuesta: "u.m. en el E.A. *menor* que la u.m. en el E.O".

Comentarios: Al parecer, los estudiantes consideran que, cuando la escala en el E.A. es menor que la del E.O. entonces, la u.m. en el E.A. es menor que la u.m. en el E.O. Una posible explicación de la respuesta de estos equipos es que prevalece en ellos la relación de orden que existe entre los Reales positivos (números en los que centran su atención al asignar e indicar la escala) sobre la longitud de las unidades de medida: menos unidades por intervalo, menor longitud de las unidades. En otras palabras, al parecer, se impone la visión numérica sobre la geométrica. Estimamos que este proceder lo podemos catalogar como "confusión escala—unidad de medida".

Grupo 2. Un equipo: el 11.

Respuesta: “la escala es la misma solo cambia la u.m.”

Comentarios: A la luz de la primera parte de la respuesta, es factible suponer que los integrantes de este equipo consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que la de los del E.O. entonces, la escala es la misma. En decir, la escala está determinada por la longitud de los intervalos. En este caso, parece que predomina la visión geométrica (longitud de los intervalos). Este razonamiento es posible etiquetarlo como “confusión longitud de intervalo-escala”.

En relación a la segunda parte de la respuesta (sólo cambia la u.m.), no es clara su posición porque, aunque efectivamente las unidades de medida son diferentes, no especifican cómo cambian dichas unidades es decir, cuál es menor o mayor.

Grupo 3. Un equipo: el 13.

Respuesta: “la unidad de medida es la misma en ambos ejes”.

Comentarios: De los tres elementos que entran en juego en el tratamiento de la escala (longitud de los intervalos, unidad de medida y la escala propiamente dicha es decir, el número asignado en el extremo de cada intervalo), este equipo presenta dificultades en los dos primeros. De tal manera que, al parecer, consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es igual a la de los del E.O., la unidad de medida es la misma, independientemente de la escala marcada. Su respuesta, permite entrever que ellos centran su atención en el aspecto geométrico y dejan a un lado el numérico. Este proceder, es posible etiquetarlo como “confusión longitud de intervalos-unidad de medida”.

RESPUESTAS IMPRECISAS: Un equipo: el 9.

RESPUESTA: “La inclinación estará más cerca al E.A. y la abertura será abierta”.

COMENTARIOS: Los integrantes de este equipo, describen correctamente cómo sería la “deformación de la gráfica” en ese sistema pero, no dicen nada sobre las unidades de medida.

Pregunta 2

RESPUESTAS CORRECTAS. 13 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14 y el 15.

RESPUESTAS: “Las unidades de medida en ambos ejes son iguales” o bien, “u.m. en el E.A. *igual* a la u.m. en el E.O.”

COMENTARIOS: El número de equipos que contestan correctamente en esta ocasión es considerablemente mayor a los que lo hicieron en la pregunta anterior y a los que lo harán en la pregunta siguiente (la 3). Una explicación a este hecho es que, a los estudiantes les es más accesible determinar cómo son las unidades de medida en un sistema con estas características (o similares). Pero, también puede suceder que esta respuesta correcta encubra interpretaciones inadecuadas de algunos de los elementos involucrados en el tratamiento de la escala como por ejemplo, la “confusión unidad de medida-longitud de intervalos”.

RESPUESTAS INCORRECTAS. Un equipo: el 11.

RESPUESTA: “La escala es la misma sólo cambia la u.m.”

COMENTARIOS: Prácticamente los mismos que los de la pregunta anterior.

RESPUESTAS IMPRECISAS. Un equipo: el 9.

Respuesta: "La inclinación o abertura de la gráfica, será "normal"".

Comentarios: El tipo de respuesta es completamente similar a la emitida en la pregunta anterior por lo que, los comentarios son los mismos que se anotaron en dicha pregunta.

Pregunta 3

RESPUESTAS CORRECTAS. Cinco equipos: el 1, 2, 4, 5 y el 12.

RESPUESTA: "u.m. del E.A. *menor* que la u.m. del E.O." o bien, "u.m. en el E.O. *mayor* que la u.m. en el E.A".

RESPUESTAS INCORRECTAS. Nueve equipos: el 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14 y el 15.

Grupo 1. Cinco equipos: el 3, 6, 7, 8 y el 14.

Respuesta: "u.m. E.O. *menor* que u.m. E.A." o bien, "u.m. E.A. *mayor* que u.m. E.O".

Comentarios: La respuesta de todos estos equipos, excepto la del seis, es de la misma naturaleza que la emitida en la pregunta uno. Por lo que se puede decir que, dichos equipos incurren, nuevamente, en la "confusión escala-unidad de medida". En cuanto al equipo seis, es la primera ocasión que muestra este proceder.

Grupo 2. Un equipo: el 11.

Respuesta: "la escala es la misma solo cambia la u.m".

Grupo 3. Un equipo: el 13.

Respuesta: "La escala es dif. en cada eje, mientras que la u.m. es la misma en ambos ejes".

Comentarios: La esencia de la respuesta de estos dos equipos (11 y 13), es la misma que la que emitieron en la Pregunta 1. De donde, los comentarios que amerita en esta ocasión son los señalados renglones arriba.

Grupo 4. Un equipo: el 15.

Respuesta: "La u.m. de E.O. representa $\frac{3}{4}$ partes de la u.m. del E.A".

Grupo 5. Un equipo: el 10.

Respuesta: "La UM en el EO es $\frac{1}{3}$ menor que en el EA".

Comentarios: Al parecer, el equipo 15 considera que: como 15 (escala en el E.O.) es $\frac{3}{4}$ partes de 20 (escala en el E.A.) entonces, esa es la relación entre las unidades de medida.

Por su parte, el equipo 10, posiblemente, sigue un razonamiento como el siguiente: como $\frac{1}{3}$ de 15 (escala en el E.O.) es cinco y la diferencia de 15 a 20 (escala en el E.A.) es cinco entonces, la unidad de medida en el E.O. es $\frac{1}{3}$ menor que la unidad de medida en el E.A.

Por el tratamiento numérico que hacen estos dos equipos (el 10 y el 15) y por trasladar las relaciones que existen en el campo numérico a la relaciones entre las unidades de medida, es posible enmarcar su respuesta como variantes de la "confusión escala-unidad de medida".

RESPUESTAS IMPRECISAS. Un equipo: el 9.

RESPUESTA: "la gráfica estará más cerca a E.O y será cerrada"

COMENTARIOS: Este equipo, de hecho, procede de la misma forma que en las dos preguntas anteriores. La respuesta a la pregunta que ahora nos ocupa presenta, con las modificaciones correspondientes, las mismas características que las señaladas en aquellas preguntas.

CONCENTRADO DE RESULTADOS

Algunos resultados del desempeño de los equipos son los siguientes:

Cinco equipos (el 1, 2, 4, 5 y el 12) contestan correctamente las tres preguntas; tres (el 6, 10 y el 15), dos; cinco (el 3, 7, 8, 13 y el 14), una y los equipos 9 y 11, no logran acierto alguno. Es decir, es posible afirmar que ocho equipos (≈53%) perciben los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos.

Si como elemento para juzgar la dificultad de una pregunta se considera el número de equipos que la contestan correctamente, se puede decir que la Pregunta 3 fue la más difícil: únicamente cinco equipos (el 1, 2, 4, 5 y el 12) dan una respuesta adecuada. Además, éstos son los mismos equipos que logran los tres aciertos.

De acuerdo al número de respuestas correctas, la pregunta más fácil fue la dos (13 equipos la contestaron bien).

El promedio de respuestas correctas por equipo es del orden de 1.67.

En el proceder de los equipos, se identificaron, fundamentalmente, tres "confusiones". Éstas las catalogamos como "escala-unidad de medida", "longitud de intervalo-escala" y "longitud de intervalo-unidad de medida".

La "confusión" más recurrente fue la etiquetada como "escala-unidad de medida" (se utilizó en diez ocasiones). Aquí, al parecer, los estudiantes consideran que, cuando la escala en el E.A. es menor que la del E.O. entonces, la longitud de la u.m. en el E.A. es menor que la del E.O.

Si bien, las tres respuestas del equipo nueve son catalogadas como "imprecisas" y por ende, renglones arriba, se afirma que dicho equipo no logra acierto alguno en la prueba de rendimiento, este equipo, "va más allá" de lo que se le solicita en dicha prueba. Describe correctamente cómo sería “la deformación que sufriría la gráfica” en cada uno de los sistemas de coordenadas que se le presentan.

CONCLUSIONES

En relación al foco de interés de la investigación reportada en estas páginas, es factible afirmar que la comprensión que muestran los estudiantes en los aspectos explorados es, aunque baja, satisfactoria.

Al parecer, de acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992), el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio, logra promover que las redes de conocimiento de los estudiantes se hagan más largas y organizadas: favorece que ocho equipos (≈ 53%) perciban los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos (longitud de los intervalos, longitud de las unidades de medida y, el número asignado en el extremo de cada intervalo). En otras palabras, es factible sostener que la comprensión lograda por los alumnos en la conversión de las representaciones gráficas y algebraicas en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa contribuye, como lo señala el NCTM (2000), a que el aprendizaje subsecuente (el estudio de la escala) sea más fácil.

Por otra parte, el desempeño que muestran los estudiantes en el instrumento analizado, indica que, si en una instrucción se pretende abordar “la escala” como objeto de estudio, es necesario hacer énfasis en todos los elementos que entran en juego en su tratamiento a fin de evitar o minimizar los problemas que puedan tener los estudiantes con un tema tan usado tanto en Matemáticas como en otras áreas del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60 (1)*, 1-64.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM