

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DE FUNCIONES LINEALES Y VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL

Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores, Adriana Gómez Reyes

Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, CECyT 13-IPN (México)

gpe_xochitl@yahoo.com.mx, ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones lineales

Key words: pattern recognition, generalization, linear functions

RESUMEN: El presente es un reporte de investigación en el aula sobre el desarrollo del concepto de función en estudiantes de bachillerato. En particular se trabajó el concepto de función lineal y variación directamente proporcional utilizando la modelación matemática como estrategia de enseñanza. Se usó el modelo de enseñanza Aprender Matemática, Haciendo Matemática como marco teórico, este modelo proporciona las orientaciones conceptuales y metodológicas de la investigación. Los instrumentos que sirvieron para organizar la información y facilitar las conclusiones fueron listas de cotejo, matrices de resultados y rúbricas.

ABSTRACT: The text is a report of a classroom research on the development of the concept of function in high school level (students from 14 to 17 years old). In particular the concept of linear function and direct proportional variation was worked, using mathematical modeling as a teaching strategy. The teaching model, Learning Mathematics, Doing Mathematics, was used as a theoretical reference framework; this model gives the conceptual and methodological guidelines of the research. The tools used to organize the information and facilitate conclusions were checklists, results matrices, and rubrics.

■ INTRODUCCIÓN

La presente investigación es parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México, que fue creado en 2006. Entre las actividades del Seminario está el desarrollo de proyectos de investigación en el contexto del modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007).

Entre las líneas de investigación que plantea el SEAM se tienen:

- Esquemas de argumentación y demostración matemática.
- Reconocimiento de patrones y generalización.
- Resolución de problemas y modelación en la adquisición y el entendimiento de conceptos matemáticos y sus relaciones.
- Modelación matemática como metodología de enseñanza.
- Problemas de exploración y su influencia en el aprendizaje.
- Influencia del software de matemática dinámica en el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas.
- Uso de instrumentos de evaluación.
- Tipos de evaluación y de retroalimentación en el aula.
- Instrumentos de evaluación en la investigación en aula.

El reporte se hace con respecto a la línea de investigación, *Resolución de problemas y modelación en la adquisición y el entendimiento de conceptos matemáticos y sus relaciones*. En este caso se trata del uso de la modelación matemática para fomentar el entendimiento de los conceptos de función lineal y variación directamente proporcional.

La modelación matemática, como estrategia de enseñanza, permite aprender a partir de las mismas aplicaciones de la matemática; al mismo tiempo que mejora habilidades de lectura, interpretación, formulación y resolución de situaciones problema (Flores, Gómez y Chávez, 2015)

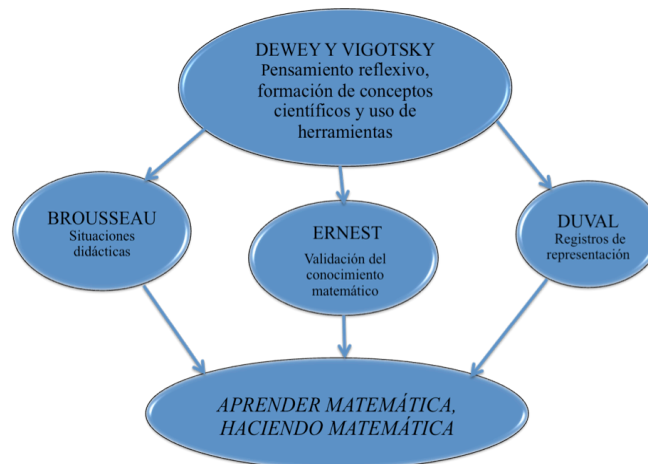
Para el presente trabajo se buscó respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el grado de comprensión del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, si éstos se abordan desde la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de primer semestre de Bachillerato?

■ MARCO TEÓRICO

Como marco teórico se utilizó el modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010) que, a su vez, se apoya en los lineamientos teóricos de Dewey (1989) y Vigotsky (1978), principalmente sobre su concepción de pensamiento reflexivo y formación de conceptos científicos, y uso de herramientas; en las propuestas de Brousseau (1997) y Ernest (1999) con respecto a la enseñanza-aprendizaje de la matemática; y en los registros de representación de Duval (1993, 1995), entre otros. La metodología de enseñanza propuesta por el modelo se basa en la resolución de problemas de exploración y de modelación dentro de un

ambiente de evaluación formativa en el que se privilegia el trabajo cooperativo (Flores y Gómez, 2009). Figura 1.

Figura 1. Marco teórico



Las actividades se llevaron a cabo en un experimento de enseñanza que consistió en el diseño y la aplicación de problemas sobre función lineal, destacando las situaciones en las que se tiene una variación directamente proporcional. En el desarrollo de la secuencia se privilegió la resolución de problemas y el trabajo en equipo. Los resultados de las actividades se consignaron en hojas de trabajo y la información se organizó mediante listas de cotejo, matriz de resultados y rúbricas.

Las actividades de enseñanza tuvieron como objetivo que el estudiante recordara el concepto de función lineal estudiado en el ciclo académico anterior y reflexionara sobre las características de una variación directamente proporcional. En la Figura 2 se muestran algunas de las actividades.

Figura 2. Muestra de actividades de enseñanza



■ DESARROLLO EXPERIMENTAL

La investigación se realizó en cinco grupos de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH; uno de los dos subsistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM); en el desarrollo de la unidad correspondiente a funciones lineales.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo durante cuatro semanas y las actividades se consignaron en hojas de trabajo a las que se les aplicaron los instrumentos de evaluación formativa: listas de cotejo, matriz de resultados y rúbricas. Cada una de las actividades consistió en un problema de modelación trabajado en equipos de entre dos y cuatro estudiantes, siguiendo las directrices definidas dentro del modelo de enseñanza, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores y Chávez, 2013; Flores y Gómez, 2013).

Las materias del área básica de matemática en el CCH se imparten en tres sesiones semanales, dos de ellas de dos horas y una de una. En el diseño experimental se plantean dos sesiones de dos horas en las que los estudiantes resuelven problemas de modelación matemática y ejercicios que involucran el uso de funciones lineales, a estas actividades se les denomina Actividades de Enseñanza-Aprendizaje. Estas actividades se realizaron en un ambiente en el cual los equipos tenían una libertad absoluta de comunicación: entre los integrantes de un mismo equipo, entre equipos y entre el profesor y los equipos. La intención es que se usen las actividades para aprender la matemática y la temática en cuestión. Al finalizar cada problema o actividad, se lleva a cabo una recapitulación y se resaltan los aspectos más importantes de las actividades.

Las sesiones de una hora se utilizaron para realizar Actividades de Evaluación. La dinámica de éstas es la misma que las de Enseñanza-Aprendizaje, con la salvedad de que ahora los equipos no cuentan con la asistencia del profesor. La intención es tener evidencias del desempeño del grupo como tal y determinar los recursos que utilizan en la resolución de problemas. En la siguiente sesión se resolvía el problema o se desarrollaba la actividad en los términos que el docente esperaba y se hacía una institucionalización del conocimiento visto.

Los instrumentos de evaluación se aplicaron exclusivamente a las actividades de evaluación. Los resultados se usaron, en primera instancia, para retroalimentar el aprendizaje de los grupos y, en segunda, para conformar el reporte de investigación.

■ ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la Figura 3 se presenta la lista de cotejo de uno de los problemas de evaluación para uno de los grupos con los que se llevó a cabo el experimento de enseñanza.

Figura 3. Lista de cotejo



Variación directamente proporcional y funciones lineales



Problema 5

Artemio vende tacos en el Mercado de la Bola. Su sueldo es de \$30 por día, más una comisión de \$0.37 por taco vendido. Supón que nunca vende más de 500 tacos en un día.

- ¿Cuánto ganará si vende 200 tacos?
- ¿La variación del sueldo en función del número de tacos vendidos es directamente proporcional? Argumenta tu respuesta.
- En este caso, ¿la variación que se da es discreta? Explica tu respuesta

Pasos	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅	E ₆	E ₇
Responde de manera directa cuál es la ganancia de 200 tacos	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Consigna la operación utilizada para responder lo anterior	✓	✓	x	x	x	✓	✓
Identifica las variables involucradas	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Da una ecuación para el sueldo	x	x	x	x	x	x	x
La ecuación es correcta	x	x	x	x	x	x	x
Construye una tabla correctamente con los resultados	x	x	x	x	x	x	x
Además de resultados consigna las operaciones en la tabla	x	x	x	x	x	x	x
A partir de la tabla obtiene una ecuación	x	x	x	x	x	x	x
Construye una gráfica	x	✓	x	x	x	x	x
Da la ganancia correcta para 200 tacos	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓
Da argumentos sobre la variación	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Argumenta correctamente sobre la variación	x	x	x	x	x	x	x
Define el proceso como discreto o continuo	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Da argumentos sobre si la variación es discreta	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Argumenta correctamente si la variación es discreta	x	x	x	x	x	x	x

Uno de los resultados que arrojaron las listas de cotejo es que los estudiantes no presentan problemas para realizar las operaciones básicas y para usar la regla de tres. La dificultad reside en visualizar los procesos que se presentan en los problemas como situaciones dinámicas en las que existe una variación y una dependencia entre dos variables

Esto se corrobora con la información que nos arrojan las matrices de resultados. En la Figura 4 tenemos la matriz de resultados del mismo problema de la Figura 3.

Figura 4. Matriz de resultados

Problema 5. Tacos

Enunciado	Solución esperada	Solución encontrada	Comentarios
<p>Artemio vende tacos en el Mercado de la Bola. Su sueldo es de \$30 por día, más una comisión de \$0.37 por taco vendido. Supón que nunca vende más de 500 tacos en un día.</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cuánto ganará si vende 200 tacos? ¿La variación del sueldo en función del número de tacos vendidos es directamente proporcional? Argumenta tu respuesta. En este caso, ¿la variación que se da es discreta? Explica tu respuesta 	<p>a) $30 + 0.37((200)) = 30 + 74 = 104$ ganará.</p> <p>b) La variación del sueldo en función del tiempo no es directamente proporcional, ya que el modelo matemático del problema es $y = .37x + 30$ el cual no es de la forma $y = kx$.</p> <p>c) Aquí la variación si es discreta, porque se venden tacos completos y no medios tacos ni tres cuartos de taco, es decir el número de tacos vendidos es un número entero.</p>	<p>a) La mayoría de los equipos contestaron bien, 104 pesos, aunque no realizaron por escrito la operación. Sólo un equipo contestó mal al no sumar los \$30 del sueldo.</p> <p>b) Todos los equipos contestaron que si hay variación directamente proporcional ya que a medida que vende más tacos más gana.</p> <p>c) La mayoría de los equipos contestaron que si es discreta, pero su argumentación no está bien y sólo uno dijo que es continua.</p>	<p>a) Se debe pedir hacer operaciones.</p> <p>b) Confundieron variación directamente proporcional con que la variación sea creciente.</p> <p>c) Hay que trabajar más en la forma en que los estudiantes argumentan.</p>

En la figura 5 se presenta la rúbrica para determinar el nivel de dominio de los conceptos de función lineal y variación directamente proporcional.

Con respecto al grado de entendimiento del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, las evidencias dicen que el avance fue mínimo.

Figura 5. Rúbrica para función lineal y variación directamente proporcional

	Experto	Intermedio	Aprendiz
Concepto de función lineal	Sabe que es la relación de dependencia entre dos variables y distingue dominio e imagen. Conoce que las diferencias constantes en una variable implican diferencias constantes en la otra. Resuelve problemas utilizando el concepto en sus tres representaciones.	Sabe que es una relación de dependencia entre variables. Utiliza solo una o dos representación. Se le dificulta el tránsito entre representaciones.	Reconoce la relación entre dos literales.
Variación directamente proporcional	Sabe que es una característica de algunas funciones lineales y distingue la constante de proporcionalidad. Resuelve problemas utilizando el concepto.	Utiliza la “regla de tres” correctamente en la resolución de problemas lineales.	No la distingue entre las funciones lineales. Utiliza la “regla de tres” de manera indiscriminada.
Representación tabular	Construye tablas y reconoce en ellas cuando son lineales y si existe variación directamente proporcional. Encuentra la constante de proporcionalidad.	Construye tablas como una sucesión, sin reconocer la regla de correspondencia.	No utilizan tablas
Representación gráfica	Sabe que corresponde a una recta. Sabe que si pasa por el origen tiene variación directamente proporcional. Sabe que si es creciente la pendiente es positiva y viceversa. Representa problemas de variación proporcional de manera gráfica.	Sabe que corresponde a una recta. Sabe que si pasa por el origen tiene variación directamente proporcional. Representa algunos problemas de variación proporcional de manera correcta. Reconoce la variable independiente pero no siempre la grafica en el eje horizontal.	Sabe que corresponde a una recta. Grafica en forma indiscriminada entre un eje y otro.
Representación algebraica	Reconoce la regla de correspondencia $y = mx + b$ y define dominio e imagen de la función. Identifica a m con la razón de cambio entre las variables. Encuentra la expresión algebraica correspondiente a los problemas planteados.	Reconoce la regla de correspondencia $y = mx + b$. Identifica a m con la razón de cambio entre las variables.	Reconoce la regla de correspondencia $y = mx + b$.

Los estudiantes no explican el por qué una cierta función es lineal o no, ni si tiene variación directamente proporcional.

En los casos en los que sí se hace hay confusión entre función lineal y variación directamente proporcional con el hecho de que la función sea creciente.

En consecuencia, si damos respuesta a nuestra pregunta de investigación: *¿Cuál es el grado de comprensión del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, si éstos se abordan desde la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de primer semestre de Bachillerato?*

Podríamos decir que la comprensión es mínima y que no es conveniente abordar la temática mediante el uso de la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, antes de llegar a una conclusión tal, es necesario hacer una revisión del diseño experimental y de las actividades que conforman el experimento de enseñanza con el fin de determinar si hubo fallas y de qué índole.

La evaluación se hizo en dos aspectos:

- a) Las actividades de enseñanza-aprendizaje y de evaluación.
- b) Su aplicación en el aula.

Con respecto al primero, se tiene que el orden en que las actividades se llevaron a cabo no fue el adecuado y no se puso el énfasis suficiente en los procesos de cambio ni en los conceptos a aprender.

Con respecto al segundo, resulta que no se tuvo un desarrollo uniforme de las actividades. Si bien hubo aspectos comunes en la puesta en práctica por los tres docentes, hubo diferencias sustantivas en cuanto a la retroalimentación que se dio a los grupos; como en las actividades no se destacó suficientemente el concepto de función lineal y sus características (incluida la variación directamente proporcional), los docentes no retomaron esto en los espacios de recapitulación y de resolución conjunta de los problemas.

En estas recapitulaciones tampoco se tomaron en cuenta los niveles de dominio de los conceptos estipulados en la rúbrica; esto a pesar de tener resultados parciales en las listas de cotejo y en las matrices de resultados.

Todo esto habla de un descuido en la instrumentación del experimento de enseñanza, lo cual lleva a pensar que no se puede responder a la pregunta de investigación a partir de los resultados del experimento. Sino que habría que replantear las actividades y la estrategia de aplicación y hacer el experimento de nuevo.

■ COMENTARIOS FINALES

En el equipo de trabajo tenemos la convicción de que es necesario hacer una evaluación de nuestro propio desempeño y, como es el caso, aprender de los errores.

Los resultados de la investigación no son confiables, por tanto se plantea una nueva planificación de todo el experimento de enseñanza y su aplicación. Esta vez cuidando aquellos aspectos que son importantes para tener resultados confiables y responder efectivamente nuestra pregunta.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G., (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J., (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*, Paidós, Barcelona, España.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Ernest, P. (1999) Forms of Knowledge in Mathematics and Mathematics Education: Philosophical and Rhetorical Perspectives, *Educational Studies in Mathematics*, 38. 67-83.
- Flores, A. H., (2007). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae*, Vol. 9, núm. 1, 28-40.
- Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educação Matemática e Pesquisa*, vol 12, núm. 1. 75-87.
- Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 2(2), 117-142.
- Flores, A. H.. y Chávez, G. X. (2013). Generalización en el estudio de funciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 26. 1057-1064.
- Flores, A. H. y Gómez, A. (2013). La modelación matemática y la enseñanza de las cónicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 26. 1177-1183.
- Flores, A. H.. Gómez, A. y Chávez, G. X. (2015). Using Ti-Nspire in a Modelling Teacher's Training Course. *The international Journal For Technology in Mathematics Education*. Vol. 2, núm. 2, 79-84.
- Vigotsky, L. S., (1978). *Mind in Society, The development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.