

## PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL AL ESTUDIAR FUNCIONES. TAREAS Y SITUACIONES PARA FAVORECER SU DESARROLLO

**Silvia Vrancken, María Luciana Giampieri, Adriana Engler, Daniela Müller**

Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral (Argentina)

svrancke@fca.unl.edu.ar, mluciana\_giampieri@hotmail.com, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

**Palabras clave:** pensamiento variacional, funciones, enseñanza, aprendizaje

**Key words:** variational thinking, functions, teaching, learning

---

**RESUMEN:** El estudio de las funciones se relaciona con la modelación de fenómenos de cambio. Considerando que un acercamiento variacional a las funciones permite ofrecer a los estudiantes un contexto que favorece la construcción de conocimiento significativo referido a esta temática, se decidió iniciar su estudio proponiendo actividades que requieren la representación e interpretación de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

Se presentan en este trabajo algunas de las actividades planteadas y se analiza de qué manera estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería Agronómica son capaces de utilizar y generar distintas estrategias y argumentos, favoreciendo el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

**ABSTRACT:** The study of functions is related to the modeling of change phenomena. The variational approach to the functions can offer students a context that promotes the construction of significant knowledge. According to this, we decided to start this study proposing activities that require the representation and interpretation of situations of everyday life and science.

In this paper we present some activities and analyze how freshmen Argentine of Agronomic Engineering are able to use and generate different strategies and arguments favoring the development of their thought and variational language.

---

## ■ INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos se enfatiza la importancia del estudio de las funciones desde los primeros cursos de la escuela, prestando especial atención a su valor para la resolución de problemas, tanto de la matemática como de otras ciencias.

Sin embargo, la experiencia docente y el resultado de distintas investigaciones (Pérez, 2011; Zuñiga, 2009) muestran que los estudiantes que ingresan a la universidad presentan limitaciones para una comprensión significativa de las funciones. La enseñanza se sigue haciendo generalmente de una manera tradicional, a través de su caracterización a partir de una tabla de valores, la representación gráfica y la definición algebraica. Si bien se trabajan problemas, los mismos se presentan como aplicación de los conocimientos adquiridos y no se enfrenta a los estudiantes con el proceso de modelación, especialmente de situaciones o eventos dinámicos, que requieran la interpretación de aspectos relacionados a la variación.

En general, la educación matemática no proporciona a los estudiantes las herramientas y argumentos que permiten dar respuesta a situaciones que exigen la utilización e interpretación de las nociones matemáticas o su aplicación a situaciones de la vida cotidiana o las ciencias, incluso a niveles universitarios. Al respecto, Cantoral, Montiel y Reyes (2014) subrayan la importancia de las interacciones sociales, ya reconocida desde hace tiempo por distintas corrientes investigadoras, como medio que permite construir significados. Manifiestan a su vez que esto no es suficiente para lograr la construcción de conocimiento matemático, señalando la necesidad de poner al estudiante en verdadera actividad matemática, lo que ellos llaman, poner en uso el conocimiento matemático. Según los autores, esto significa que la escuela (o la universidad) debe proveer a los estudiantes de conocimientos funcionales, o sea "...herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea..." (p. 22).

Al iniciar el estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica es posible encontrar numerosas aplicaciones relacionadas a las áreas de interés de los estudiantes. El crecimiento de una célula o una planta, la relación entre el rendimiento de los cultivos y los nutrientes, la interacción entre un depredador y su presa, son algunos ejemplos de fenómenos de variación y cambio que se presentan en la naturaleza y en las ciencias. La implementación en el aula de situaciones relacionadas a estos fenómenos, que exijan la construcción de conocimiento basado en un análisis variacional, permitirá poner a los estudiantes en actividad matemática y facilitará que usen sus conocimientos previos para dar nuevos significados al concepto de función y fortalecer su comprensión.

En este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos al investigar cómo un acercamiento variacional a las funciones permite ofrecer a estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería Agronómica un contexto que favorece la construcción de conocimiento, el desarrollo de su pensamiento variacional y, por ende, de su pensamiento matemático en general.

## ■ ELEMENTOS TEÓRICOS

El aprendizaje y manejo de las funciones como modelos de situaciones de cambio está directamente relacionado al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Se trata de propiciar una forma de pensamiento favoreciendo el estudio sistemático de la variación y el cambio en contextos de la vida cotidiana, de las ciencias y de la matemática misma.

Cabrera (2009) expresa que el pensamiento y lenguaje variacional se caracteriza por “proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, las cuales se trabajan y hacen evolucionar a través de situaciones problemas” (p. 55), centrándose en “la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios” (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1196).

El entendimiento de los procesos de variación involucrados en las situaciones variacionales se manifiestan a través de argumentos, a los que Caballero y Cantoral (2013) llaman *argumentos variacionales*, que consisten en explicaciones, técnicas o maniobras que de alguna manera muestran el reconocimiento cualitativo y cuantitativo del cambio. En una situación variacional intervienen distintas actividades, acciones y ejecuciones, que son similares en cuanto a sus objetivos y los contextos en los que se desarrollan. Es lo que los autores denominan tareas variacionales. Las mismas se caracterizan por el empleo de una o más estrategias variacionales en un contexto numérico, gráfico o analítico, lo cual permite organizar el estudio de la variación en acciones y objetivos más específicos.

Las distintas representaciones del concepto de función cobran especial importancia para su comprensión desde una perspectiva variacional. Posada y Obando (2006) expresan:

El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación-gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales – para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p. 16)

Teniendo en cuenta estos aportes se decidió diseñar e implementar en el aula actividades que permitan introducir nociones relacionadas a las funciones en situaciones de variación y cambio. Se presentan algunos ejemplos y se analiza de qué manera las tareas propuestas pueden favorecer la utilización y la generación de estrategias y argumentos variacionales.

### ■ SITUACIONES VARIACIONALES PARA INTRODUCIR FUNCIONES. ALGUNOS EJEMPLOS

Los contenidos involucrados son: definición de función, dominio y conjunto imagen, análisis de algunos rasgos característicos de las funciones como crecimiento, ceros, valores extremos, entre otros. Estos contenidos son abordados durante la educación secundaria (jóvenes de 12 a 15 años) y además son revisados en un curso de articulación entre escuela media superior y universidad que los estudiantes deben aprobar para poder cursar matemática.

Por eso se decidió iniciar su estudio proponiendo actividades en las que, para resolverlas, puedan recurrir a sus conocimientos previos y a su intuición, pero que a su vez susciten en ellos la necesidad de generar y utilizar distintas estrategias y argumentos variacionales.

Para el diseño se tuvieron en cuenta los siguientes objetivos:

- Analizar cualitativamente situaciones de cambio y variación.

- Interpretar relaciones funcionales en situaciones de las ciencias naturales o sociales relacionadas a la carrera.
- Representar, identificar, analizar y describir el comportamiento variacional de distintas funciones definidas a través de gráficas cartesianas.

Las actividades requieren la representación o interpretación de fenómenos de variación y exigen la coordinación entre los sistemas de representación verbal y gráfico. Se trata de evitar las representaciones simbólicas y analíticas, de manera de no generar dificultades propias del lenguaje y simbología matemática.

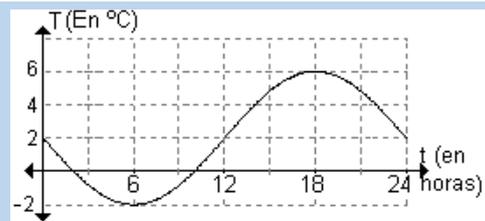
Con respecto a la metodología de trabajo en el aula, se pidió a todos los alumnos presentes en una clase habitual que resolvieran las actividades entre dos. De esta manera se buscó favorecer la interacción y la confrontación con diferentes formas de razonar o proceder. Finalizada esta etapa se realizó un debate grupal. Se leyeron algunas resoluciones, se corrigieron y se completaron las distintas respuestas, resaltando los aspectos variacionales. Esta puesta en común, con los logros y dificultades observadas, fue utilizada en una instancia posterior para el desarrollo de los contenidos.

Se presentan algunas de las actividades y se analizan las producciones de los estudiantes (sobre un total de 66 trabajos) teniendo en cuenta los procedimientos, estrategias y argumentos que utilizan y desarrollan los estudiantes al intentar resolverlas.

Se señalan también las principales dificultades encontradas. Las mismas se tienen en cuenta tanto en el debate con los alumnos como en la planificación de las clases subsiguientes.

En la primera actividad se plantean diversos aspectos variacionales que se deducen a partir de la observación de la representación gráfica de una situación de cambio.

**Actividad.** Analice la gráfica de la función que muestra la variación de temperatura en un día en cierta ciudad, empezando desde las 0 horas, y responda:



- ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación planteada?
- ¿Cuál es el intervalo de variación de  $t$ ? ¿Cuál es el intervalo de variación de  $T$ ?
- ¿En qué intervalo o intervalos de tiempo la temperatura está bajando?
- ¿En qué intervalo o intervalos de tiempo la temperatura está creciendo?
- ¿A qué hora del día la temperatura alcanza su valor máximo?
- ¿A qué hora del día la temperatura es mínima?
- ¿Para qué valores de  $t$ , resulta  $T > 0$ ?
- ¿Para qué valores de  $t$ , resulta  $T = 0$ ?
- ¿Para qué valores de  $t$ , resulta  $T < 0$ ?
- Determine  $T(12)$  e interprete su significado en la situación planteada.

Teniendo en cuenta la caracterización realizada por Caballero y Cantoral (2013), la tarea variacional involucrada es el análisis gráfico con la variación como punto de referencia. A partir de la interpretación de las gráficas así como de sus elementos se realizan acciones en torno al análisis de variaciones buscando “patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos...” (p. 1201).

En los dos primeros incisos se pregunta por las variables intervinientes y por el intervalo de variación de cada una de ellas. La identificación de las variables involucradas en un fenómeno o proceso implica centrar la atención en las cantidades que cambian y en las que permanecen constantes, así como realizar comparaciones entre las cantidades cambiantes. Al solicitar la determinación del intervalo de variación de cada variable se obliga a los estudiantes a pensar primero en el cambio de cada una de las variables involucradas en la situación para luego intentar coordinar los cambios de ambas variables, lo cual es fundamental para la comprensión del concepto de función.

Al analizar las producciones de los estudiantes, se observó que no se presentaron demasiadas dificultades con respecto a la determinación de las variables. Si bien muchos respondieron al inciso a) de manera simple “temperatura y tiempo”, casi el 25% (16 trabajos) hizo alusión a la relación de dependencia. En cuanto a los intervalos de variación, la mayoría (90%) utilizó la notación de intervalos para dar la respuesta, advirtiendo que en 24 de estos trabajos, los estudiantes no incluyeron los extremos de los intervalos. En la Figura 1 se presenta una de las respuestas.

**Figura 1.**

(3-) a- Las variables son: la temperatura en función del tiempo. Donde la temperatura corresponde a la variable dependiente "y" y el tiempo a la variable independiente "x".  
b- El intervalo de variación de tiempo es desde 0hs hasta 24hs. El intervalo de variación de temperatura es desde  $-2^{\circ}\text{C}$  hasta  $6^{\circ}\text{C}$ .

Los restantes incisos de esta actividad tienen como objetivo principal analizar la forma en que se dan los cambios. El conocimiento involucrado se relaciona a rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones: crecimiento, extremos, región donde la función es positiva, negativa o nula. Su respuesta no es trivial ya que exige la coordinación del valor de una variable con el valor de la otra o con los cambios o la dirección de los cambios de la otra.

Los estudiantes respondieron todos los incisos (excepto el último que no fue resuelto en siete trabajos) sin presentar demasiadas dificultades (el porcentaje de respuestas correctas fue en promedio del 90%). Lo más importante para resaltar son los distintos aspectos relacionados al estudio de las funciones como relaciones de variación y cambio que la resolución de esta actividad permitió considerar.

El análisis del estado de la función en distintos puntos y en distintos intervalos, permite establecer diferencias entre esos estados y argumentar sobre el comportamiento de la función. Esto implica,

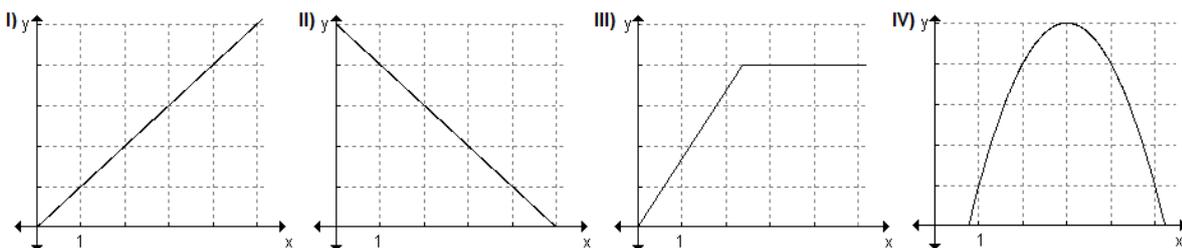
concordando con Caballero y Cantoral (2013), la utilización de dos estrategias relacionadas entre sí, la comparación y la seriación. Ambas se asocian a la acción de establecer diferencias entre dos o más estados, lo que permite determinar si hubo un cambio y analizar la variación. El objetivo es “encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables” (p. 1200).

En trabajos como el de la Figura 2 se observa cómo, más allá de cometer algunos errores, los estudiantes analizan cómo las variables se comportan en distintos valores, cambian en distintos intervalos y cómo se relacionan entre ellas.

**Figura 2.**

- c) los intervalos donde la temp. desciende son  $(0, 6)$  y  $(18, 24)$ .
- d) el intervalo en que la temp. asciende es  $(6, 18)$
- e) la temp. alcanza su valor máximo a las 18 hs.
- f) la temp. alcanza su valor mínimo a las 6 hs.
- g)  $T$  toma valores positivos cuando  $t$  toma los intervalos  $(0, 2)$  y  $(10, 24)$
- h)  $T$  resulta 0 cuando  $t$  toma los valores 2 y 10.
- i)  $T$  resulta menor a 0 cuando  $t$  toma el intervalo  $(2, 10)$ .
- j)  $T(12) = 2$ , significa que a las 12hs hay una temperatura de  $2^{\circ}\text{C}$ .

**Actividad.** José planea estudiar el efecto de cultivo de dalias en diferentes macetas. En las gráficas se muestran resultados posibles de su experimento representando la altura de las plantas según el diámetro de las macetas.



a) ¿Qué variable se representa en cada uno de los ejes?

b) ¿Qué gráfica describe mejor cada uno de los siguientes enunciados?

- Al aumentar el diámetro de la maceta, la altura de la planta disminuye.
- Al aumentar el diámetro de la maceta, aumenta la altura de la planta hasta un cierto tamaño de la maceta. Con macetas más grandes, la altura de la planta permanece igual.

Esta actividad, con la que se pretende continuar el análisis variacional de representaciones gráficas, es una adaptación de una situación propuesta en Zuñiga (2009). Se coincide con el autor en que, presentar a los alumnos problemas que los involucren en tareas de interpretación, de visualización y articulación de distintas representaciones del concepto de función, favorece la construcción de este concepto.

La identificación de la gráfica que corresponde a cada uno de los enunciados, requiere relacionar la idea de cómo cambian las variables con la variación de la función. Para poder determinar cómo cambia una variable cuando cambia la otra, es necesario fijar la atención en el comportamiento global de la función, en todo su dominio y por intervalos.

Al analizar las respuestas, se observó en 52 trabajos que los alumnos eligieron la opción correcta para los dos enunciados y en 7 trabajos más que eligieron la opción correcta sólo para el segundo inciso. Al solicitarles que expliquen su elección, muchos respondieron haciendo referencia a la relación existente entre las variables. Otros justificaron teniendo en cuenta la forma del crecimiento. Por ejemplo, para el primer enunciado escribieron:

- *Al aumentar el diámetro de la maceta la altura de la planta disminuye, es una función decreciente.*
- *Ya que corresponde a una función decreciente y en el problema al aumentar el diámetro de la maceta "x" disminuye el valor de "y" es decir la altura de las plantas.*
- *A medida que el tamaño de la maceta aumenta disminuye la altura de la planta. Decrecimiento constante.*

Algunas explicaciones sobre la elección para el segundo enunciado fueron:

- *Al aumentar el diámetro de maceta aumenta la planta (función creciente) hasta una cierta altura que se mantiene sin importar que la maceta sea cada vez mayor (función constante).*
- *Ya que aumenta y en un momento deja de aumentar y se mantiene igual, es decir constante.*
- *A medida que el tamaño de la maceta aumenta a la vez la altura de la planta. Crecimiento constante. Luego no hay crecimiento.*

Las respuestas permiten ver que los alumnos son capaces de realizar un análisis cualitativo de un fenómeno de cambio presentado gráficamente, visualizando y expresando verbalmente la relación entre las dos variables que cambian de manera simultánea.

La resolución de esta actividad lleva también a comparar las formas de variación del crecimiento en los distintos modelos. A partir de las respuestas de los estudiantes es posible ampliar el análisis dibujando en las gráficas los segmentos correspondientes a los incrementos de los diámetros y las alturas. Su interpretación permite trabajar las características de algunas funciones en particular.

**Actividad.** Construya una gráfica que describa la situación planteada:

Ana caminó desde el edificio central de la facultad hasta la biblioteca que se encuentra a una distancia de 200 metros. Al llegar a la biblioteca demoró 6 minutos para retirar un libro que necesitaba. En el camino se encontró con su amigo Juan con el que se detuvo a charlar 4 minutos, por lo que en el regreso se apuró para recuperar tiempo y no llegar tarde a su clase. En total Ana demoró 15 minutos.

La tarea variacional involucrada en esta actividad es la graficación. Se presenta un fenómeno de cambio en un contexto físico relacionado al entorno cotidiano de los alumnos. La descripción verbal de la situación proporciona una descripción cualitativa de la situación y se pretende que los estudiantes expresen gráficamente la dependencia entre las variables.

Esta fue la actividad en la que más problemas se detectaron. Sólo nueve parejas construyeron una gráfica correcta (14%), mientras que 50 presentaron una gráfica incorrecta y 7 no respondieron. Estos resultados coinciden con el reporte de Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009), quienes manifiestan las dificultades de los alumnos para establecer relaciones entre las descripciones verbales y las representaciones gráficas.

Para el análisis de las respuestas desde una perspectiva variacional se tuvo en cuenta los aspectos relativos a *qué cambia*, identificando las variables que se representaron y la relación entre ellas. Se destaca que en siete trabajos (más del 10%) los estudiantes consideraron el tiempo como función de la distancia.

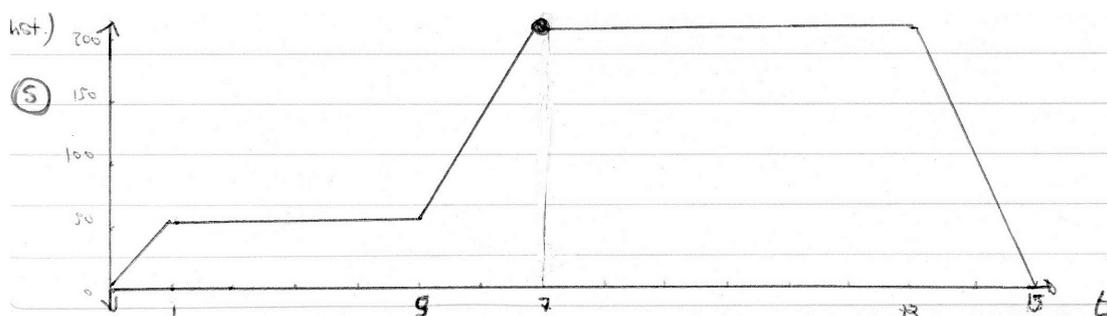
El otro aspecto que se tuvo en cuenta fue el relacionado a *cómo cambia* la situación que se quiere representar. En primer lugar, el cambio de posición con respecto al tiempo puede ser descrito a través de rectas, considerando que el desplazamiento fue con velocidad constante, o bien puede representarse con líneas curvas o combinando rectas o curvas, teniendo en cuenta que, en el camino Ana tuvo que disminuir su velocidad cuando se encuentra con su amigo o al llegar a la biblioteca, o bien acelerar al continuar con su recorrido. Todos los estudiantes dibujaron funciones compuestas por tramos constantes.

En la etapa posterior a la resolución de las actividades, en el debate grupal con la clase completa, los alumnos manifestaron que no tuvieron en cuenta en su representación la velocidad con que se realizó el desplazamiento. En este sentido, Dolores *et al* (2009) señalan la fuerte tendencia a construir gráficas que corresponden a funciones lineales en este tipo de situación. Esto muestra la dificultad de los estudiantes para lograr una gráfica que describa los matices de la variación de la velocidad en distintos intervalos de tiempo.

Sí fueron capaces de reflejar en la gráfica que Ana se apura para volver a su clase, ya que dibujaron el último tramo decreciente de la gráfica con mayor inclinación.

En la figura siguiente (Figura 3) se muestra una de las gráficas presentadas.

**Figura 3.**



En relación a las gráficas incorrectas se observó en 10 trabajos que construyeron el último tramo, o sea el que debería corresponder al regreso al aula, creciente. Por lo observado en la clase, se determinó que consideraron la distancia recorrida, en lugar de la distancia desde la biblioteca.

En casi todos los otros trabajos los errores se deben a que no dibujan uno o más de los tramos que describen la situación planteada.

## ■ REFLEXIONES

Los resultados muestran que el planteo de situaciones variacionales relacionadas al entorno cotidiano y a las áreas de interés de los estudiantes, las interacciones necesarias para resolver entre dos dichas situaciones, así como el debate con la clase completa y el docente, permitieron poner en uso conocimiento matemático referido a la noción de función y algunas de sus propiedades y características.

El análisis de las producciones y lo percibido en las clases muestran que los estudiantes han sido capaces de poner su atención en los procesos de cambio y realizar distintas tareas, utilizar estrategias y construir argumentos variacionales.

Por ejemplo, han identificado las variables en distintas situaciones y determinado los intervalos de variación correspondientes. En relación a las representaciones gráficas, aunque aparecieron muchas dificultades para su construcción, fueron capaces de interpretar varios aspectos, como analizar la forma en que cambian las variables, coordinar los cambios de una variable con los cambios de la otra e identificar diferentes formas de variación.

Los significados que los estudiantes lograron establecer de las funciones y sus características, el tratamiento y conversión entre distintas representaciones, la utilización de formas de comunicación, ya sea escrita u oral, implican la construcción de conocimiento matemático significativo relacionado a este concepto y constituyen un aporte importante al desarrollo de su pensamiento variacional y, en general, de su pensamiento matemático.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, 11(24), 17-26.
- Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, 41-57.

- Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de Precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.
- Posada, F. y Obando, G. (ed.) (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2*. Medellín: Gobernación de Antioquia.
- Zuñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de Cálculo I*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Tegucigalpa, República de Honduras.