

UN SISTEMA DE AUDIO ASOCIADO AL CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM, CICATA-IPN (México)

coropeza96@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Palabras clave: Combinación e independencia lineal, modelación matemática

Key words: Combination and linear independence, mathematical modeling

RESUMEN: A los estudiantes de las escuelas de ingeniería les resulta motivante encontrar aplicaciones de conceptos teóricos en diversos diseños implementados. En este reporte mostramos la articulación del concepto de combinación lineal con el diseño de un sistema de audio desde la perspectiva de la Modelación en Matemáticas entendida ésta como un proceso involucrado en la obtención de un modelo. Nuestra propuesta de estudio es de nivel licenciatura, en ella reportamos los cálculos necesarios para el desarrollo del sistema de audio, se utiliza software matemático para verificar resultados, se analizan las representaciones geométricas planteadas y se hace un comparativo de resultados.

ABSTRACT: Students of engineering schools are motivating them to find applications of theoretical concepts implemented in various designs. In this report we show the articulation of the concept of linear combination with the design of an audio system from the perspective of modeling in mathematics understood as a process involved in obtaining a model. Our proposal is for undergraduate study in her report the calculations necessary for the development of audio system, mathematical software is used to verify results, the geometric representations raised and a comparison of results is discussed.

■ ANTECEDENTES

Una situación que frecuentemente causa inquietud en la formación de ingenieros en nuestro sistema educativo nacional es el hecho de que los estudiantes regularmente argumentan no encontrar aplicación de los conceptos estudiados en la mayoría de los cursos de matemáticas del denominado tronco básico: álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y álgebra lineal entre otras. Atendiendo a esta preocupación nos dimos a la tarea de realizar un estudio a nivel licenciatura que articula diversos aspectos y que puede ser utilizado como referente para estudiantes de nuevo ingreso y de esta manera intentamos contribuir con su formación.

El propósito del estudio es mostrar la importancia que tiene integrar varios conceptos analizados en diversas asignaturas incluidas en los planes y programas de estudio de las ingenierías que ofrece nuestra facultad y que de forma integral pueden ser utilizados para la realización de un modelo. De manera implícita, mostrar la manera de cómo concibe la Modelación en Matemática Educativa nuestro grupo de trabajo. Esta propuesta de ninguna manera busca sustituir los métodos convencionales de enseñanza, más bien intenta considerarlo como un proceso que se lleve a cabo de manera simultánea o paralela con el fin de acelerar, mejorar y depurar el proceso de aprendizaje en los alumnos de ingeniería de la FES Cuautitlán UNAM, por otra parte promover la gran utilidad que tienen los conceptos que en la asignatura de álgebra lineal se estudian, según las ideas expuestas en Poole (2011), Lay (2007), Kolman y Hill (2006), y Del Valle (2011); contrario a lo que algunos de los alumnos opinan mediante la aplicación de conceptos en forma pragmática, caso concreto el diseño de un sistema de audio.

Convencionalmente durante el proceso de estudio de la asignatura antes referida, se incluye de manera complementaria el uso de software matemático como instrumento verificador de resultados, cabe aclarar que nosotros proponemos MAPLE. Sin embargo, los estudiantes son libres de utilizar cualquier otro software que hayan estudiado en otras asignaturas o cursos especializados. Primero los estudiantes realizan los cálculos de la manera tradicional con lápiz y papel y luego verifican los resultados en alguna TIC como la computadora o calculadora científica y de ésta manera se fomenta una independencia del alumno con respecto al profesor (es decir, los estudiantes pueden verificar los resultados de manera inmediata y no hasta que el profesor les proporcione las respectivas respuestas). El uso de las representaciones geométricas en algunos conceptos como el de combinación lineal y el de dependencia e independencia lineal han sido un elemento complementario para la comprensión y asimilación de estos y que hemos venido instrumentando a medida que hemos realizado y analizado las exploraciones correspondientes. Finalmente la síntesis del trabajo que en esta ocasión presentamos pretende ejemplificar el uso de la modelación matemática de un sistema de audio y la relación que guarda con conceptos de álgebra lineal, asignatura que convencionalmente es impartida en los primeros cursos de ingeniería. El diseño pretende crear un lazo entre las matemáticas, la aplicación y la utilidad mediante la implementación del sistema que hemos modelado sobre una tarjeta de circuito impreso (PCB), para ello necesitamos primeramente realizar las mediciones de las cantidades físicas correspondientes y verificar que funcione correctamente sobre una placa de pruebas, de lo contrario se debe localizar la falla y enmendarla. El diseño de la PCB se llevó a cabo en un software de automatización electrónico, de los varios que existen en el mercado elegimos OrCAD ya que según datos del fabricante es utilizado tanto por ingenieros electrónicos en sus proyectos

individuales como en el sector industrial, desde pequeñas hasta grandes empresas, incluso mencionan que es un software excelente para estudiantes de otras especialidades.

■ MARCO TEÓRICO

En nuestro trabajo, apoyados en una teoría como la modelación matemática pretendemos darle un significado a un sistema de audio permitiendo enriquecer la comprensión del concepto de combinación lineal de vectores ya que se incluyen diversas representaciones de los diferentes conceptos involucrados para el desarrollo de dicho proyecto. La teoría de la modelación estudia a los modelos como estructuras básicas en la cognición, así como el conocimiento científico. Mantiene una clara distinción entre los modelos mentales con que la gente piensa y modelos conceptuales que se comparten abiertamente (Hestenes, 2010).

De ahí que para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunado abstracciones y formalizaciones, interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

Mientras, Hestenes (2010) advierte que el término modelo se utiliza de manera informal; no obstante, para hacer distinciones teóricas se necesitan definiciones precisas. Este autor, plantea una definición general:

Un modelo es una representación de la estructura en un sistema dado. Un sistema es un conjunto de objetos relacionados, que puede ser real o imaginaria, física o mental, simple o compuesto. La estructura de un sistema es un conjunto de relaciones entre sus objetos. El sistema en sí se llama el referente del modelo (p.17).

La modelación permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos, es decir, el profesor tendrá en esta actividad muchas opciones que le puedan ayudar a relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar y otorgar una mayor importancia a las matemáticas escolares. La modelación también contribuye a que los alumnos perciban las matemáticas como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problema del mundo real, lo más cercanas posibles a la sensibilidad del estudiante (Castro y Castro, 2000; Romero y Castro, 2008).

Como las matemáticas no solo contribuyen extraordinariamente al ejercicio intelectual, sino también son el lenguaje de la ciencia, en las dos últimas décadas en diversos países, viene creciendo un movimiento en pro de esta metodología en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Preocupaciones sobre qué, cómo, cuánto y para qué enseñar matemáticas han contribuido al fortalecimiento de esas investigaciones en el área de la educación matemática. Para implementar la modelación matemática en la enseñanza, el profesor actúa en dos tipos de abordajes: el primero, le permite desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las diversas áreas del conocimiento y el segundo orienta a sus alumnos para que hagan un trabajo de modelaje. La modelación puede ser implementada en cualquier nivel de escolaridad: desde el ciclo primario hasta la licenciatura. El tema (o situación-problema) es

único para todas las clases y de él se extrae el contenido programático. Se puede utilizar temas diferentes para presentar cada tópico o contenido matemático del programa del año lectivo (bimestre, semestre). Si se opta por tema único para el periodo lectivo, es importante que sea suficiente para poder tratar los contenidos programáticos y que este en sintonía con el interés de los alumnos.

■ DESARROLLO

En esta parte realizamos una descripción de las etapas del diseño, mostramos algunos cálculos necesarios para el desarrollo del sistema de audio y la importancia de utilizar el software matemático para verificar los resultados ya que de esta manera se pueden minimizar los errores. El proyecto inicia con un estudio centrado en aspectos de corte electrónico (situación permisible para estudiantes de los últimos semestres de ingeniería), posteriormente se logra la identificación de que dicho estudio gira alrededor de la soluciones de un conjunto de sistemas de ecuaciones con los parámetros voltaje y corriente, que a su vez pueden ser asociados por su planteamiento al concepto de Combinación Lineal e Independencia Lineal, conceptos estudiados en la asignatura de Álgebra Lineal y que es posible asignarles una representación geométrica (Oropeza y Lezama, 2007). Para asegurarnos de los resultados analíticos en la etapa final se instrumenta el uso de software especializado que indica la coincidencia o no de los resultados finales. La razón por la cual se diseña un amplificador de audio en la configuración de emisor común es porque así amplificamos de la señal de audio, voltaje y corriente a su vez, considerada como una de las configuraciones más sencillas de los amplificadores. Esta aplicación toma como base la integración de un conjunto de conceptos que pueden incorporarse en la modelación de sistemas con diversas aplicaciones y que buscan tratar de dar una respuesta a la pregunta *¿para qué me sirve esta materia?*

Síntesis técnica.

De acuerdo a lo anterior aplicaremos el concepto de Combinación e Independencia Lineal para obtener los siguientes parámetros (cabe mencionar que algunos de los valores que hemos elegido en el diseño se han encontrado a base de pruebas en el laboratorio):

- Punto de operación del amplificador de audio transistorizado de la figura 1.
- Realizar algunas posibles representaciones geométrico–espaciales utilizando software matemático.
- Realizar la simulación del circuito en software de automatización electrónico.
- Implementar el circuito con el material que a continuación se proporciona y hacer las mediciones correspondientes con un multímetro adecuado en las escalas adecuadas para recrear el concepto de Combinación Lineal real.
- Crear un cuadro comparativo que incluya los cálculos teóricos, simulados y reales, y verificar que haya sido de utilidad los conceptos mencionados.

Figura 1. Esquemático del amplificador

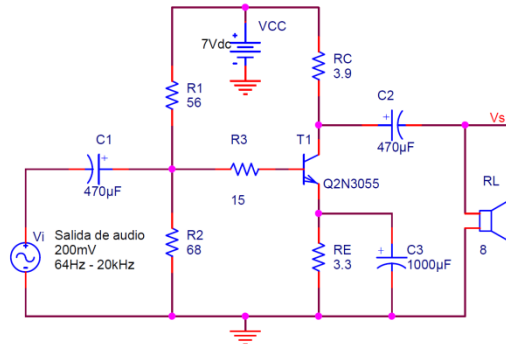
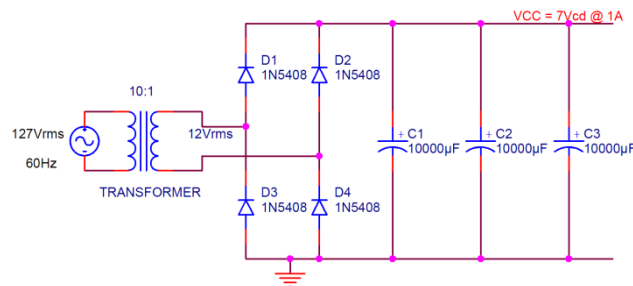
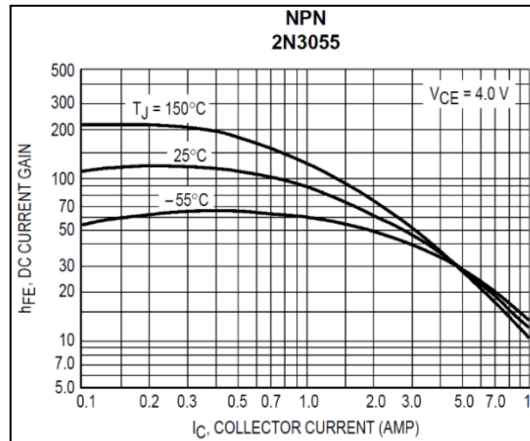


Figura 2. Esquemático del rectificador monofásico de onda completa tipo puente, es decir, de la fuente de poder V_{CC}



Con base a la hoja técnica del 2N3055 de Motorola®, refiriéndonos a la gráfica de ganancia de corriente directa versus corriente de colector en 25°C y sabiendo que el circuito consume cerca de 1A, tomaremos una ganancia estática (o de corriente directa) h_{FE} (β) de 100.

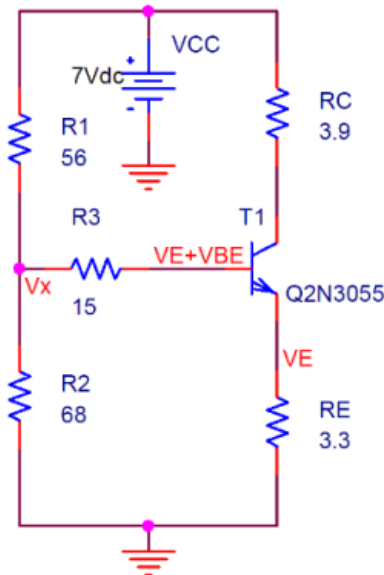
Figura 3. Gráfica de la ganancia de corriente h_{FE} versus corriente de colector del transistor 2N3055 de Motorola®



En la gráfica vemos que dicho valor debería ser 90 para corriente de colector de 1A, voltaje colector – emisor de 4V y a 25°C, pero el transistor comenzará a disipar cierta potencia y su temperatura ascenderá un poco, por lo que por este motivo hemos redondeado $h_{FE} (\beta) = 100$. Sabiendo que se trata de un transistor de silicio, tomaremos como 0.7V la caída de voltaje base – emisor.

De acuerdo con la Ley de Corrientes de Kirchhoff aplicada al supernodo base – emisor, donde V_x es el nodo donde se unen las resistencias R_1 , R_2 y R_3 , o bien el nodo donde fluyen las corrientes I_1 , I_2 e I_B , las cuales circulan a través de R_1 , R_2 y R_3 (Figura 4), respectivamente tenemos:

Figura 4. Esquemático del amplificador para un análisis de corriente directa, aquí aplicaremos la Ley de Corrientes de Kirchhoff o Ley de Nodos.



Del supernodo

$$\begin{aligned} & V_E + V_{BE} : \\ & \frac{V_E}{R_E} + \frac{(V_E + V_{BE}) - V_x}{R_3} (1 + \beta) = 0 \\ & \frac{1}{R_E} V_E + \frac{1 + \beta}{R_3} V_E + \frac{1 + \beta}{R_3} V_{BE} - \frac{1 + \beta}{R_3} V_x = 0 \\ & -\frac{1 + \beta}{R_3} V_x + \left(\frac{1}{R_E} + \frac{1 + \beta}{R_3} \right) V_E = -\frac{1 + \beta}{R_3} V_{BE} \quad (1) \end{aligned}$$

Del nodo V_x :

$$\begin{aligned} & \frac{V_x - V_{CC}}{R_1} + \frac{V_x - (V_E + V_{BE})}{R_3} + \frac{V_x}{R_2} = 0 \\ & \frac{V_x}{R_1} - \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_x}{R_3} - \frac{V_E}{R_3} - \frac{V_{BE}}{R_3} + \frac{V_x}{R_2} = 0 \\ & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_x - \frac{1}{R_3} V_E = \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_{BE}}{R_3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_x = \begin{bmatrix} -\frac{1+\beta}{R_3} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} S \quad \mathbf{V}_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_E} + \frac{1+\beta}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} S \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1+\beta}{R_3} V_{BE} \\ \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_{BE}}{R_3} \end{bmatrix} A$$

Las ecuaciones (1) y (2) describen parte del funcionamiento del circuito, y con base en ellas tenemos los siguientes vectores, mismos que se han escrito con mayúsculas, sin cursivas y en negritas, ya que según la bibliografía así se denota a los vectores. Observe sus unidades.

Ahora bien, de acuerdo con el concepto de Combinación Lineal existen dos escalares v_x y v_e , tales que satisfacen la siguiente expresión.

$$v_x \mathbf{V}_x + v_e \mathbf{V}_E = \mathbf{V} \quad (v_x[V])(\mathbf{V}_x[S]) + (v_e[V])(\mathbf{V}_E[S]) = \mathbf{V}[A]$$

Estos escalares son los valores de voltaje que hay en el nodo V_x o de la resistencia R_2 y en el emisor del transistor o de la resistencia R_E respectivamente, los cuales podemos encontrar reduciendo por renglones en forma escalonada una matriz aumentada de 2×3 formada por los vectores anteriormente mencionados mediante algún algoritmo algebraico como puede ser la Eliminación de Gauss – Jordan, Gauss – Seidel, descomposición LU, etc., como se puede observar. Por lo tanto el voltaje del nodo V_x o de la resistencia R_2 y el voltaje de emisor V_E o de la resistencia R_E , es decir, de los escalares v_x y v_e , son:

$$V_x = V_{R_2} = v_x = 3.584V$$

$$V_E = V_{R_E} = v_e = 2.760V$$

Cabe mencionar que los vectores \mathbf{V}_x y \mathbf{V}_E no son voltajes, estos vectores tienen unidades de conductancia (siemens) que, multiplicados por los escalares v_x y v_e que son voltajes (con voltios como unidades), nos dan como resultado el vector \mathbf{V} , en amperios, esto de acuerdo a la Ley de Ohm. Una vez obtenidos estos escalares, podemos proceder al calcular el punto de operación del transistor como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Valores calculados

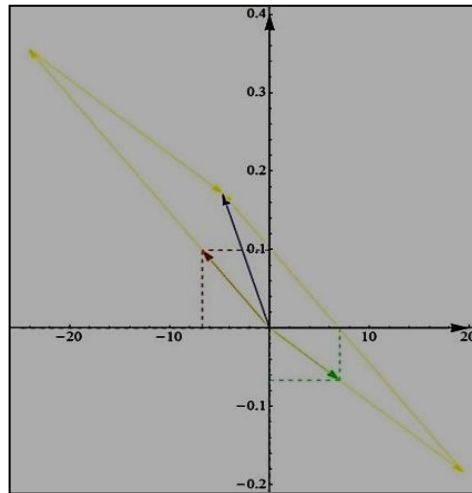
Resistencias	Corrientes	Voltajes
$R_1 = 56\Omega$ $R_2 = 68\Omega$ $R_3 = 15\Omega$ $R_C = 3.9\Omega$ $R_E = 3.3\Omega$	$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{2.760V}{3.3\Omega} = 836.4mA$	$V_{CC} = 7V$ $V_{BE} = 0.7V$ $V_x = V_{R_2} = 3.584V$ $V_E = V_{R_E} = 2.760V$
	$I_C = \frac{I_E}{1 + \frac{1}{\beta}} = \frac{836.4mA}{1 + \frac{1}{100}} = 828.1mA$	$V_{R_1} = V_{CC} - V_{R_2} = 7V - 3.584V = 3.416V$
	$I_B = \frac{I_C}{\beta} = I_{R_3} = \frac{828.1mA}{100} = 8.28mA$	$V_B = V_E + V_{BE} = 2.760V + 0.7V = 3.460V$
	$I_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{3.416V}{56\Omega} = 61mA$	$V_C = V_{CC} - I_E R_E = 7V - (836.4mA)(3.3\Omega) = 3.230V$
	$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{3.584V}{68\Omega} = 52.71mA$	$V_{CE} = V_C - V_E = 3.229V - 2.760V = 1.010V$
Potencia del transistor		
$P_Q = I_B V_{BE} + I_C V_{CE} = (8.28mA)(0.7V) + (828.1mA)(1.010V) = 842.3mW$		
Ganancia estática o de corriente directa		
$h_{FE} = \beta = 100$		

Observación.

Es necesario aclarar que por cuestión de espacio solo se proporcionan parte de los cálculos realizados, pero que en el proyecto también se realizó una simulación y un modelo con elementos reales.

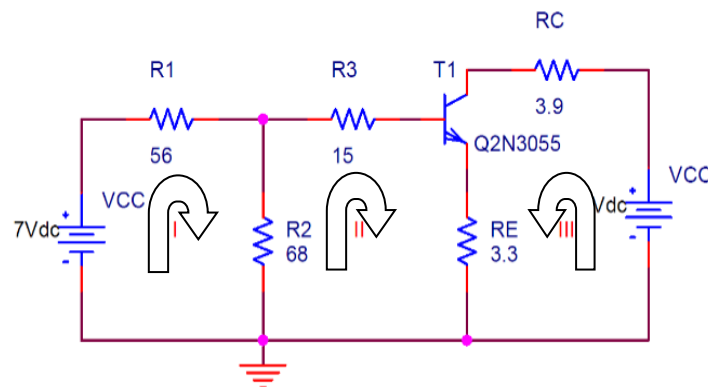
Con estos valores podemos recrear matemáticamente el concepto de Combinación Lineal -en esta ocasión utilizando el software 'Mathematica'- cuyo significado es el siguiente: la flecha roja y verde son los vectores V_x y V_E respectivamente, la flecha azul es el vector V que es la combinación lineal de los anteriores. Existen cuatro vectores amarillos que forman un romboide, dos de ellos son paralelos a V_x , los cuales tienen v_x veces la magnitud de V_x y los otros dos que son paralelos a V_E , los cuales tienen v_e veces la magnitud de V_E . Si los vectores rojo y verde fueran colineales, es decir, que se encontraran dentro de una misma línea recta cual fuese su pendiente, éstos serían vectores Linealmente Dependientes [26], y entonces el sistema de dos ecuaciones que se plantea anteriormente tendría múltiples soluciones reflejando que el sistema que se está analizando contiene datos erróneos. Para demostrar matemáticamente que los vectores V_x y V_E son Linealmente Independientes bastaría con sustituir en (3) el vector V por un vector 0, reducir por renglones en forma escalonada la matriz y encontrar que los valores de las constantes sean 0, o en otras palabras obtener lo siguiente:

Figura 5. Representación geométrica del concepto de Combinación Lineal obtenido de un análisis de corriente continua del circuito amplificador



Por otro lado, también podemos obtener del mismo circuito otra representación del concepto de Combinación Lineal, aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff sobre las mallas I y II.

Figura 6. Esquemático del amplificador para el análisis de corriente directa, presentado de otra manera, aquí aplicaremos la Ley de Voltajes de Kirchhoff o ley de mallas



De la malla I:

$$\begin{aligned}
 -V_{CC} + I_1 R_1 + (I_1 - I_B) R_2 &= 0 \\
 I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_B R_2 &= V_{CC} \\
 (R_1 + R_2) I_1 - \frac{R_2}{\beta} I_C &= V_{CC} \quad (3)
 \end{aligned}$$

De la malla II:

$$\begin{aligned}
 (I_B - I_1) R_2 + I_B R_3 + V_{BE} + I_E R_E &= 0 \\
 I_B R_2 - I_1 R_2 + I_B R_3 + I_E R_E &= -V_{BE} \\
 \frac{R_2}{\beta} I_C - I_1 R_2 + \frac{R_3}{\beta} I_C + (I_C + I_B) R_E &= -V_{BE} \\
 \frac{R_2}{\beta} I_C - I_1 R_2 + \frac{R_3}{\beta} I_C + \left(I_C + \frac{I_C}{\beta} \right) R_E &= -V_{BE} \\
 -R_2 I_1 + \left(\frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E \right) I_C &= -V_{BE} \quad (4)
 \end{aligned}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, tenemos los siguientes vectores. Observe sus unidades.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ -R_2 \end{bmatrix} \Omega \quad \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{\beta} \\ \frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E \end{bmatrix} \Omega \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{CC} \\ -V_{BE} \end{bmatrix} \text{V}$$

Ahora de acuerdo con el concepto de Combinación Lineal [24], existen dos escalares $i1$ e ic , tales que satisfacen la siguiente expresión.

$$i1\mathbf{I}_1 + ic\mathbf{I}_C = \mathbf{V} \quad (i1[A])(\mathbf{I}_1[\Omega]) + (ic[A])(\mathbf{I}_C[\Omega]) = \mathbf{V}[V]$$

Comprender el sentido físico de estos escalares es un poco más complicado, $i1$ representa la corriente que circula a través de la resistencia R_1 , mientras que ic es la corriente que pasa a través del colector del transistor y de R_C , si bien el colector no está en la malla I ni II, la corriente que fluye a través de él se debe dejar en función de la corriente que pasa por la base del mismo transistor (y por R_3) considerando la ganancia estática h_{FE} , de acuerdo al estudio de los transistores en la etapa de polarización [27]. Una vez explicado esto, estos valores o escalares los podemos encontrar reduciendo por renglones en forma escalonada una matriz aumentada de 2×3 formada por los vectores anteriormente mencionados mediante algún algoritmo algebraico como puede ser la Eliminación de Gauss–Jordan, Gauss–Seidel, descomposición LU. Por lo tanto la corriente que pasa por la resistencia R_1 y la que circula por el colector del transistor y por R_C , es decir de los escalares $i1$ e ic son:

$$\left[\begin{array}{cc|c} R_1 + R_2 & -\frac{R_2}{\beta} & V_{CC} \\ -R_2 & \frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E & -V_{BE} \end{array} \right] \quad (6)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 56 + 68 & -\frac{68}{100} & 7 \\ -68 & \frac{68}{100} + \frac{15}{100} + \frac{3.3}{100} + 3.3 & -0.7 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 60.99 \times 10^{-3} \\ 0 & 1 & 828.13 \times 10^{-3} \end{array} \right]$$

$$I_1 = I_{R_1} = i1 = 60.99 \text{mA}$$

$$I_C = I_{R_C} = ic = 828.13 \text{mA}$$

I_1 e I_C son vectores con unidades de resistencia (ohms), los cuales, al multiplicarlos por los escalares $i1$ e ic que representan corrientes (en amperios), nos dan como unidad resultante voltios que es lo que representa el vector \mathbf{V} , de acuerdo con la ley de Ohm. Una vez encontrados estos valores procedemos a calcular el voltaje

colector – emisor, fundamental para conocer la región de operación del transistor.

■ OBSERVACIONES

Al terminar el proyecto pudimos verificar que existen pequeñas diferencias entre los valores calculados, valores simulados y los valores obtenidos con el equipo de medición, esto por la precisión de los elementos utilizados.



■ REGULARIDADES

Todo proceso que involucre como medio de solución un sistema de ecuaciones lineales puede ser planteado como una combinación lineal de las variables por considerar y en consecuencia representado en forma gráfica.

■ CONCLUSIONES

Con la culminación de este proyecto en principio hemos podido integrar un número considerable de conceptos impartidos en diferentes asignaturas para estudiantes de ingeniería de nuestra facultad (que antes ellos los consideraban sin aplicación) y que con la modelación del sistema de audio y su correspondiente vinculación con conceptos de álgebra lineal planteamos una oportunidad de interactuar con nuestros estudiantes, el entorno físico y social para el abordaje de problemas relacionados con su perfil profesional, esperamos sirva de ejemplo para otros estudiantes.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching–Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics* 14(2), 31-35.
- Castro, E. y Castro, E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación.
- Del Valle, J.C.S. (2011). *Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. México: McGraw-Hill.

- Hestenes, D. (2010). Modeling Theory for Math and Science Education. En R. Lesh, C. R. Haines, P. L. Galbraith y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*, 13-41. EUA: Springer.
- Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. México: Pearson Educación.
- Lay, D. C. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson Educación.
- Oropeza, C. y Lezama, J. (2007). Dependencia e Independencia Lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 2 (1), 23-39.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, Una introducción moderna*. México: Cengage Learning.
- Romero, S. y Castro, F. (2008). Modelación matemática en secundaria desde un punto de vista superior. *Modelling in Science Education and Learning*, 1 (2), 11-23.