

## SIGNIFICADO GLOBAL DE UN OBJETO MATEMÁTICO A PARTIR DE LA TRIADA DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS: GLOBAL, INTERMEDIA Y PUNTUAL

### Enrique Mateus Nieves

Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)

jeman124@gmail.com, enrique.mateus@uexternado.edu.co

**Palabras clave:** significado global, configuración epistémica, integración.

**Key words:** global meaning, epistemic configuration, integration.

**RESUMEN:** Uno de los resultados de esta investigación doctoral ha sido comprobar cómo el estudiante puede alcanzar un significado global de un objeto matemático, que le lleve a reconocer el doble valor que tienen las matemáticas: como ciencia y como herramienta. A partir de la aplicación de la triada de configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual del texto, ejecutadas desde el proceso de instrucción que para este caso particular, fue el objeto “integración por partes” Evidenciado que el objeto enseñado –Método de integración por partes (MIP)- no fue solo una regla, un algoritmo más que nada le aporta a su formación superior.

**ABSTRACT:** One result of this doctoral research was to determine how the student gets a global meaning of a mathematical object, leading it to recognize the double value with mathematics can reach: as science and as a tool. From the application of the triad of epistemic configurations: global, intermediate and timely text, executed from the instruction process that for this particular case was the "integration by parts" object shown that the object taught -Method of integration by parts (MIP) - was not only a rule, an algorithm more than anything gives your higher education.

## ■ CONTEXTUALIZACIÓN

De acuerdo a las directrices curriculares de diversas carreras profesionales, (licenciaturas, ingenierías, economía, etc.), el Cálculo diferencial e integral se ha constituido en una de las asignaturas comunes en la formación superior. Lo que indica la importancia de estas disciplinas en la formación profesional de los jóvenes al considerar que la construcción y desarrollo de competencias se da básicamente en el proceso de aprendizaje de los contenidos curriculares contemplando las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal. Crisóstomo (2012) manifiesta que las referidas dimensiones parecen insuficientes para analizar un contenido específico con un nivel satisfactorio de detalles y profundidad. Por ello, propone considerar algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS), que han sido contempladas y adaptadas en esta investigación doctoral, centradas en el objeto matemático “método de integración por partes” (MIP). Se ha considerado desarrollar el análisis de las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica. En este informe me centraré en la triada de configuraciones epistémicas como elementos esenciales durante el proceso de instrucción que permitan vislumbrar si se ha alcanzado un significado global de dicho objeto.

## ■ MARCO TEÓRICO

El marco teórico de esta investigación doctoral se contempló los aportes teóricos planteados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font (2003). El EOS está fundamentado en tres aspectos centrales: Las matemáticas son una actividad humana (fundamento antropológico); Los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera “vital y necesaria” (fundamento ecológico); y, el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento pragmático). La noción central de esta perspectiva es la de situación problemática, a partir de la cual emergen las nociones de “práctica matemática”, “objeto matemático” y “significado de un objeto”. (Godino, Font y Wilhelmi, 2007)

El EOS utiliza la *Teoría de los Significados Sistémicos* [TSS], *La teoría de las funciones semióticas* [TFS]. *La teoría de las configuraciones didácticas* [TCD] que permiten definir una Configuración Epistémica [CE] como una herramienta que puede describir tanto la estructura de textos puntuales como de textos globales de un objeto matemático de estudio. De ahí que las entidades primarias - objetos de estudio- se organizan en entidades más complejas llamadas CE, cuando se refieren a los significados institucionales (Godino, Contreras y Font, 2006) y configuraciones cognitivas si se refieren a los significados personales. Las CE están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las CE nos permiten llegar a la noción de significado global entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal-estructural.

### Significado global del objeto de estudio.

De Ordóñez y Contreras (2010) se destaca que se establecen las configuraciones epistémicas que constituyen el significado global de referencia de esta noción matemática de las cuales, considerando el nivel educativo en que nos encontramos y la normativa, se escogen tres que se utilizan como significado de referencia para esta investigación: Configuración epistémica global, Configuración epistémica intermedia y Configuración epistémica puntual. Dicho significado global

estará constituido por diferentes pares “configuración epistémica/prácticas que posibilita” y que el EOS interpreta como diferentes sentidos del concepto. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. Para el estudio de los distintos significados –detallados en el documento final de la tesis de doctorado de este investigador y que por cuestión de espacio aquí se omiten- se han utilizado diversas fuentes bibliográficas entre las que se destacan los señalamientos en:

En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria. Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005, p.131)

Con estas consideraciones, y teniendo en cuentas los resultados de las investigaciones realizadas por Contreras, Ordóñez, Wilhelmi, y Font, (2010) y en Crisóstomo (2012) que propone desde la perspectiva Ontosemiótica, para el análisis de la integral en los libros de texto de cálculo, desde la sistematización de las distintas configuraciones epistémicas de las nociones matemáticas desarrolladas en el texto y su posible articulación a lo largo de la trayectoria instruccional implantada (Godino, Font y Wilhelmi, 2007) que “la dimensión epistémica de la noción matemática que se pretende desarrollar puede ser sistematizada por medio de las configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual del texto”.

### **Configuraciones epistémicas de referencia**

En esta sección describo los distintos sentidos según las entidades primarias, que nos permitirá una comparación objetiva de las configuraciones asociadas. Estas configuraciones pueden ser descritas según los siguientes elementos de significado tomados de Crisóstomo (2012) para la integral y que han sido adaptados cuando se utiliza exclusivamente el MIP. Crisóstomo (2012, p.188) describe dichas configuraciones de la siguiente manera:

1. Configuración epistémica global (CEG): entendida como la red de objetos institucionales que se ponen en juego en una actividad matemática; descrita e interpretada a partir de los elementos de significados del EOS, teniendo en cuenta las relaciones que puedan ser establecidas por dichos elementos.
2. Configuración epistémica intermedia (CEI): cada una de las subconfiguraciones que componen la configuración epistémica global (Los problemas globalmente identificados pueden ser descompuestos en problemas intermedios lo que implica en nuevos procedimientos, propiedades, argumentos, conceptos y lenguajes puestos en juego).
3. Configuración epistémica puntual (CEP): entendida como las subconfiguraciones de la configuración epistémica intermedia (Un problema intermedio puede ser descompuesto en problemas puntuales que a su vez da lugar a una nueva configuración)

Dichas configuraciones pueden ser reagrupadas o descompuestas según el interés y finalidades de cada investigación y pueden quedarse expresadas de manera implícita, o bien describiendo las redes de objetos y su progresiva reconstrucción alrededor de entidades de naturaleza conceptual o proporcional. Es necesario avanzar en la tipificación de las configuraciones y su articulación a lo largo del proceso de instrucción, tratando de identificar los distintos elementos de significado que las componen.

**Tabla 1.** Elementos de significado. Configuraciones Epistémicas asociadas al objeto Matemático conocido como “la integral” (Elaboración propia)

Elementos de significado	CEG	CEI	CEP
<b>Situaciones</b>	Calculo de áreas y volúmenes	Situaciones de acumulación, Situaciones de otras ciencias, de modelización. Funciones integrable, reduciendo las condiciones de integralidad, según la integral de Lebesgue.	Calcular el valor de una integral  Ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función
<b>Lenguaje</b>	Gráfico, algebraico numérico	Gráfico, algebraico numérico	Principalmente analítico, gráfico, Algebraico, numérico
<b>Procedimientos</b>	Dada una integral identificarla como indefinida, definida o impropia, y aplicar el método adecuado para calcular su valor Calculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función. Cálculo de integrales indefinidas, definidas o impropias. Asignación de un valor al área o al volumen	Calcular la integral considerando si el resultado encontrado es un número o una familia de funciones.  Calcular la integral considerando la idea de altura media de una función en un intervalo. Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada
<b>Definiciones</b>	Con relación al área	Concepto regla resultado de un proceso de cambio	Reconocer que la integración y la derivación son operaciones inversas
<b>Proposiciones</b>	Regla de Barrow, (Teorema fundamental del cálculo integral) Métodos de integración	Regla de Barrow, Métodos de integración	Elementos de la teoría de la medida Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow

<b>Argumentaciones</b>	Retórica y heurística	Retórica y heurística	Retóricas (Comparación de áreas. Analíticas basadas en cuestiones topológicas del estudio de la medida)
<b>Conflictos semióticos asociados a esta CE</b>	No diferenciar entre integral definida y área. La integral debe ser un área y entonces positiva. Es imprescindible el valor absoluto para calcular la integral. Considerar que a igual área igual volumen Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual (llenar algo finito como un área con una suma infinita)	Noción de función acumulación. Conflicto semiótico de la diferencial. Heterogeneidad de las dimensiones (completar un área de dos dimensiones con líneas de dimensión 1)	Confusión entre función y primitiva Comprensión de las relaciones y la notación. La integral calculada carece de significado.  Encausar el trabajo de los estudiantes en procesos de mecanización de integrales y no en procesos de variación.

### ■ OBSERVACIONES FINALES

Es importante reconocer que las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas. Están allí donde exista una función que relacione dos magnitudes de tal forma que, a cada valor de una de ellas, corresponde un determinado valor de la otra; allí existe un problema de cálculo integral; ya que es el cálculo integral el que determina los resultados de los cambios entre esas dos magnitudes. Por su parte Turégano (1998), plantea que “esos cambios pueden ser constantes a lo largo de un intervalo o variar de forma continua. Tanto en un caso como en el otro, una imagen visual nos permitiría darnos cuenta que los resultados de los cambios y las áreas bajo los gráficos son exactamente lo mismo desde el punto de vista de las matemáticas. Este tipo de imágenes nos permite interpretar el “significado” del área bajo el gráfico, según el problema planteado. Dicha área no es más que una integral definida o que también puede ser una integral definida impropia.

El trabajar los métodos de integración –en particular el MIP- desde las CE presentadas, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos es una clave para la introducción de la formalización propia del concepto de integral. En lo que se refiere a la integral se concluye que el tipo de enseñanza propuesto en los libros de texto y seguido por la mayoría de los profesores universitarios es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto netamente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático.

Se destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizada. Se observa en los libros de texto, que la

enseñanza del Cálculo Integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento. De acuerdo a la metodología desarrollada –estudio de caso– de tipo descriptivo, se hicieron observación y grabación de las sesiones de clase que tres profesores imparten a tres grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, también se les practicó una entrevista semiestructurada, se hizo la revisión de los libros de texto propuestos en la bibliografía del programa para el curso, encontrándose que en lo referido a la integral, el tipo de enseñanza propuesto en los libros de texto y seguido por los profesores universitarios observados es de carácter transmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto netamente pasivo.”

### ■ RESULTADOS ENCONTRADOS.

En la observación a la secuencia de enseñanza del método de integración por partes se encontró que la CEP es la que más se utiliza cuando se enseña la integral definida o impropia, seguida de la CEI, fortalecida desde procesos rutinarios de corte netamente algebraico; CEG no aparecen. Cuando se enseña la integral indefinida esta se da desde la CEI, desaparece la CEP y algunas veces aparece la CEG, para terminar fortaleciendo la CEI también desde procesos netamente algebraicos. Los alumnos estudian la CEP generalmente de forma directa, esto es, calculando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico habitualmente o calculando integrales indefinidas. En segundo lugar, la CEP es la más usada desde cálculos algorítmicos, generalmente de forma directa también. Es evidente la ausencia total de la CEG. Lo que impide que el estudiante alcance un significado global y así poder aplicar un holosignificado que le permita un desempeño significativo en su quehacer profesional.

El significado personal de objetos que se suponía los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad entre otros) era insuficiente. De ahí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieran un buen significado personal del objeto “la integral” sea primero conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos. En este sentido se observó que la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica

Trabajar los métodos de integración –en particular el MIP desde las diversas CE presentadas, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos como una clave, antes de la introducción de la formalización propia del concepto de integral puede ayudar a alcanzar un significado global de este objeto visto como un proceso de acumulación.

Al finalizar el proceso de observación de las clases, (18 sesiones), de los tres profesores que enseñan cálculo integral en la Facultad de Educación, el significado personal de la mayoría de los estudiantes sobre la integral, incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de integrales elementales a partir de sus gráficas (para integrales definidas), no así para las integrales indefinidas e impropias. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales “funciones elementales” antes del proceso de enseñanza, ni habían sido

explícitamente contempladas en el diseño previo del significado institucional pretendido por el profesor observado.

Como conclusión general, nuevamente se obtiene que “el análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes permite afirmar un “desequilibrio” evidente entre las configuraciones epistémicas introducidas, así como un privilegio de los procedimientos algebraicos y analíticos”. Esta disparidad entre la destreza algorítmica y la carencia de recursos en el tratamiento gráfico-geométrico, señalada por Orton (1980), la ponen también de manifiesto Artigue y Szwed (1983, citado en Labraña, 2001. p. 73). En estos casos manifiestan muchos errores en el actuar de los estudiantes. En otros casos realizan ambas tareas y, cuando los resultados obtenidos son inconsistentes con el gráfico, intentan dar explicaciones poco razonables que muestran más confianza en los cálculos que en el dibujo”. Finalmente se observa que los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas pero la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas. También revela las dificultades para entender la noción de variación de una función cuando no depende del tiempo.

#### ■ RECOMENDACIONES.

Es necesario que los docente de educación superior que trabajan los conceptos propios del cálculo integral reconozcan los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas avanzadas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, procesos todos ellos que tienen una componente psicológica que al ser considerados permiten alcanzar un significado global del objeto a enseñar si se aborda desde las CE definidas.

Queda pendiente hacer un estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, en particular del cálculo integral, lo cual implica investigar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar a través del análisis de los currículos oficiales y de los libros de texto que en muchas ocasiones limitan el verdadero significado global del objeto a enseñar.

#### ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. y Font, V. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384.
- Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. D.L.:GR 491-2013-ISBN: 978-84-9028-374-5.
- Crisóstomo E., Ordóñez L., Contreras A., y Godino J. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. (pp. 125–166) Jaen, ESP.

- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemática para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. 18071. ISBN: 84-932510-6-2.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26. (1), 39-88.
- Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2007). Análisis Didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. Versión revisada de la Conferencia invitada en el IV Congresso Internacional de Ensino da Matematica. ULBRA, Brasil, 25-27
- Labraña, P. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.
- Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. *Sociedad Española de Investigación en educación Matemática*. 23- 41.
- Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis Doctoral, University of Leeds, England.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias* 16(2), 233-249.