LA CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE SIMBÓLICO DESDE LAS PRÁCTICAS

Oscar Alejandro Cervantes Reyes
Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca, México.
yuza_cero7@hotmail.com

Palabras clave: lenguaje algebraico, pensamiento proporcional y prácticas.

Key words: algebraic language, proportional thinking and practices.

RESUMEN: El planteamiento de problemas tipo y la “medida desconocida”, rutas del lenguaje algebraico identificadas en los libros de texto, nos han llevado a un simbolismo carente de sentido y significado para los aprendices. Por ello, la presente investigación problematiza la noción de “lenguaje algebraico” desde una perspectiva sistémica, reconociendo nuestro objeto de estudio como un saber situado y en uso, en prácticas de referencia que le proveen de sentido y significados. Para esto, analizamos el arte de la albañilería en una población de la mixteca Oaxaqueña, a través de un estudio de caso como método de investigación, la Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa, los modelos de pensamiento proporcional y las fases de desarrollo del lenguaje algebraico como referente teórico.

ABSTRACT: The approach of "type problems" and "unknown as" routes identified in algebraic language textbooks, have led us to a meaningless symbolism and meaning for apprentices. Therefore, this research problematizes the notion of "algebraic language" from a systems perspective, recognizing our object of study as a knowledge set and in use, in reference practices that provide meaning and significance. For this, we analyze the art of masonry in a population of the Oaxacan Mixteca, through a case study as a research method, the socioepistemological Theory of mathematics education, models of proportional thinking and development phases of the algebraic language as theoretical reference.

INTRODUCCIÓN

Las trabajos desarrollados en los seminarios de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria con investigadores del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV - IPN), me permitieron reconocer la problemática respecto a la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje algebraico; a pesar de que, desde hace varios años me había percatado de las dificultades de mis alumnos al trabajar con este contenido: mi racionalidad anterior me decía que había problemas, porque mis estudiantes salían mal en los exámenes; sin embargo, mi apreciación era una verdad a medias, porque el interés estaba centrado en la "aprobación", e ignoraba otros aspectos, como los procesos cognitivos, la naturaleza intrínseca o el aspecto sociocultural. Hoy en día, la problemática persiste, sin embargo mi relación al saber y mi visión ha cambiado, lo que me llevo a una revisión del estado del arte del objeto de estudio, donde identifiqué entre otros aspectos: primero, la enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico requiere de otros lenguajes como el natural o el geométrico (Butto & Rojano, 2004; Malisani, 1999; Palarea, 1999; González, 2012; Filloy & Kieran, 1989). Segundo, reconocí que el planteamiento de "problemas tipo" y "la medida desconocida" son las 2 rutas que se desarrollan en los libros de texto del sistema educativo mexicano para abordar el lenguaje algebraico: ambos casos, presentan al lenguaje algebraico como un conocimiento acabado, preexistente, atomizado, en contextos ficticios, que solo hay que comunicar al alumno, sin que él sea participe de su construcción.

DESARROLLO

Desde nuestra óptica enmarcada en la teoría Socioepistemológica, consideramos a las prácticas sociales como fuente del saber, que dotan de razón y sentido al conocimiento. Por lo anterior, en nuestra investigación nos planteamos lo siguiente:

- Identificar al menos una práctica socialmente compartida que a través de su modelación permita construir un lenguaje simbólico, cercano a la noción de lenguaje algebraico.
- Encontrar una argumentación más rica, alternativa a las rutas vigentes en los libros de texto actuales; una ruta alternativa que atraviese la realidad del alumno, donde este sea participe activo de la construcción del conocimiento; un conocimiento en uso, con sentido y significado.

MARCO TEÓRICO

La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, establece un método de acercamiento a las problemáticas que surgen dentro y alrededor de los fenómenos concernientes a la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Así mismo, postula la necesidad de un "examen minucioso del saber" amplio, sistémico; que considera las múltiples relaciones entre los vértices del triángulo didáctico, así como las restricciones institucionales pedagógicas; atendiendo las múltiples dimensiones del saber, al tiempo que considera las restricciones especificas del saber matemático. En este sentido, problematizamos el saber a través de una unidad de análisis sociopiestémica, donde estudiamos las diferentes dimensiones del saber: la dimensión didáctica, la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión socio – cultural (Cantoral, 2013), reconociendo nuestro objeto de estudio como un saber situado y en uso, en el que se modelan las dinámicas del saber de prácticas de referencia que le dotan de significado.

Por otra parte, de acuerdo con Malisani (1999) en la historia del Álgebra tiene importancia tanto la historia de los conceptos como el sistema de símbolos utilizados; mirada parcial de nuestro objeto de estudio pero que no riñe con nuestra perspectiva teórica. Respecto a la historia de los conceptos, Nesselman (citado por Malisani, 1999) distingue 3 fases o periodos en el desarrollo del lenguaje algebraico:

I. Fase Retórica: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d. c.), este periodo se caracteriza porque en él no se utilizan símbolos, únicamente el lenguaje natural como soporte de expresión para resolver diferentes problemas individuales, que en ocasiones implicaba la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
II. Fase Sincopada: de Diofanto hasta fines del siglo XVI, en este periodo se empiezan a utilizar algunas abreviaturas para denotar incógnitas y relaciones de uso frecuente; sin embargo, los cálculos se hacen en lenguaje natural.
III. Fase Simbólica: a partir a François Viète (1540 - 1603) quien de forma sistemática empezó a utilizar letras para denotar las cantidades (incógnitas, sus potencias y coeficientes genéricos) y signos para las operaciones; empleo el lenguaje simbólico tanto para procedimientos resolutivos como para demostrar reglas generales.

Otro aspecto importante en este marco, son los resultados de la investigación de Reyes-Gasperini (2011), que atiende el fenómeno de empoderamiento docente, donde concibe a la proporcionalidad como herramienta para caracterizar su fenómeno de estudio, en este sentido Reyes-Gasperini postula la conglomeración de los diferentes modelos de pensamiento proporcional: cualitativo, aditivo simple, aditivo compuesto, modelo multiplicativo, inter e intra, como medio para construir un significado de "lo proporcional". Recuperamos algunos elementos de la investigación de Reyes-Gasperini y los orientamos hacia la construcción de un lenguaje simbólico, al considerar que la proporcionalidad es uno de los temas transversales de la educación básica, aunado a que "*la Socioepistemología utiliza a la transversalidad del conocimiento como herramienta vital de la construcción integral del conocimiento matemático*" aspecto importante de mi epistemología de la matemática.

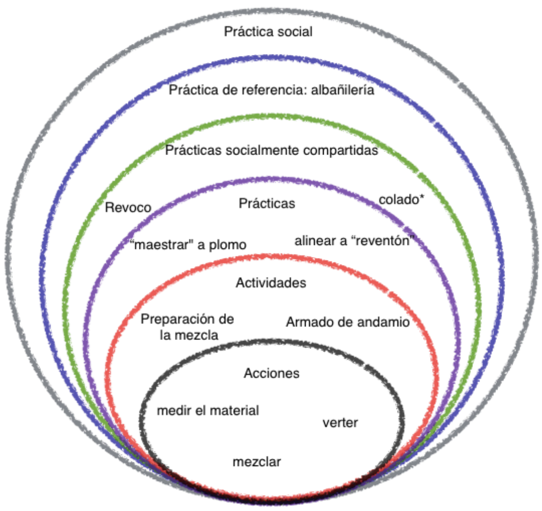
METODOLOGÍA

Nuestro estudio está enmarcado en la línea cualitativa, tomamos el Estudio de Caso como método de investigación, que al ser transparadigmático y transdisciplinario puede ser utilizado desde cualquier paradigma de investigación (Durán, 2012). Seis días acompañamos a Rosendo, albañil de la mixteca oaxaqueña, 32 horas reloj específicamente en su trabajo y el resto del tiempo en su hogar, donde la entrevista semiestructurada y la observación participante fueron los ejes centrales para la recogida de datos; complementado con las hojas de visita, grabaciones de audio y transcripción de las entrevistas realizadas, evidencias que por su extensión organizamos en 3 episodios para su análisis, proceso en el que enfatizamos la combinación de técnicas y de múltiples fuentes, para obtener descripciones y conclusiones más convincentes a través de la triangulación de las mismas en un análisis exhaustivo.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Como resultado de la investigación logramos identificar a la albañilería como una práctica de referencia que orienta las actividades del albañil en su cotidiano, en el proceso de construcción de conocimiento y de puesta en juego del mismo: antes de preparar la mezcla, al determinar la cantidad de los materiales y al término de la preparación, cuando sopesa las características de la mezcla, de tal forma que le permita trabajarla. De igual manera, es la práctica de referencia la que orienta el actuar de Rosendo cuando calcula el presupuesto de una obra: material y mano de obra; ya sea de manera formal o informal, proceso que además de operaciones de aritmética básica, comprende también aproximaciones, inferencias, representaciones gráficas, cálculo de áreas, volúmenes, situaciones de conteo, y un fuerte manejo del pensamiento proporcional. Al mismo tiempo, identificamos una anidación de prácticas normada por una práctica social que se infiere a partir de sus funciones como se muestra en la figura 1.

Figura 1. anidación de prácticas, con práctica de referencia: albañilería.



En el contexto de esta práctica de referencia, identificamos puesto en juego al lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, cuando Rosendo explica las relaciones entre las cantidades de materiales para preparar la mezcla o concreto:

Tabla 1. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[131.]	R	Ah, mira; un metro eh, mira ahorita vas a ver… un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos.
[132.]	E	Cuatro por cuatro.
[133.]	R	Cuatro por cuatro a un cúbico; se tiene ya, como base ya calculado, que se lleva nueve botes, nueve bultos por metro cúbico de un concreto de loza.

En esta explicación Rosendo no recurre al uso de símbolos, los planteamientos y resoluciones los realiza en lenguaje natural (fase retórica) al tiempo que utiliza y representa relaciones de uso frecuente (fase sincopada); analizando la Tabla 1, identificamos 2 relaciones proporcionales: “un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos” y “nueve bultos por metro cúbico de un concreto de loza”. La expresión “cuatro por cuatro” se refiere a la cantidad de botes de arena y grava por bulto de cemento; relación que tiene un significado para Rosendo “la resistencia del concreto”, y que matemáticamente podemos reconocer como una relación entre dos magnitudes “razón proporcional”, que a su vez podemos representar como: 4:4 o $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$. De manera semejante, identificamos la segunda expresión como una razón proporcional, donde se relaciona la cantidad de bultos de cemento por metro cúbico; es decir, que 9 bultos de cemento rinden un metro cúbico, que también podemos representar como : 1:9, 9:1, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$ o $\frac{9}{1}$.

Por otra parte, en el lenguaje algebraico en uso de parte de Rosendo a través de expresiones de su propia práctica, identificamos uno a uno los diferentes modelos de pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2011), situación que a continuación describiremos.

Es importante señalar que el modelo cualitativo precede a los modelos a describir; mismo que el niño alcanza cuando de acuerdo con Piaget e Inhelder se reconoce un elemento de compensación para mantener el “equilibrio” donde “un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente” (citado por Reyes-Gasperini, 2011). El Modelo aditivo simple es la primera aproximación para lograr un equilibrio, en esta se resuelven las situaciones a partir de técnicas aditivas y de recuento:

Tabla 2. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[189.] E Digamos un tamaño normal, si ese es, si es un cuarto; ¿y si fueran dos cuartos?

[190.] R Dos cuartos; son 18 ¡si llega ves, si llega!, son dos cuartos: 18, 36… ¿con su baño?... 45 metros… ¡45 metros¡ Eso es lo que vas a ver …

[191.] E ¿Y si fueran tre…?; ahí, digamos ya van considerando conforme va creciendo, no solo son los cuartos… sino que, ya planeado es de que, va a llevar…

Modelamos la situación en la Tabla 3, a fin de identificar las relaciones métricas que subyacen.

Tabla 3. Análisis del modelo aditivo simple identificado en el episodio 2.

	Número de cuartos	m^2 de loza	
+1	1	18	+18
	2	36	
	3	52	

La Tabla 3 se muestra como Rosendo incrementa de 18 en 18 para calcular los metros cuadrados de loza, y de uno en uno el número de cuartos, cabe señalar que en dichos cálculos están sujetos a un cierto margen de error, en virtud de que son realizados mentalmente.

Así mismo, logramos también identificar el modelo multiplicativo de pensamiento proporcional en la Tabla 4.

Tabla 4. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[275.] E Y ¿18 metros cuadrados, que casi está cerca de 20?

[276.] R Igualmente, porque estaba yo sacando cuentas: es un metro cúbico, unoo… con… ochenta centímetros algo así …

[284.] R Le vas hacer… no, ya no serían este… son, si fueran dos metros serían 18; pero no, ahí se va llevar este… 15 bultos.

…

[295.] E ¿Por qué dice usted?

[296.] R Porque estoy sumando el, eh… estoy sumando los dos metros cúbicos.

[297.] E Ajá.

[298.] R Así, mentalmente… porque dije nueve, nueve bultos de ese… del metro cúbico ese; pero, como del otro son prácticamente son tres cuartos, pero ya no; entonces ya le quitamos a … los dos bultos a… ya le quito al, en lugar de que sea metro cúbico entero el otro, pues yo saco primero que fuera, como si fueran los dos …

Modelamos la situación anterior a través de la Tabla 5, a fin de evidenciar los modelos, aditivo compuesto y el inter.

Tabla 5. Análisis del modelo inter identificado en el episodio 2.

$\times\frac{3}{4}$

m^3 *de loza*	bultos
1	9
2	18
$\frac{3}{4}$	6
$1\frac{3}{4}$	15

$\times\frac{3}{4}$

En un primer momento se aprecia el cálculo que hace Rosendo para encontrar el número de bultos que corresponde a $\frac{3}{4}$ de un m^3; donde asume que a $\frac{3}{4}\,m^3$ de loza le corresponden $\frac{3}{4}$ de los 9 bultos, donde 6.75 bultos lo ajusta a seis, a un número entero por dos razones: la primera en las tiendas de materiales no venden $\frac{3}{4}$ de bulto, y segunda en repetidas ocasiones durante el segundo episodio Rosendo señala que de cada m^3 le sobra medio bulto aproximadamente. De acuerdo con Carretero (citado por Reyes-Gasperini, 2011, p. 109) en esta situación se exploran "*dos tipos de "estructuras multiplicativas" en situaciones problemas que implican una o varias operaciones de multiplicación y/o división*". Al mismo tiempo, reconocemos en esta situación al modelo aditivo compuesto; donde, Rosendo plantea una relación de proporcionalidad directa, dado que al tener dos razones identificadas, calcula una tercera mediante la suma, mismo apoyándonos en los funcionales de Cauchy puede expresarse como $f(x+y)=f(x)+f(y)$, o bien, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes (citado en Cantoral, 2013), como se muestra en la Tabla 6:

Tabla 6. Análisis del modelo aditivo compuesto identificado en el episodio 2.

m^3 *de loza*	bultos
1	9
2	18
$\frac{3}{4}$	6
$1\frac{3}{4}$	15

De manera semejante, es posible identificar el modelo multiplicativo en la Tabla 7.

Tabla 7. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[258.] R ¿Sí?, no, no este… hasta el final; son nueve bultos: cada metro, cada metro cúbico de ahí de los nueve, te va a sobrar como medio bulto… de cemento; y eso ya por experiencia me ha tocado, ya lo he hecho; porque he pedido los nueve, porque era más fácil sacar, eh… como son 50 metros serían 5 metros cúbicos; por eso saqué de los 45…

[259.] E ¿Cinco metros cúbicos?

[260.] R Ajá, cinco metros cúbicos ¿por nueve?, ¿serían que… los 45?

[261.] E 45.

[262.] R 45, pero no se lleva los 45; se lleva un poquito menos, porque cada…

A fin de evidenciar dicho modelo, recurrimos a la modelación:

Tabla 8. Análisis del modelo multiplicativo identificado en el episodio 2.

m^3 *de loza*	bultos
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45

Relación de la forma que $n \to 9n,\ n \in \mathbb{Z}$ que corresponde al modelo multiplicativo. De acuerdo a nuestra referencia teórica, solo falta el modelo intra, que identificamos en la siguiente tabla:

Tabla 9. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

> [430.] R Si ya tiene que… si, ya se da cuenta él; ya más o menos. La recomendación que dices tú, que te estoy dando ehh… ya lo platicamos, él ya lo sabe; porque ya lo vio con nosotros, lo único que le vas a decir ¡que no vaya a quedar muy pobre!, si le dices ya así: sin, sin números "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!", "o sea, ¡regular!"; entonces dice, si él ya acostumbraba a echarle cinco o seis, no pus… ahí entonces ya se va a calcular cuántos bultos; porque va a colar este cuarto o va a colar un bañito, ya va hacer como decimos ¿no? ¡Que no quede muy pobre!, o ves la revoltura ya que, ya la hizo; "¿cuántos bultos hiciste?" "pus, ¡tres!", "¿Oye, no está muy pobre?", "maistro, es que le eché… tanto" "pues, échale… ¿son, cuantos botes?; échale otros dos botes, ¿o qué?", pero ya a cuenta de lo que él te dijo cuanto que le echó; así es…

Es precisamente la expresión "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!" donde se establece una relación entre magnitudes heterogéneas: bultos de cemento y botes de arena/grava que corresponde a la estructura del modelo multiplicativo funcional señalado así por Carretero, al que más tarde Lamon llamaría como modelo intra (citado por Reyes-Gasperini, 2011); mismo que entendemos como una relación a modo de razón constante entre los bultos de cemento y los botes de arena, que sin importar la cantidad de los materiales dicha razón se mantiene constante, lo cual podemos expresar como $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad. Es decir, Rosendo en todo momento busca que la razón entre y (bultos de cemento) y x (botes de arena), se mantenga constante k. Para Rosendo esta razón va más allá de una relación aritmética, porque en esta, él considera diversos factores, como las características de los materiales, las condiciones físicas o la disposición de la obra.

Consideramos que la noción de proporcionalidad a través de los modelos identificados en uso, en una suerte de simbiosis con el lenguaje algebraico en su fase retórica en esta práctica de referencia de la albañilería, conforman una ruta alternativa a las dos rutas planteadas en los libros de texto. Porque las evidencias encontradas nos muestran que aun antes del simbolismo es posible que emerja el lenguaje algebraico con sentido y significados, en un contexto determinado por una práctica de referencia como lo es la albañilería.

Aunado a lo anterior, a manera de reflexión quiero señalar el paralelismo entre el desarrollo del lenguaje algebraico en la historia de la matemática y el lenguaje encontrado en la práctica de referencia de la albañilería de la mano del pensamiento proporcional (dos conocimientos puestos en uso), que serán el punto de partida para continuar el desarrollo del lenguaje algebraico. Nótese, que mencionamos para continuar, no para empezar a desarrollar, no estamos planteando una ruta a modo, sino que encontramos una ruta ya trazada, un camino funcional hacia el lenguaje algebraico simbólico inmerso en una práctica de referencia. No planteamos una nueva ruta, sino que la ruta ya está trazada, y responde a la naturaleza del saber. Solo falta continuar o seguir la ruta identificada en la albañilería, una ruta natural que continuaremos bajo la consideración: si las fases de desarrollo del lenguaje algebraico se sucedieron en la historia de la humanidad, es posible plantearla bajo el mismo esquema en el individuo.

Por otra parte, para finalizar queremos señalar el aporte central de esta investigación. Respecto del denominado *programa funcionalista* centrado en la *estructura sintáctica* del lenguaje algebraico, programa que si bien resulta adecuado para localizar los obstáculos didácticos que se han documentado en el aprendizaje del lenguaje algebraico; funciona para explicar las dificultades en su adquisición, no ha resuelto plenamente el problema del aprendizaje del álgebra como muestran las evaluaciones internacionales; es decir, continúan por la ruta de un simbolismo carente de sentido y significado (Filloy y Kieran, 1989; Butto y Rojano, 2004). El modelo es adecuado para explicar los obstáculos en el aprendizaje del álgebra, pero no lo es para las propuestas de intervención didáctica (problemática, dificultades, obstáculos en el aprendizaje del lenguaje algebraico). Por lo anterior, a sabiendas de que el problema del aprendizaje del álgebra sigue sin resolverse y como resultado de nuestra investigación; proponemos una estrategia centrada en las *prácticas situadas*, prácticas socialmente compartidas, que "atraviesan la realidad de quien aprende", donde se asume el saber cómo un conocimiento en uso; tomando por base a los modelos de *pensamiento proporcional* y *desarrollo del lenguaje algebraico*. A diferencia entonces del programa funcionalista, consideramos la sintaxis algebraica en un segundo término; porque, como vimos en la investigación, aún antes de los símbolos existen significados, y también, ya está "presente" en uso el lenguaje algebraico. Nuestro programa, si pretende intervenir directamente en el sistema educativo, a través de propuestas de intervención didácticas, proceso en el que seguimos trabajando. Por último, sostenemos la hipótesis que esta vía favorece la construcción de otras nociones o conocimientos, como la noción de función o más ampliamente la noción de linealidad; pero, esto es motivo de otra investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16(1),* 113-148.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Durán, M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista nacional de administración*, *3*(1), 121-134.

Filloy, E., y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7(3),* 229-240.

González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (Tesis de maestría no publicada). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, 1(13),* 105-132.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas, 40(1)*, 3-28.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.