

## LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA E INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA EDUCATIVA

**Javier García-García; Crisólogo Dolores Flores**

Universidad Autónoma de Guerrero (México)

libra\_r75@hotmail.com, cdolores2@gmail.com

**Palabras clave:** conexiones matemáticas, derivada e integral, bachillerato

**Key words:** mathematical connections, derivative and integral, high school

**RESUMEN:** El presente escrito estudia a las conexiones matemáticas y a dos conceptos centrales del Cálculo: la derivada y la integral. Buscamos responder una pregunta central ¿Cuál es el estado actual de las investigaciones relacionadas con las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo, en particular entre la derivada y la integral? Para responder a esta pregunta se hizo un análisis de las publicaciones científicas de los últimos ocho años relacionadas con la pregunta de investigación. Los resultados los agrupamos en tres grupos: (I) la literatura que toma como objeto de estudio a las conexiones en general y, entre la derivada y la integral en particular; (II) la que estudia de manera articulada ambas ideas de Cálculo, pero sin estudiar propiamente a las conexiones matemáticas y; (III) los estudios sobre la derivada e integral de manera inconexa. Los resultados indican un interés creciente sobre las conexiones matemáticas en otros países, pero son escasos aquellos que exploraran la conexión entre la derivada y la integral. En México son nulos estos estudios, por lo que es necesario seguir profundizando sobre el particular.

**ABSTRACT:** This paper studies the mathematical connections and central concepts of Calculus: the derivative and integral. We answer a central question: What is the current status of investigations about mathematical connections in the field of Calculus, particularly between the derivative and integral? To answer this question, we did an analysis of the scientific researches of the last eight years related to the research question. The results were grouped into three groups: (I) the literature that takes as its object of study to connections in general and, between the derivative and integral in particular; (II) studying literature articulately both ideas of calculus, but not mathematical connections; (III) studies on the derivative and integral as disconnected. Results indicate a growing interest on the mathematical connections in other countries, but there are few who explored the connection between the derivative and integral. In Mexico these studies are null, so it is necessary to continue on the matter.

## ■ INTRODUCCIÓN

El presente estudio aborda a las conexiones matemáticas; entendidas éstas como relaciones entre distintos objetos matemáticos que permiten entender a las Matemáticas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas. Las conexiones matemáticas pueden ser entre contenidos matemáticos (intramatemáticas), entre éstos y otras disciplinas (extramatemáticas), así como entre los conceptos matemáticos y la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, etc.). Razón por lo cual, se consideran un eje fundamental en los estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014).

Por otra parte, el Cálculo Diferencial e Integral es parte del conocimiento matemático que según los planes y programas de estudio del preuniversitario y universitario en México, deben aprender los estudiantes. Dos de sus conceptos centrales son la derivada y la integral que desde el punto de vista histórico se desarrollaron de manera separada. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral en el cálculo de áreas. En el plano matemático la conexión entre ambos conceptos reside en la reversibilidad de los mismos; cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Este teorema unifica dos conceptos aparentemente inconexos.

En razón de lo expuesto, identificamos la importancia de estudiar a las conexiones matemáticas en general, por un lado, y entre la derivada e integral, por el otro; por considerar que son contenidos matemáticos que se abordan desde el bachillerato y que se formalizan en el nivel superior en México. En particular, planteamos responder la pregunta ¿cuál es el estado actual de las investigaciones relacionadas con las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo, en particular entre la derivada y la integral? Como objetivo, nos planteamos analizar las publicaciones que abordan las conexiones matemáticas y aquellas que estudian a la derivada e integral. Este estudio servirá como base para desarrollar un proyecto de investigación más general.

## ■ ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA

Las conexiones matemáticas son el elemento teórico en el que se fundamenta nuestro trabajo. Para Eli, Mohr-Schroeder y Lee (2013) son como un enlace en el que se utiliza el conocimiento previo o nuevo para establecer o fortalecer una comprensión de la relación(es) entre dos o más ideas, conceptos matemáticos, filamentos o representaciones. Según Businskas (2008), son un aspecto importante y valioso para el aprendizaje de las matemáticas, de hecho, Godino, Batanero y Font (2003) señalan que sin conexión no hay comprensión, o ésta comprensión es débil y deficiente. En este trabajo, entendemos a las conexiones matemáticas en el sentido de Businskas, quien plantea que son: primero, aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y segundo, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática.

Para la búsqueda de la literatura a revisar nos guiamos por la orientación propuesta por Sánchez y Molina (2012) quienes proponen identificar qué, dónde y cómo buscar. En nuestro caso:

- ¿Qué buscar? Investigaciones sobre conexiones matemáticas y sobre dos conceptos centrales del Cálculo: derivada e integral.
- ¿Dónde buscar? De las sugerencias hechas en Sánchez y Molina, nosotros buscamos en revistas especializadas e incorporamos algunos *papers* y tesis que consideramos pertinentes. Esto lo hicimos consultando la base de datos de la biblioteca virtual de la

Universidad Autónoma de Guerrero y la página de CONRICYT (Consortio Nacional de Recursos de Información Científica y Tecnológica), donde existe una amplia gama de literatura de nuestro campo, la Matemática Educativa.

- ¿Cómo buscar? Entre otros aspectos, incluye establecer un límite. En nuestro caso, consideramos la literatura de los últimos 8 años (de 2007 a 2015). Esta elección obedece a que nos interesó la literatura más actual que dé cuenta del estado que guardan las investigaciones sobre conexiones matemáticas y sobre la derivada e integral.

En Cálculo, la derivada y la integral están relacionadas mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, que da evidencia de la conexión de reversibilidad entre esos conceptos; conexión que no ha sido estudiada ni explorada con estudiantes de bachillerato o universitarios. Esa conexión tiene fuerte potencial para resolver problemas que le dieron origen al Cálculo mismo tales como, dada la posición de un objeto encontrar su velocidad en un instante o viceversa, por lo cual centramos nuestra idea en esos conceptos que llamamos centrales porque son la base para comprender ideas más avanzadas dentro de las matemáticas y se formalizan en el nivel superior.

#### ■ LAS INVESTIGACIONES REVISADAS

La literatura revisada la agrupamos en tres grupos: (I) aquella que considera como objeto de estudio a las conexiones matemáticas en general, y entre los conceptos centrales del Cálculo (derivada e integral) en particular; (II) la que aborda de manera articulada ambos conceptos, pero sin considerar como objeto de estudio a las conexiones matemáticas; y finalmente (III) la que investiga sobre la derivada y la integral de manera inconexa.

#### Sobre conexiones en general y entre las ideas claves del Cálculo

Hemos ubicado distintos estudios que toman como objeto a las conexiones matemáticas en general, pero sin referirse a la derivada e integral. Sólo por nombrar citaremos a Hurts (2007), Businskas (2008), Mwakapenda (2008), Jaijan y Loipha (2012), Beswick y Muir (2013) y, Eli et al. (2013). Sin embargo, aquellos que abordan las conexiones entre la derivada y la integral sólo hemos ubicado a Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg (2009) y, a Ponce (2015).

Jaijan y Loipha (2012), por ejemplo, investiga las conexiones matemáticas hechas por 24 estudiantes de quinto grado de primaria con las transformaciones geométricas, usando un enfoque abierto. Para ello, utilizaron como metodología al *lesson study* y al *enfoque abierto* (en este cada estudiante puede aprender Matemáticas de manera que sea apropiado a su habilidad, además de tomar sus propias decisiones en el proceso de aprendizaje). Los datos fueron recolectados de cuatro situaciones problemáticas sobre paralelogramos. Los resultados mostraron las formas naturales de pensar sobre transformaciones; particularmente la conexión matemática con el corte, plegado, movimiento, enlace y, la formación de unidades completas. La conexión matemática que identifican tiene que ver con las transformaciones que sirvieron como el conector matemático para vincular los números y las operaciones que utilizaron para encontrar la fórmula del área (del paralelogramo). Jaijan y Loipha plantean sobre la base de sus observaciones que los estudiantes normalmente ven temas matemáticos como independientes, postura que compartimos y, que raramente *ven* que lo que han aprendido en un dominio podría ser aplicado en la comprensión de otros dominios. Consecuentemente, con esto se privilegia un aprendizaje memorístico y algorítmico (procedimental).

Desde un punto de vista curricular, encontramos el estudio de Mwakapenda (2008) quien estableció como objetivo identificar y discutir las formas en las cuales diferentes tipos de conexiones son descritas en las matemáticas sudafricanas en la Declaración del Currículo Nacional y documentos relacionados, en particular de la educación superior y de formación continua. Entre sus resultados, Mwakapenda refiere la centralidad de las conexiones en la definición de las matemáticas; en el currículum se declaran las conexiones para alumnos de grados determinados y con logros específicos; la prevalencia de las conexiones a través de los resultados de aprendizaje y criterios de evaluación; las representaciones (gráficas, bosquejos, tablas, etc.) son un aspecto importante de las conexiones y, la integración de conceptos y procesos dentro de las Matemáticas son una forma de hacer conexiones.

Considerando a los docentes, ubicamos los estudios de Eli et al. (2013) y, el de Businskas (2008). Eli et al. (2013) examinaron las conexiones matemáticas que realizan 28 futuros profesores de secundaria para la enseñanza de la Geometría. Para la colecta de datos utilizaron la *Actividad de Ordenar Cartas* (CSA, por sus siglas en inglés) que consistió de 20 cartas marcadas con diferentes términos matemáticos, conceptos, definiciones y problemas. Como resultado identificaron 287 conexiones matemáticas que cayeron en una o más de las siguientes categorías: *categorica, característica/propiedad, curricular, procesal y de derivación*. Entre sus resultados también plantean que para desarrollar el potencial para realizar conexiones es necesario crear secuencias centradas en las interrelaciones entre distintos tópicos dentro de las matemáticas. Asimismo, señalan que es importante el desarrollo de planes de estudio que incluyan a las conexiones matemáticas como un objetivo explícito y se establezcan con claridad cómo evaluar tales conexiones.

En cambio, Businskas (2008) buscó responder las preguntas: ¿cómo conceptualizan las conexiones matemáticas los profesores de secundaria? y ¿cuáles son las características explícitas de las conexiones matemáticas que los profesores son capaces de expresar? En el estudio fueron entrevistados en tres momentos diferentes nueve profesores de bachillerato. Businskas construyó un modelo compuesto de cinco categorías de conexiones matemáticas (representaciones diferentes, relación parte-todo, implicación, procedimiento, conexión de instrucción orientada) que servirían para evaluar las respuestas de los profesores. Entre sus resultados, Businskas (2008) reporta que el pensamiento de los docentes acerca de las conexiones y al parecer su forma de pensar acerca de las matemáticas en general, está ligado a su forma de pensar sobre la enseñanza; los maestros hablaron acerca de las conexiones con el mundo real y con el conocimiento previo de los estudiantes; declararon una disposición positiva hacia las conexiones; los participantes tenían conocimientos sobre conexiones matemáticas, pero en gran parte es tácito. Los profesores perciben a las conexiones como un conocimiento estratégico de su enseñanza; los maestros identificaron conexiones matemáticas específicas en una variedad de categorías (ya descritas); e identifican ciertas conexiones como algo crucial para la comprensión de los alumnos de temas específicos.

Por otra parte, Haciomeroglu et al. (2009) tratan un tipo especial de conexión, a saber, la reversibilidad de conceptos. Ellos examinaron los procesos cognitivos de estudiantes universitarios de Cálculo al proporcionarles la gráfica de la derivada de una función y pedirles que esbozaran la gráfica de la antiderivada. Como resultado reportan que los alumnos presentaron dificultades dado que no establecen una relación reversible al interpretar los datos de la gráfica derivada o

antiderivada. Señalan que desde su perspectiva, la falta de énfasis en los aspectos analíticos y visuales de estos procesos reversibles, puede ser un impedimento para la comprensión conceptual de los estudiantes. Por tanto, sugieren conducir a los alumnos a asociar el gráfico de diversas funciones con su derivada y con sus primitivas; esto podría permitir que los estudiantes superen sus dificultades y obtengan una perspectiva más amplia y sólida.

En cambio, Ponce (2015) planteó como problema de investigación abordar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los estudiantes universitarios en dos contextos: físico y matemático. Este estudio fue exploratorio-descriptivo y utilizó cuestionarios que incluyeron siete actividades que ayudaban a identificar conexiones. Entre sus resultados, Ponce refiere que identificó diversas conexiones. A manera de ejemplo citamos las siguientes: conexión entre la distancia y la integral; entre la velocidad y la derivada; entre representaciones equivalentes; entre la representación gráfica de la velocidad y su representación analítica; entre la integral y el área bajo la curva; entre otras. Por tanto, en el estudio se identificaron conexiones internas y externas. Sin embargo, coincidimos con Ponce cuando señala que es necesario seguir profundizando en el estudio de las conexiones entre las Matemáticas y otras disciplinas y, entre éstas y el mundo real.

#### **Estudios sobre la derivada e integral, vistos de manera articulada**

Entre la literatura que aborda a la derivada e integral, pero sin considerar el estudio de las conexiones matemáticas propiamente, son por citar algunos: Rojas (2010), Ponce-Campuzano & Maldonado-Aguilar (2014) y, Jukić y Dahl (2014). Por ejemplo, Rojas (2010) señala que el ordenamiento tradicional de los contenidos del Cálculo es primero abordar la derivada y después a la integral, posición que compartimos, y añadimos que esto sucede en los libros de texto, en los planes y programas de estudio, así como en el tratamiento escolar. La propuesta de Rojas fue analizar el efecto de estudiar la integral definida en paralelo con las derivadas con estudiantes universitarios de Ingeniería en informática, utilizando como enfoque teórico al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Para ello, diseñó un modelo que posibilitara dicho trabajo. Entre sus resultados, Rojas refiere que la propuesta significó una mejora en el rendimiento del grupo experimental, ya que su propuesta potenció el trabajo en equipo, permitiendo que el alumno desarrollara habilidades sociales. Asimismo, concluye que es provechoso aplicar definiciones, teoremas y postulados, sobre derivadas e integrales en la solución de problemas sobre algún contexto, pues permiten al alumno relacionar su aprendizaje con su entorno.

#### **Estudios sobre la derivada e integral, vistos de manera inconexa**

El grueso de las investigaciones que hemos ubicado se centran, bien en la derivada o bien en la integral, es decir, de manera inconexa. De este grupo, ubicamos estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos y aquellos que pueden ser de dos tipos: didáctico-histórico, cognitivo-didáctico o histórico-epistemológico, siempre referentes a la derivada o a la integral.

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) reportan que algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación. Sin embargo, tienen dificultades cuando manejan el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Asimismo, presentan dificultades cuando aplican los conceptos del cálculo para resolver problemas reales que atañe a la variación y al trabajar con gráficas en el contexto de la Física. En ese mismo sentido, la enseñanza tradicional del Cálculo

provoca elevados índices de reprobación, un aprendizaje sin comprensión y una actitud negativa hacia el aprendizaje del Cálculo (Alanís y Salinas, 2009).

Utilizando un ambiente informático, Quintana (2010) planteó como objetivo: evaluar la eficacia del programa DERIVE como recurso didáctico en el proceso de aprendizaje del Cálculo Diferencial con 51 alumnos de nivel superior. Entre sus conclusiones, Quintana refiere que el programa DERIVE es eficiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial; su uso permite a los estudiantes el desarrollo de capacidades como: observar, discernir, analizar e interpretar; complementa la labor del profesor, no lo reemplaza; y finalmente, el uso de diferentes representaciones semióticas favorece el establecimiento de relaciones entre ellas, siendo estas las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje de los estudiantes.

En relación con los estudios que abordan sólo la integral, podemos citar a Kachapova y Kachapov (2011), quienes identificaron con base a su experiencia docente, que sus estudiantes tienen dificultades al abordar la noción de límite al infinito así como las integrales que involucran funciones cuadráticas; por ejemplo,  $\int \frac{dx}{2x-5x^2}$  y  $\int \sqrt{4x-x^2} dx$ . Por ello, diseñaron una técnica algorítmica que facilite el trabajo operatorio; en particular, proponen introducir el cambio de variable  $t = x + \frac{b}{2a}$ . Ellos refieren que han utilizado esta técnica por muchos años en el nivel universitario observando que al aplicar este método, los estudiantes ofrecen la respuesta más rápido y con menos errores. Si bien reconocen que su propuesta es algorítmica, plantean que ayuda a eliminar conjeturas y la memorización. Asimismo, permite a los alumnos con bajo rendimiento obtener mejores resultados en problemas matemáticos más completos.

En cambio, Kouropatov y Dreyfus (2013) realizaron un estudio con 250 estudiantes de grado 12 en Israel, provenientes de 11 escuelas diferentes y, que recientemente habían finalizado el estudio de las integrales. Aplicaron un cuestionario con ocho preguntas con lo cual identificaron dos significados de la integral en los estudiantes: como límite de alguna suma (definida) y como primitiva (indefinida). Asimismo, considerando que el concepto de acumulación es central para la idea de integración, implementaron una propuesta didáctica tomándola como unidad de instrucción, en cinco grupos pequeños de estudiantes en 10 sesiones. Como resultado, diseñan y sugieren un currículum con la siguiente estructura: (1) la aproximación de figuras geométricas (líneas, áreas, volúmenes); (2) la aproximación de formas analíticas; (3) la aproximación de los valores de acumulación; (4) un procedimiento sistemático para el cálculo de los valores de acumulación (utilizando rectángulos y trapecios); (5) el concepto de integral definida; (6) propiedades de la integral definida; (7) el concepto de función de acumulación (como integral definida con un límite superior variable); (8) las propiedades de la función de acumulación; (9) la velocidad de cambio de la función de acumulación y el TFC; (10) el concepto de primitiva y su uso para el cálculo de integrales definidas; (11) las diferentes formas de calcular integrales definidas: consideraciones geométricas, el cálculo de los valores de acumulación, utilizando la función de acumulación, utilizando la primitiva; (12) aplicaciones de la integral definida.

Kouropatov y Dreyfus consideran que, debido a su naturaleza jerárquica y multinivel, la construcción del concepto de la integral depende fuertemente de los conceptos matemáticos previos. En ese sentido, recalcan de sus evidencias empíricas que una construcción insuficiente de la noción de tasa de cambio puede afectar negativamente el proceso de construcción del TFC. Finalmente, los autores refieren que todos los estudiantes participantes en el experimento de

enseñanza tuvieron éxito en la construcción de los conceptos de aproximación y la acumulación de una manera bastante satisfactoria y completa. Por lo que parece que el plan de estudios propuesto tiene potencial educativo para la adquisición del concepto integral en el nivel bachillerato. Ellos plantean que el siguiente paso es implementar la propuesta en grupos más amplios.

### ■ REFLEXIONES FINALES

Una vez concluida la revisión de la literatura sobre las conexiones matemáticas y los conceptos centrales del Cálculo: derivada e integral, podemos plantear ciertas reflexiones. El tema de conexiones matemáticas es un campo prolífico para realizar investigación porque ha sido poco atendido por la educación matemática, aunque hay esfuerzos en este sentido. Las investigaciones de 2007 a la fecha (revisadas) principalmente se han encargado de explorar las conexiones que emplean profesores y futuros profesores, así como estudiantes cuando abordan distintos objetos matemáticos. Estos fundamentalmente se han enfocado en el área de la Geometría y Álgebra, pero no han hecho exploraciones en otros dominios matemáticos y menos entre diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas, a excepción de Özgen (2013) que pretende apuntar en esa dirección. En México son nulos estos trabajos.

Coincidimos con Ponce (2015) cuando señala que es necesario seguir profundizando en el estudio de las conexiones matemáticas en distintos niveles educativos dado que tiene potencial para ser usadas en la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, economía, vida real). En Estados Unidos un referente para el estudio de las conexiones matemáticas son precisamente los estándares marcados por la *National Council of Teachers of Mathematics*; porque es ahí donde se priorizan para los distintos niveles educativos. Lo mismo se observa en documentos oficiales de Sudáfrica (Mwakapenda, 2008). En cambio, en los programas de bachillerato en México el término como tal está ausente, en su lugar utilizan un término equivalente, a saber, *relaciones*.

Por otra parte, identificamos que las investigaciones que exploran las conexiones matemáticas lo han hecho utilizando una variedad de marcos teóricos y metodológicos. En ese sentido, no hay un punto de acuerdo sobre un modelo teórico para caracterizarlas. Nuestros esfuerzos (en estudios posteriores) pueden aportar en ese sentido, es decir, a partir de los datos, concebir un marco para estudiar las conexiones cuando los estudiantes trabajan con actividades que implican el uso de la derivada e integral.

En el segundo grupo de investigaciones que estudian tanto a la derivada como a la integral, pero no a las conexiones propiamente, encontramos entre otros resultados que, trabajar en situación escolar los conceptos centrales del Cálculo de manera articulada es viable y mejora el rendimiento de los estudiantes. Asimismo, la resolución de problemas es una vía para relacionar ambos conceptos, aunque hemos identificado que esto sólo se hace para el contexto matemático y físico. Sin embargo, nosotros creemos que es necesario centrar nuestro interés en otros contextos. Hacia ese objetivo debemos enfocar nuestro esfuerzo para contribuir al tratamiento de ambos conceptos en el aula de clases. Por su parte, en el tercer grupo, identificamos una vasta literatura que aborda a la derivada y a la integral por separado bajo diversas perspectivas; pero al mismo tiempo, indican que es necesario seguir profundizando en el estudio de estos temas.

Finalmente, la revisión de la literatura nos permite concluir que: el tema de conexiones

matemáticas ha sido estudiado principalmente considerando al profesor o al marco curricular, pero son pocos aquellos que se centran en el alumno; y que han sido investigadas para distintos objetos matemáticos, pero son escasos para los conceptos centrales del Cálculo. Por tanto, nuestra revisión indica que es importante el estudio de las conexiones matemáticas entre la derivada y la integral, así como enfocarse a la actividad de los estudiantes; que es a donde apuntaremos nuestros esfuerzos en un proyecto más general que está en curso.

### ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 355-382.
- Beswick, K. y Muir, T. (2013). Making connections: Lessons on the use of video in pre-service teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development*, 15 (2), 27-51.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished PhD Thesis, Simon Fraser University. Canada.
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. & Lee, C. W. (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. *School Science and Mathematics*, 113(3), 120–134.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. y Presmeg, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 81-85). Atlanta, GA: Georgia State University.
- Hurts, C. (2007). Numeracy in Action: Students Connecting Mathematical Knowledge to a Range of Contexts. In J. Watson & K. Beswick (Eds.). *Mathematics: Essential research, essential practice, Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart*, (pp. 440-449). Adelaide: MERGA.
- Jaijan, W. y Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal*, 3(1), 91-100.
- Jukić, L. y Dahl, B. (2014). Retention of differential and integral calculus: a case study of a university student in physical chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(8), 1167-1187.
- Kachapova, F. & Kachapov, I. (2011). Applying change of variable to calculus problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 37-41.
- Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical*



*Education in Science and Technology*, 44(5), 641-651.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education*, 28, 189–202.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics: United State of America.

Özgen, K. (2013). Problem çözme bağlamında matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adayları örneği. *NWSA-Education Sciences*, 8(3), 323-345.

Ponce, B. (2015). *La conexión entre la derivada y la integral*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ponce-Campuzano, J. C. & Maldonado-Aguilar, M. A. (2014). The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow's work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(2), 293-303.

Quintana, D. J. (2010). *Tratamiento didáctico de la derivada-la aplicación del programa DERIVE*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Piura. Perú.

Rojas, P. (2010). *El aprendizaje basado en problemas (ABP) como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la integral indefinida en paralelo con derivadas y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en informática de INACAP, Chillán*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Bío-Bío. Chile.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2012). Un método para realizar una búsqueda bibliográfica en didáctica de las matemáticas. En A. Rosas y A. Romo (Eds.). *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones*, (pp. 23-33). México: Lectorum.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigaciones en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.