LA RECTA TANGENTE DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL: UNA EPISTEMOLOGIA DE PRÁCTICAS

Luis Arturo Serna Martínez, Gisela Montiel Espinosa y Apolo Castañeda Alonso
CICATA-IPN (México), CINVESTAV-IPN, México
luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx, gisela.montiel@gmail.com, apcastane@gmail.com

Palabras clave: recta tangente variacional, resignificación, herramienta matemática

Key words: variational tangent line, resignification, mathematical tool

RESUMEN: Con base en la Socioepistemología se diseñaron cinco secuencias didácticas relativas a la recta tangente. Se utilizó a la historia de las ideas matemáticas como un recurso para detectar el uso que da significado a la recta tangente. La historia nos permitió reconocer el uso de herramientas matemáticas para llevar a cabo actividades y en esta relación herramienta-actividad se fueron construyendo significados; se asume que dicho enfoque resulta una adecuada mediación gráfica entre la recta tangente, la propiedad de tangencia y la noción de derivada.

ABSTRACT: Five didactic sequences using the Socioepistemological Theory of Mathematics Education were designed. History was considereted with the intention of recognizing the moments where different ideas that, by resignifying, would build the variational tangent line were detected. History allowed us to recognize the use of mathematical tools, in order to carry out activities. In this relationship between tool and activity meanings were built; which they were also reflected in the responses of those attending the workshop. In turn we could also make use of the variational tangent line as a tool that allowed the arrival of the notion derived from a graphic view.

ANTECEDENTES

La materia de Cálculo Diferencial (CD) es cursada por estudiantes que tienen en promedio entre 17 y 18 años de edad en el sistema escolar mexicano, su estudio posibilita la conexión entre las matemáticas elementales y las avanzadas, caracterizadas estas últimas por el estudio de los procesos infinitos; sin embargo hay reportes de investigación que muestran que los estudiantes que ingresan a la universidad lo hacen con serias deficiencias en los temas tratados en Cálculo (Biza y Zachariades, 2010).

De acuerdo con ciertas investigaciones (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Dolores, 2007) la enseñanza del Cálculo privilegia el uso de algoritmos de naturaleza algebraica, así como la memorización de procedimientos y técnicas, como por ejemplo obtener límites, derivar, encontrar máximos y mínimos, por citar algunos casos; lo anterior es una consecuencia de no poder lograr un desarrollo conceptual adecuado de las ideas clave del Cálculo (Salinas y Alanís, 2009). Esta forma de enseñanza considera a las matemáticas como algo inamovible, de tal suerte que es incuestionable problematizar y cuestionar su estructura. Con base en este modelo de enseñanza el profesor expone sus temas, explicando lo mejor que puede los diferentes conceptos y resuelve algunos ejercicios para que posteriormente el estudiante haga algunos similares (Santi, 2011); lo cual no significa que se hayan construido los conceptos puestos en juego.

En el programa de CD se encuentra presente el tema de la interpretación geométrica de la derivada, el cual sirve para explicar el proceso al límite de una familia de rectas secantes que giran alrededor de un punto y que devienen en la recta tangente a la curva en un punto. Esta forma de enseñanza se ha reportado que ocasiona grandes dificultades entre los estudiantes, entre ellas es el transitar de una concepción global propia de la geometría Euclidiana, a una concepción local, propiedad fundamental del Cálculo (Biza, 2011; Dolores, 2007). Lo anterior debido a que no se le da un tratamiento didáctico a la idea que tienen los estudiantes proveniente de su curso de geometría en la cual aprenden que la recta tangente a un círculo lo toca en un solo punto, dejando a un lado de la recta todo el círculo, sin volver a tocarlo (o cruzarlo). Esta idea sigue prevaleciendo entre los estudiantes, aunque esto, como se sabe funciona con las cónicas pero no para otro tipo de curvas, por ejemplo la función cúbica. Por otro lado también se ha reportado sobre la dificultad que experimentan los estudiantes al tratar de concebir que la recta tangente puede cortar y ser tangente en la zona de corte (Biza y Zachariades, 2010; Canul, 2009).

Consideramos que el hecho de privilegiar el uso de algoritmos de naturaleza algebraica por un lado y por otro la poca importancia que se le da al hacer uso del recurso visual (Bisa, Nardi y Zachariades, 2009; Cantoral, 2013), tiene como consecuencia que el tema de la interpretación geométrica sea vista como de paso, como una aplicación de la derivada y no como aquello que permite su construcción, tal y como históricamente se ha mostrado (Serna, 2015). Es por eso que el hacer uso de la historia como un recurso que nos permita reconocer cuáles fueron aquellas ideas que dieron origen y se encontraban presentes al construir la recta tangente desde un punto de vista variacional, nos va a permitir dotar de significados a la construcción de la recta tangente como una herramienta que permita caracterizar a las curvas, pudiendo ser estas representaciones de funciones de fenómenos físicos de dos variables.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se encuentra ubicada al seno de la Matemática Educativa y estudia la construcción social del conocimiento matemático, problematizando el saber desde sus cuatro dimensiones: la epistemológica que da cuenta de la naturaleza del saber, reconociendo siempre que dicha naturaleza está ligada al contexto de donde nace el conocimiento; la didáctica que tiene que ver con la transmisión del conocimientos y los procesos institucionales que se encuentran implícitos en ello; la cognitiva a la cual se le confieren los procesos de apropiación del conocimiento, dando explicaciones sobre el asunto de conocer, tomando en cuenta siempre que existen mecanismos de construcción social, lo cual tiene que ver con que hay una forma de "ver", tratar el conocimiento que es común a un conjunto de individuos, se puede decir que hay una racionalidad contextualizada; y finalmente la social, que pone énfasis en la resignificación del conocimiento, normado por prácticas sociales, las cuales se infieren a partir de la actividad humana situada en un contexto sociocultural. Las cuatro componentes actúan de forma sistémica en la explicación de la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Nuestra investigación doctoral se tomó como base para el diseño de las cinco secuencias didácticas que fueron implementadas en el taller, se puso atención en las componentes cognitiva y didáctica, en donde se retomaron los resultados de corte socioepistemológico de la investigación llevada a cabo por Serna (2007), en donde la atención se centró en las dimensiones epistemológica y social.

En nuestra investigación nos interesamos por el problema de las tangentes, el cual fue una problemática tratada por los matemáticos europeos de los siglos XVII y XVIII, la intención era poder caracterizar aquello que caracteriza su uso en actividad matemática, la cual se encuentra situada en un momento y contexto determinado por lo que es plenamente humana y social. Un resultado de este estudio es lo que hemos llamado, "la práctica de la recta tangente variacional", la cual da una base de significados al conocimiento que pretendemos se construya en el aula.

El uso de la historia

La historia nos ha permitido reconocer los escenarios humanos en donde las matemáticas sirvieron como herramientas para llevar a cabo actividades, las cuales eran organizadas por grupos humanos con la intención específica de resolver problemas propios de su época y contexto sociocultural; toda esa actividad humana posee una base de significados que se encontraban presentes y se vio manifestada a partir del conocimiento puesto en uso. Existe por tanto una interacción entre la herramienta matemática y las acciones llevadas a cabo por las personas, siendo el resultado de la misma la construcción de significados, sin embargo como este es un proceso continuo se puede más bien hablar de la resignificación del conocimiento.

El discurso Matemático Escolar (dME) actual no manifiesta esta primera base de significados que se encuentran presenten en el conocimiento y que lo hicieron posible, esto se debe a un fenómeno que se conoce como la Transposición Didáctica, el cual da cuenta del cambio que sufre el conocimiento matemático cuando es puesto en condición de situación escolar. Nuestra propuesta pretende rescatar esas ideas que estuvieron presentes y sirvieron para la construcción social del conocimiento matemático.

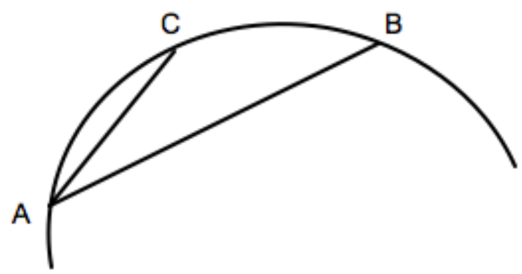
Usos-herramienta-actividad, práctica-resignificación-funcionalidad y práctica social

El uso de la herramienta matemática para llevar a cabo acciones posibilita la construcción de significados, los mismos se encuentran situados por el contexto sociocultural en donde es llevada a cabo la actividad humana. Cuando las actividades son organizadas de manera intencional con la intención de resolver un problema se dice que se tiene una práctica, la cual no surge en un instante sino más bien es producto de generaciones ya que es algo que le ha servido a las personas y además conforme pasa el tiempo se puede decir que cada vez va mejorando.

Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo de los presentados en la secuencia didáctica 1 a los asistentes del taller.

Copérnico mencionaba en su teorema sexto de su libro, *Sobre las revoluciones de las orbes celestes* que, la razón de dos arcos con un punto común, siendo uno mayor que otro, es mayor que la razón de las subtensas (cuerdas) que se generan con los mismos puntos, como se ilustra en la siguiente figura:

Figura 1. (Serna, 2015)



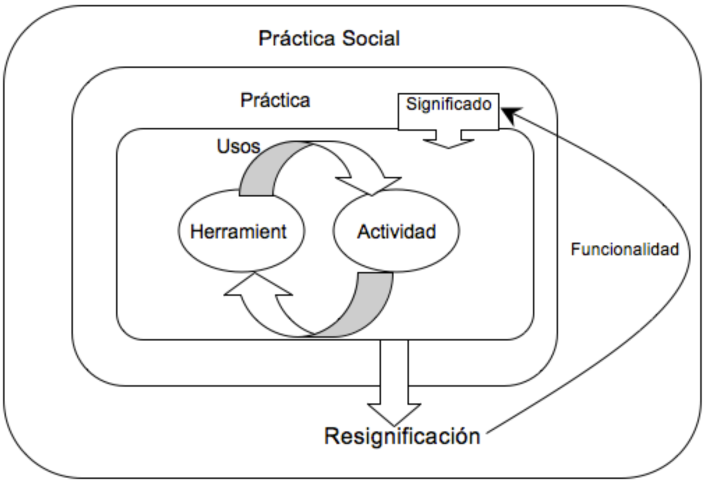
La herramienta matemática que expresa tal teorema es:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Ante la necesidad de poder predecir las posiciones de los cuerpos celestes, Copérnico fue haciendo mediciones de tal forma que los puntos B y C se acercaban cada vez más y más al punto A.

Como se observa existe un contexto en donde es usada la herramienta matemática para ejecutar acciones como son: *calcular y comparar,* tales acciones fueron organizadas de manera intencional para resolver el problema en cuestión a partir de una *Práctica*. La relación dialéctica herramienta-actividad permite la construcción de nuevos significados, que enriquecen a los ya existentes es decir hay una resignificación del conocimiento que tiene un carácter *funcional* ya que posibilita hacer una interpretación de la realidad; las explicaciones y argumentos dados por los grupos humanos son normados por una *Práctica Social,* que en el caso mostrado es la práctica de la predicción para ver más detalles se puede consultar la tesis de Serna (2015).

Figura 2. Esquema explicativo de la Construcción Social del Conocimiento matemático (Serna, 2015, p. 130)



METODO

Cada una de las primeras cuatro secuencias didácticas diseñadas obedece a un momento de la historia, en donde a partir de nuestro análisis centrado en la construcción de la recta tangente variacional, nos permitió reconocer diferentes características de la recta tangente que iban enriqueciendo a lo ya construido anteriormente, es decir había una resignificación progresiva del saber (Reyes-Gasperini, 2011). La quinta secuencia se diseño para que se pudiera hacer uso de la recta tangente variacional (la cual fue construida en las primeras cuatro secuencias) para resolver un problema el cual consistió en hacer la gráfica de la derivada de una función cuadrática y una cúbica de las cuales no se daba su expresión matemática.

Las secuencias fueron diseñadas para estudiantes de bachillerato, que en México se considera el nivel medio superior (de 15 a 17 años en promedio de edad), es decir antes de ingresar a la universidad; la materia de Pensamiento del Cálculo Diferencial es llamada así en el sistema escolar del Estado de México y es la que tradicionalmente se conoce como Cálculo Diferencial.

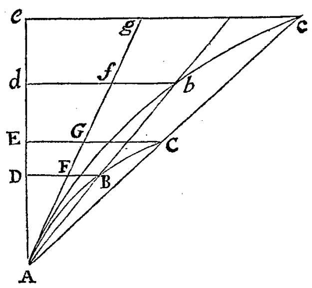
Primera Secuencia Didáctica

El primer momento histórico que sirvió como base para la creación de la secuencia didáctica 1 fue con Copérnico, la actividad consistió en que a partir de una circunferencia donde se conoce el ángulo central de dos arcos que parte de un punto común, en donde uno de los arcos es mayor que el otro. Lo primero que se solicita es que los asistentes al taller puedan deducir una fórmula para calcular la cuerda subtendida por dos puntos de una circunferencia, dado que se conoce su ángulo central; una vez obtenida la fórmula se solicita que vayan acercando cada vez más y más los puntos B y C al punto A (ver figura 1) para lo cual se les proporciona una tabla que sirve para comparar la razón de las cuerdas con respecto a la razón de los arcos, los asistentes al taller pudieron verificar que conforme los puntos se acercaban cada vez más al punto A, la desigualdad mencionada dejaba de serlo para convertirse en una igualdad. Con esto se obtuvo una primera conclusión que es: si dos puntos de una curva se acercan lo suficiente (sin llegar a tocarse) en esa región la curva se comporta como una recta.

Segunda Secuencia didáctica

El segundo momento histórico tomó como referente a Newton con lo enunciado en su libro *Principios Matemáticos* en donde en el lema IX se menciona que cuando dos triángulos rectángulos son semejantes, la razón de sus áreas es igual a la razón de los cuadrados de sus lados homólogos. En el libro mencionado se muestra la siguiente figura:

Figura 3. (Serna, 2015, p. 171)



Inicialmente se les pregunto a los asistentes al taller si los triángulos ∆ABD y ∆ ACE son semejantes, se contestó que no, seguidamente se preguntó, lo que pasaría si ahora los puntos B y C se acercaran cada vez más y más al punto A, para poder contestar a la pregunta se hizo uso de una parábola que abre hacia abajo, cuya expresión matemática es $f(x) = -x^2 + 8x$, al darle un valor a la x se podía calcular la base y altura de los triángulos mostrados en la figura 3, por lo que también se podría calcular el área, ahora se está en la posibilidad de comparar la razón de dos áreas y el cuadrado de sus alturas (considerando a las alturas como los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ respectivamente) para hacer varias comparaciones se les proporcionó a los asistentes unas tablas para que conforme los puntos B y C se acercaban más y más a el punto A, pudieran ver que es lo que estaba pasando.

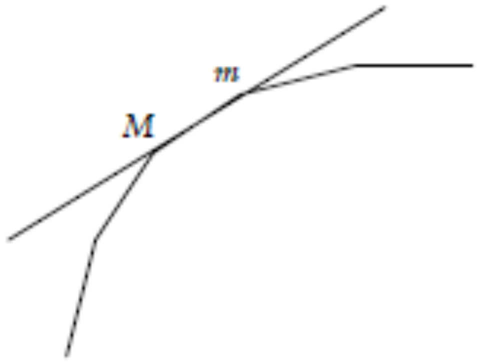
Los participantes se pudieron percatar que en algún momento los dos triángulos llegarían a ser semejantes, lo cual de alguna forma retomaba la conclusión obtenida de la secuencia anterior, pero además al observar que los dos triángulos rectángulos que llegarían a ser semejantes serían infinitamente pequeños y compartirían la misma hipotenusa, por lo que tendría un cierto ángulo con respecto al eje horizontal y además si esta pequeña hipotenusa se extendía en ambos sentidos se podía formar la recta tangente a la curva en el punto A.

Tercer Secuencia didáctica

Haciendo uso de lo ya construido en las dos primeras secuencias, que es: en la región de la curva situada entre dos puntos infinitamente cercanos, ahí se comporta como una recta y además ese pequeño segmento de recta tiene un ángulo de inclinación y si se extiende en ambos sentidos se forma la recta tangente (que tiene exactamente el mismo ángulo de inclinación que el pequeño segmento de recta) ahora se pretende que los estudiantes construyan la idea de que en cada punto de la curva hay un diferente ángulo ya que dicho ángulo tiene que ver con los pequeños catetos del triángulo infinitesimal formado. En esta secuencia se hizo uso de las ideas provenientes del Marqués de L´Hospital quien dijo:

> Se requiere que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una de estas infinitamente pequeñas: o (lo cual es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno de ellos infinitamente pequeños,…

Figura 4.



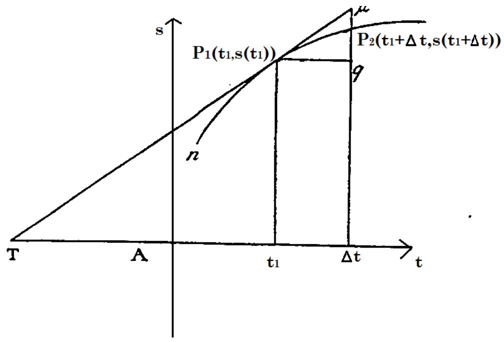
> Si se prolonga una de los pequeños lados Mm de la poligonal que compone una línea curva, este pequeño lado así prolongado será llamado la tangente de la curva en el punto M o m.
>
> *(L´Hospital, 1696)*

De tal forma que se puede hacer la consideración de que un punto es un pequeño segmento infinitesimal. Se propuso a los asistentes un problema de tiro vertical en donde se dio la expresión matemática $s(t) = 30t - 4.9t^2$ la cual representa una parábola que abre hacia abajo, se les solicitó a los participantes mediante una serie de preguntas y actividades que identificaran donde la razón de cambio es positiva y donde negativa, así como preguntas cuyas respuestas indicarían si se comprende que en cada punto de la curva la pendiente de la recta tangente es distinta y por lo tanto la velocidad instantánea. Los asistentes pudieron contestar las preguntas indicadas y construir la noción de recta tangente variacional.

Cuarta Secuencia didáctica

En esta secuencia se tomó como referente a Euler ya que es un matemático que aunque todavía hizo uso de argumentos geométricos-visuales, comienza con él un abandono de estos. Euler hizo un análisis del cambio a partir de desarrollos algebraicos, esto a partir de atribuirle una expresión algebraica a dicho cambio el cual es representado geométricamente en una gráfica como el cateto de un triángulo rectángulo infinitesimal y dividiendo el cambio de la variable dependiente (como lo llamamos actualmente) con respecto al cambio de la variable independiente, se obtiene una expresión en donde hay términos que son despreciados por ser considerados infinitamente pequeños en relación a los demás; de tal forma que se puede obtener una expresión algebraica que representa la razón de cambio instantánea. Es evidente que al darle diferentes valores a la variable dependiente se obtienen distintos valores de la razón de cambio en cada instante del tiempo. La figura utilizada fue la siguiente:

Figura 5. (Serna, 2015)



La figura utilizada es adaptada (con respecto a la usada por Euler) con relación a la nomenclatura utilizada actualmente a los estudiantes. Los asistentes al taller pudieron constatar lo anteriormente mencionado.

Quinta Secuencia didáctica

Finalmente uno de los actividades solicitadas en la secuencia didáctica 5 es la gráfica de la derivada de una parábola que abre hacia abajo y una función cúbica, en ninguno de los casos se les proporciona la expresión matemática, esta secuencia no fue desarrollada por los asistentes, más bien se les comento sobre resultados obtenidos con los estudiantes de nivel medio superior; con respecto a ello se mencionó que cuando se aplica regularmente no hay ninguna dificultad con obtener la gráfica de la derivada de la parábola y en cuanto a la segunda gráfica algunos estudiantes pueden trazar la gráfica y otros tienen una buena aproximación a la misma ya que en lugar de dibujar una parábola trazan una gráfica que tiene la forma de “V” como dos rectas que se tocan en un punto en la parte inferior de la gráfica. Los estudiantes que la resuelven correctamente dan argumentos que han construido al ir desarrollando las primeras cuatro secuencias.

CONCLUSIONES

Se pudo constatar que se puede ir construyendo la recta tangente variacional al diseñar una secuencia en donde las herramientas matemáticas utilizadas permiten la construcción de significados y la resignificación de los mismos ya que cada secuencia iba retomando las ideas construidas anteriormente, además se llevó a cabo el ejercicio de la práctica de la recta tangente variacional por medio de la organización intencional de actividades en donde se empleaban argumentos variacionales.

Cada secuencia tenía como objetivo que se fueran construyendo los diferentes significados asociados a la recta tangente variacional, en donde el conocimiento construido era funcional ya que permitía en cada momento hacer un análisis de lo que estaba pasando, de la realidad. Desde nuestro punto de vista se logró el objetivo planteado el cual consistía en reconocer que se puede construir la recta tangente variacional haciendo uso de la historia para dotar a las actividades realizadas de significados, lo que a su vez permite usarla como herramienta para arribar a la construcción de la derivada desde un punto de vista gráfico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biza, I. (2011). Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. *Technology, Knowledge and Learning.* 16 (2), 125-151.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis*. Research in Mathematics Education,* 10, (1), pp. 53-70.

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation*. For the Learning of Mathematics.* 29 (3), 31-36.

Biza, I. y Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line*. The Journal of Mathematical Behavior,* 29, (4), pp. 218-229.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción leibniziana. El caso de la Recta Tangente en el marco de la Convención Matemática.* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada.* México: Díaz de Santos.

L'Hospital, A. (1696). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curva*s (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). Edit. UNAM (1998). México.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de Matemáticas.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (3), 355-382.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Estudies in Mathematics.* 77 (2-3), 285-311.

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente.* Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Serna, L. (2015). *Estudio socioepistemológico de la tangente como objeto escolar.* Tesis de Doctorado no publicada, CICATA-IPN, México.