LA RELEVANCIA DE CONOCER EL LENGUAJE MATEMÁTICO

P. Sastre Vázquez, R. E. D´Andrea

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina)

Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario (Argentina)

Palabras clave: lenguaje matemático; didáctica; formación del profesorado

Key words: mathematical language; teaching; teacher training

RESUMEN: El lenguaje matemático puede manifestarse coloquial, visual y simbólicamente. El lenguaje simbólico formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, ya que no puede trasladar automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático. El objetivo de este trabajo es: 1. Reflexionar sobre la relevancia que tiene conocer el lenguaje matemático para el estudiante de nivel medio y universitario. 2. Reflexionar en torno a la contribución que aporta a la formación del Profesorado, una didáctica del lenguaje matemático, desde una perspectiva más informal, sin los planteos tradicionales que introducen al estudiante en cuestiones formales de Lógica simbólica.

ABSTRACT: The mathematical language can express colloquially, visually and symbolically. The formal symbolic language made up of symbols rather than words, It is what really makes the student perform a real effort to understand mathematics because it cannot automatically translate natural language commonly used mathematical language. The objective of this work is: 1. Reflect on the relevance to know mathematical language in high school and university level. 2. Reflect on the contribution of a teaching for mathematical language that can contribute to teacher training, from a casual perspective, without the traditional postures that introduce students to formal topics of symbolic logical.

INTRODUCCIÓN

Cuando se discute acerca del conocimiento que deben poseer los estudiantes sobre lenguaje matemático, la cuestión no se reduce a un simple tratamiento de símbolos y notaciones. Una adecuada apropiación de este lenguaje, requiere que además del conocimiento de los símbolos como un código, se conozca su 'funcionamiento'. Por ejemplo, si se está hablando de un cuantificador universal, no se puede soslayar el proceso que permite sostener el valor de verdad de proposiciones cuantificadas universalmente. Es una cuestión implícita y esto tácitamente hace referencia a la epistemología matemática y no a un mero conocimiento de un signo que tiene un cierto significado. Una inadecuada apropiación puede conducir al síndrome del conocimiento frágil (Perkins, 1995), síndrome que describe al problema que el estudiante presenta en el abordaje y apropiación del conocimiento bajo diversos aspectos. Si buena parte del conocimiento 'adquirido' por el estudiante se esfuma, el síndrome es de conocimiento olvidado. Si el estudiante recuerda los conocimientos adquiridos durante el examen, pero es incapaz de recordarlos o utilizarlos en situaciones que admiten más de una respuesta y en las que verdaderamente los necesitan, el síndrome es de conocimiento inerte. Si el estudiante aún después de haber recibido una instrucción considerable, suele tener ideas ingenuas acerca de la naturaleza de las cosas, el síndrome es de conocimiento ingenuo. Finalmente, si el estudiante adquiere conocimientos con carácter ritual con el fin de cumplir tareas académicas o escolares, el síndrome es de conocimiento ritual. Cualquiera de los cuatro aspectos descriptos puede encuadrarse perfectamente para describir una inadecuada apropiación de cuestiones inherentes al lenguaje matemático. En un intento de dar solución a estos problemas se presentan bases teóricas que se estima, podrán ser utilizadas en la programación de talleres para la formación del profesorado. El objetivo de este trabajo es: 1. Reflexionar sobre la relevancia que tiene conocer el lenguaje matemático para el estudiante de nivel medio y universitario. 2. Reflexionar en torno a la contribución que aporta a la formación del Profesorado, una didáctica del lenguaje matemático, desde una perspectiva más informal, sin los planteos tradicionales que introducen al estudiante en cuestiones formales de Lógica simbólica.

MARCO TEÓRICO

El lenguaje matemático puede manifestarse coloquialmente, cuando se expresa en forma oral o escrita. También puede formularse visualmente, cuando se hace presente a través de un simple gráfico a mano alzada ó el realizado por un software o una imagen impresa. Asimismo, puede presentarse simbólicamente, siendo esta forma del lenguaje, la que le es propia a Matemática. Se trata del lenguaje simbólico que es su lenguaje-código. El lenguaje simbólico formal de la Matemática ostenta representaciones lingüísticas que expresan operaciones o transformaciones que hacen referencia a diferentes razonamientos y argumentaciones que son motivadas por estructuras conceptuales específicas. Si se considera a la Matemática como una manifestación semiótica (Radford, 2003) entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. El lenguaje matemático está dotado de una simbología y una estructura que le son propias. Es fundamental conocer el significado de sus símbolos para que el estudiante sea capaz de interpretar lo que se quiere decir con ellos. Precisamente la falta de comprensión de los conceptos matemáticos expresados en el lenguaje que le es propio a esta Ciencia, no permite ver como éstos se relacionan y como son utilizados para la resolución de problemas y procesos de validación referentes a su epistemología consistente en la demostración de proposiciones y la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, entre otras acciones.

En general, estos conocimientos o son inexistentes o no tienen la suficiente solidez en los docentes tanto a nivel medio como universitario, lo que debilita la formación del profesorado, y es que precisamente, como señala Adúriz-Bravo (2002), el profesor de Ciencias, en general, debe saber no solo de la Ciencia sino que también debe saber sobre la Ciencia, que es lo esencialmente esperado para una profesionalización docente. Matemática forma parte del currículum de estudios desde los primeros años de escolaridad, y se instala con una cadena de símbolos que van penetrando todos los espacios del lenguaje. De esta forma, el sujeto de aprendizaje va accediendo a fórmulas, leyes y algoritmos que determinan conductas matemáticas muy definidas para hallar soluciones y que van desde acciones tales como numerar, contar, ordenar, clasificar y hasta inferir.

Niss (2003) encuadra a la utilización de los símbolos matemáticos, lo que implícitamente se refiere al conocimiento del lenguaje matemático, dentro de las competencias matemáticas que un estudiante debe tener. Su propuesta para definir la competencia matemática queda configurada como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticas en las que estas juegan o podrían jugar su papel, identificando a tales competencias del modo siguiente: Pensar matemáticamente; Plantear y resolver problemas matemáticos; Modelar matemáticamente; Argumentar matemáticamente; Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos); Utilizar los símbolos matemáticos; Comunicarse con las Matemáticas y comunicar sobre Matemáticas; Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías).

El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, debido a su complejidad. Como consecuencia, el estudiante no traslada automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático.

Pimm (1999) afirma que el uso generalizado que hacen los docentes en el aula del lenguaje formal, tiene consecuencias trascendentes, ya que, en lugar de modelar los usos matemáticos desde su lenguaje informal, enfatiza en el lenguaje formal de forma ostensiva y recurrente, lo que termina por confundir, atribular y disgustar al sujeto de aprendizaje. En relación a esto, es de destacar que D´Andrea (2012) propuso una ingeniería didáctica para la comprensión y desarrollo de la argumentación de teoremas matemáticos en estudiantes universitarios postulando como paso inicial la comprensión por parte del estudiante, de la proposición que se quiere probar, desde el lenguaje natural. Por su lado, Fennell (citado por Ruiz, 2003, p.34.) señala que *"en la comunicación matemática los símbolos estandarizados y las definiciones de la terminología son necesarios, pero la enseñanza de la matemática en lenguaje muy formalizado, algunas veces, causa una especie de bloqueo en la comprensión*"

Este tipo de situaciones debe ser manipulada diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos aunque, en el momento de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. Debe destacarse que la transmisión y comprensión del lenguaje matemático, en la medida de lo posible, debe ser un conocimiento introductorio. Es decir, que tanto a nivel universitario como a nivel medio debería formar parte del currículum del primer curso de Matemática de la carrera escogida o el primer año de estudios del estudiante secundario. Si esto no fuese posible, es fundamental que el profesor luego de un test diagnóstico que determine los conocimientos existentes acerca del lenguaje matemático en el grupo de estudiantes, instruya a estos de acuerdo a los resultados obtenidos. Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) observaron que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes, es precisamente desconocimiento del lenguaje matemático. Este desconocimiento es causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, lo que dificulta inexorablemente el acceso a la incorporación de nuevas estructuras conceptuales. Consecuentemente, los estudiantes no son capaces de asociar los conceptos con sus definiciones y menos aún son capaces de ejemplificar. Es decir, que no pueden utilizar el lenguaje matemático de una forma 'concreta' ni tampoco de una forma 'abstracta', los conceptos serían para ellos palabras carentes de significación matemática en sentido estricto.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS SUSTENTADAS EN EL MARCO TEÓRICO

Para este estudio se consideraron tres poblaciones diferentes con el objetivo de realizar diferentes actividades con cada una, a los efectos de estudiarlas en su desarrollo y resultados.

Para las actividades de taller, los estudiantes del último año del Profesorado de Matemática del Instituto N° 23 "Maestro Addad" de Puerto General San Martín, provincia de Santa Fe de la República Argentina y también profesores de Matemática que realizan su ejercicio profesional en colegios de nivel de medio de las ciudades de Puerto General San Martín y San Lorenzo, ambas situadas en provincia de Santa Fe de la República Argentina.

Por otro lado, estudiantes universitarios de Ingeniería Industrial y de Ingeniería Ambiental de la Facultad de Química e Ingeniería, Campus Rosario de la Pontificia Universidad Católica Argentina situada en la ciudad de Rosario, provincia de Santa Fe de la República Argentina.

Los resultados obtenidos de las investigaciones llevadas a cabo por Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) generaron la necesidad de considerar acciones que permitieran interactuar con otros niveles del sistema educativo, empleando la extensión como estrategia. Con esas acciones se pretendió realizar un aporte para la divulgación del conocimiento científico en un marco de integración. Estas acciones estuvieron dirigidas a Profesores de Matemática del ciclo medio y estudiantes del último año del Profesorado de Matemática. Estas actividades pretendieron aportar una mejora a la formación del profesorado, extrapolando didácticamente los resultados obtenidos de diferentes trabajos de investigación, surgiendo de ellas, un espacio que posibilitara la reflexión sobre la importancia y las estrategias didácticas para la inclusión del lenguaje matemático, la argumentación y la demostración entre los contenidos de la enseñanza media y terciaria. Estos espacios devinieron en talleres sobre el lenguaje matemático y talleres sobre la demostración matemática. De este modo se intentó construir un puente de articulación entre Escuela Media, Profesorado y Universidad.

Consecuentemente surgió la posibilidad de analizar el desempeño y evolución de estudiantes universitarios durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático. Para el logro de estos objetivos, durante los años 2009 a 2012 y en un curso anual de Álgebra y Geometría para Carreras de Ingeniería se introdujo a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático de la forma siguiente. Durante los dos primeros años de este estudio: 2009/10, se instruyó a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático bajo un paradigma tradicional, utilizando estrictamente contenidos de Lógica tradicional o aristotélica y Lógica simbólica. Se le mostraron los contenidos aproximadamente del modo siguiente. Primero se los instruyó en el conocimiento formal de las estructuras esenciales de la lógica tradicional: concepto, juicio y razonamiento. Luego se los introdujo en el concepto de proposición y luego los diferentes conectivos proposicionales tales como la conjunción; negación; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación. La presentación de estos conectivos se hizo desde las clásicas tablas de verdad. Posteriormente se los encuadró en el conocimiento de las estructuras conceptuales de función proposicional y su proceso de cuantificación; los métodos de demostración y otras cuestiones epistemológicas asociadas. En los dos años siguientes del estudio, el diseño instruccional sobre lenguaje matemático se enfocó desde un paradigma basado en la construcción de los contenidos a partir de ejemplos extraídos de la Matemática y orientados específicamente a cuestiones de notación y epistemología que hacen al lenguaje y método de esta Ciencia, evitando por completo en el discurso, terminología específica de la Lógica tradicional y simbólica. El desempeño y la evolución se evaluaron por medio del rendimiento académico reflejado en las calificaciones obtenidas en exámenes parciales y finales. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes que recibieron una instrucción en el lenguaje matemático desde un paradigma basado en la construcción, tuvieron una mejor predisposición y desempeño en el manejo del lenguaje matemático. Además, para estos grupos se observó un mayor rendimiento en la capacidad de producir una transposición desde el lenguaje natural hacia el lenguaje simbólico. Mientras que los estudiantes instruidos en el lenguaje matemático desde un paradigma tradicional sostenido por contenidos más formales de lógica mostraron poseer dificultades para la comprensión de nuevas estructuras conceptuales. Se especula que esto podría explicarse por el enfoque didáctico adoptado. Se observó también, en base a esta especulación, que los estudiantes instruidos en un discurso más constructivo pudieron abordar procesos de validación desde una mirada significativa y comprensiva.

UNA INTRODUCCIÓN ÁULICA INFORMAL DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

La epistemología de la Ciencia Matemática tiene como pilares fundamentales el raciocinio y la abstracción. El diseño de un curso cabal de Matemática no puede soslayar su epistemología y para poder ponerla en acción, se requiere conocer su lenguaje. Un paradigma tradicional de aprendizaje de tipo normativo, es decir, centrado en los contenidos de aprendizaje que esté direccionado al proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático, puede inducir a una forzada e inadecuada apropiación. La aparición de las TIC hacia finales del siglo XX; los nuevos paradigmas de aprendizaje en el comienzo del siglo XXI y resultados obtenidos de diferentes investigaciones realizadas en torno a la adquisición del lenguaje matemático en diferentes niveles, llevaron a reflexionar sobre como instruir al estudiante ingresante de ingeniería en el lenguaje matemático. En algunos de los currículums tradicionales se encuadraba al estudiante en el lenguaje matemático a través de nociones de lógica simbólica. Mediante la información recabada a través de docentes y estudiantes de diferentes universidades, se pudo observar que ciertos rigores formales del desarrollo de las nociones de lógica simbólica bloqueaban a los estudiantes notablemente impidiendo un aprendizaje fluido y efectivo. Por lo general, estas nociones se introducían como capítulo inicial en alguna de las primeras asignaturas del área de Matemática en el currículum de Ingeniería. Debido al carácter de inicial, esta unidad didáctica se convertía en un inicio ‘poco feliz’ para los ingresantes. En base al estudio realizado por D´Andrea y Sastre Vázquez (2013) sobre el desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje matemático, se presentaron a las clásicas nociones de lógica simbólica bajo el nombre: El Lenguaje Matemático. Se quitaron las tablas de verdad y se introducieron intuitivamente a los conectores lógicos, definiéndoselos de una manera simple e informal considerando para cada uno su correlato con el Álgebra conjuntista, lo que permitió reforzar más aún la idea transmitida por el conector. Al resto de los contenidos se les dio un tratamiento simple carente de rigor formal y teñido de numerosos ejemplos muy simples y una praxis que extrapolara lo conceptual. Ejemplos y actividades procedimentales fueron extraídas del Álgebra elemental.

Así, por ejemplo, los conectores lógicos son exhibidos no a través de este nombre, sino como conectores proposicionales luego de haber introducido la noción de proposición y de función proposicional a través de ejemplos. En lugar de introducir a la conjunción por medio de la tradicional tabla de verdad, se estimuló al estudiante a que pudiera pensar los valores de verdad de una conjunción a partir de ejemplos matemáticos elementales. Se definió a la conjunción, de modo de inducir al estudiante, desde la definición, a que este pudiera determinar el valor de verdad de este conector. La definición establecida reza lo siguiente: La conjunción conecta dos o más proposiciones de forma tal que todas las proposiciones se cumplen o no, simultáneamente. Es un conector que permite vincular desde dos a un número finito de proposiciones. Los siguientes ejemplos, tienen como objetivo que el estudiante pueda concluir acerca del valor de verdad de una conjunción, y fueron analizados en conjunto entre el docente y los estudiantes. Los ejemplos considerados son los siguientes:

$x=1 \wedge x=2 \wedge x=3$; $x\neq1 \wedge x\neq2 \wedge x\neq3$; $x\in R \wedge x^2\geq0$.

De esta forma, las clásicas conclusiones extraídas a través de una tabla de verdad binaria pueden obtenerse de forma intuitiva a través de ejemplos representativos como los presentados, y de otros adicionales aportados por el docente a raíz de la discusión con los estudiantes. Así, el estudiante puede llegar a ver que una conjunción de un número finito de proposiciones es verdadera cuando es verdadera cada una de las proposiciones que constituyen a esa conjunción. Mientras que una conjunción de un número finito de proposiciones es falsa cuando por lo menos es falsa alguna de las proposiciones componentes. Se continúa con la disyunción inclusiva introduciendo ejemplos similares a los utilizados en la conjunción, pero considerando primero un ejemplo coloquial que permita que el estudiante vea que se trata de una opción inclusiva. El ejemplo adecuado para el logro de este objetivo es el siguiente: *"Regalo los libros nuevos o los que ya no me sirven"* (Rojo, 1994). De esta forma, los estudiantes guiados por el docente pueden construir el valor de verdad de una disyunción inclusiva a través de una discusión conjunta. Luego, de forma similar se introduce a la disyunción exclusiva empleando un ejemplo del tipo: *"A las diez de la noche, voy al cine o al teatro"*. Con este ejemplo u otro de estructura similar, se pretende que el estudiante pueda caracterizar el valor de verdad de una disyunción exclusiva que a diferencia de los conectores anteriores es binario. Si bien, la disyunción inclusiva es de un uso común en Matemática, y la exclusiva ni se menciona, se la introduce a los efectos de que el estudiante pueda comprender totalmente el carácter inclusivo de la disyunción que lleva este nombre por comparación con el comportamiento extremo que reviste la disyunción exclusiva. La implicación o condicional, sin duda es el momento clave de este proceso, ya que es un conector que no es simple de comprender para el estudiante y es el específico de Matemática ya que por lo general todas las proposiciones matemáticas poseen la estructura de una implicación o doble implicación. El único caso que el estudiante puede entender rápidamente es el más elemental y es el caso de antecedente y consecuente verdadero. La introducción del ejemplo: *"Si apruebo el examen, entonces te presto el apunte"* (Rojo, 1994) y su análisis caso por caso, lleva de acuerdo a la discusión generada con el estudiante a repensar nuevos ejemplos, de forma de llegar a concluir la caracterización del valor de verdad de este conector.

CONCLUSIONES

Las reflexiones generadas por los talleres realizados con estudiantes de Profesorado y Profesores de Matemática del ciclo medio y la experiencia de introducir el lenguaje matemático desde diferentes paradigmas con estudiantes de Ingeniería permitieron esbozar las siguientes conclusiones. El enfoque tradicional de la educación matemática, con procesos de comunicación unilaterales y donde no se hace énfasis en la transmisión y comprensión del lenguaje formalizado, trae aparejadas consecuencias negativas. El lenguaje matemático tiene su propia sintaxis la que, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y es importante tener en cuenta que no existen razones valederas para admitir que el estudiante descubrirá tal sintaxis por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto. La adquisición del dominio de este lenguaje no se logra de forma espontánea, sino que se requiere del ejercicio de acciones mentales que deberían ser desarrolladas en actividades propuestas al estudiante por el docente. Los docentes deberán reflexionar y ser conscientes de la importancia de este lenguaje. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje "en hacer ejercicios" en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente. La formación del Profesorado es trascendente para el logro de aprendizajes definidos en la comprensión y aplicación del lenguaje matemático ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y la didáctica específica de la matemática, pudiendo entonces realizar una verdadera extrapolación áulica desde "*un saber sabio a un saber enseñado"* (Chevallard, 1998). En el siglo IV A.C., Aristóteles, decía lo siguiente: "la naturaleza es un libro abierto expresado en el lenguaje de la matemática", además afirmaba que el lenguaje cotidiano estaba saturado de ambigüedades, por lo que el lenguaje de la ciencia había que diferenciarlo del cotidiano. Precisamente, gran parte de la importancia que posee la simbología matemática es la carencia de ambigüedades, por lo que las ideas que comunica son de una precisión rigurosa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adúriz – Bravo, A. (2002). Un Modelo para Introducir la Naturaleza de la Ciencia en la Formación de los Profesores de Ciencias. *Pensamiento Educativo*, 30, 315 – 330

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

D´Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). Desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje Matemático. En M.E. Ascheri; R.A. Pizarro; N. Ferreyra. Actas del III Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología. 5° Congreso de Educación en Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional de Catamarca. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Catamarca. República Argentina.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (eds.). *Educating for the future. Proceding of an international symposium on matematics teacher education*, 179-192. Royal Swedish Academy of Sciences, Göteborg, Suecia

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid: Morata

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledgeand social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 123–150.

Rojo, A. (1994). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Ruiz, D (2003). *El Lenguaje en Clases de Matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes.

Sastre Vázquez, P.; D´Andrea, R.E. (2011). *Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería.* En Santos, N.; Acosta, G.; Aguado, J.L. (Eds.). *Actas del XVI EMCI Nacional y VIII Internacional*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Olavarría. Provincia de Buenos Aires.