

## **ENSEÑANDO TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA**

Martín Eduardo Acosta G., [martin@matematicas.uis.edu.co](mailto:martin@matematicas.uis.edu.co)  
Escuela de Matemáticas  
Grupo Edumat-UIS  
Universidad Industrial de Santander

### **Introducción**

El uso de la tecnología en la enseñanza en general y en las matemáticas en particular se ha impuesto como un fenómeno de moda o modernismo. Actualmente se ha construido un discurso que justifica el uso de la tecnología como elemento de motivación para los estudiantes, quienes se sienten atraídos por las máquinas digitales en general.

Ante esta situación es necesario que la comunidad de educación matemática realice un esfuerzo de reflexión crítica, evitando las decisiones fundamentadas únicamente en la presión social o la moda. Deben buscarse respuestas a las siguientes preguntas, entre otras:

- ¿Es necesario el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son las ventajas del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son los efectos del uso de la tecnología en el aprendizaje?
- ¿Cómo debe transformarse la práctica de la enseñanza para poder aprovechar las ventajas de la tecnología?
- ¿Es viable un uso esporádico de la tecnología?
- ¿El sistema educativo (macro y micro) está en capacidad de garantizar un uso intensivo de la tecnología?

Con el fin de contribuir a esta reflexión, vamos a examinar el uso de una tecnología (el software de geometría dinámica) desde una de las teorías de educación matemática que más ha contribuido a construir un fundamento científico de esta disciplina: la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Trataremos entonces de exponer de manera sucinta las principales ideas de esa teoría que contribuyen a examinar el rol de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, al mismo tiempo que sirven de guía para el diseño de secuencias de enseñanza y ejemplificaremos su aplicación al diseño de actividades utilizando SGD.

## **La Teoría de las Situaciones Didácticas**

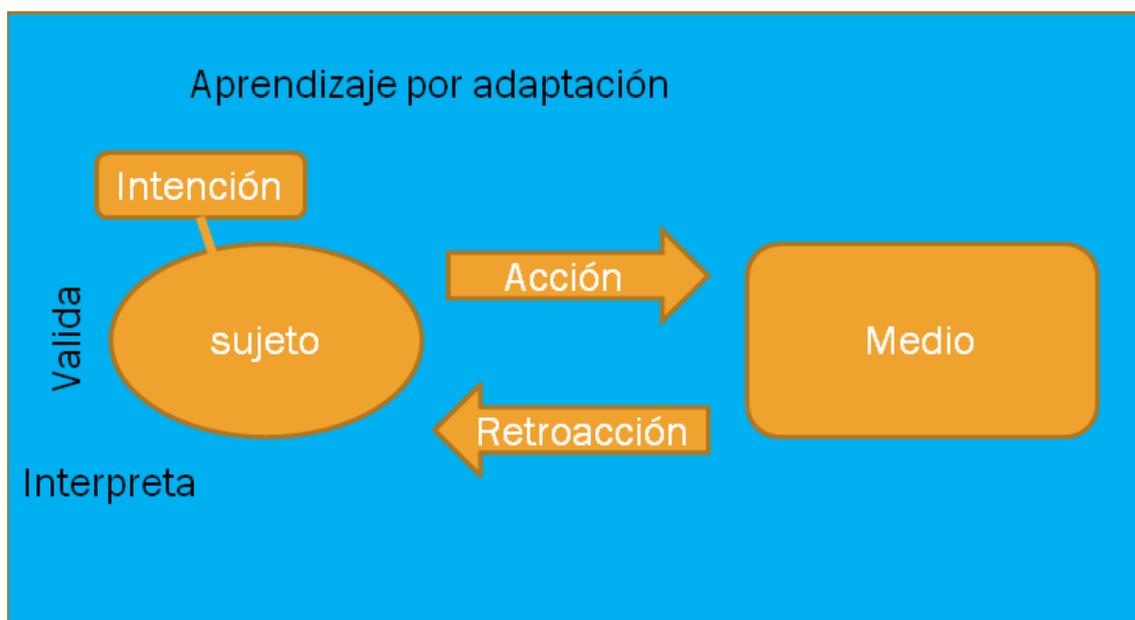
### **Aprendizaje por adaptación**

El concepto alrededor del cual se construye la teoría de las Situaciones Didácticas es el *aprendizaje por adaptación*, concepto heredado de la teoría piagetana del aprendizaje. El aprendizaje por adaptación es aquel aprendizaje producto de la interacción del sujeto con el

medio en que vive, sin la mediación de un 'profesor'. Recordemos que gran parte de los estudios de Piaget se realizaron con niños menores de 2 años, que no están escolarizados ni pueden comunicarse por medio del lenguaje.

Brousseau recuperó este concepto de aprendizaje biológico y lo adaptó al análisis de las actividades escolares. Según este enfoque, en el aprendizaje por adaptación se considera esencialmente la interacción de un sujeto con un medio (que en muchos casos es material).

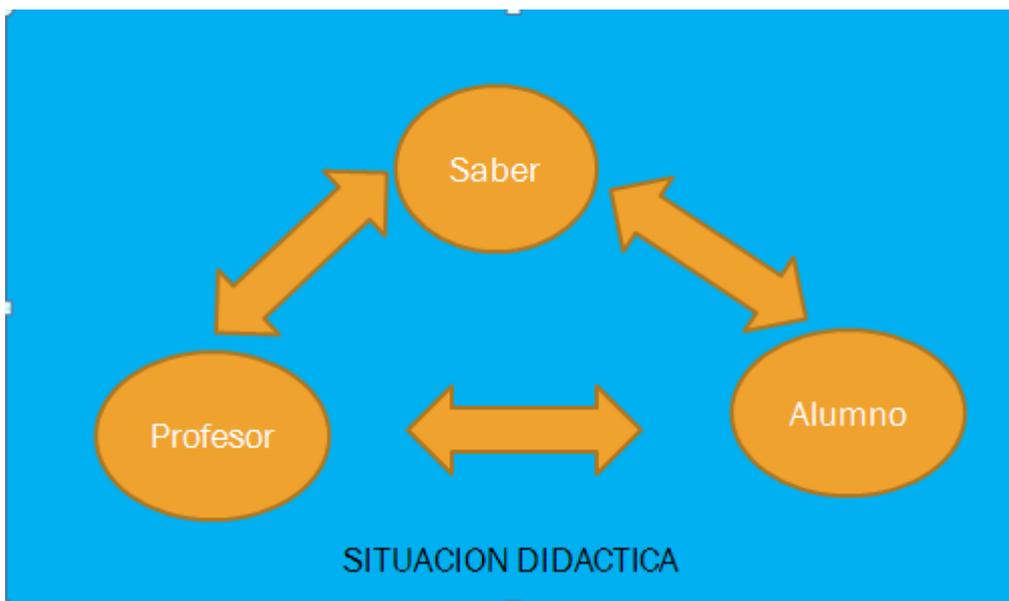
1. El sujeto parte de una intención, de una meta que desea alcanzar,
2. para lo cual realiza una acción sobre el medio
3. El medio reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroacción)
4. El sujeto interpreta la retroacción del medio usando los conocimientos de los que ya dispone.
5. El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención la validación es positiva, en cuyo caso refuerza esta acción, es decir la repetirá con mayor frecuencia cuando quiera alcanzar esa intención. Cuando la acción realizada no le permite alcanzar su intención la validación es negativa, y produce una modificación de la acción, iniciando un nuevo ciclo acción-retroacción-validación.



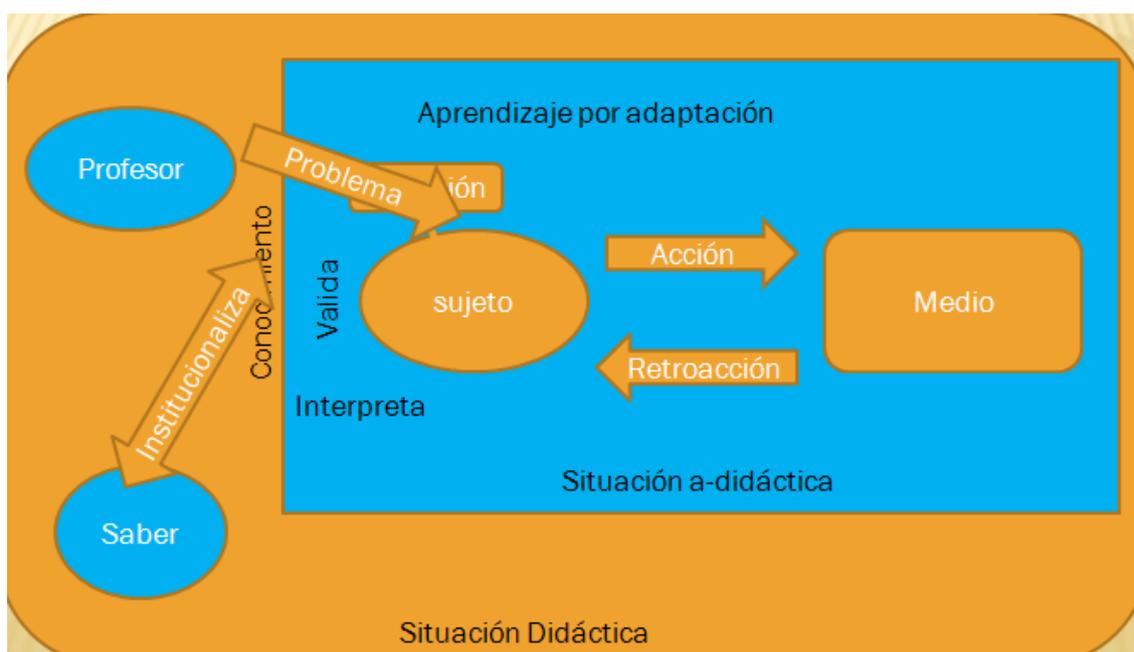
El producto de la validación es lo que se considera como señal de aprendizaje: el refuerzo o la modificación de una conducta observable.

#### **Situación didáctica y situación a-didáctica**

Ahora, ¿cómo considera la TSD la relación entre el aprendizaje por adaptación y la enseñanza escolar? La TSD denomina *situación a-didáctica* a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, y la incluye dentro de una *situación didáctica*, que es una situación de clase. La TSD caracteriza la *situación didáctica* como una situación en la que intervienen tres elementos: *un saber* (a enseñar), *un profesor* (que desea enseñar ese saber) y *un alumno* (o más)(que desean aprender ese saber).



Para comprender mejor la relación entre situación didáctica y situación a-didáctica, examinemos el siguiente esquema, que combina las dos situaciones.



Entonces el profesor debe presentar a los alumnos una situación a-didáctica, que fomenta el aprendizaje por adaptación, y que produce unos conocimientos<sup>12</sup>. Para hacerlo, el profesor debe preparar cuidadosamente un problema que planteará a sus alumnos (produciendo la intención necesaria para el aprendizaje por adaptación) y un medio con el cual los alumnos podrán interactuar para realizar el aprendizaje por adaptación. Es decir, un medio en el cual puedan realizar acciones, que produzca unas retroacciones adecuadas (que puedan ser interpretadas por los alumnos para validar sus acciones). Una vez que los alumnos han

<sup>12</sup> La TSD distingue Saber y Conocimiento. El Conocimiento es una experiencia personal, mientras que el Saber es institucional, es decir que recibe la sanción de una comunidad de sabios, quienes deciden lo que es el saber.

adquirido un conocimiento producto de la situación a-didáctica, el profesor ‘institucionaliza el saber’, es decir explicita las relaciones entre el conocimiento personal de los alumnos, contextualizado dentro de la situación a-didáctica, y el saber ‘oficial’.

### **Rol del profesor en la TSD**

El rol del profesor en la TSD tiene las siguientes características:

1. Antes de la clase debe preparar con cuidado el problema y el medio que conforman la situación a-didáctica, es decir prever las acciones que pueden realizar los alumnos, las retroacciones del medio y las posibilidades de validación que tendrán los alumnos.
2. Durante el desarrollo de la situación a-didáctica debe limitar sus intervenciones para garantizar el aprendizaje por adaptación. Debe evitar darle información directa o indirecta al alumno que le permita resolver el problema, y sobre todo debe evitar juzgar (positiva o negativamente) el trabajo del alumno. Sin embargo, esto no quiere decir que deba retirarse completamente; en esta fase, sus intervenciones deben limitarse a ‘devolverle el problema al alumno’, es decir evitar que renuncie a resolver el problema, asegurándose de que comprende lo que se espera que logre, que identifica algunas acciones que puede realizar en el medio, y que toma conciencia de las retroacciones del mismo.
3. Una vez terminada la situación a-didáctica interviene directamente para hacer tomar conciencia a los alumnos del conocimiento que han adquirido, para verbalizar dicho conocimiento y explicitar sus conexiones con el saber oficial.

### **El Software de Geometría Dinámica como medio**

Según el modelo que acabamos de exponer, uno de los elementos fundamentales del aprendizaje por adaptación, y por lo tanto de las situaciones a-didácticas es el medio. El medio es aquello con lo que interactúa el alumno, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación. Ese medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los conocimientos producto del aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos posible al saber que se quiere enseñar.

Nosotros consideramos el software de geometría dinámica como un medio adecuado para el aprendizaje por adaptación de la geometría, pues su programación garantiza que todos los fenómenos asociados con la construcción y la manipulación de figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana.

En el software de geometría dinámica podemos distinguir dos tipos de acción con sus respectivas retroacciones:

Tipo de acción	Tipo de retroacción
<b>Construir</b> : consiste en seleccionar una herramienta de Cabri y utilizarla para obtener un dibujo	<b>Fenómeno estático:</b> un dibujo estático que corresponde teóricamente a las herramientas utilizadas según la teoría
Ejemplo: Se selecciona la herramienta 'segmento' y se hacen dos clic en la pantalla: aparece un segmento. Se selecciona la herramienta 'recta perpendicular', se hace clic sobre el segmento y luego sobre un punto cualquiera de la pantalla: aparece una recta perpendicular al segmento.	
<b>Arrastrar:</b> consiste en agarrar un objeto con el ratón y desplazarlo	<b>Fenómeno dinámico:</b> los objetos en la pantalla se desplazan de manera que se conservan todas las propiedades declaradas explícitamente (al usar una herramienta de construcción) o aquellas que se deducen teóricamente de ellas.
Ejemplo: al arrastrar un extremo del segmento dibujado anteriormente, el segmento se moverá para seguir teniendo ese punto como extremo, y la recta también se moverá para conservar la perpendicularidad con respecto al segmento.	

Por esta razón el Software de Geometría dinámica es una herramienta invaluable para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues constituye un medio que garantiza que sus retroacciones corresponden al saber teórico que se desea enseñar. Por supuesto, el medio sólo no constituye la situación a-didáctica, pues es necesario diseñar el problema, y considerar las acciones y decisiones del alumno.

A continuación vamos a ilustrar por medio de ejemplos, cómo utilizar las ventajas del SGD para diseñar situaciones a-didácticas para el aprendizaje de las transformaciones isométricas.

**Ejemplos:**

El siguiente ejemplos de situación a-didáctica para el aprendizaje de la simetría axial hace parte de serie de 4 actividades que culmina con la construcción de la imagen de un objeto por una simetría axial. Esas actividades pueden generalizarse a otras transformaciones siguiendo el mismo guión de base:

1. Familiarizar a los alumnos con fenómenos dinámicos y estáticos característicos de la transformación a enseñar, a partir de la manipulación de un objeto y su imagen cuando los elementos de la construcción están ocultos. Se presenta a los alumnos uno o varios objetos y sus imágenes por una transformación y se les pide que manipulen esos objetos para completar determinadas tareas. Durante la manipulación los alumnos deben tomar conciencia de ciertas regularidades que caracterizan la transformación, regularidades que le permiten realizar de manera rápida y eficiente las tareas.

2. Pasar de considerar la transformación global de figuras a considerar la transformación punto a punto de una figura.
3. Pasar de estrategias de ajuste a estrategias de construcción. En las primeras tareas se trata de obtener una configuración dada por ajuste, es decir desplazando uno varios objetos hasta que ocupen una posición determinada. Una vez han desarrollado cierta habilidad para realizar estas tareas, habilidad que depende de la identificación de las regularidades a las que alude el punto 1, se plantean tareas donde ya no es suficiente una estrategia de ajuste, sino que es indispensable una estrategia de construcción; es decir, explicitar las propiedades que deben cumplirse, seleccionándolas dentro de las herramientas de construcción del software. Consideramos que el hecho de realizar una construcción donde se explicita una propiedad es indicador de la utilización de un saber.
4. Aprovechar las experiencias para institucionalizar el saber. Una vez terminado el ciclo de actividades, el profesor realiza una puesta en común en la que recopila las experiencias de los alumnos, puntualizando los conocimientos (personales y contextualizados) adquiridos, para posteriormente exponer la relación con el saber matemático correspondiente.

### *Simetría axial:*

Anotaciones sobre el funcionamiento de la simetría axial en el SGD: el software de geometría dinámica tiene una función de simetría axial, que a partir de una figura de base y un eje de simetría que puede ser una recta, un segmento o el lado de un polígono, construye la imagen de la figura. Esta construcción asegura que se cumplan las propiedades de la simetría axial: Un punto y su imagen están sobre una recta perpendicular al eje de simetría, a igual distancia del eje de simetría y de lados opuestos del mismo. Estas propiedades se cumplen también durante el arrastre; por lo tanto, al alejar la figura de base del eje, su imagen se aleja por el lado contrario del eje; al colocar la figura de base sobre el eje, se superpone a su imagen.

Primera actividad: descubriendo la simetría por el movimiento<sup>13</sup>

Descripción de la figura-medio: aparecen 6 objetos congruentes<sup>14</sup>, tres azules y sus imágenes por una simetría axial (el eje está oculto) rojos, y un canasto. Los objetos están dispuestos de tal forma que no queden separados por colores, es decir que por lo menos uno de los objetos azules está al otro lado del eje de simetría.

<sup>13</sup> En realidad son cuatro figuras diferentes: en la primera el eje de simetría es horizontal, en la segunda es vertical, en la tercera y la cuarta son oblicuos. Para los alumnos será más fácil identificar las propiedades en las dos primeras figuras, pero es importante que experimenten con todas las posibilidades de eje de simetría. No presentamos aquí en detalle el análisis de cada figura.

<sup>14</sup> Es importante que los objetos no tengan más de un eje de simetría, para que los alumnos puedan identificar las orientaciones contrarias de un objeto y su imagen.



Tarea 1: llevar los objetos azules dentro del canasto.

Se espera que los alumnos arrastren directamente los objetos azules al canasto, sin ninguna dificultad. Durante el arrastre constatarán que los objetos rojos también se mueven, y que en algunos puntos de la pantalla se superpone un azul y un rojo.

Intención	meter los objetos azules dentro del canasto
Acción	agarrar un objeto azul y arrastrarlo hasta que quede dentro del canasto
Retroacción	el objeto se desplaza siguiendo el movimiento del ratón, un objeto rojo también se mueve al mismo tiempo
Validación	el objeto azul quedó dentro del canasto, la acción es válida
Conocimiento necesario para la validación	reconocer cuando un objeto está dentro del canasto
Conocimiento producto del aprendizaje	para desplazar un objeto azul basta con agarrarlo y arrastrarlo. Los objetos rojos también se mueven al mover los azules

Tarea 2: llevar los objetos rojos dentro del canasto.

Se espera que los alumnos intenten arrastrar directamente los objetos rojos. Como el software les impide esta acción, podrán recordar que al arrastrar un objeto azul se movía un objeto rojo, y arrastrarán los objetos azules (fuera del canasto) para que los objetos rojos queden dentro del canasto. En el caso en que un alumno renuncie a resolver el problema diciendo que no es posible, el profesor puede intervenir haciéndole notar que en la tarea anterior, al mover los objetos azules también se movieron los rojos.

Intención:	meter los objetos rojos dentro del canasto
Acción1:	agarrar un objeto rojo y arrastrarlo hasta que quede dentro del canasto
Retroacción1:	el objeto no se mueve

Validación1:	la acción no es válida
Conocimiento necesario para la validación:	saber si un objeto se mueve o no

Acción2:	agarrar un objeto azul y arrastrarlo hasta que el objeto rojo quede dentro del canasto
Retroacción2:	el objeto azul se desplaza siguiendo el movimiento del ratón, el objeto rojo se desplaza hasta quedar dentro del canasto.
Validación:	el objeto rojo queda dentro del canasto, la acción es válida
Conocimiento necesario para la validación:	reconocer cuando un objeto está dentro del canasto
Conocimiento producto del aprendizaje:	para desplazar un objeto rojo es necesario arrastrar un objeto azul. Los objetos azules y los objetos rojos tienen movimientos contrarios

Tarea 3: meter todos los objetos dentro del canasto

Se espera que los alumnos metan primero todos los objetos azules dentro del canasto, luego que metan todos los rojos, y constaten que al meter un azul se sale uno rojo y viceversa. Es posible que den dos respuestas: 1) la tarea es imposible pues los objetos tienen movimientos contrarios, 2) la tarea sólo es posible si se puede colocar el canasto en otro lugar (puesto que han observado que en algunos puntos de la pantalla los objetos azules y rojos se superponen).

Intención:	meter todos los objetos dentro del canasto
Acción1:	meter los objetos azules dentro del canasto
Retroacción1:	los objetos rojos quedan fuera del canasto
Validación1:	la acción no es válida

Acción2:	meter los objetos rojos dentro del canasto
Retroacción2:	los objetos azules quedan fuera del canasto
Validación2:	la acción no es válida

Acción3:	mover los objetos azules hasta que se superpongan con los rojos.
Retroacción3:	los objetos azules y los rojos se superponen, pero están fuera del canasto
Validación3:	la acción no es válida, a menos que pueda desplazarse el canasto a ese punto.
Conocimiento necesario para la validación:	reconocer si un objeto queda dentro de otro.
Conocimiento producto del aprendizaje:	No en cualquier parte se pueden superponer objetos azules y rojos.

Tarea 4: Mover el canasto hasta un punto en el que puedan meterse todos los objetos

Se espera que los alumnos muevan los objetos azules hasta que se superpongan a los rojos y luego arrastren el canasto hasta esa posición.

Intención:	Juntar canasto, objetos azules y objetos rojos.
Acción:	arrastrar los objetos azules hasta superponerlos a los rojos, luego arrastrar el canasto hasta esa posición.
Retroacción:	todos los objetos quedan superpuestos
Validación:	la acción es válida
Conocimiento necesario para la validación:	reconocer cuando dos objetos se superponen
Conocimiento producto del aprendizaje:	existen algunas posiciones donde pueden superponerse todos los objetos.

Tarea 5 (para esta tarea aparecen tres o más canastos): colocar los canastos en distintas posiciones donde puedan después meterse todos los objetos dentro.

Se espera que los arrastren los objetos azules hasta que queden superpuestos a los rojos, y arrastren un canasto a esa posición, luego arrastren nuevamente los azules hasta otra posición, y así sucesivamente. Podrán constatar que los canastos quedan alineados.

Intención:	colocar los canastos donde puedan meterse todos los objetos dentro de cada uno de ellos.
Acción:	Arrastrar los objetos azules hasta que se superpongan a los rojos, arrastrar un canasto a esa posición. Repetir el proceso en otra posición.
Retroacción:	todos los objetos quedan superpuestos: la acción es válida
Conocimiento necesario para la validación:	reconocer cuando dos objetos están superpuestos
Conocimiento producto del aprendizaje:	es posible colocar tres o mas canastos en posiciones donde pueden superponerse todos los objetos. Esas posiciones están sobre una línea recta.

Puesta en común:

El profesor realiza una puesta en común en la que tratará de verificar si todos los alumnos han identificado los fenómenos visuales relacionados con la simetría axial: dependencia de unos objetos con respecto a otros, movimientos contrarios, posiciones donde los objetos se superponen, etc. Durante la puesta en común pedirá a algunos alumnos que pasen delante del grupo para explicar cómo realizaron las tareas. De esta manera también se generalizan las distintas estrategias permitiendo que los alumnos que no han logrado resolver las tareas identifiquen estrategias de solución.

Hasta este momento, los alumnos sólo han utilizado conocimientos de bajo nivel, esencialmente perceptivos para resolver las tareas. La última tarea de esta actividad busca bloquear las estrategias perceptivas para forzar la utilización de un conocimiento relacionado con la simetría axial para resolver la tarea.

Tarea 6: *sin mover los objetos*, colocar los canastos de tal manera que después puedan colocarse dentro de cada uno todos los objetos.

Para resolver esta tarea, los alumnos deben estar en capacidad de identificar parejas de objetos: un objeto y su imagen. Una vez que han identificado una pareja, saben que “el punto de unión”, es decir un punto en el que se superponen estos dos objetos es en el punto medio entre los dos. Deben entonces desarrollar una estrategia para identificar las parejas de objetos sin recurrir al movimiento. Por supuesto, una manera fácil de determinar las parejas es mover un objeto azul para observar cuál objeto rojo se mueve. Si los alumnos solicitan permiso para mover ‘un poco’ los objetos azules es posible concedérselo. Lo importante es bloquear la estrategia de ‘juntar todos los objetos primero’. Sin embargo también es posible que identifiquen las parejas de objetos guiados por la disposición de los mismos, sabiendo que tienen orientaciones contrarias.

Puesta en común

Al terminar esta actividad, el profesor organiza nuevamente una puesta en común, en la que buscará que los alumnos expliciten las estrategias que les llevaron a resolver la tarea, resaltando la necesidad de identificar parejas de objetos correspondientes para determinar su punto medio, y el hecho de que los canastos quedan en línea recta.

## Conclusiones

En el ejemplo presentado vemos cómo es posible prever un aprendizaje por adaptación, resultado de la interacción de los estudiantes con las figuras dinámicas, y cómo es posible que el profesor relacione los conocimientos producto de este proceso de aprendizaje por adaptación con las propiedades de la simetría axial, que es el saber que desea enseñar. Por supuesto que no pretendemos afirmar que con esta actividad los alumnos hayan aprendido lo que es la simetría axial, puesto que es sólo la primera parte de una serie de actividades que concluyen con la construcción de la imagen de un objeto por una simetría axial.

Nuestro propósito era ilustrar de manera clara cómo la Teoría de las Situaciones Didácticas nos provee de un modelo de aprendizaje en el que el software de geometría dinámica puede considerarse como un medio adecuado para que la interacción de los alumnos produzca efectivamente un aprendizaje, posibilitando al profesor el utilizar las experiencias personales de los alumnos para darle sentido al saber que desea enseñar.

## Bibliografía

BROUSSEAU Guy. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana, 1993.

MARGOLINAS Claire. La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. Ediciones UIS, Bucaramanga, 2009.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Enlace editoriales Ltda. Santafé de Bogotá, D.C, abril 2004.

MONROY Lilian, RUEDA Karol. Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa cabri geometry II. Universidad industrial de Santander (UIS). Facultad de ciencias. Bucaramanga 2009.