

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA MODELACIÓN DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

José David Zaldívar Rojas

Universidad Autónoma de Coahuila (México)

david.zaldivar@uadec.edu.mx

Palabras clave: modelación, socioepistemología, usos de las gráficas, cotidiano del ciudadano

Key words: modeling, socioepistemology, use of graphs, quotidian of the citizen

RESUMEN: Se reportan los avances de una revisión bibliográfica sobre el estatus de la modelación en la literatura especializada y en particular de los aportes desde la Socioepistemología. Centrándonos en un par de posturas que desde la construcción social del conocimiento matemático discuten sobre la modelación, evidenciamos diferencias y puntos de encuentro con la finalidad de avanzar hacia una caracterización de la función de dicha categoría. Se destaca que la noción de práctica social modifica las relaciones con el conocimiento y por lo tanto la base de los diseños en modelación y los productos que se generan de ésta. La presente revisión forma parte de una investigación en curso que pretende posicionar a la modelación como una base epistemológica para el diseño de situaciones de aprendizaje como material auxiliar que pueda ser utilizado en cursos de Profesionalización de docentes del nivel básico-secundaria en México.

ABSTRACT: We report the progress of a review on the status of modeling in the specialized literature and in particular the contributions of Socioepistemology. Focusing on a pair of positions from the social construction of mathematical knowledge discuss about the modeling, we show differences and meeting points with the aim of moving towards a characterization of the function of the category. It is emphasized that the notion of social practice modifies the relations with knowledge and therefore the basis of the designs in the modeling and the products that are generated from it. The present review is part of a research in the course that seeks to position the modeling as an epistemological basis for the design of learning situations as auxiliary material that was used in courses of Professionalism of teachers of basic level in Mexico.

■ INTRODUCCIÓN

La *Modelación Matemática* y las *Aplicaciones* son, en general, temas centrales que en los últimos años se convirtieron en tendencias dentro de la investigación en Matemática Educativa. Esta importancia relacionada a dichos tópicos se debe principalmente a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la poca vinculación que existe entre la escuela y su entorno (Lave, 1988), y a la imposibilidad de la *transferencia* del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta y Díaz, 2015).

Al respecto, Carraher, Carraher y Shliemann (1991) nos hacían repensar aspectos de la problemática anterior. Estos autores mencionan que el proceso de explicación del fracaso escolar había sido una búsqueda de culpables y muestran ejemplos de prácticas cotidianas (como la compra-venta) donde se notan aspectos del conocimiento matemático que se encuentran basados en una lógica interna según la situación, sin embargo, que parecen no tener eco y ser aprovechados por la escuela. Las críticas las resumen en términos de que la matemática escolar asume que al tratar contenidos matemáticos de manera “formal” y “generalizable”, implica necesariamente su transferencia a otros escenarios.

Ante los pocos resultados al respecto de la afirmación anterior, hubo en el mundo un incremento y atención especial sobre tópicos relativos a la modelación y aplicaciones con el objetivo de entender las relaciones entre la “realidad” y la “matemática escolar”, con la finalidad de que la “realidad” permita la creación de acercamientos didácticos innovadores y plausibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero también cercanos a lo que los estudiantes viven en su día a día. Esto se comprueba, por ejemplo, en el lugar que le brindan en eventos internacionales de investigación o la amplia literatura especializada sobre dichos tópicos (por ejemplo el grupo de discusión en ICME: *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*; o en congresos latinoamericanos como la RELME con el grupo de discusión *Multidisciplina y Modelación. Un diálogo entre la ingeniería y la matemática educativa*, por mencionar algunos). Inclusive en diversos libros de texto de diferentes niveles se aprecia una tendencia a integrar un “mundo extra-matemático” que enriquezca a las actividades y al currículo con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles fuera del ámbito escolar (Niss, et al., 2007).

Sin embargo, se reconoce que estas categorías aunque juegan un rol importante en las aulas de clases de muchos países y es considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar *actividades de modelación genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, et al., 2007).

Posiblemente el punto neurálgico, desde nuestra mirada, radica en la forma en la que se confrontan por un lado, las prácticas matemáticas y la realidad, por el otro. La búsqueda de un diálogo o “puentes” entre estos dos dominios, trae consigo vertientes epistemológicas y didácticas en las cuales se consideran también diferentes maneras de caracterizar a la modelación y el rol que se le atribuye durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Justo una postura epistemológica sobre la modelación desde la construcción social del conocimiento es el punto central de la discusión en este reporte.

■ MODELACIÓN MATEMÁTICA Y APLICACIONES: UNA MIRADA CRÍTICA

En la literatura las acepciones sobre Modelación Matemática y Aplicaciones generalmente son variadas. Sin embargo, en términos generales dichas acepciones convergen en que la modelación matemática es un *proceso* que pretende entablar una relación, a través de *modelos matemáticos*, entre un mundo extra-matemático y las matemáticas (Figura 1 y 2).

Figura 1. Matemáticas y el resto del mundo (Niss, Blum y Galbraith, 2007, p. 4).

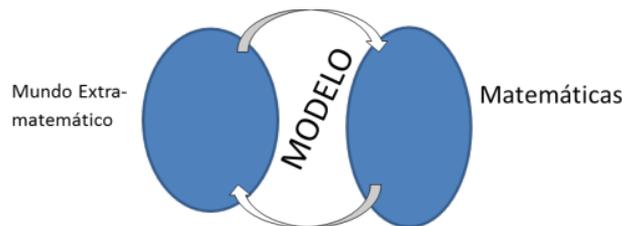
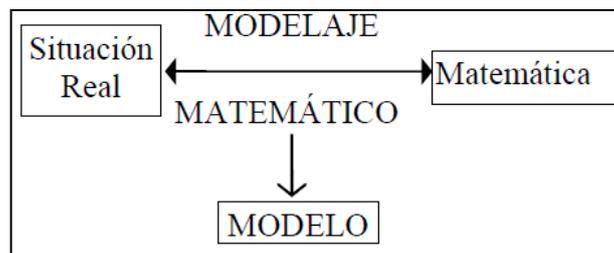


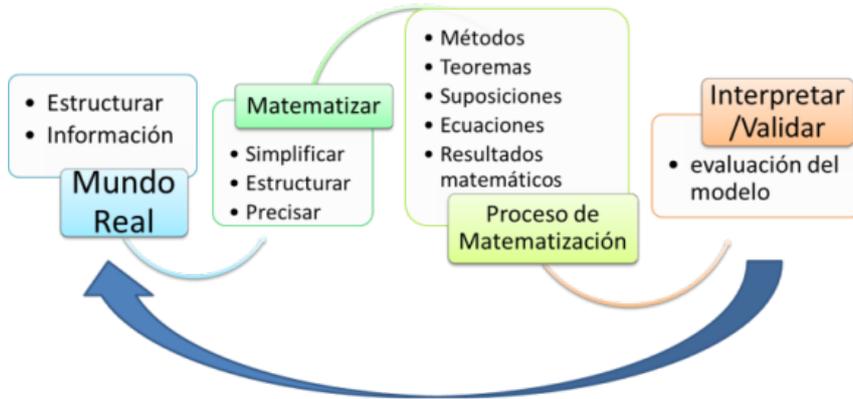
Figura 2. Esquema “Matemáticas-Modelaje-Realidad” (Biembengut y Hein, 1997)



Lo anterior implica que la modelación sea considerada en dos orientaciones con relación al aprendizaje de las matemáticas: aprender matemáticas para desarrollar competencias en la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos; y la modelación como un medio para aprender matemáticas (Niss, et al., 2007; García, Gascón, Higuera, Bosch, 2006).

En los casos anteriores, el proceso de modelación matemática se inicia con la conceptualización de alguna Situación-Problema. Posteriormente, a través de simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones, así como establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático, se traduce la situación al lenguaje matemático, es decir, se *matematiza*. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones derivadas y se dan datos como resultados matemáticos. Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de interpretar resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real. Este ciclo se repite con la intención de validarlo (Niss, et al., 2007; Biembengut y Hein, 1997) (ver figura 3).

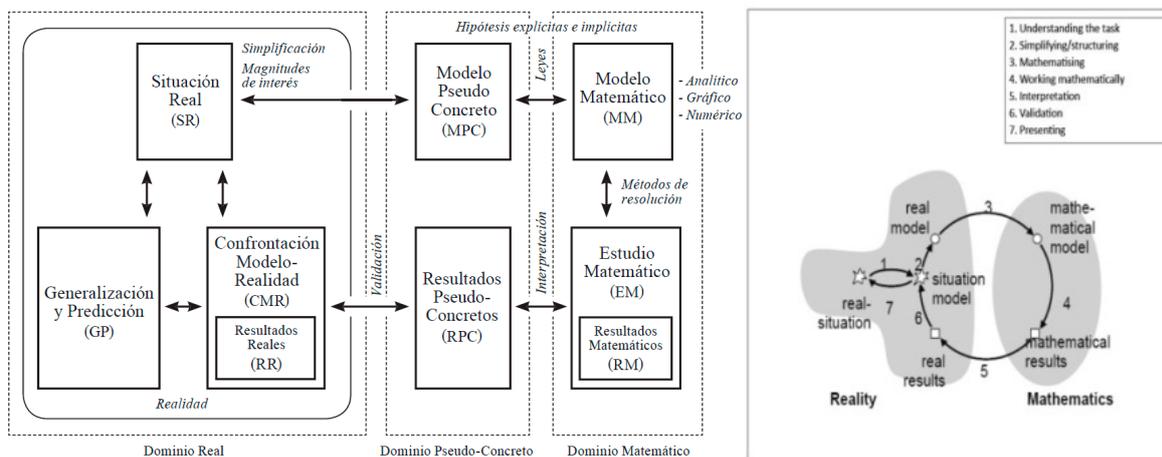
Figura 3. Proceso de modelación matemática



Resaltamos que, al igual que en García et al. (2006), dentro del estudio de la modelación para la escuela existen dos tendencias principales. La primera se concentra en la búsqueda de sistemas “apropiados” a modelar y de “buenas” aplicaciones con la intención de involucrar a los estudiantes en el proceso de modelación. Mientras que la segunda tendencia se enfoca en la manera en la cual se pueden manejar esos sistemas y modelos “apropiados” dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta tendencia se resume entonces en entender el proceso de *obtener “modelos”*, por lo que definir y resumir este proceso en *ciclos* y caracterizarlos adquiere relevancia. Pero además, la modelación hace evidente la separación entre la realidad extra-escolar y la matemática, al intentar relacionarlas (Arrieta y Díaz, 2015).

Este proceso de modelación que se menciona en la figura 3, se plantea como la base de muchos otros procesos que ponen atención especial a ciertos elementos del proceso y lo complejizan (ver figura 4: ciclo de modelación en Borromeo, 2006 y el ciclo de modelación en Rodríguez, 2010). Como se puede notar, en algunos ciclos de modelación se ingresa a la *experimentación* como una característica subyacente a la modelación, con lo cual se llama la atención a la interacción con el fenómeno a modelar.

Figura 4. Ciclo de modelación de Rodríguez, 2010 y de Borromeo, 2006.



Sin embargo, bajo los tipos de trabajos anteriores pareciera que se atiende solamente a una orientación “didáctica” y una mirada centrada en lo representacional. Centrar a la Modelación únicamente como una *aplicación de la matemática*, o en un nivel *representacional* o en la *matematización de situaciones “extra-matemáticas”* (Cordero, 2006; Bosh, et al., 2006) no permiten reconocer la naturaleza y la transversalidad del conocimiento matemático en diferentes dominios, es decir, *los usos del CM en escenarios no escolares*. Coincidimos con Cordero (2006) cuando menciona que las potencialidades de la modelación en el sistema didáctico no se desarrollarán completamente si antes no se reconoce al conocimiento matemático como una *construcción social*, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática o a la modelación, sino su *función social*. Estas consideraciones permiten rupturas con las posiciones anteriores y caracterizar a la modelación como una *práctica que trasciende y transforma al objeto en cuestión*, lo cual significa que es en sí misma, una construcción de conocimiento matemático (Cordero, 2006). Su función no se agota en lo representacional y en la búsqueda de modelos, sino que incluye aspectos de la actividad humana, los usos del conocimiento en situaciones específicas y un diálogo con el *cotidiano del ciudadano* (Zaldívar, 2014).

■ LA PRÁCTICA DE MODELACIÓN EN SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La Teoría Socioepistemológica (TS) trata con fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático (CM) desde una perspectiva sistémica y múltiple, cuya finalidad es el rediseño del discurso Matemático Escolar (dME). Para ello, *descentra la mirada en los objetos y problematiza al saber*, al plantear la incorporación a la investigación de la epistemología del conocimiento, de su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral, 2013). La TS apuesta por un nivel funcional del CM, puesto que entiende toda relación didáctica como una *construcción del conocimiento en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural* (Cordero, 2006), lo cual implica el reconocimiento y delimitación de los *usos del conocimiento* en situaciones específicas, donde adquiere sentido y significación. Para ello postula que antes de hablar de un entramado de conceptos y definiciones matemáticas, se debe poner atención a las *prácticas sociales* (PS) que permiten y acompañan la conformación de dichos conceptos matemáticos. Modelar entonces, la *construcción social del CM* normado por prácticas sociales es crucial para dicho encuadre teórico, lo cual implica diseñar situaciones dotadas de intencionalidad para la intervención didáctica y la cual estará expresada en los usos del CM que los grupos humanos hagan, mientras este se resignifica.

Ahora bien, ¿qué implicaciones tiene este posicionamiento epistemológico y ontológico ante el CM y su construcción? Desde nuestra reflexión, replantea la mirada sobre *lo que se produce* en la práctica de modelación y su *función*, cuando los objetos matemáticos no son el centro de la discusión o cuando el énfasis no se encuentra en el análisis de los procesos cognitivos que acompañan a las tareas de modelación. Pero por otro lado, este posicionamiento implica un viraje en el diseño de actividades, puesto que se ingresan categorías de conocimiento matemático que se plantean como *socioepistemologías del CM*, que devinieron de prácticas sociales y se habilitan en lo escolar.

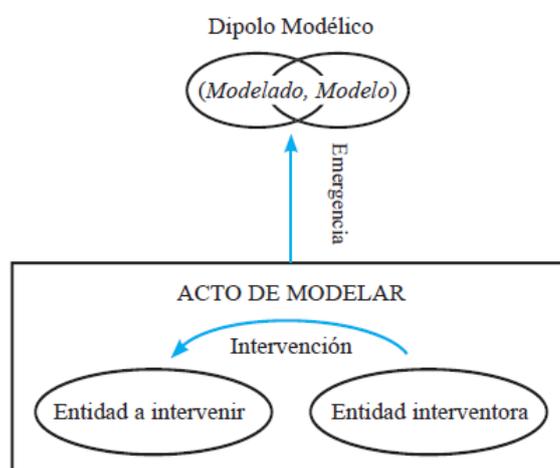
En la siguiente sección, reflexionaremos sobre un par de ejemplos para ilustrar este último punto: “La Elasticidad de los Resortes” (Arrieta y Díaz, 2015) y “La Situación del Resorte” (Zaldívar, 2014).

En ambos casos, se reconoce la función normativa de la práctica social a través de *situaciones específicas* como un elemento clave para el diseño. Lo anterior conlleva una reflexión alternativa sobre la modelación como la práctica que podría establecer un posible diálogo entre la realidad y el discurso Matemático Escolar (dME) y aporta elementos para un rediseño del mismo.

■ UN PAR DE CASOS DE ANÁLISIS

En el trabajo de Arrieta y Díaz (2015) se considera a la modelación como: “[...] una práctica que articula entidades, para configurar otras nuevas. La articulación se establece al intervenir en una de las entidades desde la otra, proveyendo a la vivencia de quién modela, de una tercera y nueva entidad: el dipolo modélico” (p.45).

Figura 5. La práctica de modelación (Arrieta y Díaz, 2015, p. 36)



A partir de dicha caracterización, se plantea “La elasticidad de los resortes” (Figura 6), como ejemplo de un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal a partir de la *práctica de modelación* “Numerización de Fenómenos” (Ver figura 7). Dicha práctica, parte de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno en cuestión y experimentar sobre él, con la intención de obtener *redes de modelos con el fenómeno*.

Figura 6 y 7. Respectivamente. “La elasticidad de los resortes” (p.38). La numerización de los fenómenos (p.37).

La situación inicial planteada

Vamos a investigar la elasticidad de un resorte. Tenemos un soporte universal y un resorte colgando de él. En su extremo le colocamos un portapesas que contiene un indicador, una flechita que apunta a una regla y contamos con seis pesas de 20 gramos cada una. Entonces, colocando pesas y leyendo las posiciones de la flechita del portapesas, elaboramos una tabla.

Peso p	Posición del portapesas a
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225

Organizan las observaciones hechas interactuando con el fenómeno

Pasan de un algoritmo numérico a la ecuación vía la predicción

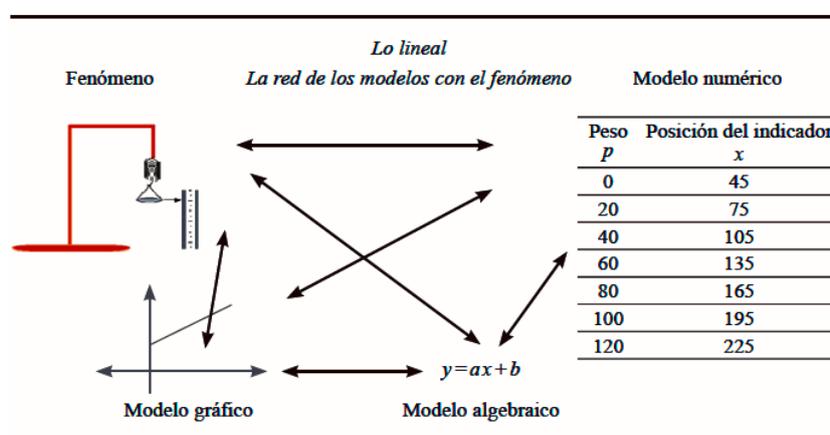
Articulan los parámetros algebraicos con los geométricos

Fenómeno ↔ Tabla numérica ↔ Fórmula algebraica ↔ Gráfica

Puntean los datos de la tabla

Desde nuestro análisis, podemos notar que estos autores estructuran el diseño en 4 fases relacionadas entre sí. La primera, que se refiere a la *experimentación*, permite a los estudiantes interactuar de manera vivencial, discursiva y virtual con el fenómeno. La segunda fase, el *acto de modelar*, se basa en proponer a la *predicción* como el enlace que articula la tabla de datos y el fenómeno, pero que además posibilita la aparición de *modelos*. Por su parte, en la tercera fase se articulan los modelos entre sí y con el fenómeno en cuestión, con lo cual se configura una *red de modelos* (ver figura 8). En la cuarta y última fase, los autores plantean que la red construida debe descentrarse del fenómeno vía la *analogía*, con la finalidad de configurar una familia de redes asociadas a fenómenos análogos.

Figura 8. Red de lo lineal (Arrieta y Díaz, 2015, p.43).



En este caso, los autores plantean que el resultado que los estudiantes obtienen tiene que ver con *lo lineal* como una familia de redes asociadas a fenómenos. En términos de investigación los autores aportan una reflexión profunda sobre el *acto de modelar* y la manera en la cual se constituyen *dipolos modélicos* cuando se parte de una epistemología como la "Numerización de los Fenómenos".

Por otro lado, en Zaldívar (2014) se plantea "La situación del Resorte", la cual consiste en modelar el movimiento de una pesa unida a un resorte (ver figura 9).

Figura 9. Instrumentos de modelación y simulación (Zaldívar, 2014)



Para el diseño de dicha situación, el autor se basó en la Categoría *Modelación-Graficación* (M-G) (Suárez, 2014) (ver Cuadro 1), que desde la TS se plantea como una epistemología para el Cálculo escolar y consiste en potenciar a la graficación a través de la discusión de aspectos variacionales y tendenciales en las gráficas de las funciones por medio de articular la modelación con tecnología escolar (sensores) para el diseño de situaciones de movimiento. Dicha categoría posibilita argumentos sobre el Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF).

Cuadro 1. Elementos de construcción social para la M-G (Suárez, 2014)

Elementos de construcción	Situación de Modelación-Graficación
Significados	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos
Procedimientos	Variación de parámetros
Procesos-Objetos (Lo que le es útil al humano)	Instrucción que organiza comportamientos
Argumentación	Comportamiento Tendencial de las Funciones

En el caso de la situación del resorte, se analizan los *usos de las gráficas* a partir de las producciones escritas, gestuales y discursivas de los participantes cuando se les cuestionaba primero sobre *el movimiento del resorte al ponerle una pesa*, para posteriormente problematizar sus producciones en términos de la variación y la tendencia, como argumentos que permitían la *resignificación* del uso de la gráfica. En este caso, lo algebraico y lo algorítmico tienen un rol secundario debido a las características propias del escenario donde se hicieron las puestas en escena, además de que el interés está en el *argumento* que la categoría provoca.

Figura 10. Producciones de los participantes de la Situación del Resorte



Esta situación se organiza en tres momentos de acuerdo a la epistemología: un momento de mantenimiento, uno de crisis y uno de funcionalidad. Estos momentos permitieron dejar ver *el cotidiano de los ciudadanos en cuanto formas culturales de uso de las gráficas*, sus funcionamientos y formas opacas en el dME y argumentaciones sobre el CM que se discutía.

Como resultado de esta investigación se obtiene una *epistemología revisada de los usos de las gráficas*, que se obtiene del análisis y de confrontar la evidencia con la epistemología propuesta en

la M-G. El análisis evidencia argumentaciones basadas en la *orientación a través de trayectorias*, la cual contribuye al análisis de estructuras que posteriormente deviene en argumentaciones que permitieron *anticipar el comportamiento del sistema a través de la curva y la gráfica*, incluyendo elementos de referencia, variación y tendencia, que posibilitan la resignificación.

■ COMENTARIOS FINALES

Sin duda que las reflexiones sobre la Modelación no se agotan con nuestra revisión. Sin embargo, al centrarnos en un cambio de mirada que ofrece la TS, consideramos que aportamos elementos a la discusión internacional sobre el tema.

La inserción de la modelación en las aulas de matemáticas de diversos niveles cada vez toma más relevancia debido principalmente a los crecientes avances del uso de la matemática en la ciencia, la tecnología y en la vida de las personas, sin embargo, su inserción en las aulas aún no es satisfactoria (Niss, et al., 2007). Lo anterior implica que desde la investigación también debemos avanzar en entender cómo es posible habilitarla en el sistema didáctico a partir de los resultados de investigación y cómo, por ejemplo, su inserción también repercutiría (o debería repercutir) en la formación y profesionalización de los docentes en matemáticas, y sin duda, en un *rediseño del dME* (Cantoral, 2013). Consideramos que esta tendencia continuará, inclusive con necesidades centradas en la modelación con apoyo de tecnología.

Con respecto a los ejemplos que desde la TS se mostraron con respecto a la modelación, sin duda tensan nociones como la de *aula de matemáticas*, del *sujeto* mismo y las *funciones* del CM.

Aunque las situaciones propuestas en ambos ejemplos tienen que ver con experimentar a través de un resorte, el tipo de análisis y los resultados obtenidos tienen productos peculiares. Consideramos que los análisis de Arrieta y Díaz (2015) se encuentran enfocados principalmente a la estructura representacional, de ahí que sus acentos sea en articular una *red de modelos* (gráfico, algebraico, numérico), aunque los autores afirman que *la relación entre modelo y modelado no es representacionista, es articuladora* (p.46).

Sin embargo, en ambos casos la manera de operar y sistematizar a la PS dentro de un escenario institucional particular guarda cierta semejanza. Ambos diseños parten de que la modelación debería ser algo más robusto que *aplicar la matemática* o *matematizar la realidad*; ya que al considerarla como una *práctica* es posible, por un lado, *intervenir en una entidad a través de otra* (Arrieta y Díaz, 2015) y por otro, *argumentar sobre la situación en cuestión* (Cordero, 2006). El rol asignado a la *epistemología* es crucial en ambas propuestas, pero además permite conformar y habilitar ciertas categorías en el sistema didáctico sustancialmente diferente a lo que se encuentra. En el caso de Arrieta y Díaz, la base de su diseño de aprendizaje la encuentran en la práctica de modelación que denominan “Numerización de Fenómenos”. Mientras que en el caso de Zaldívar (2014), la situación de Modelación-Graficación proporciona un marco de referencia para que los participantes resignifiquen la estabilidad a través de un *uso de las gráficas*. De esta manera, *aquello que se produce en la modelación con respecto al CM* asociado a cada diseño es “algo más que conceptos aislados”, es, por un lado, una *red de modelos que se articula a fenómenos* y como en el trabajo de Zaldívar, son *resignificaciones del uso de las gráficas que conforman una epistemología revisada*. En este último caso, la *situación específica* es la que epistemológicamente

habilita intencionalmente la PS en un escenario particular. El siguiente cuadro 2 recupera un análisis sobre los trabajos anteriormente comentados.

Cuadro 2. Elementos de análisis

Base del diseño de situación	
<i>Deconstrucción de la Práctica</i> Numeralización de los Fenómenos (Arrieta, 2003)	<i>Epistemología de Prácticas</i> Situación de Modelación-Graficación (Suárez, 2014)
El análisis de datos	
<i>Énfasis en delimitar los Dipolos Modélicos y sus articulaciones</i> (<i>Lo Modelado, El Modelo</i>) (fenómeno, tabla de datos) (fenómeno, razón de cambio) (fenómeno, ecuación)	<i>Énfasis en las argumentaciones a partir de los Usos de las gráficas</i> (funcionamiento - forma) Permanencia-Variación-Tendencia
Se problematiza a través de...	
Predicción	Comportamiento Tendencial y Variación
Resultado	
<i>Red de lo Lineal</i> (Herramientas) Deconstrucción de las prácticas	Epistemología Revisada o de Usos del CM Categorías del CM: Comportamiento Tendencial

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), p. 19-48.
- Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 38, 209-222.
- Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), p. 37-74.
- Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.
- Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo Veintiuno editores.

- Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.
- García, F., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38(3), 226-246.
- Lave, J. (1988). *La cognición en la práctica*. España: Paidós.
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 3-32.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 117-143.
- Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la matemática escolar*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.