Desarrollo de pensamiento relacional trabajando con igualdades numéricas

Marta Molina y Encarnación Castro
Universidad de Granada

Resumen

Este artículo describe una investigación centrada en el estudio del desarrollo del pensamiento relacional y la comprensión de igualdades numéricas, por parte de un grupo de 26 alumnos de tercero de Primaria. Las igualdades están compuestas por números naturales y las operaciones elementales de la estructura aditiva, involucrando relaciones o propiedades aritméticas básicas tales como la propiedad conmutativa de la suma, la complementariedad de la suma y la resta o la compensación. Se pretende estudiar la comprensión de las igualdades que manifiestan los alumnos, las estrategias que utilizan en su resolución, las dificultades que encuentran, así como el uso y desarrollo de pensamiento relacional en este contexto.

Palabras clave

Aritmética, Early-Algebra, experimento de enseñanza, investigación de diseño, igualdades numéricas, pensamiento relacional, signo igual.

Abstract

This paper describes a study about the development of relational thinking and understanding of number sentences by a group of 26 third-graders. The number sentences used are composed of natural numbers and the elementary operations of the additive structure, involving arithmetic relations and properties such as the commutative property of addition, the complementary relation of addition and subtraction and compensation. We aim to study the student's understanding of number sentences, students' strategies when solving the sentences, the difficulties they find as well as the use and development of relational thinking in this context.

Key words

Arithmetic, Early-Algebra, design research, equal sign, number sentences, teaching experiment, relational thinking.

Álgebra y "Early-Algebra"

En los últimos años se ha investigado con intensidad la enseñanza y aprendizaje del álgebra, planteándose diferentes propuestas para la mejora de la enseñanza de esta materia. Se han sugerido enfoques centrados en la resolución de problemas, otros que potencian y fortalecen las habilidades aritméticas y procesos de enseñanza focalizados en el uso de tecnología (Freiman y Lee, 2004).

Una de las propuestas más ambiciosas, conocida como Early-Algebra, consiste en un cambio curricular: la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura, sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con compresión de las matemáticas. Se considera que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son hábitos mentales importantes que los alumnos deben de adquirir y que tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética. Esta propuesta va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones (lo que incluye la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y el desarrollo y la manipulación del simbolismo (Kaput, 2000).

En relación con la aritmética se propone un enfoque estructural que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares. Dicho énfasis se señala como causa de la falta de conciencia de los alumnos sobre la estructura que subyacen a las operaciones matemáticas y sus propiedades, lo que obstaculiza la comprensión del álgebra (Kieran, 1992). En esta línea, nuestro trabajo se centra en dos aspectos algebraicos a desarrollar en el contexto de la aritmética: la comprensión del signo igual y el pensamiento relacional.

Pensamiento relacional

Definimos el término pensamiento relacional, entendido como pensamiento sobre relaciones, a partir de la definición del pensamiento como la actividad intelectual (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende, y dota de significado a lo que le rodea; consistente en formar, examinar, reflexionar y relacionar ideas o conceptos, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia.

El pensamiento relacional es la actividad intelectual de *examinar y detectar espontáneamente o buscar* relaciones entre objetos matemáticos, *reflexionar y utilizar* dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados.

Entendemos que cuando una persona piensa relacionalmente o, equivalentemente, usa pensamiento relacional, no sólo observa o detecta las relaciones existentes entre los objetos matemáticos en cuestión, sino que éstas pasan a ser consideradas objeto de pensamiento con la intención del logro de un objetivo. Las relaciones son los conceptos e ideas en los que se centra la atención del sujeto.

Centrados en el contexto de la aritmética, y más concretamente en la resolución de igualdades numéricas, los objetos matemáticos en los que se centra dicha actividad son los números y las operaciones. En particular, este tipo de pensamiento puede tener lugar en situaciones de cálculo y en otras en las que se relacionan expresiones aritméticas.

El uso de pensamiento relacional en el cálculo conlleva el uso de estrategias flexibles, no usuales o informales, muy relacionadas con el cálculo mental y con el uso del sentido numérico. Por ejemplo, diremos que una persona usa pensamiento relacional para realizar el cálculo 14 + 9 cuando, tras examinar la expresión, busca relaciones entre uno de los términos y algún otro número, que le faciliten dicho cálculo. En este caso puede buscar un número que sumado a 14 de 20. Tras encontrar el valor desconocido en la igualdad 14 + n = 20, se necesita, para poder completar el cálculo, buscar la relación que existe entre 6 y 9.

De este modo el pensamiento relacional puede ser utilizado para producir respuestas o resultados que no se conocen o no se recuerdan en un determinado momento, a partir de otros que se conocen, o para resolver una secuencia de operaciones de forma más sencilla transformándola mediante la aplicación de propiedades aritméticas fundamentales.

Por otra parte, se puede usar pensamiento relacional en situaciones en las que se relacionan expresiones aritméticas mediante relaciones de igualdad, desigualdad o de orden. En este contexto, el uso de pensamiento relacional implica la obtención de la respuesta a partir del examen de los números o expresiones involucradas y el establecimiento de relaciones entre ellos; no siendo necesario realizar explícitamente las operaciones expresadas. Por ejemplo, para resolver la igualdad numérica abierta 8 + 4 = □ + 5, se pueden comparar las expresiones que la componen, “8 + 4” y “□ + 5”, y reconocer que ambas contienen una suma y que una contiene un 4 y otra un 5. Usando sentido numérico se sabe que 4 es una unidad menor que 5, y, mediante el conocimiento de la relación de compensación, puede deducirse que la respuesta es una unidad menos que 8.

El trabajo centrado en pensamiento relacional implica mantener la atención en relaciones relativas a las operaciones y los números involucrados, manteniendo el cálculo de las operaciones en un segundo plano.

Significados del signo igual

Como todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática. Sin embargo dicho significado no es unívoco, estando ligado al contexto en el que se considere. La consulta de variados documentos que abordan distintos significados del signo igual (Byers y Herscovics, 1977; Clement, 1980; Wheeler, 1981; Vergnaud, Cortes y Favre-Artigue, 1987; Schoenfeld y Arcavi, 1988; Wolters, 1991; Vergnaud, 1994; Freudenthal, 1994; Linchevski, 1995; Proyecto Sur, 1997; Palarea, 1998; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998; Anglada, 2000; Rojano, 2002; Seo y Ginsburg, 2003; Godino y Font, 2003; Carpenter et al, 2003; Molina y Castro, 2005) nos ha permitido distinguir un total de nueve significados y usos de este signo en el contexto de la Aritmética y el Álgebra:

1. *Propuesta de actividad.* Uso del signo igual en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos encadenados con símbolos operacionales, seguida del signo igual (Ej. $16 \div 3 =$; $x(x+1) - 3x(x+5) =$). Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones para proponer al alumno una actividad a realizar, que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad.

2. *Operador*. Este significado hace referencia al signo igual como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda del signo igual, y su resultado, que se dispone a la derecha (Ej. $12 + 12 = 24; x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 + 2x$).

3. *Expresión de una acción.* Significado del signo igual como símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones y su resultado, pudiéndose disponer ambos tanto a izquierda como a derecha del signo igual (Ej. $24 = 12 + 12$). En este caso, a diferencia del significado operador, se reconoce la propiedad simétrica de la igualdad.

4. *Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).* Este significado lo encontramos en el contexto del álgebra, en situaciones en las que el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún o algunos valores de la/s variable/s, pudiendo no existir ninguno (Ej. $x^2 + 3x = x + 1$; $sen\ (3x)=0$).

5. *Expresión de una equivalencia.* Cuando el signo igual indica que las expresiones que se disponen a ambos lados son diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Este significado se particulariza en tres acepciones diferentes según el tipo de expresiones que compongan ambos miembros:

5.1 *Equivalencia numérica.* Cuando las expresiones en ambos miembros tienen un mismo valor numérico, es decir, representan a un mismo número (Ej. $4 + 5 = 3 + 6$; $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$; $sen\ (\Pi/2)= 1$).
5.2 *Equivalencia simbólica (o identidad simbólica).* Cuando las expresiones algebraicas de ambos miembros tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que tomen la/s variable/s. Un caso particular tiene lugar cuando la igualdad expresa una propiedad matemática (Ej. $a + b = b + a$).
5.3 *Identidad estricta.* Significado restringido a expresiones donde los dos miembros representan el mismo objeto matemático usando el mismo representante (Ej. $3 = 3$; $a + b = a + b$). Este caso es una particularización de los significados equivalencia numérica y equivalencia simbólica.
5.4 *Equivalencia por definición o notación.* Cuando el signo igual relaciona objetos matemáticos que son equivalentes por definición o por equivalencia de significado de la notación (Ej. $3^0=1$, $a/b=ab^{-1}$).

6. *Definición de un objeto matemático.* En este caso el signo igual se utiliza para definir o asignar un nombre a un objeto matemático (Ej. $f(x) = 3x + 2$; $sen\ (\alpha) = cateto\ opuesto/hipotenusa$).

7. *Expresión de una relación funcional o de dependencia.* En este caso el signo igual expresa la existencia de cierta relación de dependencia entre variables o parámetros. Por ejemplo en fórmulas del área de figuras geométricas (Ej. $A = \prod r^2$).

8. *Indicador de cierta conexión o correspondencia.* Este significado del signo igual, algo impreciso, hace referencia a su uso entre objetos de distinta naturaleza o ámbito, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas (Ej. *Pedro = 12 años*).

9. *Aproximación.* Este significado se refiere al uso del signo igual para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico (Ej. $1/3 = 0.33$). En estos casos el signo igual puede ser reemplazado por el símbolo ‘$\simeq$’.

Propiedades aritméticas

Centrándonos en las operaciones de la estructura aditiva y en el conjunto de los números naturales, se han identificado nueve propiedades que pueden trabajarse desde la resolución de igualdades numéricas con solución en el conjunto de los números naturales. Dichas propiedades, que se enumeran en la Tabla 1, delimitan el foco de atención en nuestra intervención en el aula al ser empleadas en el diseño de las igualdades que componen las actividades.

La última propiedad incluida en la Tabla 1, *magnitud*, comprende la generalización de relaciones aritméticas basadas en la magnitud de los números involucrados y el conocimiento de las operaciones suma y resta (Ej. si $a > b$ entonces $a + c > b$ y $b – c < a$, siendo a. b y c números naturales).

Tabla 1
Propiedades aritméticas en el contexto de las igualdades numéricas

Relación	Ejemplos de igualdades V/F o abiertas
Propiedad conmutativa de la suma	12 + 11 = 11 + 12 12 + 7 = 7 + □
No conmutatividad de la resta	24 – 15 = 15 – 24
Cero elemento neutro a + 0 = a, 0 + a = a a – 0 = a	24 + 0 = 25 9 – □ = 0
a – a = 0	100 – 100 = 1 50 – □ = 0
Compensación	51 + 51 = 50 + 52 18 – 8 = 17 – □
Complementariedad de la suma y la resta	27 + 48 – 48 = □ 100 + 94 - 94 = 100
Composición y descomposición	24 – 15 = 24 – 10 – 5 7 + 7 + 6 = 14 + 6
Magnitud	75 – 14 = 340 7 + 15 = 8 + 15
Propiedad reflexiva de la igualdad	3 = 3 12 + 12 = 12 + 12

Antecedentes

Los primeros trabajos que abordan el estudio de la resolución de igualdades numéricas se centran en igualdades abiertas de tres términos de suma y resta (Ej. Weaver, 1971; Lindvall e Ibarra, 1980). Estos estudios aportan información sobre las dificultades que encuentran los alumnos en la resolución de este tipo de igualdades y los métodos de resolución empleados y su frecuencia, analizando la influencia de la operación, de la posición de la operación y de la incógnita, y de la existencia o no de solución en el conjunto de los números naturales.

En el contexto de la resolución de igualdades, otros estudios analizan la comprensión del signo igual de alumnos de Educación Primaria y Secundaria documentando la frecuente interpretación operacional del signo igual así como la tendencia de los alumnos a proceder de izquierda a derecha en la construcción y consideración de igualdades y a centrarse en el cálculo de las operaciones implicadas (Molina y Castro, 2005).

En relación con el uso y desarrollo de pensamiento relacional diversos autores documentan la falta de conocimientos de los alumnos de Educación Primaria y Secundaria sobre la estructura que subyace a las expresiones aritméticas y sus propiedades (Ej. Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999); la bondad de las estrategias de pensamiento y cálculo flexible para favorecer el aprendizaje, la retención y la transferencia de conocimiento sobre el cálculo (Ej. Thorton, 1978; Gómez, 2005); y la capacidad de los alumnos de los primeros cursos de educación primaria para pensar sobre relaciones sofisticadas y expresarlas incluso de forma simbólica (Ej. Carpenter et al., 2003; Koehler 2004).

Objetivos de la investigación

En esta investigación se pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre. Dicho proceso consiste en el trabajo con igualdades numéricas basadas en relaciones aritméticas básicas, mediante una metodología de trabajo en el aula centrada en la discusión de las respuestas y estrategias de los alumnos. Nuestro interés se centra en el estudio del desarrollo y manifestación del pensamiento relacional, de los significados del signo igual que los alumnos hacen manifiestos en el tipo de tareas propuestas, así como de las estrategias que utilizan y dificultades que encuentran en la resolución de las igualdades.

Metodología

La metodología de investigación aplicada en este estudio se ubica dentro de las metodologías propias de las investigaciones de diseño, un paradigma emergente que actualmente está siendo activamente aplicado y desarrollado dentro de la investigación educativa. Los estudios de diseño son un tipo de experimentos de enseñanza cuyo objetivo es producir teoría, que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, permitiendo adaptar las condiciones de la enseñanza para afectar la probabilidad de ciertos resultados o sucesos. Constituyen extensas investigaciones de prácticas educativas provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares noveles, cuidadosamente secuenciadas, que estudian como algún campo conceptual o conjunto de habilidades e ideas son aprendidas mediante la interacción de los alumnos bajo la guía del profesor (Confrey, 2005).

Concretamente el diseño de investigación aplicado se denomina "*diseño de investigación dirigido por una conjetura*" (Confrey y Lachance, 2000). El punto de partida de este diseño es "*una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes*" (pp. 234-235). No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía en el proceso de investigación, siendo revisada y reelaborada a lo largo de dicho proceso.

En nuestro caso, la conjetura que guía el proceso de investigación es que los alumnos de tercero de Primaria son capaces de utilizar estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional para resolver igualdades numéricas. Estas estrategias permiten además hacer explícito su conocimiento aritmético. Por otra parte, según la literatura los alumnos de Educación Primaria, y concretamente de tercero de Primaria, encuentran dificultades en la resolución de igualdades numéricas mostrando cierta tendencia computacional. Conjeturamos que mediante la consideración y discusión de igualdades de variadas formas los alumnos pueden desarrollar su comprensión de las igualdades numéricas, y en especial del signo igual, llegando a entenderlas como expresiones de una relación, y pueden desarrollar pensamiento relacional como estrategia para su resolución.

Recogida de datos

Los sujetos participantes en este estudio son una clase de 26 alumnos de tercero de Primaria, 12 niños y 14 niñas. La recogida de datos en el aula ha tenido lugar durante un total de seis sesiones realizadas en días diferentes y durante el horario escolar. La primera sesión tuvo lugar dos meses antes de la segunda. Las sesiones segunda, tercera, cuarta y quinta se realizaron con una separación entre ellas de una a dos semanas. La última sesión se realizó en el siguiente curso académico, ocho meses y medio después de la quinta sesión (ver Tabla 2).

Tabla 2
Organización y distribución de las sesiones

Sesión	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Nº alumnos en clase	26	21	22	25	(13)	25
Duración	30’	1h	1h	1h	1h 50’	1h
Actividades realizadas	-actividad escrita -entrevista a 4 alumnos -discusión	-actividad escrita -discusión -actividad escrita -discusión	-discusión	-actividad escrita	-entrevistas	-actividad escrita
Igualdades numéricas empleadas	Abiertas	abiertas y V/F	V/F	V/F	V/F	V/F

Actividades. Como se observa en la tabla 2 se llevaron a cabo discusiones, actividades escritas individuales, usándose lápiz y papel, y se realizaron entrevistas a varios alumnos; todo ello en el contexto de la resolución de igualdades. En las discusiones pedimos que los alumnos explicaran distintas formas en las que habían resuelto las igualdades. De este modo se favoreció la participación de un mayor número de alumnos y se hizo explícita la existencia de diversas formas de resolver una misma igualdad y nuestro interés en que los alumnos exploraran y explicaran todas las formas que se les ocurrieran. A partir de la tercera intervención les cuestionamos directamente por formas de resolver las igualdades sin realizar todas las operaciones expresadas, sin proponerles un modo concreto de abordarlas.

Igualdades numéricas utilizadas. En cada una de las intervenciones en el aula se emplearon una determinada colección de igualdades, abiertas o verdaderas y falsas, elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior, de los objetivos de la sesión en cuestión, de las recomendaciones de Carpenter et al. (2003) y de nuestra experiencia previa (ver Molina y Castro, 2005). Además se tuvo en cuenta el tamaño de los números involucrados, la proporción de igualdades verdaderas y falsas, la posición de la incógnita en las igualdades abiertas y las relaciones aritméticas anteriormente mencionadas.

Como es propio de la metodología utilizada la recogida de datos ha sido exhaustiva, para capturar con detalle las interacciones ocurridas en el aula, llevándose a cabo evaluaciones individuales para poder conocer el aprendizaje y evolución de cada alumno. Se han realizado grabaciones en video de las tres primeras sesiones, grabaciones en audio de las entrevistas, se han tomado notas de lo ocurrido en el aula y se han recogido las hojas de trabajo de los alumnos. Además, a lo largo del proceso de investigación se han recogido las reflexiones y decisiones tomadas a partir de cada intervención en el aula, para poder describir con precisión, a posteriori, la evolución de la conjetura de investigación. Todos los datos recogidos son de tipo cualitativo.

Análisis de los datos y primeros resultados

El análisis de los datos recogidos en el transcurso de esta investigación comprende dos etapas: un análisis continuo tras cada intervención en el aula y un análisis final. El primero de ellos se refiere al análisis de los datos de cada intervención con la intención de tomar decisiones con respecto a futuras intervenciones y revisar y desarrollar la conjetura de investigación. El análisis final es el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos, el cual conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución de los alumnos.

Los primeros resultados obtenidos dan muestras de la capacidad de los alumnos de tercero de Educación Primaria de desarrollar y utilizar pensamiento relacional como estrategia para la resolución de igualdades, confirmando en este sentido los resultados de nuestro estudio previo Molina y Castro (2005). Inicialmente, la mayoría de los alumnos muestra la tendencia de realizar el cálculo de las operaciones involucradas en la igualdad aunque algunos alumnos dan muestras puntuales del uso de pensamiento relacional. A partir de la tercera sesión las estrategias basadas en pensamiento relacional son más frecuentes distinguiéndose diez tipos de los que se aportan ejemplos en la Tabla 3.

Los aspectos en los que los alumnos centran su atención al hacer uso de estas estrategias son los siguientes: la mismidad (repetición) de términos, la mismidad o diferencia de operación, la posición de unos términos respecto de otros, la similitud (parecido) de términos o expresiones, la presencia del cero, la magnitud relativa de los términos, y hechos numéricos conocidos que aparezcan contenidos en la igualdad.

Con respecto a la comprensión del signo igual, los alumnos dan muestras de cuatro significados del signo igual: *operador, expresión de una acción, equivalencia numéric*a, y *similitud numérica* (símbolo que relaciona expresiones entre las que existe cierta similitud de términos o de estructura, obviando en ocasiones el efecto de las operaciones involucradas).

Los tres primeros significados fueron detectados en nuestro estudio previo, sin embargo este último no ha sido identificado previamente. En particular este significado conduce a afirmar, por ejemplo, que la igualdad 2 + 11 = 11 – 2 es verdadera, por involucrar en ambos miembros los mismos números. Este significado es puesto de manifiesto puntualmente por variedad de alumnos, los cuales también dan muestras de alguno de los otros significados.

La mayoría de los alumnos muestran el significado equivalencia numérica manifestando un significado operacional del signo igual cuando encuentran dificultad en alguna de las igualdades. El uso del significado operacional del signo igual lleva a los alumnos a ignorar alguno de los términos, a alterar el orden de los términos dentro de uno de los miembros o en la totalidad de la igualdad, a combinar términos de distintos miembros y a considerar parte de la igualdad en sentido inverso, es decir, de derecha a izquierda. Se observa que algunos de los alumnos no dan importancia al orden de los términos dentro de cada miembro considerando que igualdades tales como 8 – 18 = 7 – 17 son verdaderas por serlo 18 – 8 = 17 – 7, y aplicando en ocasiones una supuesta (e implícita) conmutatividad de la resta para dar respuesta a restas en las que el minuendo es menor que el substraendo (Ej. 5 – 10 = 5).

Tabla 3
Estrategias basadas en pensamiento relacional utilizadas por los alumnos para la resolución de igualdades abiertas y verdaderas y falsas

Estrategias	Ejemplos
Conmutatividad	[75 + 23 = 23 + 75] Verdadera porque en la suma no importa cambiar el orden.
Restricción en el dominio de la operación	[18 – 7 = 7 – 18] Falsa porque 18 – 7 son 11 y a 7 no le puedes quitar 18.
Composición-descomposición	[257 – 34 = 257 – 30 – 4] Verdadera porque a 30 le sumas 4 te da 34 y son los mismos números.
Compensación	[53 + 41 = 54 + 40] Verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 te da lo mismo.
Complementariedad de la suma y la resta	[16 + 14 – 14 = 36] Falsa porque 16 + 14 – 14 son 16 porque le quitamos y le ponemos a los números.
Mismidad	[53 + 41 = 54 + 40] Falsa porque 53 no es igual a 54 y 41 no da lo mismo que 40.
Similitud de estructura	[Explicación de la respuesta 7 en 17 - □ = 18 – 8] Como 18 luego hay un ocho pues me ha salido.
Magnitud	[37 + 22 = 300] Porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor.
Cero como elemento neutro	[23 + 0 = 23] Porque veintitrés más cero igual a veintitrés, porque si a veintitrés no le sumamos nada es veintitrés.
a – a = 0	[123- 125 = 13] Falsa, porque a ciento veinticinco le quitas ciento veinticinco son cero, no trece[…] Porque aquí son los mismos números y si le quitas los mismos números son cero, aquí no te puede dar trece.

Dirección de contacto:

Marta Molina González y Encarnación Castro Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Granada
Campus de Cartuja
18071 GRANADA
E-mail: martamg@ugr.es y encastro@ugr.es

Referencias

ANGLADA, C. (2000). *La evolución de la igualdad en escolares de 10 a 14 años de edad.* Trabajo de investigación tutelada no publicado, Dpto. de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga.

BYERS, V., & HERSCOVICS, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 24–27.

CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L., & LEVI, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and Algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

CLEMENT, J. (1980). Algebra word problem solutions: Analysis of a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 9,* 44– 54.

CONFREY, J. (In press). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*.

CONFREY, J., & LACHANCE, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly, y R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education.* New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

FREIMAN, V., & LEE, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. In M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (pp. 415-422). Bergen: Bergen University College.

FREUDENTHAL, H. (1994). *Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados).* Traducción, notas e introducción de L. Puig. Mexico, DF: Cinvestav del IPN.

GODINO, J. Y FONT, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat–maestros/

GÓMEZ, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4,* 17 – 29.

KAPUT, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum.* Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390- 419). New York: Macmillan.

KOEHLER, J. L. (2004). *Learning to think relationally: Thinking relationally to learn. Unpublished Dissertation Research Proposal.* University of Wisconsin-Madison.

LIEBENBERG, R., SASMAN, M., & OLIVIER, A. (1999). From numerical equivalence to algebraic equivalence. Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, Vol. 2 (pp. 173-183). Port Elizabeth: Port Elizabeth Technikon. Disponible en http://academic.sun.ac.za/mathed/Malati/Files/ Structure992.pdf

LINCHEVSKI, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre–algebra. *Journal of Mathematical Behaviour, 14,* 113–120.

LINVALL, C. M., & IBARRA C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11* (1), 50-62.

MOLINA, M. Y CASTRO E. (2005). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.), *IX simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática* (pp. 205-213). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y SEIEM.

PALAREA, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral no publicada. Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna.

PROYECTO SUR (1997). *Construir las matemáticas. 2º ESO.* Granada: Proyecto Sur.

ROJANO, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143–163). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SAENZ-LUDLOW, A., & WALGAMUTH, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol, *Educational Studies in Mathematics, 35*, 153-187.

SCHOENFELD, A. H., & ARCAVI, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*, 420-427.

SEO, K. H., & GINSBURG, H. (2003). "You've got to carefully read the math sentence…": Classroom context and children's interpretations of the equal sign. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 161–187). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

THORNTON, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9* (3), 214-227.

VERGNAUD, G. (1984). Understanding Mathematics at the Secondary–School Level. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research y Practice in Mathematical Education* (pp. 27–45). Adelaide, South Australia: Shell Centre for Mathematics Education, University of Nottingham.

VERGNAUD, G., CORTES, A., & FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès des débutants faibles: problèmes épistemologiques et didactiques. En G. Vergnaud, G. Brousseau, y M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques: Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-280). Sèvres: La Pensé Sauvage.

WEAVER, J. F. (1971). Some factors associated with pupils' achievement when solving selected types of simple open sentences. *The Arithmetic Teacher, 18,* 513-519.

WHEELER, R. F. (1981). *Rethinking Mathematical Concepts.* Chichester: Ellis Horwood Limited.

WOLTERS, M. A. (1991). The equal sign goes both ways. How mathematics instruction leads to the development of a common misconception. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 348–355). Assisi, Italy: Program Committee of the PME15.