# ALGUNAS CURIOSIDADES DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL CON INTERPRETACIONES NO ELEMENTALES


Francisco Enríquez

enriquezfran@unicauca.edu.co

piotrpi@rambler.ru

Universidad del Cauca

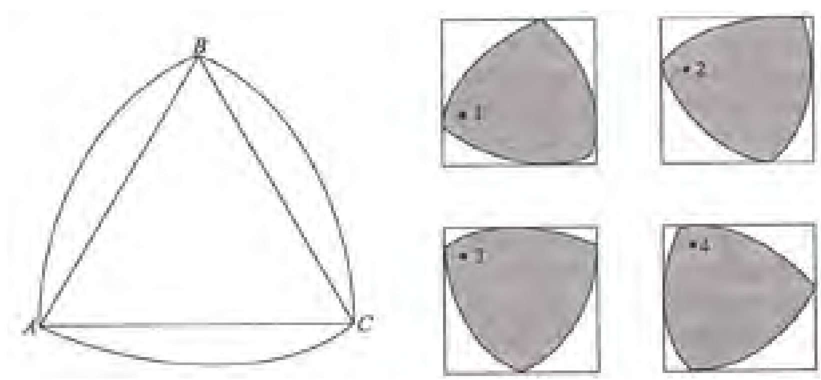


***Resumen.*** *En este taller se presentan ciertas construcciones geométricas y mecánicas poco conocidas y que aparentemente son imposibles (¿es posible horadar en un cubo de madera un agujero, de forma que a través de él se pueda hacer pasar un cubo de las mismas dimensiones que el original?, ¿es posible realizar un corte en una hoja de papel, de modo que por dicho corte pueda pasar una persona, sin tocar los bordes de la hoja?). Sin embargo, estas construcciones poseen una completa fundamentación matemática y en ciertos casos resultan ser problemas hasta el momento no resueltos. En la segunda parte se indican algunos problemas de concurso, cuyas soluciones sólo utilizan matemática elemental. El taller se acompaña de los respectivos dibujos y videos.*



***Palabras clave:*** *taladro de Watts, ladrillo de Pitágoras*


## 1. PRESENTACIÓN




Triángulo de Reulaux

Es bien conocido el papel que la intuición juega en las ciencias matemáticas, no solamente en su estudio sino también en sus procesos investigativos. Sin embargo ella no siempre indica el camino correcto. En el presente taller se pretende ilustrar esta última situación mediante ejemplos notables, algunos de los cuales son tal vez poco conocidos. Tal es el caso de las curvas de "anchura constante", es decir aquellas curvas que no siendo simétricas, se "comportan" como una circunferencia (ver dibujos anexos). Estas curvas hallan aplicación en distintas ramas de la ingeniería, una de las cuales consiste en un “extraño” taladro que perfora “agujeros casi cuadrados” (taladro de Watts). Igualmente se presentan ciertas propiedades de la curva braquistócrona, o curva de descenso mínimo.

Resultan también interesantes los problemas relacionados con el plegado en cartulina del cubo y el tetraedro regular. La respectiva video-animación ilustra la solución relativamente reciente, hallada a uno de los problemas que surgen de dichos plegados. Finalmente se presenta una selección de problemas de olimpiadas internacionales, los cuales se resuelven usando solamente conocimientos que no salen del marco de las matemáticas de secundaria, pero que ilustran la belleza de ciertos procedimientos no estándar, como también la eficacia de las ideas ingeniosas en la resolución de problemas.

A manera de “epílogo” se indican las construcciones señaladas en el resumen del presente taller.

## 2. MARCO TEÓRICO

Ciertas “curvas notables” como la cicloide, ocupan un lugar privilegiado no solamente en la historia de las matemáticas, sino también en la solución de problemas prácticos en otras disciplinas del saber. En este sentido tal vez sea suficiente anotar, que el problema de la tautócrona o “curva de descenso mínimo” marcó el inicio de disciplinas tan importantes como el cálculo variacional moderno, sin hablar ya de sus aplicaciones en la construcción de relojes. Situación similar, aunque no tan conocida, se presenta con las curvas de anchura constante, cuyas aplicaciones han llamado la atención incluso en la industria automotriz.

En este taller también presentamos dos problemas clásicos de la teoría de números: triángulos egipcios y el “ladrillo de Pitágoras”, que resaltan por su belleza y simplicidad de formulación. No obstante, el segundo de ellos aun no ha sido resuelto. Similarmente, la construcción a partir de un trozo de cartulina de poliedros convexos, ha llamado la atención de los matemáticos, no sólo por tratarse de un pasatiempo de origamia, sino también por los inesperados resultados geométricos que de ello se desprenden. En este sentido, las video-animaciones que se presentan en el taller son un importante apoyo interactivo.

En las situaciones arriba descritas se puede hallar un común denominador, a saber: el ingenio y la creatividad de singular belleza matemática. Es por esta razón que, alejándonos de las aplicaciones “prácticas” ponemos a disposición de los interesados una selección de problemas de olimpiadas internacionales, donde precisamente el ingenio, la creatividad y la elegancia son las directrices en la construcción de soluciones que no requieren de avanzados conocimientos matemáticos. Con frecuencia este *“modus operandi”* se encuentra en el quehacer del trabajo profesional en matemáticas.

## 3. METODOLOGÍA DEL TALLER

*Primera Sesión.* Se presentarán algunas curiosidades del plegado del cubo (hexaedro regular) y de la pirámide (tetraedro) regular y se discutirán algunas propiedades y aplicaciones de las curvas de anchura constante y la curva de descenso mínimo (tautócrona).

*Segunda Sesión.* Se plantea el problema de las ternas pitagóricas (triángulo egipcio) en el plano y su posible generalización en el espacio (ladrillo de Pitágoras). De igual manera se discuten dos construcciones curiosas, relacionadas con el cubo y la elaboración de cierta “ranura” especial en una hoja de papel.

*Tercera Sesión.* Se discuten los siguientes problemas tipo olimpiadas, cuyas soluciones solamente requieren del método de inducción y de conceptos matemáticos que se tratan a nivel de la educación media:

1. Demuestre que si el número $n$ no es divisible ni entre 2 ni entre 5, entonces puede encontrarse un número divisible entre $n$, cuya escritura decimal consta solamente de cifras 1.

2. Demuestre que si los números naturales del 1 al 1967 inclusive se escriben uno a continuación del otro en cualquier orden, entonces el número obtenido no es un cubo perfecto.

3. Demuestre que en la expansión decimal del número $(6+\sqrt{37})$

las primeras 999 cifras después de la coma son ceros.

(*Ayuda*. Use el siguiente lema, que se prueba por inducción matemática).

*Lema*. Sea $\in$ . Entonces los siguientes números son enteros:

$$(6+\sqrt{37}) \quad + \quad (6-\sqrt{37}) \quad , \quad \sqrt{37} \quad 6+\sqrt{37} \quad + \quad 6-\sqrt{37} \quad .$$

*Nota.* Debe tenerse cuidado en el uso de la inducción matemática. Por ejemplo, ¿es válido el enunciado: Sea $\in$ . El número 991 $+1$ NO es un cuadrado perfecto?

4. ¿ Es irracional el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ?

¿ Puede ser el número racional con y β irracionales?

5. Se sabe que $(\sqrt{2}-1) = \sqrt{57122}-\sqrt{57121}$ .

Pruebe que $(\sqrt{2}+1) = \sqrt{57122}+\sqrt{57121}$.

6. ¿ Puede generalizar el resultado del problema 5?

## 4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] DINKIN E. B. Y OTROS. *Competiciones Matemáticas, aritmética y algebra*, Editorial Nauka, Moscú, 1970.

[2] GARDNER M. *Curvas de anchura constante*, The Empire of Mathematics No. 1, 2001.

[3] SOMINSKY I. S Y OTROS. *Sobre la inducción matemática*, Editorial Nauka, Moscú, 1967.

[4] VASILEV N. B. Y OTROS. *Olimpiadas matemáticas a distancia*, Editorial Nauka, Moscú, 1986.

[5] PROGRAMA ACADEMIA. www.tvkultura.ru//issue.html?id= 105818;
www.tvkultura.ru//issue.html?id= 99953