

# Mecanismo Intra-Inter-Trans en el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico

## *Intra-Inter-Trans Mechanism in the Spatial and Geometric Thought's Development*

Recepción: 12-05-2011  
Evaluación: 25-07-2011  
Aceptación: 10-08-2011

Magaly Corredor de Porra\*

Artículo de Investigación

### Resumen

Uno de los mecanismos cognitivos hallados por Jean Piaget es el proceso INTRA-INTER-TRANS, cuya importancia radica en su doble carácter constructivo y reflexivo, con los cuales promueve el progreso de la inteligencia y explica el orden secuencial del desarrollo intelectual. El artículo ilustra este proceso en el desarrollo de las nociones geométricas en los individuos; muestra las características de cada una de sus etapas, y señala cómo en un mismo nivel de pensamiento se puede presentar el mecanismo con sus tres fases simultáneamente. Se emplean

los resultados de talleres y actividades de aula practicados—como parte del proyecto de investigación *Epistemología genética y matemáticas*— en una exploración con estudiantes entre los 6 y los 15 años de edad de la institución educativa INEM de Tunja, en los cuales se verificaron y se adaptaron algunas experiencias ya clásicas dentro del estructuralismo genético, y se obtuvieron resultados frente a experiencias relativamente nuevas. Al final se hacen algunas consideraciones que invitan a reflexionar sobre las implicaciones didácticas del tema.

**Palabras clave:** Psicogénesis, Geometría, Intra-inter-trans, Exagrama.

---

\*Licenciada en Matemáticas y Física Uptc Especialista en Matemática Avanzada UN Magister en Ciencias-Matemáticas UN



## **Abstract**

One of the cognitive mechanisms found by Jean Piaget is the process INTRA-INTER-TRANS. Its importance lies in the dual constructive and thoughtful character, which promotes the progress of intelligence and explains the intellectual development's sequential order. The present study illustrates this process in the geometric concepts in individual's development. Additionally it shows each stage process' characteristics and finally, it illustrates how the mechanism with its three simultaneous phases, at

the same level of thinking, can be presented. We used data from workshops and classroom activities performed with students between 6 and 15 years old, in the INEM school of Tunja, in which we verified and adapted some classical experiences within the genetic structuralism, and some results were obtained from relatively new experiences. Toward the end, some considerations are made in order to invite the reader, to think about this issue's didactics implications.

**Key words:** Psychogenesis, Geometry, Intra-inter-trans, Hexagram.



## Introducción

Los primeros esquemas de pensamiento surgen del contacto directo con el entorno; desde las sensaciones hasta las construcciones abstractas son relativas a las acciones del sujeto. Inicialmente, con carácter egocéntrico, el niño relaciona todo con su propio cuerpo, y luego se ubica en un espacio más general. Los vínculos entre la axiomática y el pensamiento concreto no se basan simplemente en relacionar lo abstracto con la realidad exterior, se apoyan en los mecanismos cognitivos que el sujeto emplea y, por tanto, los conceptos son el resultado de una reflexión sobre las coordinaciones de la acción, y no de la abstracción directa a partir del objeto (Corredor, 1993).

Un estudio intra-objetual es, básicamente, un análisis de los objetos o eventos con descubrimiento de propiedades intrínsecas que obedecen a explicaciones todavía muy particulares y locales; esto es, desde sistemas elementales relativos a cada figura en particular. Un examen inter-objetual busca explicaciones a las relaciones entre objetos o eventos desde un punto de vista global, con lo que se impulsa al hallazgo de transformaciones, y junto a ellas las relaciones constituyen lo característico de lo inter-objetual. El pensamiento de tipo trans-objetual generaliza las propiedades válidas para conjuntos amplios de objetos, establece vínculos entre las transformaciones e implica la construcción de estructuras, siendo éstas lo propio de este nivel. La sucesión de los niveles Intra-Inter-Trans está orientada, según un orden necesario; en el trans, la totalidad de las transformaciones, con sus vínculos y

propiedades, supone la formación de algunas o todas esas transformaciones en el inter, y éstas, a su vez, implican conocer las características y propiedades intrínsecas encontradas en la etapa intra. A manera de notación emplearemos Ta para el nivel intra, Tr para el inter y Ts para el periodo trans; así, escribiremos la triada Intra-Inter-Trans como TaTrTs (Piaget, 1982).

En el campo de la psicogénesis, el proceso que conduce el pensamiento intelectual desde un análisis de tipo intra-objetual a la etapa en que priman las relaciones de carácter inter-objetual, y de allí a la etapa o fase final del proceso, denominada trans-objetual, en la cual se somete lo adquirido en el intra y en el inter-objetual a análisis influidos por estructuras de tipo lógico-matemático, es un proceso constructivo-reflexivo que explica el orden de sucesión del desarrollo intelectual en el ser humano.

Al aceptar el devenir y continuo progreso de las matemáticas y, de modo específico, de la geometría, área escogida para este análisis, se aprueba que en su evolución se tratan cada vez temas nuevos y más complejos, y consecuentemente el individuo debe trabajar con estructuras de pensamiento mucho más elaboradas; podría imaginarse que los instrumentos cognitivos están ligados a los contenidos particulares, sin embargo, el mecanismo o instrumento cognitivo TaTrTs está presente, independientemente del contenido geométrico, en el desarrollo y en cada uno de los periodos del ascenso del conocimiento, y más bien depende del modo de construcción del pensamiento matemático espacial y de la comprensión de ideas de la geometría.

---

*En el campo de la psicogénesis, el proceso que conduce el pensamiento intelectual desde un análisis de tipo intra-objetual a la etapa en que priman las relaciones de carácter inter-objetual, y de allí a la etapa o fase final del proceso,*

---

En la construcción del espacio, las últimas y más elaboradas fases resultan de la necesidad de explicar las formas y propiedades de las figuras y objetos como invariantes bajo ciertas transformaciones, como los desplazamientos, las simetrías, las superposiciones y otras. Se ha enfocado esta evolución, a la manera de J. Piaget (1982), en tres niveles: intra-figural, inter-figural y trans-figural, aspectos que corresponden al mecanismo mencionado. Este instrumento cognoscitivo presenta dos polos de actividad: uno de asimilación al quehacer intelectual del sujeto, y otro de acomodación a las formas y al espacio real en que está inmerso. Como mecanismo asimilador, lo principal de su construcción radica en la conceptualización a partir de interacciones con objetos, formas y relaciones espaciales; y como esquema acomodador, razona y reconstruye, es generador de ideas nuevas y madura los razonamientos ya empleados en experiencias anteriores. En lo sucesivo se examinan estas etapas del proceso.

### **El pensamiento intra-figural**

Una forma inicial intra de pensamiento, en la cual prima el realismo de las figuras, considera, por un lado, que existen independientemente del sujeto, y por otro, como si fuesen estáticas y estuvieran dadas por sí mismas; cuando el sujeto manipula figuras, estudia sus partes en busca de propiedades intrínsecas a ellas, pero no construye un sistema de relaciones y transformaciones entre ellas (Piaget, 1982). Dado que el sujeto no concibe el movimiento de los objetos, la noción de transformación como fuente de construcciones no tiene significado en el nivel intra. El conocimiento inicial

es, por tanto, un proceso de adecuación, porque prevalece el carácter exógeno. El sujeto no busca construir, sino adecuarse, y por ello se somete a las entidades permanentes dadas desde el exterior.

En lo que respecta a la representación, a temprana edad los niños distinguen figuras abiertas, de figuras cerradas; curvilíneas, de rectilíneas; con ángulos rectos o sin ellos, diferencias que resultan de la comparación entre algunas propiedades internas de dos o más figuras. Por ejemplo, si el niño constata que para un triángulo rectángulo, los ángulos interiores suman  $180^\circ$ , puede prever con mayor facilidad que esto ocurra también con otras formas triangulares, y luego podrá “descubrir” que la suma de los ángulos interiores de cuadrados o rectángulos siempre es de  $360^\circ$ , para pasar luego a extender ese resultado a cuadriláteros más generales. La construcción de algunos lugares geométricos se inicia siempre con actividades de tipo intra-figural; es el caso, por ejemplo, de la circunferencia; el niño puede colocar objetos a igual distancia de un muñequito, para esto no requiere más que un punto de referencia que resulta interior a la figura que está armando.

En algunos escritos de epistemología genética (por ejemplo, Piaget, 1982: 110) se afirma que las primeras relaciones espaciales construidas por los niños son de naturaleza topológica; vale la pena acotar que esto es válido únicamente en la fase intra-figural a nivel de intuiciones, copiado de figuras y para relaciones topológicas muy elementales; el juego de morfismos sobre vecindades, y las equivalencias topológicas no son producto de relaciones internas y particulares de cada figura o cuerpo; estas deducciones no son de tipo



intra, pues no se efectúan al interior de cada objeto y requieren construcciones más complejas.

En experiencias donde el cambio de forma de las figuras se debe a desplazamientos de sus partes ocurre que en la etapa intra-figural el niño no razona en términos de los desplazamientos (transformaciones), porque se fija solo en el producto final y cree que hubo pérdida o incremento de partes. Así, al tomar un cuadrado dividido en cuatro subcuadrados iguales, si se disponen después en forma de un rectángulo, el pequeño no acepta la conservación del área de la superficie; pero en el nivel inter-figural sí se logra este invariante. Este caso puede ampliarse a objetos físicos, como el alargamiento de una bola de plastilina en un cilindro, o al traspasar un líquido a otro recipiente más estrecho y más largo; el niño intra-figural no admite la conservación de la masa y del volumen, como si en el desplazamiento hubiese algún incremento o pérdida. Posteriormente se logran estos invariantes.

## El pensamiento inter-figural

Hay una forma intermedia de pensamiento inter, en la cual las organizaciones inter-figurales surgen de construcciones endógenas, y llegan a formar el espacio y sus objetos geométricos, en el sentido de que las “entidades” geométricas no se imponen desde afuera, sino que son producto de relaciones en las cuales ellas participan. Lo exógeno se va subordinando a lo endógeno, paso que inicialmente se apoya en las relaciones intra-figurales, y luego en las inter-figurales. Los razonamientos

inter son prolongados, de pronto porque es necesario equilibrar lo exógeno con lo endógeno del conocimiento; es un ajuste difícil, teniendo en cuenta la naturaleza a la vez objetiva y subjetiva del espacio intuitivo.

Para mostrar la diferencia entre un razonamiento intra-figural y uno inter-figural sirve el siguiente ejemplo: un pequeño puede reproducir con relativa facilidad un dibujo en el que haya dos segmentos de recta perpendiculares, pues a su modo de ver se trata de un conjunto que forma una figura; pero reproducir o trazar dos segmentos de recta horizontales o dos verticales paralelos, relativamente apartados y con sus extremos no nivelados, se logra con mayor dificultad, pues el niño se ve obligado a recurrir a un punto de referencia exterior; esa reproducción requiere relacionar una de las partes con la otra, y, a su vez, buscar referentes del exterior, y por ello la construcción de paralelas es de tipo inter-figural. Sobre la construcción de perpendiculares, el niño intra-figural pinta chimeneas sobre techos inclinados como perpendiculares al techo, aun cuando no se conserve la vertical, o pinta sobre la ladera de una montaña una casa perpendicular a la ladera (ver figura1).



Figura 1. (Natalia, 8 años)

Un individuo con pensamiento inter-figural trata la posición de las figuras en un espacio totalizante o englobante, no solamente con respecto a propiedades internas de dos o más figuras o con respecto a un punto de referencia interior, sino que puede poner en juego puntos o marcos de referencia exteriores, conserva la vertical (ver figura 2) y se guía por la línea del suelo o de la mesa. Más adelante se vuelve sobre este problema.



Figura 2. (Yenny Rosario, 12 años)

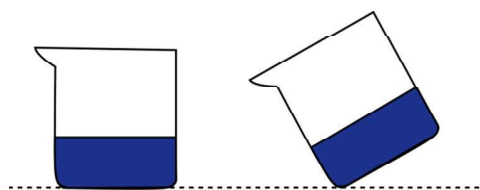
El paso de la etapa intra-figural a la inter-figural se ilustra por medio de dos problemas básicos: desarrollo de sistemas de referencia, y ubicación de sólidos tras algunos desplazamientos.

Los puntos o sistemas de referencia constituyen un capítulo importantísimo en el desarrollo de la apreciación espacial; llegar a conceptualizar los “marcos de referencia” es fundamental para que el individuo pueda ubicarse y comprender los movimientos de sí mismo y de otros objetos. Un elemento importante para servirse de los sistemas de referencia es la coordinación de direcciones y distancias; los problemas espaciales exigen de parte del sujeto manipulación de relaciones entre varios sistemas de coordenadas: el del sujeto mismo con sus coordenadas corporales, izquierda y derecha, cabeza y

pies (arriba y abajo), adelante y atrás; luego, el del objeto, que puede presentar ciertas características, como la parte superior, la inferior, la base, los lados. Después, el del espacio local, que siempre varía y cuyos límites son determinados solo psicológicamente; las coordenadas de este espacio se hallan en relación con el sujeto, cerca y lejos, arriba y abajo; o comportan un aspecto geográfico como norte y sur, u otro más local como cuando se indica a otra persona: “el salón está frente a usted al terminar el pasillo”. Finalmente, está el sistema asociado al espacio total, donde las coordenadas faltan y hay que construirlas. Cabe suponer que estos sistemas de referencia y de coordenadas se presentan según una gradación de dificultad, y el niño los adquiere en ese orden: coordenadas del sujeto, luego del objeto, del espacio local, del espacio geográfico y del espacio total (Piaget, 1982).

Los niños distinguen con facilidad lo que es mirar al techo de lo que es mirar al suelo, pero con mayor dificultad lo que es mirar a derecha y a izquierda. Estas orientaciones “horizontales” distintas se desarrollan un poco después; el pequeño puede aprender rápidamente que cada una de las expresiones “derecha” e “izquierda” se vincula con un costado del cuerpo, pero ¿con cuál? Con algunas mínimas diferencias, uno de los costados del cuerpo es la imagen simétrica del otro, automorfismo a partir del cual el individuo deberá descubrir una transformación más compleja llamada “enantiomorfismo”. Una buena parte de los malestares con respecto a la orientación espacial se deriva del hecho de que arbitrariamente se vuelve absoluta esta distinción que solo es relativa.

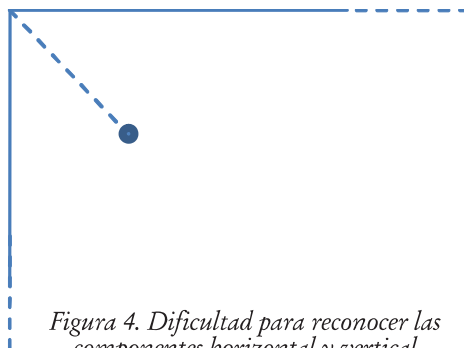
Respecto a esta dificultad de tener en cuenta el eje de referencia horizontal, es conocida la experiencia de Piaget-Inhelder, que se recordará enseguida (Piaget e Inhelder, 1948). Se muestra a un chico un frasco con un poco de agua tinturada; al tiempo se inclina un vaso similar vacío ante el niño; este debe indicar cómo quedaría la línea del nivel del agua. Inicialmente, el individuo utiliza el mismo frasco como elemento de referencia; este nivel de reflexión correspondería a un análisis de tipo intra-figural (ver figura 3); luego, y es bastante después, emplea otros elementos inmóviles presentes en la situación (inter-figural); en este periodo el niño atiende la necesidad de ubicar algún sistema de referencia distinto del frasco, y relaciona el nivel del agua, por ejemplo, con la superficie de la mesa o del suelo, o con cualquier otra superficie horizontal inmóvil. Solo en el nivel inter-figural el niño comienza a coordinar todos los ángulos y paralelas que hay a través de todo el sistema espacial que está examinando. Este desarrollo de la experiencia del nivel del agua es paralelo al desarrollo de la vertical en los dibujos de casas u otras figuras sobre la ladera de una montaña.



*Figura 3. Dificultad para reconocer la horizontal como eje de referencia*

La habilidad para emplear coordenadas se desarrolla paralelamente con la de emplear ejes de referencia horizontal y vertical; la siguiente experiencia ilustra

esta coordinación (Piaget y otros, 1948b). Se presentan a los niños dos hojas de papel de igual tamaño; una de ellas es transparente y tiene un punto situado no lejos de una esquina; la otra hoja es opaca y está totalmente en blanco; se les pide a los niños que marquen en la segunda hoja un punto, de modo que si se superpone la primera hoja sobre la hoja en blanco, los puntos de una y otra coincidan; los más pequeños hacen una estimación visual de la distancia y marcan el punto un poco al azar; otros, un poco mayores, acuden a palitos o tiras para marcar el punto a cierta distancia de una esquina o del borde (ver figura 4); hasta acá solo han dado muestras de efectuar un análisis intra-figural, como también lo es aquel que conduce al niño a tomar una única medida, que corresponde a la longitud del vértice de la hoja más cercana al punto, y así traza una línea oblicua.



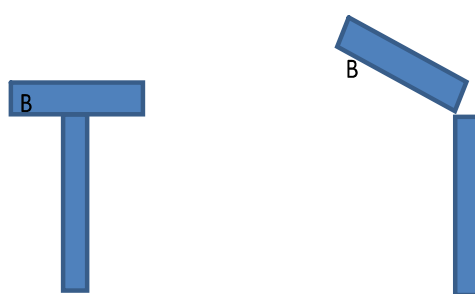
*Figura 4. Dificultad para reconocer las componentes horizontal y vertical*

Sólo cuando el individuo se percata de la necesidad de realizar dos medidas conjuntas, una horizontal y una vertical, coordinándolas con los bordes de la hoja, logra la ubicación correcta del punto; pero esta coordinación de dos medidas y el empleo de los bordes de la hoja como ejes de coordenadas son producto de un análisis inter-figural de la misma situación.

*La habilidad para emplear coordenadas se desarrolla paralelamente con la de emplear ejes de referencia horizontal y vertical;*

Resulta claro que establecer un sistema de referencia exige la presencia de relaciones inter-figurales. Así pues, este es un caso análogo a la dificultad presentada cuando se pedía indicar con un trazo la superficie del agua teñida del frasco de vidrio cuando este se inclina. Los niños permanecen muy apegados a los referenciales intra-figurales, incluso marcan el nivel del agua como vertical cuando el frasco está acostado, pues de este modo se conserva la posición inicial de la superficie como paralela al fondo del recipiente. En todos los casos de inclinaciones, el niño emplea sistemas de referencia internos, y no se le ocurre emplear referentes exteriores.

Otro problema básico es el concerniente a la representación mental o a la anticipación de desplazamientos; estos problemas también conducen al individuo a considerar relaciones inter-figurales. Una experiencia instructiva es entregar a los niños dos reglitas, A y B, dispuestas como se indica en la figura 5 (Piaget y García, 1982).



*Figura 5. Dificultad para anticipar desplazamientos de la regla B*

El simple empuje de A sobre el centro de B es un desplazamiento que es anticipado y comprendido fácilmente, pues B se desplaza en la prolongación del movimiento de A; pero prever la rotación

de B cuando A lo empuja por un extremo no es tan fácil, y aparece solo después de los nueve años, y en forma aún muy imprecisa y fluctuante. En análisis de estilo intra-figural no hay composición de movimientos de traslación con los de rotación en lo que respecta al empuje en uno de los extremos; por otro lado, los desplazamientos de A y B no se ponen en referencia con respecto a la mesa o soporte inmóvil, dando así una clara muestra de desconocimiento del espacio local; estos resultados sólo se consiguen cuando el individuo ha accedido al nivel inter-figural.

Otra experiencia para ilustrar las dificultades de imaginar los resultados por rotaciones es la que sigue (Piaget y otros, 1971): Se presenta a los niños un dispositivo como el de la figura 6; sobre un cartón sin color se colocan tres círculos que se pueden girar sobre su centro. Se pregunta a los pequeños si:

i) En los círculos A y B el orden de los colores: verde, V; azul, A, y rojo, R, es o no el mismo (antes de los 6 años esta cuestión no reviste importancia para los sujetos). No todos advierten la diferencia, pues no toman en consideración la orientación.

ii) Se hace girar el círculo C alrededor del alfiler del centro en el sentido de las agujas del reloj, y se les indaga: si se hace girar así el círculo C hasta que sus colores estén arriba, ¿aparecerá A o B?

iii) Independientemente de la respuesta obtenida en la pregunta anterior, se les indaga: si se hace girar el mismo círculo C así (ahora en sentido contrario a las manecillas del reloj) ¿será parecido al mismo círculo o al otro?



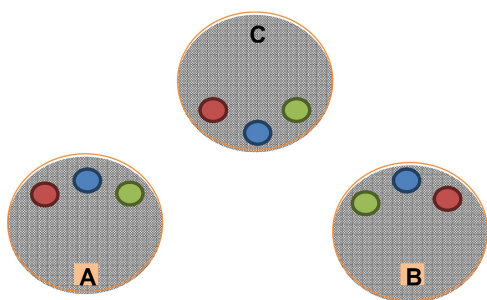


Figura 6. Dispositivo para detectar dificultades en la predicción de resultados por rotación

Se advierte que en la solución dada por la gran mayoría de los pequeños no hay una equivalencia manifiesta para los dos sentidos de la rotación; para los más pequeños los órdenes de colores, rojo-azul-verde y verde-azul-rojo son equivalentes en los giros. Es posterior, y sorprende la edad en la cual el problema conduce a respuestas de no equivalencia. Los niños que presentan análisis de tipo intra-figural, además de tener dificultad para imaginar el resultado de las rotaciones, tienen tendencia a invertir la solución por medio de la rotación opuesta; esta tendencia es casi inmediata, aun si se pide al niño que lo ejecute con sus manos, abandona rápidamente la ejecución por una especie de certeza intuitiva de que una rotación en sentido inverso debe traducirse en inversión del orden de los colores.

Los individuos que logran relaciones de tipo inter-figural no sólo alcanzan la equivalencia, sino que permiten avanzar en preguntas; por ejemplo, se les pide que anticipen comparaciones de diversas rotaciones de A y de B con C, quedando C inmóvil, o se les solicita predecir en qué se convertiría la relación si se hiciera girar 180 grados todo el cartón que contiene los tres discos.

Se presentan disparidades en el grupo de niños mayorcitos, entre los que no son capaces de aprovechar las experiencias anteriores y aquellos que sí pueden hacerlo; estos últimos dan muestras de generalizar la situación y estarían prontos a iniciar un análisis trans-figural. Algunos chicos, a pesar de admitir que por una transformación de C se obtiene B, concluyen que C no necesariamente es idéntico a B. Esta ausencia de reciprocidad ilustra la ausencia de relaciones de tipo externo y de comparación entre éstas, que es el carácter esencial del inter-figural.

### El pensamiento trans-figural

Una forma de razonar trans se logra una vez superadas las limitaciones del pensamiento intra y del pensamiento inter; coloca todo lo adquirido en ellos bajo sistemas de transformaciones. Surge la vanguardia de lo endógeno, se construyen estructuras de pensar similares a la de “grupo” algebraico; no se trabaja bajo figuras, sino que se integran a construcciones mentales como argumentos de las transformaciones mentales. El sujeto elabora sus propias “teorías”, desde las cuales explica los fenómenos y los reinventa, y mientras estas “teorías” no se logren modificar, los conocimientos que no se ajusten a ellas resbalarán sin dejar mella en la estructura cognitiva del sujeto. La creatividad ilimitada de lo endógeno en este nivel suelta al individuo de las amarras de lo concreto espacial.

Se mencionó en el numeral anterior cómo en la etapa inter-figural no se coordinan los desplazamientos con respecto al soporte inmóvil (mesa o cartón), y si

esto se consigue, solo lo es vagamente; para que esta coordinación se logre debe acompañarse de relaciones mucho más amplias y relativamente más complejas de tipo trans-figural.

Los razonamientos de tipo trans-figural se reservan para el nivel en el cual se manejan dobles sistemas de coordenadas y relaciones proyectivas, esto es, para el nivel donde el individuo maneja relaciones entre relaciones, como cuando dos sistemas se componen, por ejemplo, de desplazamientos que corresponden a variaciones simultáneas con respecto a dos sistemas de coordenadas, o también, en el caso de composiciones de rotaciones y traslaciones. Uno de los aspectos más importantes del pensamiento trans-figural es que el sujeto comprende y anticipa correctamente las composiciones de movimientos. Los niños con ideas inter-figurales pueden comprender los movimientos aisladamente en forma correcta solo cuando se trata de una traslación o de una rotación, pero la composición de dos de estos movimientos es tardía.

Una construcción que permite observar cómo se coordinan traslaciones y rotaciones para dar una única figura es la construcción de la cicloide. Se solicita a un grupo de muchachos de grado noveno observar atentamente el avance de una rueda y que describan por medio de gráficos la trayectoria de un punto fijo de la circunferencia exterior de la rueda (Piaget y García, 1982). Los individuos con reflexiones de estilo intra representan una serie de círculos sin otra conexión que una burda unión con trazos, luego la representan por círculos contiguos, representación esta de tipo inter-figural,

en la cual solo hay yuxtaposición, pero no se ve el efecto de la rotación. La siguiente secuencia de gráficos (figura 7) se logró en una verificación de esta experiencia con niños que oscilaban entre los 12 y los 14 años de edad (INEM de Tunja).

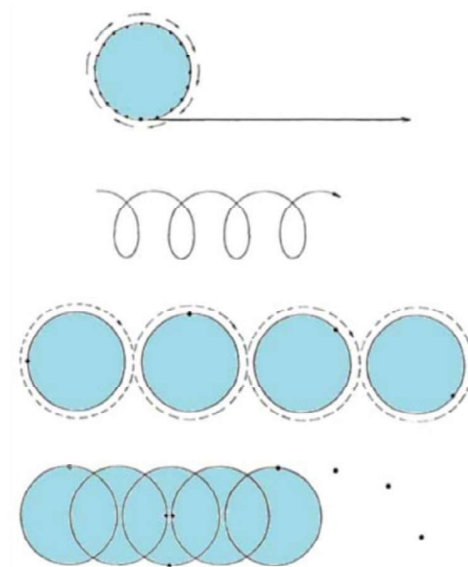


Figura 7. Dibujos de los niños que muestran la dificultad para componer traslaciones y rotaciones

Volviendo a la experiencia de las reglitas A y B descrita atrás, cuyos desplazamientos son explicados en términos inter-figurales, esta da lugar a desempeños trans-figurales cuando el sujeto trata de describir las rotaciones y traslaciones de los extremos de cada regla.

Las relaciones trans-figurales significan un progreso sobre las inter-figurales en la medida en que éstas relacionan figuras dentro de un espacio, o dentro de un sistema de coordenadas, o bajo un solo tipo de transformaciones, esto es, composiciones de traslaciones o de rotaciones, pero no mixtas; y aquellas intentan



componer en una sola totalidad sistemas distintos, o reunir simultáneamente relaciones que fácilmente se establecerían en forma sucesiva, pero no en forma simultánea, sobre todo si no están dadas en forma directamente asociada a las figuras de las cuales se ha partido. La particularidad de lo trans-figural es sustituir la descripción de figuras o la descripción con base en ellas por una estimación lógica o un cálculo mental, de manera que, aun cuando la resultante se pueda representar por medio de una figura, esta deba ser construida deductivamente.

Se han dado algunos ejemplos sobre el manejo de dobles sistemas de coordenadas y sobre composición de desplazamientos y simultaneidad de éstos; sin embargo, no se han ilustrado algunos problemas que involucren relaciones proyectivas. Se mencionó al comienzo de la etapa trans-figural cómo las relaciones de tipo proyectivo tienen este mismo carácter trans. Construir o representar imágenes de objetos tridimensionales es una tarea larga y difícil para los jóvenes y aun para algunos adultos, pues cada individuo no puede verlos desde más de un punto de vista al mismo tiempo.

Una técnica para enlazar la dimensión real del objeto y la de su representación en gráficos son los llamados “desarrollos” de cuerpos sólidos o “redes”, son figuras planas hechas en papel o cartulina, que se pueden recortar, plegar y pegar para obtener el objeto particular; corresponden a la versión bidimensional de un sólido. Para los niños pequeños resulta una labor complicada diferenciar entre lo que ven de un cuerpo armado con cartulina

y su desarrollo. Si se les pide un dibujo de lo que ven, y otro que represente el desarrollo de ese mismo cuerpo una vez desarmado, los dos dibujos suelen resultar muy semejantes. Y viceversa, si dibujan una mesa, la hacen mostrando las cuatro patas, confundiendo ahora un posible “desarrollo” con una o varias de las vistas sucesivas que podrían lograr mirándola desde diferentes puntos de vista (ver figura 8).

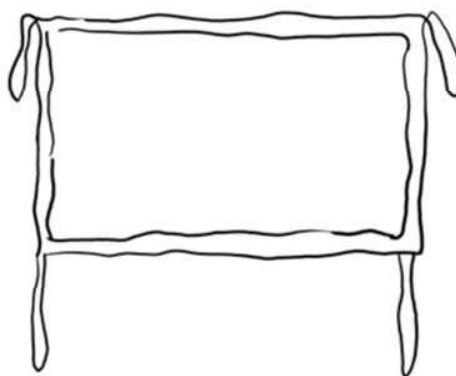


Figura 8. (Natalia. 8 años)

### Relaciones proyectivas en el pensamiento trans-figural de los jóvenes

Se examinan las relaciones de tipo proyectivo necesarias para pasar de construcciones bidimensionales a tridimensionales y viceversa. La siguiente prueba está inspirada en un trabajo de Lappan y Winter (1979): se requieren algunos cubos de madera manejables por los jóvenes (de 4 o 5 cm por arista), dibujos de sólidos construidos a base de cubitos y dibujos de las vistas de sólidos construibles con ellos. Con esta experiencia adaptada y ampliada se desea verificar y observar el mecanismo TaTrTs con niños de 12 a 14 años (INEM Tunja).

Se pide efectuar dos tareas:

- i) Dado un dibujo de un cuerpo tridimensional, el niño deberá construirlo empleando los cubitos.
- ii) Construir un sólido dadas las vistas horizontal, frontal y lateral y viceversa; dado el sólido, dibujar el juego de tres vistas.

Para la primera labor se daban algunos dibujos, como los siguientes (ver figura 9):

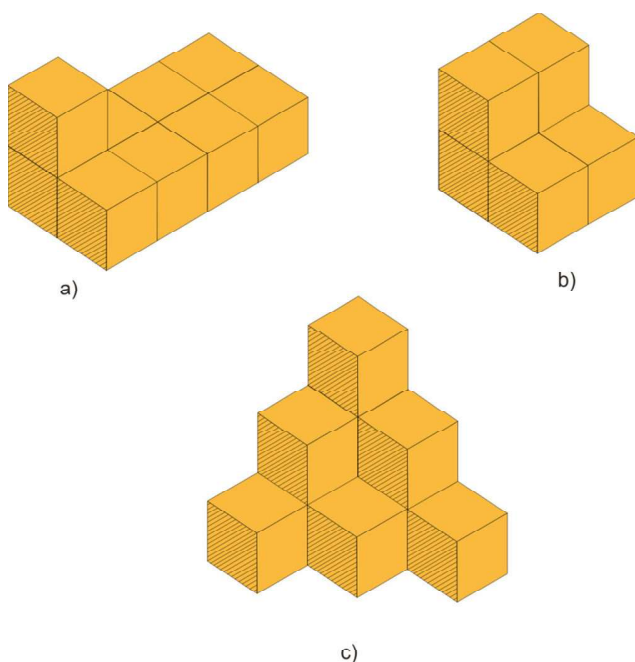


Figura 9. Dibujos de tres sólidos contruidos con cubo

Esta tarea, en la cual el niño debe tener en cuenta solamente las características internas de la figura, como cuántos cubitos la forman, cuántos hay en cada “piso”, cómo están ubicados, etc., exige, sin embargo, un análisis trans-figural, pues el sujeto deberá establecer relaciones entre uno y otro cubito, efectuar una construcción mental y deductiva de la cual obtiene una construcción concreta

y tangible; además, debe establecer una correspondencia entre conjuntos de dos dimensiones distintas, pasando de figuras bidimensionales a objetos tridimensionales y viceversa; sin embargo, la tarea i) para los casos de las figuras a) y b) es lograda por un buen porcentaje de niños. Algunas construcciones, como la c), presentan un poco más de dificultad; no faltan alumnos que construyen sólo la vista frontal del sólido, haciendo una mezcla de pisos derechos y volteados, entre los cuales se encontró la siguiente reproducción (figura 10):

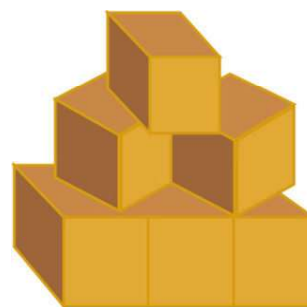


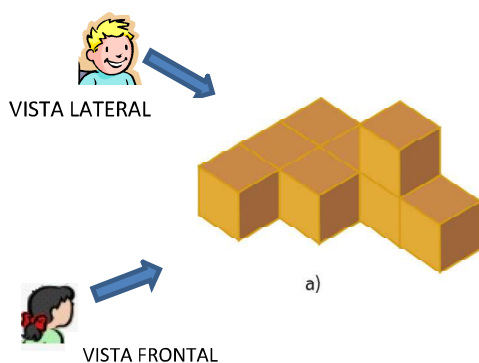
Figura 10. Reproducción en tres dimensiones del dibujo c)

Para la segunda parte de la prueba se distinguieron cuatro actividades; cada una define una fase de la tarea ii).

**Fase 1:** Identificar el edificio que corresponde a un juego de vistas dado. Se busca indagar cómo relacionan las vistas de un edificio con el edificio de cubos; se muestra cierto número de edificios e igual número de juegos de vistas, que incluyan cada uno vista frontal, vista lateral y vista horizontal; se colocan para cada edificio un par de muñequitos que observan el edificio, uno desde el frente y el otro desde un costado; estas construcciones se ubican de manera que los

niños puedan verlas por todos sus lados a nivel de los ojos.

Uno de los errores más frecuentes en la escogencia de las vistas es el concerniente a la orientación, problema de análisis inter y trans-figural (Corredor, 1993); los niños no advierten que la orientación es un aspecto importante (ver secuencia de gráficas 11); para el caso del sólido que aparece enseguida,



seleccionan como vista frontal la siguiente:



en vez de la siguiente:

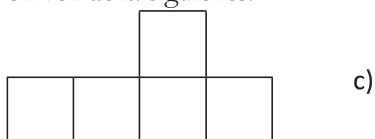
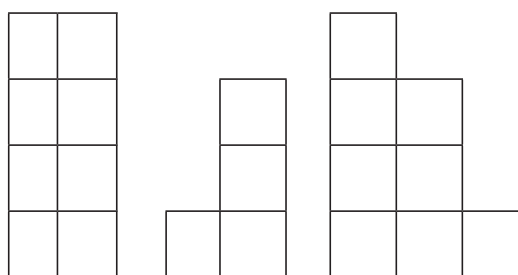


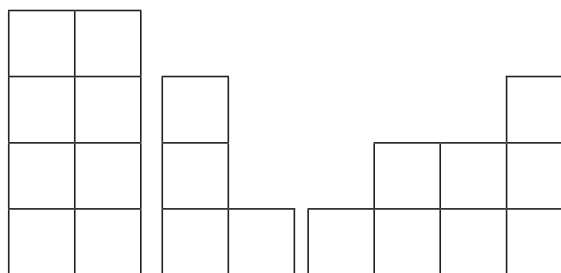
Figura 11. Dificultad para considerar la orientación en las vistas de un sólido

**Fase 2:** Identificar las vistas de un edificio dado

Ahora, se pone en juego la correspondencia inversa: partiendo de un conjunto en tres dimensiones, pasar a un juego de figuras bidimensionales. La orientación constituye de nuevo una causa de errores; esta dificultad, indicada por Dickson (1984), se pudo comprobar en la experiencia con los estudiantes del INEM de Tunja. En algunos casos, como el juego gráfico siguiente (ver figura 12), además de confundir la orientación, no establecen la relación de igual altura entre la vista lateral y la vista frontal, y seleccionan:



BASE VISTA FRONTAL VISTA LATERAL  
Figura 12. Juego de vistas incorrecto para el sólido de la figura 14



En vez de

BASE VISTA FRONTAL VISTA LATERAL

Figura 13. Juego de vistas correcto para el sólido de la figura 14

Para el siguiente sólido

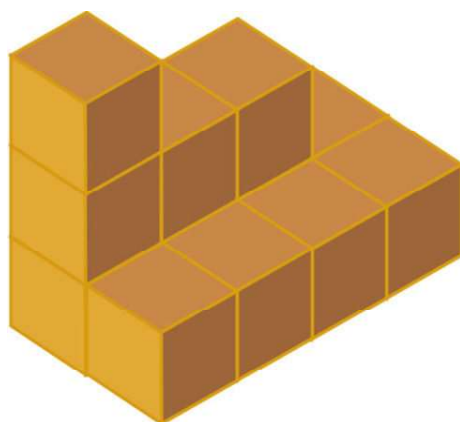
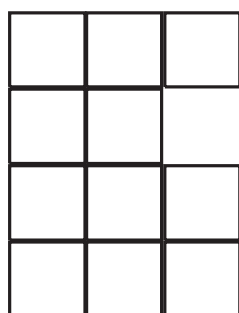


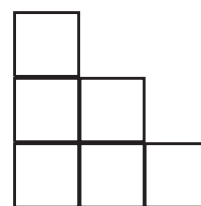
Figura 14.

**Fase 3:** Construir un edificio a partir de su propio conjunto de vistas

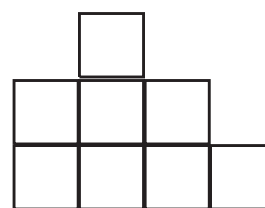
En un principio, los niños creen que es imposible la construcción, pero a medida que van asociando y relacionando cada par de vistas se les va abriendo un horizonte de posibilidades, y luego intentan obtener más de un edificio con el mismo juego de vistas. Como el caso de la siguiente secuencia gráfica, en la cual se muestran cuatro edificios que obtuvieron apoyándose en un solo juego de vistas (figuras 15-19).



BASE



VISTA FRONTAL



VISTA LATERAL

Figura 15. Vistas comunes a los sólidos de las figuras 16 a 19

c)

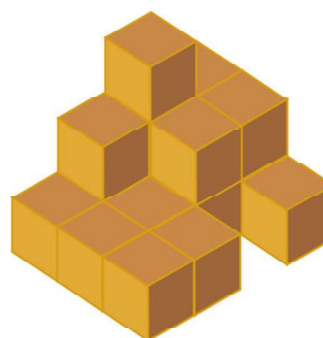


Figura 16.

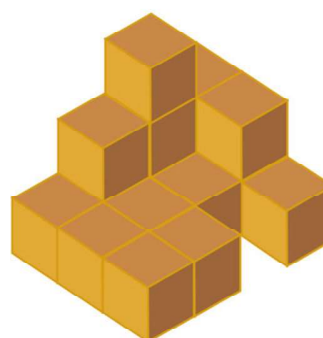


Figura 18.

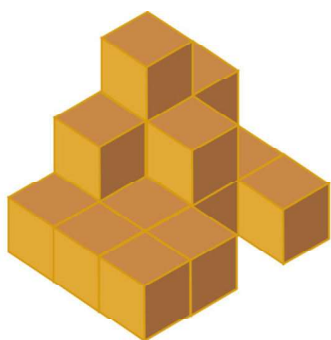


Figura 17.

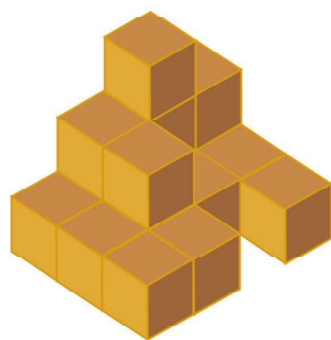


Figura 19.

Al establecer el repertorio completo de relaciones entre cada par de vistas, se realiza un examen de tipo trans-figural, pues a la vez que se organizan relaciones entre dos de las vistas, estas relaciones deben estar en armonía y concordancia con las relaciones que haya entre cualquier otro par de vistas, bien sea frontal-lateral, lateral-horizontal, horizontal-frontal; además deben tener cuidado con la orientación. Por otra parte, al tratar de encontrar varios sólidos con las mismas vistas se abre un campo de exploración basado también en construcciones deductivas acompañadas de una cierta lógica. Entre las inquietudes que nacen allí está determinar si el sólido es único cuando se limita considerablemente el número de cubos que lo componen.

**Fase 4:** Construcción de un edificio, representación de las vistas y reconstrucción del edificio.

Los niños deben construir un edificio, dibujar sus vistas y evaluar la precisión de estas, reconstruyendo edificios de otros compañeros a partir de los planos. Con ésta actividad se refuerzan las relaciones de tipo inter y trans-figural adquiridas en las fases anteriores.

Otra actividad que pone en juego relaciones proyectivas y, a la par, invita a una observación de carácter trans-figural es la de trazar las ventanas y puertas en el boceto de un edificio. Se les reparten bocetos como los siguientes (figura 20) para que los alumnos los decoren con puertas y ventanas:

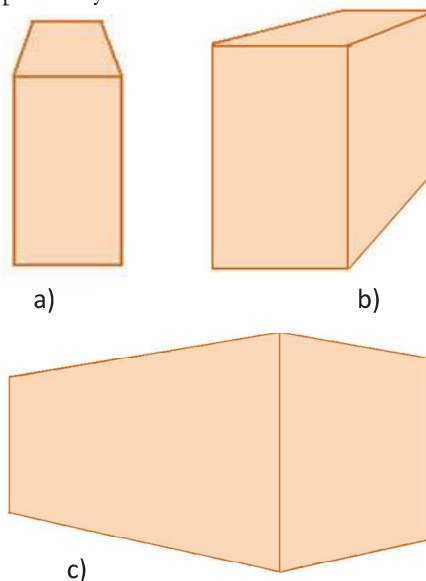
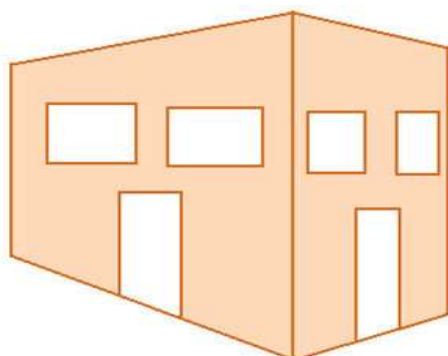


Figura 20.

Se encuentra mucha dificultad para graficar las paralelas convenientes de puertas y ventanas; muchos niños suelen colocarlas para el caso c), así:



*Figura 21. Dificultad para conservar el paralelismo en construcciones proyectivas*

La correcta ubicación de estos elementos decorativos es fruto de un análisis de tipo endógeno, propio de las operaciones formales, pues se requiere una operación mental que relacione adecuadamente la perspectiva oblicua para cada elemento, y simultáneamente considere la perspectiva del esbozo; estas acciones mentales doblemente coordinadas constituyen una operación compleja de tipo trans-figural (Corredor, 1993).

## Consideraciones finales

El ser humano, en su búsqueda del saber, necesita pasar de los hechos y acciones simples a la búsqueda y comprensión de razones; este paso lo lleva a explicar las formas geométricas, analizar las figuras, comprender las propiedades internas y, por medio de las transformaciones, observar las características que permanecen sin variación; la interiorización de estas observaciones se convierte en operaciones en el sentido piagetiano, que luego serán fuente de nuevos análisis, nuevas correspondencias y nuevas posibilidades de acción. Este ciclo, cuyo radio de actividad intelectual es cada vez más amplio, lleva al sujeto a superar la geometría con un

sentido netamente espacial, para invadir poco a poco el campo de las operaciones lógicas, intercambiando la verificación por medio de los objetos por un cálculo de operaciones sucesivas.

A lo largo de las diferentes secciones del presente artículo, se observa cómo el individuo construye y maneja desde relaciones entre figuras hasta relaciones de relaciones. Esta elaboración de relaciones complejas comienza desde el periodo intra-figural; pero a medida que el nivel es más elevado, estas conexiones se apartan de lo espacial representativo, exigiendo apreciaciones, deducciones y cálculos mentales para poder ser expresadas; cálculo unas veces de tipo lógico, y otras de tipo aritmético.

En el mismo sentido, el mecanismo TaTrTs, a la vez que conduce a un mayor conocimiento del espacio y las relaciones geométricas, lleva en los últimos niveles a suprimir este espacio como continente general, o como marco de referencia obligado, y es reemplazado por estructuras de pensamiento bien diferenciadas. La razón de esta paradoja quizá está en la naturaleza del conocimiento geométrico, el cual no es simple lectura de las propiedades de los objetos, sino que es una interacción entre sujeto y objeto; esta interacción conduce a una disociación en dos sentidos, a medida que avanza el conocimiento, hay interiorización y exteriorización; la primera permite elaborar relaciones matemáticas a partir de la coordinación de acciones, y la segunda orienta hacia la actividad física: desplazamiento de figuras, trazado de otras, construcción de modelos, manipulaciones y transformaciones con objetos y en forma gráfica.





Las nociones espaciales se sitúan precisamente en el punto medio de estos dos tipos de interacciones, pues las acciones de los sujetos se desarrollan en el espacio, y la propiedad más elemental de éstos es ocupar posiciones en él. Por tanto, el espacio es el terreno básico para el encuentro de las actividades del sujeto y las características del objeto.

La exigencia creciente de conocer la verdad contempla una necesidad lógico-matemática de tipo endógeno, mientras los datos de tipo exógeno permanecen como hechos o maniobras. Al ir del pensamiento intra-figural al inter-figural y de allí al trans-figural, se responde a la necesidad de ir reemplazando lo exógeno inicial por elaboraciones endógenas. Para el caso geométrico, el espacio es a la vez propiedad de los objetos y producto de las construcciones del individuo. Cuando este construye figuras por dibujos o manipulación de materiales, imagina conectarse con realidades que preexisten y han precedido, lo que favorece el carácter exógeno. Por otro lado, en función de las generalizaciones empírica y reflexiva se contribuye a la formación de lo endógeno, rico en explicaciones y cálculos.

El proceso TaTrTs, en términos de la teoría piagetiana, es una expresión de la asimilación-acomodación y del equilibrio que se impone a toda adquisición cognitiva. Cada vez que el sujeto encara un dominio nuevo, asimila datos a sus esquemas de acción; los datos, sean figuras, formas, desplazamientos u otros, implican un equilibrio entre la asimilación y la acomodación de los esquemas a las propiedades dadas por el objeto; en estos comienzos surge el periodo intra-figural;

pero estos esquemas y conocimientos nuevos no pueden permanecer aislados; el proceso asimilador y la exigencia del mecanismo de equilibración van estableciendo coordinaciones nuevas, y de aquí surge el carácter inter; una tercera forma de equilibrio tiene lugar cuando la variedad de esquemas con diferencias particulares exige una integración que se traduce en estructuras y caracteriza el nivel trans.

Estas consideraciones permiten deducir consecuencias de tipo pedagógico. Al intentar resolver algunos problemas didácticos, es útil reconocer que las fases elementales del desarrollo del pensamiento son de gran importancia, pues un concepto, por más tematizado y abstracto que parezca, tiene un vínculo fuerte con su origen y elaboración. El saber es un proceso completivo, donde se van integrando datos y razonamientos a una estructura, a la vez prosperándola y haciéndola relativamente nueva; si bien se inicia con la percepción, son las acciones que, interiorizadas en operaciones, se convierten en hontanar de correspondencias y deducciones, de generalizaciones y formalizaciones.

En el progreso cognitivo no sólo hay un refinamiento de métodos, ni basta mejorar la observación, es claro que ello contribuye en gran medida; sin embargo, lo más significativo es hallar inquietudes nuevas que permiten ver los problemas desde distintos ángulos; la reformulación de los contenidos que son objeto de estudio es la esencia del perfeccionamiento del saber. No se puede desconocer cómo en un comienzo hay falta de conciencia de rasgos profundos y sutiles de la

realidad, que traen muchas dificultades para entender algunas relaciones geométricas, lentamente y con aumento de la actividad mental; esta conciencia de los actos internos del pensamiento se va ampliando y facilita la comprensión y control de situaciones concretas; se

producen diferentes enfoques que llevan al discernimiento cada vez más profundo de la realidad y a una mayor objetividad. Tomar nota de esto puede ayudar a resolver enigmas sobre la forma y el tiempo que emplean los estudiantes para comprender los conceptos geométricos.

## Bibliografía

- CORREDOR, MAGALY. (1993): *Mecanismos cognoscitivos comunes a la Historia y a la psicogénesis de la Geometría*. Policopiado. Tesis de Magíster en Matemática, UN, director Dr. Carlos Eduardo Vasco. Bogotá.
- DICKSON, LINDA; MARGARET BROWN Y OLWEN GIBSON. (1991): *Aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- FLAVELL, JOHN. (1971): *La psicología evolutiva de Jean Piaget*. Buenos Aires: Paidós.
- LAPPAN, G. Y WINTER, M. J. (1979): "Buildings and Plans". En: *Mathematics Teaching*, n. 87; pp. 16-19.
- PIAGET, JEAN Y BÄRBEL INHELDER. (1948a): *La représentation de l'espace chez L'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France PUF.
- PIAGET, JEAN Y OTROS. (1948b): *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France PUF.
- PIAGET, JEAN Y OTROS. (1971): *La epistemología del espacio*. Buenos Aires: El Ateneo.
- PIAGET, JEAN Y ROLANDO GARCÍA. (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.