Los enunciados lingüísticos de la Matemática*

Orlando Monsalve Posada

Resumen

Se trata de presentar paralelamente las relaciones estrechas que se establecen entre los tallos geométricos y algebraicos y los enunciados lingüísticos del español corriente.

Para este efecto, se escogerán algunos problemas específicos que se presentan en el álgebra y se les descompondrá gramaticalmente en sus sujetos y predicados, con el fin de ofrecer un instrumento útil para solucionar esta clase de

* Ponencia presentada al Primer Seminario internacional sobre La calidad en la enseñanza de las ciencias naturales: investigaciones recientes

** Profesor Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Participante y miembro permanente en el Seminario de Enseñanza de las Ciencias que dirige el profesor Orlando Mesa

Igualmente, en algunos enunciados geométricos llamados teoremas, se encuentra que las hipótesis y las tesis guardan una relación muy estrecha entre ellas, y entre el sujeto y el predicado de las respectivas frases españolas.

Por otra parte, se pone en consideración el concepto mostración como un acercamiento intuitivo, pragmático u operatorio, basado en materiales concretos, a los conceptos matemáticos, físicos, biológicos o químicos.

Summary

This paper tries to present, in a parallel way, the cióse relationship that may be established between the geometric and algebraic stems and the Unguistic statements of common Spanish.

For this purpose, we will choose some specific problems presented in algebra an will be parsed in their corresponding subjects and predicates, with the objective to afford an useful device to solve this kind of pedagogical difficulties.

Likewise, there are some geometric statements called theorems in which the hypothesis and thesis keep a straight connecüon between them, and the subjects and the predicates of the respective Spanish sentences.

On the other hand, the concept "mostración" as an intuitive, pragmatic, or operative approach —based on concrete materials— to mathematical, physic, biological or chemical concepts is put into consideration.

Exposé

Cet travail consiste á présenter parallelement, les relations étroites qui s'établissent entre des énoncés géométriques et algébriques et des enoncés linguistiques du langage espagnol courant.

Pour cet effet on choisira quelques problémes spécifiques qui se présentent á ***1'algebre*** et on les décomposera grammaticalement dans leurs sujets et leurs predicáis afín d'offrir un instrument útil pour résoudre ees sortes de difficultés pédagogiques.

Également dans quelques ***énoncés géométriques*** appelés ***Théorémes,*** on trouve que des ***hypothéses*** et des théses se rattachent étroitement entre elles et entre le ***stijet*** et le ***prédicat*** des respectives ***phrases espagnoles.***

D'autre part, on veut considércr le concept ***"mostración"*** comme un rapprochement ***intuitif, pragmatique*** ou ***opératoire*** —basé en des materiaux concretes— aux concepts ***mathématiques, physiques, biologiques*** ou ***chimiques.***

Presentación

El presente trabajo es la continuación de un proyecto que consiste básicamente, en ir esclareciendo lentamente algunas de las múltiples relaciones que el lenguaje natural establece con el lenguaje artificial simbólico de las Matemáticas y otras ciencias.

En los números 10-11-12-13 de la Revista *Educación y Pedagogía* que edita la Universidad de Antioquia, han aparecido los dos primeros avances del mencionado trabajo.

Allí se han desarrollado algunos aspectos sobre las relaciones entre el Español y la Aritmética y una aplicación concreta a la tabla de multiplicar.

Todo el proyecto está basado en la afirmación, un tanto obvia, de que muchas dificultades en la resolución de los diversos problemas matemáticos, tienen que ver con la comprensión de los respectivos enunciados lingüístico-matemáticos que aparecen en los diversos textos-guías escolares.

Si todo esto contribuye a la mejora en la enseñanza entrecruzada de estas áreas, el autor considera lograda parte de sus propósitos.

Los enunciados lingüísticos de la Matemática *1*.

Algebra

Para ilustrar algunas de las muchas relaciones que se pueden establecer entre el ***lenguaje natural*** y el ***lenguaje artificial*** de la Matemática, nos ocuparemos a continuación de los enunciados lingüísticos que aparecen en dos campos específicos de la última: los "tallos" en los problemas del Algebra y los teoremas de la Geometría.

Para efecto de las presentes líneas, tomaremos los conceptos: "tallo" y "problema" como sinónimos de "enunciado lingüístico".

Un enunciado lingüístico es un conjunto de oraciones íntimamente relacionadas tanto gramatical (yuxtaposición, coordinación o subordinación) como matemáticamente.

Las oraciones que hallamos en este tipo de tallos son generalmente: 1.1.

"Bimembres:" porque constan de un sujeto y un predicado.

1.1.1. Sujeto: persona, animal o cosa de la cual decimos algo; en Gramática, el sujeto puede ser cualquier clase de sustantivo (concreto, abstracto, común, colectivo...); en Matemáticas, en cambio, nos enfrentamos desde un principio, con sustantivos abstractos.

Recalcamos este aspecto porque posiblemente es una de las dificultades sutiles con que se encuentran nuestros estudiantes en la clase de Matemática; pues si en la de *Español* ya hay suficientes dificultades con las oraciones que impliquen sustantivos concretos (es decir, aquellos cuyos referentes son objetos de la realidad y por lo tanto, susceptibles de ser percibidos por cualquiera de los sentidos), ¿qué no decir, entonces de los sustantivos abstractos? (cuyos referentes no aluden a objetos de naturaleza real tangible ya que ellos son objetos mentales que no se pueden percibir por ninguno de los cinco sentidos). Piénsese, por ejemplo, en la tremenda dificultad que entraña la concepción de un "triángulo degenerado" cuyo cateto opuesto al ángulo mide 0^o; o los números negativos, los imaginarios, etc.

La palabra dominante dentro del sujeto (así sea *simple* ***o*** *compuesto)* de una oración es el núcleo y en tomo a él giran todas las demás palabras llamadas modificadores cuyo papel es ampliar, explicar o especificar su significación.

1.1.2. Predicado: Es lo que se afirma o se niega del sujeto.

Predicado nominal: En todas aquellas oraciones que contengan como verbo principal al verbo ser (o cualquiera que haga sus veces, como: valer, costar, dar...) que son copulativos tienen un predicado nominal y por lo tanto tienen un complemento predicativo, formado esencialmente por un "nombre" que constituye el núcleo o la base del predicado.

Estas oraciones enuncian cualidades del sujeto, es decir:

1.1.2.1. Conceptos que pueden designarse por medio de un adjetivo propiamente dicho, por ejemplo: un triángulo equilátero, un trapecio isósceles, un triángulo rectángulo, etc.

1.1.2.2. Un sustantivo que puede ser pensado como un conjunto de cualidades, por ejemplo el cuadrado cuyas cualidades son: cuadrilátero, —tiene cuatro lados iguales—, cuatro ángulos rectos iguales, rectángulo, rombo y paralelogramo, con ocho ejes de simetría.

1.1.2.3. Concepto unitario dentro del cual se clasifica al sujeto y... en general palabras o frases de valor nominal, ejemplo:

La *diferencia* de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es mil trescientos uno.

Por consiguiente, el predicado nominal, califica, clasifica o predica algo del sujeto; y es tan estrecha la unión entre ambos, que en^Español el sujeto y el complemento predicativo conciertan en género y número.

Los verbos intransitivos ser o estar que nuestra lengua emplea en esta clase de oraciones, se llaman copulativos porque su papel principal en ella consiste en servir de nexo entre el sujeto y el complemento predicativo.

Otra de las dificultades que se encuentran en el aprendizaje de la Matemática es la traducción o transición del enunciado lingüístico al lenguaje artificial simbólico representado por las ecuaciones aritméticas o algebraicas.

Por ello es importante hacer ejercicios de análisis gramatical de los diversos enunciados lingüísticos de los problemas matemáticos.

Retomemos el enunciado lingüístico esbozado en el numeral 1.1.2.3.

La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es mil trescientos uno. ¿Cuáles son los números?

Como se puede observar, en este enunciado o tallo lingüístico, hay dos oraciones bimembres con predicado nominal respectivamente.

5 4 1 2 3
La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es
6 7
mil trescientos uno. ¿Cuáles son esos números?

Primera oración: La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es mil trescientos uno.

* Real Academia Española. ***Esbozo de una nueva gramática de la Lengua Española.*** Madrid. Espasa-Cal pe. 1978. p. 364.

Segunda oración: Cuáles son esos números?

Sujeto de la primera oración: La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos.

Predicado de la misma: Es mil trescientos uno.

Sujeto de la segunda oración: ¿Cuáles?

Predicado de la misma: Son los números?

Núcleo del sujeto de la primera oración: Diferencia.

Modificadores del sujeto: De los cuadrados de dos números naturales consecutivos.

Elimínese cualquiera de esos modificadores y se tendrán serias dificultades para hallar la solución de esa clase de problemas.

1.2. La Sintaxis es la rama de la Gramática que estudia las agrupaciones de palabras conexas o relacionadas entre sí, con los medios para significar sus relaciones mutuas; señala y clasifica las unidades o agrupaciones que la intención del hablante establece en el conjunto de la elocución.

1.2.1. La Sintaxis también se ocupa del orden en que se colocan los diversos componentes de los enunciados en la cadena hablada de acuerdo conla significación que el hablante, oyente o escribiente real de la lengua tiene en mente.

Por Ferdinand de Saussure sabemos que una de las características del signo lingüístico es el ser lineal; esto es, los diversos elementos de las oraciones habladas deben producirse unos detrás de los otros.

Este orden en Español es, en general: Sujeto-verbo-complementos

1.2.2. En la escritura es más fácil detectar lo anterior, pues en el terreno gráfico, uno debe siempre colocar los diversos elementos de las oraciones de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo.

Decíamos anteriormente que una de las dificultades que se les presenta a los estudiantes en la clase de Matemática es la traducción de los enunciados lingüísticos al lenguaje simbólico de los diferentes campos de la Matemática.

Una razón para ello es que posiblemente el estudiante, por carecer de orientación al respecto, cree que la sintaxis de *l&Matemática* se rige punto por punto por la sintaxis de la lengua natural y que los enunciados matemáticos se analizan siguiendo también el carácter lineal de esta última.

Aunque lo anterior es cierto en muchos aspectos, hay otros en los cuales lo anterior no se cumple —la Geometría, por ejemplo—. Volvamos al enunciado de nuestro problema, e intentemos una traducción punto por punto de lo esbozado hasta acá.

De acuerdo con los números que aparecen en la parte superior de cada recuadro del tallo lingüístico, nos damos cuenta inmediatamente de que para el análisis previo de los datos, debemos leer el sujeto de la primera oración en el orden indicado por los respectivos números y proceder a la traducción simbólica de carácter algebraico.

Lo anterior dando por descontado que el estudiante ya sabe que cada recuadro remite a conceptos fundamentales previamente presentados y asimilados: número natural, consecutivo, diferencia, cuadrados, cómo se generan los números naturales.

1. Primer número x: primer número natural (también suponemos que nuestros estudiantes tienen claro cómo bautizar una incógnita)

Segundo número, o el que sigue al primero: $x + 1$.

2. Naturales:

3. Consecutivos: $x, (x + 1)$

4. Cuadrados: $x^2, (x + 1)^2$

5. Acá también se debe tener clara la operación de la ***resta*** en el conjunto de los naturales y por lo tanto se debe identificar cuál de los dos números es el mayor, aclarado lo anterior, tenemos:

$(x + l)^2 - x^2$

Predicado: Es mil trescientos uno

$(x + l)^2 - x^2 = 1.301$

$x^2 + 2x + 1 - x2 = 1.3C1$ eliminando términos iguales $2x$

$+ 1 = 1.301$ $2x = 1.301 - 1$

$2x = 1.300$

$x = 1.300/2$

$x = 650$ Primer número. El segundo número será 651.

1.3. Aplicaciones

1.3.1. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es ciento cuarenta y cinco. ¿Cuáles son esos números?

1.3.2. La suma de tres números impares consecutivos es veintisiete. ¿Cuáles son esos números?

1.3.3. La diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es treinta y dos. Hallar los dos números.

2. Geometría

De idéntica manera, encontramos en la Geometría, tallos o enunciados lingüísticos llamados teoremas, para cuyo establecimiento se necesita determinar con precisión las hipótesis, y la tesis para así construir una demostración que nos lleve desde la hipótesis, ya formulada, hasta la tesis, por medio de un argumento lógico.

Para nuestra perspectiva de análisis gramatical, sólo nos vamos a ocupar de la hipótesis y la tesis.

Nos basaremos en la *Geometría* de Aurelio Baldor, uno de los textos guías más conocidos en nuestro medio escolar. En este manual, aparecen 112 teoremas en total: 89 de Geometría plana y 23 de Geometría espacial.

2.1. Desde un punto de vista gramatical, en muchos de esos teoremas se cumple que:

2.1.1. Las hipótesis corresponden exactamente al respectivo sujeto de los enunciados lingüísticos, y los predicados a las tesis de los mismos, ejemplos.

2.1.1.1. Teorema 2. (página 26): dos ángulos adyacentes son suplementarios.

Sujeto: Dos ángulos adyacentes = Hipótesis

Predicado: Son suplementarios. Tesis.

2.1.1.2. Teorema 4. (página 28) Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suman 180°.

Sujeto: Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta = Hipótesis.

Predicado: Suman 180°. = Tesis.

2.1.1.3. Teorema 5. (página 28) La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, vale cuatro ángulos rectos.

Sujeto: La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto. = Hipótesis.

Predicado: Vale cuatro ángulos rectos. = Tesis.

2.1.1.4. Teorema 18 (página58) La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo cualquiera vale dos ángulos rectos.

Sujeto: La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera. = Hipótesis.

Predicado: Vale dos ángulos rectos. = Tesis.

2.1.1.5. Teorema 19 (página 59) La suma de los ángulos exteriores de un triángulo vale cuatro ángulos rectos.

Sujeto: La suma de los ángulos exteriores de un triángulo. Hipótesis.

Predicado: Vale cuatro ángulos rectos. = Tesis.

2.1.1.6. Teorema 24 (página 75) la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene menos dos.

Sujeto: La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo. = Hipótesis.

Predicado: Es igual a tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos. = Tesis.

2.1.1.7. Teorema 25. La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.

Sujeto: La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo. = Hipótesis.

Predicado: Es igual a cuatro ángulos rectos. Tesis.

2.1.2. Las hipótesis se construyen con parte del sujeto y con parte del predicado.

2.1.2.1. Teorema 20 (página 59) Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Sujeto: Todo ángulo exterior de un triángulo. = Hipótesis. Involucra al triángulo y a su ángulo exterior, que pertenecen al sujeto, y a los ángulos interiores no adyacentes, que figuran en el predicado.

Predicado: Es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

2.1.2.2. Teorema 41. (página 122) En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual a la suma de los otros lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Sujeto: En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso. = Hipótesis. Involucra a la proyección de un lado sobre el otro.

Predicado: Es igual a la suma de los otros lados, más el doble del producto de uno de éstos por la proyección del otro sobre él. = Tesis.

2.1.3. Finalmente, están aquellos teoremas cuyas hipótesis hay que armarlas con todos los datos que aparecen en el enunciado lingüístico.

2.1.3.1. Teorema 31. (página 93) Varias paralelas que cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos proporcionales.

Sujeto: Varias paralelas que cortan a dos transversales.

Hipótesis: Varias paralelas y dos transversales en el sujeto. Los segmentos correspondientes de cada una de las transversales que están en el predicado.

Predicado: Determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales. = Tesis.

2.1.3.2. Teorema 43.

2.1.3.3. Teorema 48.

Etc.

2.2. Como las demostraciones geométricas, la mayoría de las veces no están al alcance de la capacidad cognitiva de muchos estudiantes, proponemos que antes de lanzarnos a ellas recurramos más bien a unas "mostraciones" sencillas de carácter operatorio como un paso intermedio entre las *hipótesis,* las tesis y las demostraciones propiamente dichas.

Una "mostración" consiste en un acercamiento —sensoriomotriz, operatorio, manipulatívo, pragmático, práxico, empírico, intuitivo— o como quiera llamárselo, basado en materiales de apoyo, de un concepto científico de carácter aritmético, geométrico, algebraico, físico o químico.

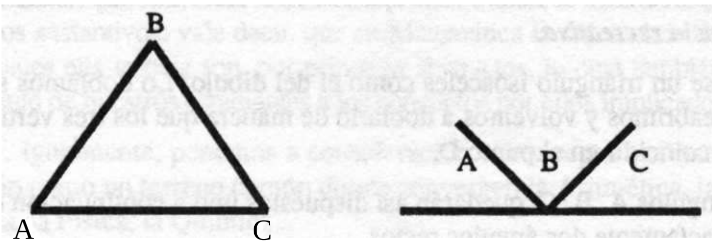
Tomemos, como ejemplo, el teorema 18.

La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°.

Este teorema, presenta tres posibilidades prácticas de ser mostrado.

Martin Gardner en su libro *Juegos y enigmas de otros mundos* (1987), nos regala dos de ellas.

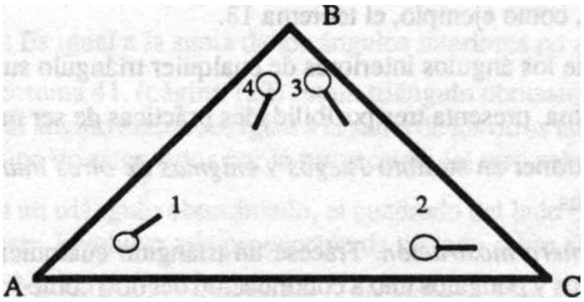
2.2.1. *Primera mostración.* Trácese un triángulo cualquiera; márquele sus vértices; recórtelos y póngalos uno a continuación del otro como lo indica la figura. Observará que aparecen formando una línea recta, o lo que es lo mismo, formarán un ángulo llano.



2.2.2. *Segunda mostración.* Trácese el mismo triángulo. Coloque un fósforo, un lapicero o un palillo en un ángulo, sobre un lado del ángulo superior, como en la ilustración. Deslícelo por la línea hasta el ángulo inferior, luego gírelo en el sentido de las agujas del reloj como lo indica la ñecha (manteniendo un extremo en el vértice) hasta que coincida con el otro lado del ángulo. Ahora deslícelo por la línea hacia arriba hasta el ángulo de la derecha; gire el fósforo, el lapicero o el palillo como antes, llévelo hasta el próximo ángulo y continúe de esta manera hasta que el fósforo, el lapicero o el palillo regresen a su posición de partida. Descubrirá que el objeto se ha invertido porque giró exactamente 180°.

Los fósforos o cualquier otro objeto que se utilice, simulan lo que los matemáticos denominan un vector rotativo. El ejercicio se puede usar también para probar muchos otros teoremas sobre los ángulos, tanto internos como externos de cualquier polígono.

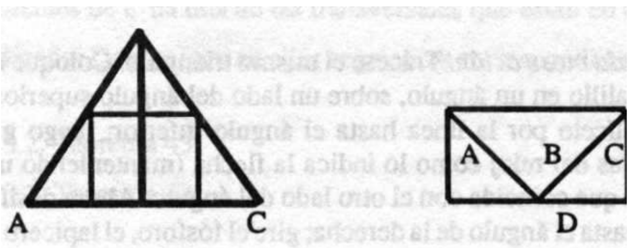
Mostrará que los ángulos internos de cualquier cuadrilátero suman 360°, los de cualquier pentágono 540° y así sucesivamente...



2.2.3. *Tercera mostración.* Esta aparece en el libro de José Estalella (1960), titulado *Ciencia recreativa.*

Trácese un triángulo isósceles como el del dibujo. Lo doblamos según *BD* (altura), lo reabrimos y volvemos a doblarlo de manera que los tres vértices A, B, C, vengan a coincidir en el punto D.

Los ángulos A, B, C, quedarán así dispuestos uno a continuación del otro y formarán exactamente dos ángulos rectos.



Esta mostración sirve como tipo de otras muchas que se pueden idear en la Geometría del papel doblado —Origami—, a menudo más intuitiva y a veces más exacta que la Geometría de la regla y el compás.

2.3. Aplicaciones

2.3.1. Intente usted mismo elaborar las mostraciones de los teoremas 2 y 19 presentados anteriormente.

2.3.2. La mostración del área de un triángulo cualquiera.

2.3.3. En fin, aventúrese, a confeccionar sus propias mostraciones.

3. Consideraciones finales

3.1. En términos generales, cualquier ecuación matemática puede analizarse como una oración bimembre, de predicado nominal.

3.2. En la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática debemos puntualizar aquellos aspectos de ambos procesos que dificulten el aprendizaje de la misma.

Por lo anterior creemos pertinente centrar la atención de los profesores en los análisis lingüísticos de los diversos enunciados matemáticos que aparecen en las diferentes ramas de la Matemática.

3.3. Otro aspecto derivado de lo anterior recae sobre la naturaleza gramatical de los diversos sustantivos: vale decir, que en Matemática la única clase de sustantivos con los cuales ella trabaja son, por principio abstractos, lo cual también dificulta el acercamiento de nuestros estudiantes a los conceptos por ellos implicados.

3.4. Igualmente, ponemos a consideración el concepto que hemos llamado mostración como un terreno común donde convergen la Aritmética, la Geometría, el Algebra, la Física, la Química...

3.5. Finalmente, invitamos a los profesores de Español y Matemática a que entrenen a sus estudiantes, desde muy temprano, para que establezcan las relaciones entre ambos saberes, y a que se familiaricen con las "traducciones" o transiciones de los enunciados lingüísticos, a los enunciados simbólico-matemáticos de las diversas clases de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

BALDOR, Aurelio. *Geometría plana, del espacio y trigonometría.* Guatemala. Cultural Centroamericana. 1967.

BELLO, Andrés y CUERVO, Rufino José. *Gramática castellana.* París. Roger et Chernovitz. 1921.

DE SAUSSURE, Ferdinand. *Curso de lingüística general.* Madrid. Alianza Universidad. 1983. 518 p.

ESTALELLA, José. *Ciencia recreativa.* Barcelona. Gustavo Gili. 1960. p. 49-59.

GARDNER, Martin. *Juegos y enigmas de otros mundos.* Barcelona. Gedisa. 1987. p. 141-143.

MONSALVE POSADA, Orlando. "Relaciones estructurales elementales de la Aritmética y sus relaciones con el lenguaje." En: *Educación y Pedagogía.* Nos. 10-11. Medellía Universidad de Antioquia. 1994. p. 83-93.

---------------- . "jjn paseo fascinante por la tabla de multiplicar". En: *Educación y Pedagogía* Nos. 12-13. Medellín. Universidad de Antioquia. 1995. p. 232-260.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. *Esbozo de una nueva gramática de la lengua española.* Madrid. Espasa-Calpe. 1978.