Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria

Elena Fernández-Millán y Marta Molina

En este estudio utilizamos la generación de ejemplos y la definición de conceptos por estudiantes para indagar en el conocimiento conceptual implícito y explícito del concepto ecuación que han adquirido en la Educación Secundaria. Los estudiantes mostraron facilidad para generar ejemplos de ecuaciones y determinar diferencias entre ellos, dando evidencias de su conocimiento conceptual implícito. En cuanto al explícito, manifestaron dificultades para definir el concepto ecuación. Generar ejemplos les ayudó a identificar elementos comunes, generalizar y expresar verbalmente, aunque con ciertas limitaciones, lo que para ellos es una ecuación.

Palabras clave: Conocimiento conceptual; Definiciones; Ecuación; Generación de ejemplos

Examples and Definitions of Equations: A Window to the Conceptual Knowledge of Secondary Students

In this study, we use the generation of examples and the definition of concepts by students to study their implicit and explicit conceptual knowledge of the concept of equation acquired in secondary education. Students showed facility to generate examples of equations and to determine differences between them, giving evidences of their implicit conceptual knowledge. As for the explicit knowledge, they evidenced difficulties in defining the concept of equation. Generating examples helped them to identify common elements, to generalize and to express verbally, although with some limitations, what an equation is for them.

Keywords: Conceptual knowledge; Definitions; Equation; Examples generation

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2018). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. *PNA, 12*(3), 147-172.

Las investigaciones sobre el conocimiento conceptual de conceptos matemáticos en el campo de Didáctica de la Matemática han aumentado en los últimos años estudiándose conjuntamente con el conocimiento procedimental (Crooks y Alibali, 2014; Ross y Willson, 2012). Este cambio se debe a la constatación de su importancia (Crooks y Alibali, 2014; Rittle-Johnson y Schneider, 2015; Ross y Willson, 2012). Uno de los temas de estudio relativos al conocimiento conceptual es cómo evaluarlo. Se identifican así indicadores de conocimiento conceptual explícito e implícito (Castro, Prat y Gorgorió, 2016; Crooks y Alibali, 2014). Dentro de la evaluación del conocimiento conceptual explícito, las definiciones juegan un papel fundamental (Zazkis y Leikin, 2008). Por otra parte, la generación de ejemplos por los estudiantes permite evaluar el conocimiento implícito (Abdul-Rahman, 2005; Goldenberg y Mason, 2008; Waywood, 1992; Zaskis y Leikin, 2007, 2008). Ambas actividades son consideradas en este trabajo para indagar en el conocimiento conceptual del concepto ecuación.

Llama la atención la cantidad de investigaciones que abordan el estudio del conocimiento de las ecuaciones por parte de estudiantes de secundaria y de las dificultades que se ponen de manifiesto cuando los estudiantes trabajan con ellas. Algunas de estas dificultades se refieren a características del simbolismo algebraico que se emplea en las ecuaciones (e.g., Álvarez y Gómez-Chacón, 2015; Arnau y Puig, 2013; Fernández-Millán y Molina, 2016, 2017; Molina, Rodríguez-Domingo, Cañadas y Castro, 2017; Resnick, Marmeche y Mathieu, 1987), y otras al concepto ecuación visto como un todo (Capraro y Joffrion, 2006; Filloy y Rojano, 1989).

En la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) se le concede gran importancia al álgebra y en concreto al trabajo con el simbolismo algebraico y con las ecuaciones, tal y como ponen de manifiesto los documentos curriculares que rigen las enseñanzas de esta etapa en España. Aun así, las dificultades señaladas en los citados estudios sugieren un déficit en el conocimiento conceptual tanto del simbolismo algebraico como de las ecuaciones. Este hecho nos motiva a abordar el problema de investigación que aquí planteamos, como continuación a nuestros estudios previos Fernández-Millán y Molina (2016, 2017). El problema de investigación planteado en ambos estudios previos es común: analizar el conocimiento conceptual implícito del simbolismo algebraico presente en ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO. Los resultados señalan características de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema y los significados que asignan los estudiantes a las estructuras operatorias contenidas en las expresiones algebraicas dadas.

De forma complementaria, en este tercer trabajo pretendemos aportar información relativa al conocimiento conceptual del concepto ecuación como un todo, sin prestar atención a las características individuales del simbolismo algebraico, que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes, dejando a un lado los procesos de resolución. Para ello realizamos entrevistas individuales a un grupo de estudiantes en el último curso de la ESO, en las que planteamos las dos tareas mencionadas anteriormente: la generación de ejemplos de ecuaciones y la definición del concepto ecuación. El objetivo de investigación planteado en este trabajo es analizar el conocimiento conceptual del concepto ecuación que han adquirido un grupo de estudiantes como resultado de su formación durante la ESO.

MARCO TEÓRICO

Para enmarcar teóricamente esta investigación, en primer lugar tratamos el papel que juega el conocimiento conceptual en la educación matemática y nos centramos en dos formas de evaluarlo: la generación de ejemplos por parte de los estudiantes que nos permite evaluar el conocimiento conceptual implícito y la definición de conceptos matemáticos, por parte de los mismos, que nos permite evaluar el conocimiento conceptual explícito. En segundo lugar prestamos atención al concepto ecuación en la educación secundaria.

Conocimiento conceptual y su evaluación

Son numerosos los estudios que han abordado la distinción entre conocimiento conceptual y procedimental en el área de las matemáticas. El uso generalizado de estos dos términos se debe a Hiebert y Lefevre (1986). Estudios más recientes (Rittle-Johnson y Schenider, 2015) señalan que sigue vigente la definición dada por estos autores. El conocimiento conceptual se basa en una rica red de relaciones entre piezas de información, que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información. El conocimiento procedimental, por otra parte, está compuesto por el sistema de representación simbólico de las matemáticas y los algoritmos o reglas utilizadas para resolver tareas matemáticas.

La constatación de la importancia del conocimiento conceptual se pone de manifiesto en los beneficios que este tipo de conocimiento aporta a la hora de hacer matemáticas, tales como ser de ayuda en la toma de decisiones sobre el procedimiento más adecuado para una determinada situación, promover una mayor flexibilidad en la resolución de problemas y permitir valorar la solución encontrada (Crooks y Alibali, 2014). Uno de los temas de discusión en investigación en educación matemática en torno al conocimiento conceptual es la forma de evaluarlo. Castro, Prat y Gorgorió (2016) y Crooks y Alibali (2014) indican que se puede evaluar a través de indicadores de conocimiento conceptual explícito o implícito. Entre las tareas que permiten evaluar el conocimiento conceptual explícito los autores, tras una revisión de la literatura en relación a este tema, señalan la explicación de conceptos, en particular, la definición de conceptos matemáticos (Crook y Alibali, 2014). Por otra parte, la aplicación de procedimientos, la evaluación de procedimientos así como la evaluación, clasificación e identificación de ejemplos relativos a un concepto concreto son tareas que permiten evaluar el conocimiento implícito (Crooks y Alibali, 2014). Otra de las tareas que ha sido defendida como válida para la evaluación del conocimiento conceptual implícito es la generación de ejemplos por parte de los estudiantes (Abdul-Rahman, 2005; Goldenberg y Mason, 2008; Waywook, 1992; Zaskis y Leikin 2007, 2008).

A lo largo de esta investigación nos centramos en dos tareas específicas: la generación de ejemplos y la definición de conceptos matemáticos, ambas por parte de los estudiantes.

Watson y Mason (2002) señalan que el concepto ejemplo incluye cualquier cosa utilizada como materia prima que sirva para poder intuir relaciones y para desarrollar el razonamiento inductivo. Pueden ser ejemplos:

- ilustraciones de conceptos y principios, siendo un concepto la representación mental de un objeto matemático, como es el caso de las ecuaciones, y un principio, una verdad que ha sido demostrada, una ley, como puede ser el caso del teorema del resto;
- contextos que ilustran o motivan un tema particular en matemáticas; y
- soluciones particulares donde varias son posibles.

De un modo general señalan que los ejemplos deben ser vistos dentro de un contexto dado. A lo largo de este estudio nos restringimos a los que Watson y Mason (2005) denominan ejemplos de conceptos y principios.

El uso de ejemplos en educación matemática ha sido ampliamente reconocido tanto desde fuentes antiguas como nuevas (Bills et al., 2006). Zazkis y Leikin (2007) reconocen dos intereses diferenciados del uso de ejemplos en la educación matemática: el primero para la enseñanza y diseño de materiales didácticos y el segundo para la investigación en educación matemática. El primero de estos ha sido largamente discutido (Leinhardt, 1993; Watson y Mason, 2005; Zhu and Simon, 1987). El segundo de los intereses mencionados es el que consideramos en este trabajo: la generación de ejemplos por parte de los estudiantes es una poderosa herramienta de investigación que aporta una “ventana” hacia la mente de los estudiantes (Zazkis y Leikin, 2007).

La actividad de generar ejemplos por parte de los estudiantes va en línea con la invención de problemas por los mismos, en el sentido de que son actividades que invierten el orden usual de la actividad matemática en el aula, ya que normalmente tanto los ejemplos como los problemas son propuestos por profesionales, ya sean profesores, libros de texto etc., y no por los estudiantes (Brown y Walter, 1990). Watson y Mason (2005) defienden que cuando los estudiantes generan sus propias representaciones, preguntas y problemas muestran su conocimiento matemático más profundamente que cuando se les dan tareas preparadas. En la misma línea Abdul-Rahman (2005) señala que el conocimiento conceptual puede ser considerado no solo como la habilidad de utilizar el conocimiento de algo para resolver problemas rutinarios correctamente, sino, de forma más importante, como el acto de extender dicho conocimiento de forma adecuada a situaciones que no nos son familiares, como es el caso de la generación de ejemplos.

Dentro de la tarea de generar ejemplos por parte de los estudiantes, Watson y Mason (2005) señalan que los ejemplos que estos producen emergen de un pequeño grupo de ideas que simplemente aparecen en respuesta a una tarea particular y en una situación particular. Así, muestran que el proceso de ejemplificación es individual, entendido como dependiente del conocimiento y de la experiencia del estudiante, y situacional, ya que está enmarcado por las circunstancias en las que se presenta ese conocimiento. Al grupo de ejemplos que una persona posee como resultado de su experiencia lo llaman "espacio de ejemplos" y le reconocen las siguientes características: (1) es dinámico, puede desarrollarse y cambiar; (2) tiene una estructura interna; (3) su estructura es personal. Así mismo, entre la cantidad de ejemplos que pueden existir en la mente de una persona, distinguen "espacio de ejemplos accesible", definido como el conjunto de ejemplos que vienen a la mente del estudiante en un determinado momento. Este depende de muchos factores incluyendo el contexto, el desencadenante y el estado del individuo.

Dentro del espacio de ejemplos que puede generar un estudiante sobre un concepto determinado, Watson y Mason (2005) utilizan el término "dimensiones de variación posibles" para referirse a las características de un ejemplo que los estudiantes reconocen como susceptibles de cambio sin perder su ejemplaridad. Diferentes personas en diferentes momentos pueden percatarse de diferentes dimensiones que pueden variar. Así mismo, el hecho de reconocer estas características por parte de los estudiantes puede no ser inmediato, pero es una actividad que puede desencadenar el profesor. Asociado con cada dimensión está el "rango de cambio permisible" que da cuenta del alcance del cambio posible en cualquiera de las dimensiones.

Goldenberg y Mason (2008) defienden que las dimensiones de variación posibles en los ejemplos pueden ayudar a los estudiantes a distinguir elementos esenciales de los que no lo son, si el rango de variación permisible de dichos elementos está bien seleccionado. Los citados autores, así como Abdul-Rahman (2005), señalan que el hecho de que los estudiantes sean capaces de identificar las características de un objeto que hacen que sea un ejemplo y cuáles de esas características pueden variar sin que el objeto pierda la ejemplaridad, informa sobre el conocimiento conceptual que poseen de un concepto matemático. Esta tarea de buscar elementos comunes en un objeto matemático que hacen que sea un ejemplo del mismo es lo que Zaslavsky (2008) describe como comparar y contrastar objetos que tengan algunas características en común, pero que al mismo tiempo difieran en relación con otros aspectos. Este autor señala que la búsqueda de diferencias y similitudes permite identificar maneras de pensar y grados en los que los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos.

En cuanto a la definición de conceptos matemáticos, Zazkis y Leikin (2008) señalan que juega un papel fundamental tanto en el enfoque de enseñanza, como en la secuencia de aprendizaje de dichos conceptos por parte de los estudiantes.

Relacionando el proceso de la generación de ejemplos con la definición de conceptos, Goldenberg y Mason (2008) mantienen que las definiciones funcionan como generalización o abstracción que emerge a través de la experiencia particular. En este caso, las definiciones que proponen los estudiantes están relacionadas con los ejemplos que ellos mismos generan. Solicitar a los estudiantes la definición de un concepto matemático tras la observación de ejemplos de dicho concepto lleva implícito un proceso de generalización intuitiva (Bills y Rowland, 1999) que puede ayudar a los estudiantes a dar muestra del conocimiento conceptual explícito de un concepto matemático que han adquirido. La idea de la generalización a través de la observación de ejemplos también es tratada por Abdul-Rahman (2005) quien señala que los diferentes ejemplos revelan que aunque algunas cosas varíen, otras se mantienen, así el hecho de generar ejemplos puede no solo enriquecer el espacio de ejemplos de un individuo, si no también dar una oportunidad a los estudiantes de explorar la estructura de los conceptos en términos de relaciones entre elementos, y de esta forma revelar su sentido de la generalidad.

Ecuaciones

El concepto ecuación es definido de diferentes formas. Mostramos las diferentes definiciones de ecuación dadas por varias fuentes:

- Construcción central del álgebra que impregna todas las ramas de las matemáticas. "Las ecuaciones algebraicas se caracterizan como <expresión algebraica> = <expresión algebraica>" (Arcavi, Drijvers y Stacey, 2017, p. 14), definiendo una expresión algebraica como "una combinación de números, letras y signos de operaciones bien estructurada de acuerdo con las reglas de la sintaxis algebraica" (p. 13).
- "Es una declaración matemática que afirma que dos o más cantidades son las mismas unas que otras, también llamadas igualdad, fórmula o identidad" (Wolfram MathWorld, 2015; citado por Arcavi et al., 2017).
- Una afirmación, normalmente escrita con símbolos, que muestra la igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas e.g., $x + 3 = 5$. Una ecuación numérica es aquella que contiene solo números. Una ecuación literal es la que contiene algunas letras (representando incógnitas o variables). Una ecuación identidad es una ecuación literal válida para cualquier valor de la variable. Una ecuación condicional (normalmente nombrada como ecuación) es una ecuación literal que no es verdadera para todos los valores de la variable. (Diccionario libre, 2003-2015, citado por Arcavi et al., 2017).

- Es una fórmula de la forma A=B, donde A y B son expresiones que deben contener varias variables llamadas incógnitas, y el signo = denota una relación de igualdad binaria. Aunque escrita en forma de proposición, una ecuación no es una afirmación que es verdadera o falsa, pero un problema consiste en encontrar las variables, llamadas soluciones, que, cuando se sustituyen por las incógnitas, alcanza el mismo valor en la expresión A y B (Wikipedia, s.f.; citado por Arcavi et al., 2017).
- Una fórmula que afirma que dos expresiones tienen el mismo valor. Una ecuación identidad (normalmente llamada una identidad) es aquella que es cierta para cualquier valor de las variables. Una ecuación condicional es aquella que es cierta solo para ciertos valores de las variables (Borowski y Borwein, 1989).
- "Es una afirmación matemática, dada en símbolos, que dice que dos objetos compatibles son los mismos o equivalentes" (Tossavainen, Attorps y Väisänen, 2011, p. 2).

Cada una de las definiciones consultadas enfatiza un matiz diferente del concepto ecuación. Algunas de las definiciones caracterizan las ecuaciones como problemas a resolver o como preguntas a la espera de una respuesta como señalan Arcavi et al. (2017). Según este punto de vista, las ecuaciones no son, en sí las mismas, verdaderas o falsas, sino más bien una invitación a buscar los valores que deben sustituirse por las letras de tal manera que la igualdad se mantenga. Otras definiciones se centran en la distinción entre igualdad y ecuación condicional.

A partir de las ideas de Zazkis y Leikin (2008) sobre el papel fundamental que juega la forma en la que las definiciones de un concepto matemático se presentan a los estudiantes, hemos realizando una revisión de las unidades de álgebra de 21 libros de texto de todos los niveles de educación secundaria y de varias editoriales. Las definiciones que dan 10 de estos libros las podemos sintetizar como: una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (Álvarez et al., 2010; Celma et al., 2010; Colera, Gaztelu y Colera 2016; Colera, Gaztelu y Oliveira, 2016; Corbarán et al., 2003; Frías, Molero, Salvador y Zuasti, 2007; Sánchez y Vera, 1999; Vizmanos, Anzola, Mansilla y Bujanda, 2010; Vizmanos, Anzola, Peralta y Bargueño, 2008). Los 11 libros restantes dan una definición equivalente a: igualdad entre expresiones algebraicas que se verifica únicamente para ciertos valores de las letras (Albertí et al., 2012; Almodóvar, García, Gil y Nortes, 1997; Álvarez et al., 2007; Arias y Maza, 2010; Bartomeu, Capella, Besora, Jané y Guiteras, 2011; Colera, Gaztelu y Colera, 2016; Colera, Martí, Polo, Salvador y Solanes, 2007; García, 2011; Maragallo, 2011; Uriondo, 2007; Vizmanos, Anzola, Alcaide y Peralta, 2008). La expresión "igualdad entre expresiones algebraicas" es sustituida en cinco de los libros consultados por "igualdad algebraica" y en siete libros por "igualdad entre números y letras". La forma en la que los libros consultados definen expresión algebraica difiere en unos de otros pero 17 de las definiciones tienen en común los términos: números, letras y operaciones aritméticas. La excepción son tres definiciones de expresión algebraica que se centran en el proceso de traducción al lenguaje algebraico: "las expresiones algebraicas surgen al traducir al lenguaje matemático a situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras" (Colera, Gaztelu y Colera, 2016, p. 172), "una expresión algebraica es la forma de describir matemáticamente una situación, enunciado u operación matemática en lenguaje algebraico" (García, 2011, p. 135) y "una expresión algebraica es la que se obtiene al traducir al lenguaje algebraico los términos de un problema" (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2016, p. 84). Uno de los libros consultados no proporciona una definición de expresión algebraica.

Teniendo en cuenta las definiciones consultadas, a pesar de que no hay un consenso en la investigación en la definición del concepto ecuación, y que a lo largo de este trabajo nos centramos en el concepto ecuación fuera del contexto de la resolución de problemas, adoptamos una definición de ecuación que abarca la proporcionada por todos los libros de texto consultados: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas (letras, números y operaciones) que se verifica para ciertos valores de las letras.

ESTUDIOS PREVIOS

En el campo de la investigación en educación matemática numerosos estudios abordan el conocimiento conceptual que han adquirido los estudiantes sobre las ecuaciones. La mayor parte de estas investigaciones se centran en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico, característico de las ecuaciones, que han adquirido los estudiantes en determinadas etapas de su formación. Este es el caso de, por ejemplo, Álvarez y Gómez-Chacón (2015), Arnau y Puig (2013), Bills (2001), Booth (1984), Fernández-Millán y Molina (2016, 2017), Filloy, Rojano y Puig (2008), Furinghetti y Paola (1994), Küchemann (1981), Molina et al. (2017), Resnick, Marmeche y Mathieu (1987), y Usiskin (1988).

Aproximándonos más a nuestro trabajo de investigación, nos centramos en estudios que tratan el conocimiento conceptual del concepto ecuación de forma general, sin atender de forma específica a las características del simbolismo algebraico. Hallamos por un lado estudios que versan sobre qué estrategias o métodos de enseñanza pueden ayudar a la adquisición de dicho conocimiento conceptual de las ecuaciones: Chalouh y Herscovics (1988), Herscovics y Kieran (1980), Rittle-Johnson y Star (2007, 2009), y Rooss y Willson (2012). Por otro lado, y en consonancia con nuestro problema de investigación, encontramos estudios que se centran en el conocimiento conceptual adquirido por estudiantes de secundaria del concepto ecuación. Filloy y Rojano (1989) identifican obstáculos conceptuales en el paso de operar con ecuaciones que tienen una incógnita a un lado del signo igual, a ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo igual. Para trabajar con este segundo tipo de ecuaciones el estudiante ha de entender que las expresiones en ambos miembros son de la misma naturaleza y deben dar significado a la igualdad de las expresiones, lo que en el marco de la enseñanza tradicional de las ecuaciones requiere de instrucción específica según los citados autores. Capraro y Joffrion (2006) realizan un estudio con estudiantes de secundaria en el que indagan en su conocimiento conceptual de las ecuaciones a través de dos tareas multi-respuesta en las que se les pide la traducción del sistema de representación verbal al simbólico. En este estudio concluyen que el hecho de ser capaz de aplicar el conocimiento existente a una nueva situación, da muestra de la adquisición de conocimiento conceptual. Señalan la importancia de desarrollar el conocimiento conceptual en las clases de matemáticas y la relevancia del vocabulario en el desarrollo del mismo.

Dentro de los estudios que utilizan las definiciones de conceptos matemáticos y la generación de ejemplos para la evaluación del conocimiento conceptual de un determinado concepto, ambas actividades realizadas por estudiantes, no hemos encontrado ninguno que aborde el conocimiento conceptual del concepto ecuación adquirido por estudiantes de secundaria. Sí encontramos estudios que utilizan estas tareas para evaluar el conocimiento conceptual de otros conceptos matemáticos como son los casos de Abdul-Rahman (2005), Rowland (2008), y Zazkis y Leikin (2007 y 2008).

ESTUDIO EMPÍRICO

En este artículo abordamos el objetivo de investigación ya planteado y que recordamos: analizar el conocimiento conceptual del concepto ecuación que han adquirido un grupo de estudiantes como resultado de su formación durante la ESO. Para ello realizamos entrevistas individuales a estudiantes de cuarto de ESO en las que les solicitamos que generen ejemplos de ecuaciones y definan el concepto ecuación. Acotamos el problema de investigación por medio de los siguientes objetivos específicos:

- Analizar el conocimiento conceptual implícito del concepto ecuación a partir de la generación de ejemplos por los estudiantes.
- Analizar el conocimiento conceptual explícito del concepto ecuación.

Sujetos participantes

La muestra de estudiantes considerada fue intencional, dada su disponibilidad. La constituyen 20 estudiantes de cuarto de ESO de un instituto público, matriculados en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. El grupo está compuesto por 13 chicos y 7 chicas, cuyas edades están comprendidas entre los 15 y 16 años, a excepción de un estudiante que tiene 17 años. No hay repetidores del curso 4º de ESO en el grupo. Hay un alumno que tiene las matemáticas pendientes del curso anterior pero en el momento de la recogida de datos para este estudio, ya había realizado y superado las pruebas necesarias para la recuperación de dicha asignatura. Dos estudiantes tienen un razonamiento lógico por encima de la media del grupo en la resolución de problemas, aun así, el nivel grupal de rendimiento en la asignatura de matemáticas se puede calificar de medio. La asistencia a clase de los estudiantes es regular. Respecto a su conocimiento previo sabemos que desde el primer curso de la ESO han trabajado con la resolución de ecuaciones y problemas relacionados, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y, posteriormente, con ecuaciones de segundo y tercer grado, bicuadradas, con radicales, con fracciones y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas. Cuando se realizó la recogida de datos, último trimestre del curso escolar, habían concluido el trabajo en el aula de los contenidos relativos al álgebra propios de la etapa de la ESO.

Diseño del instrumento

La recogida de datos consistió en entrevistas individuales semiestructuradas de aproximadamente 30 minutos de duración, grabadas en audio. Fueron realizadas por la primera autora de este trabajo, que era su profesora de matemáticas.

La entrevista consta de dos tipos de tareas que, como se ha descrito previamente, han sido defendidas por diferentes autores como válidas para indagar en el conocimiento conceptual de un concepto matemático: definición y generación de ejemplos. Dentro de esta última se incluye la búsqueda de diferencias y de similitudes entre los ejemplos. En la tabla 1 se muestran las ocho tareas que componen la entrevista, en el orden en que fueron presentadas a los estudiantes.

Tabla 1
Relación entre tareas y tipos de tarea

Número de tarea	Tarea (redacción aproximada)	Tipo de tarea
1	Intenta definir con tus palabras qué es para ti una ecuación.	Definición
2	Pon un ejemplo de una ecuación (ejemplo 1).	Generación de ejemplos
3	Por un ejemplo de una ecuación que sea diferente al ejemplo 1 (ejemplo 2).	Generación de ejemplos
4	Di al menos una cosa que haya diferente entre los ejemplos 1 y 2.	Búsqueda de diferencias entre ejemplos

Tabla 1
Relación entre tareas y tipos de tarea

Número de tarea	Tarea (redacción aproximada)	Tipo de tarea
5	Pon varios ejemplos de ecuaciones en los que varíe el elemento[1] que has dicho anteriormente.	Generación de ejemplos
6	¿Qué valores puede tomar el elemento que ha variado?	Búsqueda de similitudes entre ejemplos
7	Observa todos los ejemplos que has generado, todos ellos son muy diferentes entre sí pero tienen elementos en común que hacen que sean ecuaciones, indica cuáles son esos elementos.	Búsqueda de similitudes entre ejemplos
8	Teniendo en cuenta todos los elementos que acabas de decir, intenta mejorar la definición de ecuación que has dado anteriormente.	Definición

La tareas de la 2 a la 6 permiten abordar el primer objetivo de este trabajo, indagar en el conocimiento conceptual implícito del concepto ecuación. Estas tareas son planteadas oralmente pero resueltas de forma escrita por los estudiantes. Esta parte de la entrevista es semiestructurada. Seguimos una metodología basada en una práctica de indagación, en términos de Szydlik (2015), que consiste en escuchar, confrontar y cuestionar los planteos de los estudiantes.

Las tareas 2 y 3 consisten en la generación por los estudiantes de dos ejemplos diferentes de ecuaciones. Únicamente hay intervención por parte de la investigadora en el caso de que propongan ejemplos de expresiones que no se corresponden con una ecuación por estar incompletas (e.g., $3x^2 + 4x + 2$), sugiriéndoles que revisen el ejemplo para subsanar su error, con preguntas tales como: “¿Estás seguro/a de que el ejemplo que propones se corresponde con una ecuación?” Pero sin decirles de forma explícita que el ejemplo que proponen no es una ecuación.

La tarea 4 tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen las dimensiones de variación posibles a partir de la búsqueda de diferencias entre los dos ejemplos generados previamente. Las tareas 5 y 6 van dirigidas a indagar en el rango de variación permisible, a partir de la generación de nuevos ejemplos y de la búsqueda de similitudes entre ellos. Estas tres tareas se repiten varias veces

[1] En la entrevista con los estudiantes sustituimos la palabra elemento por la diferencia entre los dos ejemplos reconocida en cada momento por los estudiantes: grado, número de términos, número de incógnitas, coeficiente, operación con la incógnita, miembro derecho de la ecuación y término independiente.

a lo largo de cada entrevista, siempre refiriéndose a elementos que ellos identifiquen como diferentes en sus dos primeros ejemplos. El objetivo es que identifiquen características de las ecuaciones susceptibles de variar y que hacen que los ejemplos propuestos por los mismos sigan siendo ecuaciones.

A lo largo de la entrevista se induce a los estudiantes a que busquen diferencias estructurales entre las ecuaciones, dejando a un lado otro tipo de diferencias como la forma de resolver las ecuaciones o el número de soluciones que tengan. De este modo se pretende que los estudiantes generen el mayor número de ejemplos posibles, con las mayores variaciones posibles, y no se limiten a proponer ejemplos que les resulten fáciles de resolver.

En la entrevista los estudiantes tienen libertad para la generación de ejemplos. Zazkis y Leikin (2007) ponen de manifiesto la necesidad de controlar la forma en la que requiere a los estudiantes que generen ejemplos, con el objetivo de hacer inferencias sobre el conocimiento de los estudiantes a partir de dichos ejemplos. La investigadora que dirige la entrevista presenta oportunidades para que lleven a cabo esta actividad a través de solicitar "otro y otro" o "algo diferente", tareas definidas por Watson y Mason (2005) las cuales animan que los estudiantes reflexionen sobre su primer ejemplo y busquen en una dirección diferente.

Las tareas 1, 7 y 8 permiten indagar en el conocimiento conceptual explícito, segundo objetivo de esta investigación. Estas tareas son preguntas cerradas, planteadas y resueltas de forma oral, sin intervención adicional por parte de la investigadora, la cual se limita a preguntar y a escuchar las respuestas de los estudiantes. Las tareas 1 y 8 hacen al estudiante la misma demanda: formular una definición del concepto ecuación. La tarea 7 solicita al estudiante que busque similitudes entre los ejemplos generados en las tareas previas para llegar a identificar las características de los ejemplos planteados que hacen que todas las expresiones sean ecuaciones.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En primer lugar atendemos al análisis de los datos relativos a la generación de ejemplos por los estudiantes (tareas 2 a 6). Distinguimos las dimensiones de variación posibles y el rango de cambio permisible para cada una de ellas. Esa primera parte del análisis va dirigida a dar respuesta al primer objetivo de investigación. Posteriormente nos centramos en las respuestas que dan los estudiantes a las tareas 1, 7 y 8, relativas a la definición del concepto ecuación y que nos permiten abordar el segundo objetivo de investigación.

Dimensiones de variación y rango de cambio permisible

Para el análisis de los datos partimos de los contenidos relativos a ecuaciones establecidos en el RD 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato:

ecuaciones de primer grado con una incógnita, ecuaciones de segundo grado con una incógnita, sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de grado superior a dos. A partir de los mismos, hemos revisado las unidades de álgebra de los 21 libros de texto indicados anteriormente para identificar qué características de las ecuaciones varían en los ejemplos y ejercicios de ecuaciones propuestos. Encontramos ocho dimensiones de variación posibles, cuyos rangos de variación permisibles para las ecuaciones mostramos entre paréntesis: coeficiente (números reales), término independiente (números reales), miembro derecho de la ecuación (números y expresiones algebraicas), operación con la incógnita (suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíces), presencia de paréntesis, grado (números naturales), número de incógnitas (un número finito), número de términos (un número finito).

Como respuesta a la cuarta pregunta de la entrevista, los estudiantes identifican siete elementos susceptibles de variar en las ecuaciones: grado (18 estudiantes), número de términos (16 estudiantes), número de incógnitas (5 estudiantes), coeficiente (15 estudiantes), operación de la incógnita (14 estudiantes), miembro derecho de la ecuación (14 estudiantes) y término independiente (8 estudiantes). Además de identificar estas siete dimensiones de variación posible, los estudiantes son capaces de proponer ejemplos de ecuaciones en las que varía cada uno de los elementos y todas ellas guardan la ejemplaridad de ecuaciones. A través de las tareas de la 2 a la 6, cada estudiante genera entre 9 y 23 ejemplos correctos de ecuaciones, siendo la media de 16 ejemplos por estudiante.

Grado

La mayoría de los estudiantes, 18 de 20, reconocen el grado como una de las diferencias entre los dos ejemplos de partida que ellos proponen. Los estudiantes son capaces de proponer ejemplos de ecuaciones con diferentes grados, que oscilan desde ecuaciones de primer grado hasta ecuaciones de grado 100. En la tabla 2 podemos observar los rangos de variación permisibles que los estudiantes asocian al grado de una ecuación tanto en los ejemplos que proponen como a la hora de verbalizarlos, así como las frecuencias de los mismos.

Tabla 2
Frecuencias del rango de variación permisible para el grado de una ecuación[2]

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Racionales positivos	Reales
Ejemplos	18	0	0	0	-
Verbalización	5	4	2	1	6

[2] En las tablas 2, 3 y 5 las frecuencias de las respuestas en los ejemplos hacen referencia al menor conjunto numérico al que pertenecen los números.

Número de términos y número de incógnitas

El número de términos es reconocido por 16 de los 20 estudiantes como una característica susceptible de variar en una ecuación. Proponen ejemplos de ecuaciones con un máximo de siete términos pero todos los estudiantes reconocen que las ecuaciones pueden tener infinitos términos. Un número más bajo de estudiantes, cinco en este caso, señalan que el número de incógnitas puede variar en una ecuación. Estos estudiantes proponen ejemplos de ecuaciones con hasta cinco incógnitas y a la hora de verbalizar el número de ellas que puede haber en una ecuación señalan que puede haber tantas como uno quiera. En este sentido hay que tener en cuenta que se indica a los estudiantes que no es necesario que sepan resolver la ecuación.

Coeficiente

Otra de las diferencias entre los dos ejemplos iniciales que identifican 15 de los 20 estudiantes es el coeficiente. En la tabla 3 podemos observar los rangos de variación permisibles del coeficiente así como sus frecuencias.

Tabla 3

Frecuencias del rango de variación permisible para el coeficiente de una ecuación[2]

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Racionales positivos	Racionales menos el cero	Reales
Ejemplos	9	4	2	-	-	-
Verbalización	0	1	1	1	1	11

Mostramos los únicos ejemplos de ecuaciones con coeficientes enteros que proponen cuatro estudiantes:

$3x^2 - 7x + 8 = 0$, $2x^3 - 4x - 2 = 3$, $x^2 - 1x - 1 = 0$, $4x + 7 = -8x + 9$, $5x - 4x^2 = 7x - 8$, $6x - 17 = -20x + 100$ y $7x - 13x = 5$,

así como aquellos con presencia de coeficientes racionales propuestos por dos estudiantes: $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} = 0$, $\frac{3x}{666} = \frac{3x}{2}$.

Operación con la incógnita

La operación que vincula la incógnita con otros elementos de la ecuación es otra de las características que 14 de los 20 estudiantes identifican como susceptible de variar en las ecuaciones. Los estudiantes proponen ejemplos en los que están presentes las operaciones suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada y potencia, tal y como se puede observar en la tabla 4.

Tabla 4
Frecuencias del rango de variación permisible para las operaciones con la incógnita

Tipo de respuesta	Suma	Resta	Multiplicación	División	Raíz	Potencia
Ejemplos	10	9	12	12	10	8
Verbalización	14	10	14	13	12	3

Miembro derecho de la ecuación

De los 20 estudiantes 14 señalan el miembro derecho de la ecuación como una de las diferencias entre los dos ejemplos de partida. Cuando se les requiere que escriban ejemplos de ecuaciones en los que varíe esta característica, 5 de los 14 únicamente proponen ecuaciones con la estructura <expresión algebraica>=número, mientras que 9 estudiantes además de la mencionada, también proponen ejemplos con la estructura <expresión algebraica>=<expresión algebraica>. A la hora de verbalizar qué puede haber en el miembro derecho de una ecuación, 4 estudiantes identifican que solamente puede haber números y 10 señalan que además de números puede haber letras o expresiones algebraicas.

Término independiente

Menos de la mitad de los estudiantes, 8 de los 20, observan que el término independiente varía en los dos ejemplos de partida que ellos generan. Los rangos de variación y sus frecuencias se pueden observar en la tabla 5.

Tabla 5
Frecuencia del rango de variación permisible para el término independiente

Tipo de respuesta	Naturales	Enteros	Racionales	Reales
Ejemplos	4	3	0	1
Verbalización	0	0	1	7

El único ejemplo de ecuación con término independiente irracional propuesto por un estudiante es: $3x + \sqrt{3} = 2y$.

Definiciones de ecuación

Para abordar el segundo objetivo de investigación, analizar el conocimiento conceptual explícito del concepto ecuación, partimos de la definición de ecuación adoptada en este trabajo tras la revisión de los libros de texto: una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas (letras, números y operaciones) que se verifica para ciertos valores de las letras. A partir de esta definición seleccionamos las palabras mínimas que deben incluir las definiciones de los estudiantes para considerarlas correctas: expresión algebraica (letras, números y operaciones) e igualdad. En los casos en los que en dichas definiciones no estén incluidas todas estas palabras, consideraremos que son incorrectas. Obviamos en el análisis la expresión "ciertos valores de las letras", ya que a lo largo de la entrevista nos centramos en los elementos característicos de la estructura de la ecuación, dejando a un lado aspectos como la solución de la ecuación o la forma de resolverlas, tal y como se indicó en el diseño de la entrevista. A partir de ellas elaboramos la tabla 6 en la que mostramos la frecuencia con la que los estudiantes mencionan dichas palabras en sus respuestas a las tareas 1, 7 y 8.

Tabla 6
Frecuencias de palabras clave en la definición de ecuación

Tipo de respuesta	Primera definición de ecuación	Elementos reconocidos como comunes en los ejemplos	Segunda definición de ecuación
Expresión algebraica	3	0	3
Letras/incógnitas	17	20	20
Números	7	13	15
Operaciones	6	10	15
Igualdad	1	20	17

Analizamos en primer lugar las respuestas que dan los estudiantes a la definición de ecuación antes de generar los ejemplos, primera tarea de la entrevista. Teniendo en cuenta las palabras mínimas que están presentes en todas las definiciones de ecuación encontradas en los libros de texto, observamos que solamente 3 estudiantes utilizan en sus definiciones el término expresión algebraica[3]. Diecisiete estudiantes, incluyendo dos de los que utilizaron el término expresión algebraica, incluyen las letras o incógnitas en la definición y solamente siete mencionan explícitamente que en una ecuación tiene que haber números. En cuanto a las operaciones, o sus sinónimos (cuenta, expresión, expresión matemática o fórmula), son 6 los estudiantes que las mencionan, mientras que el término igual o igualación únicamente es incluido por uno de los estudiantes en su definición: "Es una expresión algebraica igualada a cero que da unos resultados". Solamente este estudiante da una definición correcta de ecuación. Algunos ejemplos de definiciones incorrectas proporcionadas por otros estudiantes son: "operación en que intervienen unas incógnitas", "conjunto de incógnitas", "expresión algebraica que tiene incógnitas", "operación que tú hallas

[3] Entendemos que el término expresión algebraica lleva implícito la existencia de letras y números que se relacionan a través de signos que representan operaciones aritméticas.

para descifrar una incógnita" o "conjunto de números y símbolos algebraicos, una expresión algebraica en la que hay varias incógnitas y que puede ser de primer, segundo y así de más grados".

Como respuesta a la tarea 7, en la que se les cuestiona por los elementos comunes que tienen los ejemplos que ellos han generado, todos identifican las incógnitas o letras y el signo igual o la igualación, 13 los números y 10 las operaciones. Solamente 6 de los 20 estudiantes identifican simultáneamente los cuatro elementos en su tarea de determinar los elementos comunes en todos sus ejemplos: incógnitas, números, operaciones y el signo igual.

Por último analizamos la definición que los estudiantes dan de ecuación como respuesta a la última tarea de la entrevista, tras analizar los elementos comunes que tienen todos los ejemplos que cada estudiante ha generado. Son 10 los estudiantes que incluyen en sus definiciones todas las palabras mínimas que consideramos necesarias para que la definición de ecuación sea correcta, mostramos algunas de ellas: "es aquella que posee una incógnita y que está igualada a cualquier número real, puede tener suma, resta, multiplicación y división", "una expresión algebraica que iguala entre sí dos expresiones y tiene una o varias incógnitas", "es una expresión algebraica igualada a algo, que tiene una incógnita y hay operaciones y hay diferentes grados", "es una expresión algebraica que puede tener varias incógnitas, términos independientes, igualadas a cero, puede tener varias operaciones y varios grados y pueden aparecer infinitos números reales", "es una operación matemática compuesta por una incógnita, coeficiente, puede tener término independiente, que se iguala a un número entero o natural y mediante esta operación se puede resolver la incógnita", "es un conjunto de números y letras que tienen unas características especiales entre ellas y comunes, que son: un grado, una incógnita, igualadas a una expresión, signos y operaciones". Los 10 estudiantes que dan definiciones incorrectas de ecuación incluyen las incógnitas en su definición, siete estudiantes incluyen los números y 6 el signo igual y las operaciones. Mostramos algunos ejemplos: "es una operación con números, letras e incógnitas, que son las letras. A través de esas operaciones tenemos que averiguar la incógnita", "es un cálculo de números naturales, enteros o racionales que pueden tener una incógnita o más" o "algo que tú igualas a otra cosa, una incógnita que igualas a un número".

Discusión

El análisis de los datos realizado a través de la identificación de las dimensiones de variación posibles y de sus rangos de variación permisibles de los ejemplos generados por el grupo de estudiantes, permite dar respuesta al primer objetivo de investigación, obteniendo así información sobre el conocimiento conceptual implícito que estos han adquirido del concepto ecuación. El segundo objetivo de investigación, analizar su conocimiento conceptual explícito del mismo concepto, es abordado a través del análisis de las palabras clave incluidas en las definiciones que dan los estudiantes del concepto ecuación antes y después de generar los ejemplos.

Comenzamos la discusión de los resultados por el primer objetivo de investigación. Los resultados ponen de manifiesto que los estudiantes son capaces de proponer un gran número de ejemplos correctos de ecuaciones que varían entre sí en diferentes elementos, dimensiones de variación posibles, que ellos mismos son capaces de verbalizar de forma adecuada. Identifican siete elementos como susceptibles de variar en las ecuaciones que coinciden con siete de las ocho dimensiones detectadas en el análisis de los libros de texto. La presencia o no de paréntesis es la única característica que varía en las ecuaciones presentes en los libros de texto desde primero a cuarto de ESO y que ningún estudiante verbaliza, a pesar de ello cinco estudiantes proponen ejemplos de ecuaciones con y sin paréntesis. Si nos centramos en los rangos de variación permisibles para cada una de las dimensiones, observamos que, excepto en el número de términos y el número de incógnitas, los estudiantes muestran dificultades a la hora de identificar los diferentes rangos tanto cuando se les cuestiona al respecto como cuando generan ejemplos. Aunque señalan que una ecuación puede tener infinitos términos e incógnitas, interpretamos que los estudiantes son conscientes de que una ecuación debe tener un número de términos e incógnitas finito, y con la palabra infinito hacen referencia a muchos.

En el caso del grado de la ecuación todos los estudiantes proponen ejemplos correctos con diferentes grados que se corresponden con números naturales. A pesar de que indicamos a los estudiantes que no es necesario que sepan resolver las ecuaciones, este conjunto numérico es el único válido para el grado de una ecuación en el caso de ecuaciones polinómicas, aun así cuando se demanda a los estudiantes que identifiquen qué valores puede tomar el grado de una ecuación, solamente cinco de ellos identifica este conjunto numérico como el único válido y señalan que se puede corresponder con números enteros, racionales o reales. Este hecho puede estar relacionado con que los estudiantes no son capaces de precisar la restricción que tiene el exponente de una incógnita en el contexto de las ecuaciones, identificando así que el grado de una ecuación puede ser cualquier número que se pueda poner como exponente en una potencia.

En los casos del coeficiente y del término independiente, los estudiantes muestran mayores dificultades en proponer ejemplos que difieran en estos elementos que en verbalizar los posibles valores que pueden tomar. La mayoría de los estudiantes proponen ejemplos correctos de ecuaciones en los que los coeficientes y los términos independientes se corresponden mayoritariamente con números naturales o enteros (13 de 15 estudiantes para el coeficiente y siete de ocho para el término independiente), y en escasas ocasiones con otro tipo de números (dos estudiantes proponen ejemplos con coeficientes racionales y un estudiante con el término independiente irracional). Sin embargo, a la hora de verbalizar qué conjuntos numéricos se pueden asociar a estas dos dimensiones, la mayoría de los estudiantes (11 de 15 para el coeficiente y 7 de 14 para el término independiente) señalan que pueden tomar cualquier valor que se corresponda con un número real. Consideramos que este hecho está relacionado con que la mayor parte de los ejemplos y ejercicios relativos a ecuaciones presentes en los libros de texto consultados utilizan coeficientes y términos independientes que se corresponden con números enteros. De hecho al preguntar por los posibles valores que puede tomar el coeficiente de una ecuación, una alumna señala "puede ser cualquier número pero he puesto ejemplos con naturales porque al final son a los que más acostumbrados estamos".

En cuanto al miembro derecho de la ecuación, de los 14 estudiantes que identifican este elemento como susceptible de variar en una ecuación, la mayoría verbalizan y proponen ejemplos de ecuaciones en los que en el miembro derecho hay presencia tanto de letras como de expresiones algebraica (10 y nueve estudiantes respectivamente). A pesar de ello en la mayoría de los ejemplos propuestos por los estudiantes para este elemento, 41 de los 53, en el miembro derecho de la ecuación hay únicamente un número. Molina (2007) señala que el uso más reconocido del signo igual en aritmética es unidireccional siendo utilizado para conectar el cálculo a realizar con su resultado numérico y en álgebra el signo igual tiene un significado bidireccional conectando dos expresiones que son iguales, en el caso de las ecuaciones, para ciertos valores de la variable o variables. El resultado obtenido nos lleva a pensar que los estudiantes extienden el significado aritmético más reconocido del signo igual al álgebra. En este sentido, cuando en la entrevista preguntamos por diferencias que hay entre las dos ecuaciones de partida indican "el resultado", en lugar del miembro derecho de la ecuación.

La operación que vincula la incógnita con otros elementos de la ecuación es el último elemento que los estudiantes consideran susceptible de variar en las ecuaciones. No hay grandes diferencias entre los ejemplos generados por los estudiantes y lo que verbalizan al respecto ya que en ambas ocasiones se incluyen las mismas operaciones. La operación potencia es la que los estudiantes verbalizan en menor medida. Esto podría ser debido a que los estudiantes interpreten el hecho de que una incógnita esté elevada a un número como relacionado únicamente con el grado de una ecuación y no como una operación que está realizando la incógnita, o bien porque al ser la potencia una multiplicación repetida, cuando verbalizan esta operación incluyan de forma implícita la potencia.

Nos centramos ahora en el conocimiento conceptual explícito que ponen de manifiesto los estudiantes cuando se les solicita que den una definición de ecuación. Si tenemos en cuenta las respuestas a la primera tarea de la entrevista, observamos que únicamente un estudiante da una definición correcta, aun así esta definición hace referencia a un tipo particular de ecuación, <expresión algebraica>=0, la cual no cumple uno de los principios lógicos que debe cumplir la definición de un concepto matemático establecidos por Zazkis y Leikin (2008) quienes señalan que una definición tiene que establecer las condiciones necesarias y suficientes del concepto. Tal y como hemos comentado al inicio de la discusión, las tareas posteriores animan a los estudiantes a proponer un gran número de ejemplos y todos ellos son correctos. Tras la generación de ejemplos los estudiantes son capaces de dar respuesta a la penúltima tarea de la entrevista, verbalizando los elementos comunes que tienen todos ellos. La observación de estos elementos comunes permite a los estudiantes dar definiciones más completas del concepto ecuación en la última tarea de la entrevista, lo que les ayuda a mostrar de forma explícita el conocimiento que poseen del concepto ecuación. A pesar de que 10 de los 20 estudiantes dan definiciones correctas de ecuaciones, solamente seis de ellos son capaces de construir una definición general de ecuación equivalente a <expresión algebraica>=<expresión algebraica>. Este hecho puede ser resultado de que la mayor parte de los ejemplos que construyen los estudiantes en este estudio se corresponden con la estructura <expresión algebraica>=número, y es a partir de la observación de dichos ejemplos cuando construyen una nueva definición de ecuación. Podemos identificar estos ejemplos con lo que Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) denominan ejemplos prototipo. Dentro de un conjunto de ejemplos estos se aceptan intuitivamente como representante del concepto, sin embargo estas cogniciones intuitivamente aceptadas pueden causar obstáculos ya que pueden conducir a menudo a una imagen conceptual limitada. Es por ello que tras la observación de ejemplos con la estructura <expresión algebraica> = número, los estudiantes muestran limitaciones a la hora de dar muestra del conocimiento conceptual explícito del concepto ecuación.

Analizando simultáneamente los dos tipos de conocimiento objetivo de esta investigación del concepto ecuación, implícito y explícito, podemos deducir que el hecho de que este grupo de estudiantes identifique las siete dimensiones de variación posibles mencionadas, y sea capaz de proponer varios ejemplos de ecuaciones para cada uno de ellos, muestra la riqueza del "espacio de ejemplos accesible" que los estudiantes tienen relativos al concepto ecuación. Teniendo en cuenta las ideas de Goldenberg y Mason (2008) y Adbul-Rahman (2005) podemos deducir que poseen un conocimiento conceptual implícito adecuado de dicho concepto, si bien el hecho de ejemplificar o verbalizar los rangos de variación permisibles de algunas de las dimensiones de variación de los diferentes ejemplos propuestos por ellos mismos, hacen aflorar algunas debilidades de dicho conocimiento. En este sentido cabe destacar que ninguno de los libros de texto consultados precisa de forma explícita qué rangos de variación permisibles son válidos para las dimensiones de variación posibles, por lo que es un conocimiento que los estudiantes han debido abstraer a partir de su trabajo con ecuaciones desde el primer curso de ESO y que fortalece la idea de que los estudiantes dan muestra de haber adquirido un buen conocimiento conceptual implícito del concepto ecuación. Las limitaciones detectadas en el conocimiento conceptual explícito de los estudiantes pueden estar en parte motivadas por limitaciones en su competencia lingüística como se ha argumentado en otros estudios previos (Fernández-Millán y Molina, 2017) o falta de experiencia definiendo conceptos.

CONCLUSIÓN

Este trabajo es una continuación de dos publicaciones anteriores (Fernández-Millán y Molina, 2016, 2017). En estos tres trabajos indagamos en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico característico de las ecuaciones así como del concepto ecuación como un todo. Los resultados de estos estudios muestran que la formación obligatoria en álgebra tiene potencial para el desarrollo de un adecuado conocimiento conceptual en lo que a simbolismo algebraico y ecuaciones se refiere, aunque se requiere algo más de trabajo centrado en aspectos semánticos del álgebra y en el desarrollo de la competencia lingüística de los estudiantes.

Se vuelve a ratificar con este trabajo la utilidad constatada en investigaciones previas de la generación de ejemplos, por parte de los estudiantes, para la evaluación del conocimiento conceptual implícito de conceptos matemáticos, así como para ayudar al proceso de generalización empírica de los estudiantes. Respecto de la tarea de definir conceptos matemáticos por parte de los estudiantes con el objetivo de evaluar su conocimiento conceptual explícito previamente a la generación de ejemplos, es importante tener en cuenta las consideraciones de Crooks y Alibali (2014) quienes sugieren que al requerir una verbalización explícita pueden subestimar el conocimiento conceptual, ya que los participantes pueden tener algún conocimiento conceptual que no está suficientemente avanzado como para poder expresarlo en palabras.

Como posibles vías de continuidad a este trabajo, planteamos corroborar los resultados obtenidos relativos a la limitación de los estudiantes a la hora de generar ejemplos de ecuaciones con mayor diversidad de conjuntos numéricos. Para ello, relacionado con la utilidad de los ejemplos en educación matemática, sugerimos que se podría proporcionar a un grupo de estudiantes una serie de ejemplos y de no-ejemplos de ecuaciones en los que esté presente esa variabilidad de conjuntos numéricos para que ellos identifiquen y justifiquen si se corresponden o no con ecuaciones.

Desde el punto de vista de la docencia, las deficiencias detectadas en cuanto a la presencia de números diferentes de los naturales, en coeficientes y términos independientes de ecuaciones, tanto en los ejemplos generados por los estudiantes como en los libros de texto consultados, informan para el diseño de propuestas didácticas que busquen la riqueza numérica en la realización de ejercicios y propuesta de ejemplos en el aula. Del mismo modo se requiere un mayor trabajo de la competencia lingüística de los estudiantes que les permita definir conceptos matemáticos con precisión.

REFERENCIAS

Abdul-Rahman, S. (2005). Learning with examples and students' understanding of integration. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference of Mathematics Education into the 21st Century Project on "Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education"* (pp. 24-28). Johor Bahru, Malaysia: UTM.

Albertí, M., Aragoneses, A., Bancells, A., Bosh, A., García, F., Hernández, A., Luque, B., Rovira, R. A., Sabater, L. y Ysem, J. A. (2012). *Matemáticas 4º ESO (Opción B)*. Barcelona, España: Editorial Casals.

Almodóvar, J. A., García, P., Gil, J. y Nortes, A. (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Álvarez, I. y Gómez-Chacón, I. M. (2015). Understanding the algebraic variable: Comparative study of mexican and spanish students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1507-1529.

Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., et al. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., et al. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Santillana.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities. IMPACT (Interweaving mathematics pedagogy and content for teaching)*. Nueva York, NY: Routledge.

Arias, J.M. y Maza, I. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Bruño.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66.

Bartomeu, C., Capella, T., Besora, J., Jané, A. y Guiteras, J. M. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial McGraw Hill.

Bills, L. (2001). Shifts in the Meanings of Literal Symbols. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 161-168). Utrecht, Países Bajos: PME.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka y N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Bills, L. y Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. En L. Brown (Ed.), *Making meaning in mathematics: A collection of extended and refereed* *papers from the British Society for Research into Learning Mathematics, visions of mathematics 2, Advances in Mathematics Education 1* (pp. 103-116). York, Reino Unido: QED.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.

Borowski, E. J. y Borwein, J. M. (1989). *Dictionary of mathematics*. Londres, Reino Unido: Collins.

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing*. Hillsdale, MI: Lawrence Erlbaum Associates.

Capraro, M. y Joffrion, H. (2006). Algebraic equations: Can middle-school students meaningfully translate from words to mathematical symbols? *Reading Psychology, 27*(2-3), 147-164.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.

Celma, J., Dols, S., Domenech, E., Fontich, A., Marrasé, J. M., López, S., et al. (2010). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 33-42). Reston, VA: NCTM.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Colera, R. (2016). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Anaya.

Colera, A., Martí, M. D., Polo, M., Salvador, A. y Solanes, F. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Barcelona, España: Editorial Casals.

Corbarán, F., Álvarez, J. L., Fernández-Aliseda, A., González, A. E., Hans, J. A., Muñoz, J., et al. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Barcelona, España: Editorial Vicens Vivens.

Corbarán, F., Álvarez, J. L., Fernández-Aliseda, A., González, A. E., Hans, J. A., Muñoz, J. y Queralt, T. (2003). *Matemáticas 4º ESO (Opción B*). Barcelona. España: Editorial Vicens Vivens.

Crooks, N. y Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344-377.

Diccionario Libre (2003-2015). *Mathematics*. Recuperado de http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Equation+

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53-71.

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2017). Secondary students' implicit conceptual knowledge of algebraic symbolism. An exploratory study through problem posing. *IEJME-Mathematics Education, 12*(9), 799-826.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York, NY: Springer.

Frías, V., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, Z. (2007). *Matemáticas 1º ESO*. Barcelona, España: Editorial Casals.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics* (Vol. 2, pp. 368-375). Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

García, F.J. (2011). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editex.

Goldenberg, P. y Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Education Study of Mathematics, 69*, 183-194.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, MI: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.

Leinhardt, G. (1993). On teaching. En Glase, R. (Ed.), *Advances in instructional psychology, 4* (pp. 1-54). Hillsdale, MI: Erlbaum.

Maragallo, J. (2011). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Editorial Editex.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo por algunos alumnos de tercero educación primaria* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137-1156. doi: 10.1007/s10763-016-9739-5

Resnick, L. B., Cauzinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J. A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive process in mathematics* (pp. 169-203). Oxford, Reino Unido: Clarendon Press.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. En R. C. Kadosh y A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1118-1134). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B. y Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*, 561-574. doi: 10.1037/0022–0663.99.3.561.

Ross, A. y Willson, V. (2012). The effects of representations, constructivist approaches, and engagement on middle school students' algebraic procedure and conceptual understanding. *School, Science and Mathematics, 112*(2), 117-128.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Education Study of Mathematics, 69*, 149-163.

Sánchez, J. L. y Vera, J. (1999). *Matemáticas 2º ESO*. Navarra, España: Editorial Oxford.

Szydlik, J. (2015). Mathematical conversations to transform algebra class. *Mathematics Teacher, 108*(9), 656-661.

Tossavainen, T., Attorps, L. y Väisänen, P. (2011). On mathematics students' understanding of the equation concept. *Far East Journal of Mathematical Education, 6*(2), 127-147.

Tsamir, P. Tiroh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples; the case of triangles. *Education Study of Mathematics, 69*, 81-95.

Uriondo, J. L. (2007). *Matemáticas 1º ESO*. Navarra, España: Editorial Oxford.

Usiskin Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). *Matemáticas 4º ESO (Opción B).* Madrid, España: Editorial SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Mansilla, S. y Bujanda, M. P. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Peralta, J. y Bargueño, J. (2008). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editorial SM.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of PME 26* (Vol. 4, pp. 377-385). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Waywood, A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12*, 34-43.

Wikipedia (s.f.). *Equation.* Recuperado de http://en.wikipedia.org/wiki/Equation

Wolfram MathWorld (1999–2015). *Equation*. Recuperado de http://mathworld.wolfram.com/search/? query=equation&x=0&y=0

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education.

Ponencia presentada en el Topic study group 34: Research and development in task design and analysis. 11th ICME, Monterrey, México.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15-21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Education Study of Mathematics, 69*, 131-148.

Zhu, S. y Simon, H. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction, 4*, 137-166.

Elena Fernández-Millán
Universidad de Granada
Granada (España)
elenis@correo.ugr.es

Marta Molina
Universidad de Salamanca
Salamanca (España)
martamolina@usal.es

Recibido: 8 de noviembre de 2017. Aceptado: 1 de febrero de 2018
doi: 10.30827/pna.v12i3.6519

ISSN: 1887-3987